

Cours de Mathématiques

10^{ème} Année

Programme du Mali

Un cours interactif pour apprendre en autonomie

Inspiré des œuvres de **Adama Traoré**, Professeur Lycée Technique Bamako

Comment utiliser ce cours ?

Ce document est conçu pour que tu puisses travailler **en autonomie**. Chaque chapitre suit la même progression :

1. **Les Activités guidées** : tu découvres par toi-même les notions importantes. Lis, réfléchis, calcule, puis note ta réponse dans l'espace prévu.
2. **Les Mini-Synthèses** : après chaque activité, le résultat attendu est donné. Compare avec ta réponse !
3. **Les Exemples résolus** : des exemples entièrement corrigés étape par étape pour bien comprendre la méthode.
4. **Les Exercices d'application** : pour t'entraîner immédiatement après avoir appris une notion.
5. **La Grande Synthèse** : un résumé complet du chapitre à mémoriser.
6. **Les Exercices de fin de chapitre** : une série d'exercices variés (fondamental, intermédiaire, approfondissement).

Table des matières

1	Calculs dans $\mathbb{R}$	5
1.1	Valeur absolue	5
1.2	Distance sur $\mathbb{R}$	7
1.3	Intervalles de $\mathbb{R}$ – Centre et Rayon	7
1.4	Résolution d'équations et inéquations avec valeur absolue	9
1.5	Racines carrées et Calculs de puissances	11
1.6	Identités remarquables et Factorisations	12
2	Équations, Inéquations et Systèmes	17
2.1	Équations du premier degré	17
2.2	Équations du second degré	17
2.3	Équations biquadrées	19
2.4	Équations irrationnelles	20
2.5	Signe d'un trinôme du second degré – Inéquations	20
2.6	Systèmes de deux équations à deux inconnues	22
2.7	Systèmes de trois équations à trois inconnues	23
2.8	Systèmes paramétriques	24
3	Vecteurs du Plan	27
3.1	Rappels – Vecteurs	27
3.2	Combinaisons linéaires de vecteurs	27
3.3	Base – Coordonnées d'un vecteur	28
3.4	Déterminant de deux vecteurs – Colinéarité analytique	28
3.5	Norme d'un vecteur	29
4	Trigonométrie	31
4.1	Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle	31
4.2	Cercle trigonométrique et mesure d'angles	31
4.3	Identités trigonométriques	33
4.4	Interpolation linéaire – Tables trigonométriques	34
5	Fonctions Numériques	37
5.1	Généralités sur les fonctions	37
5.2	Composition de fonctions	38
5.3	Image directe – Image réciproque	39
5.4	Coïncidence de deux fonctions	40
6	Fonctions Polyômes et Rationnelles	43
6.1	Fonctions polyômes	43
6.2	Forme canonique – Sommet de la parabole	43
6.3	Division euclidienne des polyômes	44
6.4	Méthode de Hörner	44
6.5	Identification de polyômes – Coefficients indéterminés	45
6.6	Fonctions rationnelles	45

7	La Droite dans le Plan	49
7.1	Équation cartésienne d'une droite	49
8	Équation du Cercle	51
8.1	Définition et équation standard	51
9	Produit Scalaire	53
9.1	Norme d'un vecteur	53
9.2	Définition et expressions du produit scalaire	53
10	Barycentre	57
10.1	Points pondérés et barycentre de 2 points	57
10.2	Barycentre de 3 points pondérés	57
10.3	Lignes de niveau	58

Chapitre 1

Calculs dans $\mathbb{R}$

⊙ **Durée estimée du chapitre** : 4 heures

Chapitre fondateur – maîtrise indispensable

1.1 Valeur absolue

Activité 1.1 : Découverte de la valeur absolue ⊙ 20 min

Sur la droite numérique, place les points d'abscisses -5 , -2 , 0 , $+3$, $+7$.

1. Quelle est la *distance* de -5 à 0 ? Et la distance de $+5$ à 0 ?
2. Quelle est la distance de -2 à 0 ? Et la distance de $+2$ à 0 ?
3. Que remarques-tu? Formule une règle générale.
4. Calcule : $|-8|$, $|+3|$, $|0|$, $|\frac{-3}{2}|$.

Ta réponse :

✓ Définition : Valeur absolue

Pour tout réel x :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La valeur absolue de x est toujours **positive ou nulle**. Elle représente la **distance de x à 0**.

Propriétés fondamentales de la valeur absolue

Soient $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $|a| \geq 0$ et $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (multiplicativité)
3. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ (si $b \neq 0$)
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)
5. $|a - b| = |b - a|$ (symétrie)
6. $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$ (si $b \geq 0$)

Exemples – calculs de valeurs absolues

1. $|-5 \times (+2)| = |-10| = 10$ et $|-5| \times |+2| = 5 \times 2 = 10 \checkmark$
2. $|-3 + 7| = |4| = 4$ et $|-3| + |7| = 3 + 7 = 10$ donc $4 \leq 10 \checkmark$
3. $\left| \frac{-6}{2} \right| = |-3| = 3$ et $\frac{|-6|}{|2|} = \frac{6}{2} = 3 \checkmark$
4. $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -5$
5. $|2x - 3| = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Exercices d'application – Valeur absolue

1. Calculer : $|-12|$; $|+7|$; $|0|$; $|3 - 8|$; $|8 - 3|$; $|-2 + 2|$; $|\pi - 4|$
2. Vérifier que $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ pour $a = -3$ et $b = -4$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x| = 7$; $|x| = 0$; $|x - 3| = 0$; $|2x + 1| = 0$
4. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

$$A(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10 \quad B = 3xy + 3 - x - 9y \quad C(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

Ta réponse :

1.2 Distance sur $\mathbb{R}$

Activité 1.2 : Distance entre deux points $\odot$ 15 min

Sur la droite numérique, place les points $A(-3)$ et $B(5)$.

1. Combien de *cases* sépare A de B ?
2. Calcule $|B - A| = |5 - (-3)|$ et $|A - B| = |(-3) - 5|$.
3. Les deux résultats sont-ils égaux ? Quelle est la définition naturelle de la distance ?

Ta réponse :

✓ Distance entre deux réels

La **distance** de x à y sur la droite réelle est :

$$d(x; y) = |x - y|$$

Propriétés : $d(x; y) \geq 0$; $d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $d(x; y) = d(y; x)$; $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$.

Exemples – Calcul de distances

- $d(4,7; 2,3) = |4,7 - 2,3| = |2,4| = 2,4$
- $d(-9; 3) = |-9 - 3| = |-12| = 12$
- $d(-2; 6) = |-2 - 6| = |-8| = 8$
- $d(x; 5) = |x - 5|$ (distance de x au point fixe 5)

1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$ – Centre et Rayon

Activité 1.3 : Représentation des intervalles $\odot$ 20 min

Représente sur une droite numérique les ensembles suivants, puis donne leur notation :

1. Les réels x tels que $-2 \leq x \leq 5$
2. Les réels x tels que $x > 3$
3. Les réels x tels que $x \leq -1$
4. Les réels x tels que $-3 < x \leq 4$

Ta réponse :

✓ Tableau des intervalles

Notation	Définition	Appellation
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	Intervalle fermé borné
$[a; b[$	$a \leq x < b$	Semi-ouvert à droite
$]a; b]$	$a < x \leq b$	Semi-ouvert à gauche
$]a; b[$	$a < x < b$	Intervalle ouvert borné
$] - \infty; b]$	$x \leq b$	Non borné, fermé à droite
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	Non borné, fermé à gauche
$\mathbb{R}$	$-\infty < x < +\infty$	Droite réelle entière

Centre et Rayon d'un intervalle

Soit $I = [a; b]$ (ou $I =]a; b[$) un intervalle borné.

- **Centre** : $C = \frac{a+b}{2}$ (milieu de l'intervalle)
- **Rayon** : $r = \frac{b-a}{2}$ (demi-longueur)
- **Amplitude** : $A = b - a = 2r$

On note aussi : $I(C; r)$ pour l'intervalle fermé $[C - r; C + r]$.

Exemples – Centre et rayon

1. $I = [-1; 3]$: Centre $C = \frac{-1+3}{2} = 1$; Rayon $r = \frac{3-(-1)}{2} = 2$.

Vérification : $[C - r; C + r] = [1 - 2; 1 + 2] = [-1; 3]$ ✓

2. $I = \left[7; \frac{15}{2}\right]$: Centre $C = \frac{7 + \frac{15}{2}}{2} = \frac{\frac{29}{2}}{2} = \frac{29}{4}$; Rayon $r = \frac{\frac{15}{2} - 7}{2} = \frac{1}{4}$.

3. Donner l'intervalle de centre $C = -2$ et rayon $r = 5$:
 $[C - r; C + r] = [-2 - 5; -2 + 5] = [-7; 3]$.

1.4 Résolution d'équations et inéquations avec valeur absolue

Activité 1.4 : Résolution graphique de $|x - a| = r \odot 25 \text{ min}$

Sur une droite numérique, représente les points à distance 3 du point $a = -1$.

1. Il y a deux tels points. Quelles sont leurs abscisses ?
2. Calcule $a - r$ et $a + r$.
3. Formule la règle pour résoudre $|x - a| = r$.
4. Applique cette règle pour résoudre $|x + 2| = 4$.

Ta réponse :

✓ Résolution de $|x - a| = r$ et $|x - a| \leq r$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

$$|x - a| = r \Leftrightarrow d(x; a) = r \Leftrightarrow x = a - r \text{ ou } x = a + r$$

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$$

$$|x - a| > r \Leftrightarrow x < a - r \text{ ou } x > a + r \Leftrightarrow x \in]-\infty; a - r[\cup]a + r; +\infty[$$

Résoudre $|ax + b| = r$

Étape 1 : Factoriser : $|ax + b| = |a| \cdot \left| x + \frac{b}{a} \right|$

Étape 2 : Identifier $a_0 = -\frac{b}{a}$ (centre) et $r_0 = \frac{r}{|a|}$ (rayon)

Étape 3 : L'ensemble solution est $S = \{a_0 - r_0; a_0 + r_0\}$

Exemples entièrement résolus

1. Résoudre $|x + 1| = 3$

$$|x - (-1)| = 3 \text{ donc } a = -1, r = 3$$

$$a - r = -1 - 3 = -4 \text{ et } a + r = -1 + 3 = 2$$

$$S = \{-4; 2\}$$

2. Résoudre $|x - 2| < 5$

$$a = 2, r = 5; a - r = -3; a + r = 7$$

$$S =]-3; 7[$$

3. Résoudre $|x + 3| \geq 4$

$$a = -3, r = 4; a - r = -7; a + r = 1$$

$$S =]-\infty; -7] \cup [1; +\infty[$$

4. Résoudre $|2x + 6| = 5$

$$|2(x + 3)| = 5 \Leftrightarrow 2|x + 3| = 5 \Leftrightarrow |x + 3| = \frac{5}{2}$$

$$a = -3, r = \frac{5}{2}; x_1 = -3 - \frac{5}{2} = -\frac{11}{2}; x_2 = -3 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$$

5. Résoudre $|x + 2| = |x - 3|$

$d(x; -2) = d(x; 3)$ signifie que x est équidistant de -2 et 3 , donc x est le centre de $[-2; 3]$.

$$C = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}, \text{ donc } S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

6. Résoudre $|x - 2| \leq |x + 5|$

$d(x; 2) \leq d(x; -5)$: x est plus proche (ou aussi proche) de 2 que de -5 .

$$\text{Centre de } [-5; 2] : C = \frac{-5 + 2}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$S = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

Exercices d'application – Valeur absolue et distance

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $|x - 4| = 7$

d) $|x - 1| < 3$

g) $|x + 5| \geq 1$

b) $|x + 2| = 5$

e) $|2x + 4| \leq 6$

h) $|-x + 4| \leq 9$

c) $|3x - 1| = 8$

f) $|x - 3| > 2$

i) $|2x - 3| \geq 5$

2. Résoudre et donner l'ensemble solution en notation d'intervalle :

a) $|x + 1| = |x - 7|$

c) $|x + 2| > |x - 4|$

b) $|x - 3| \leq |x + 1|$

d) $|2x - 1| = |x + 3|$

3. Problème : Déterminer l'ensemble des points $M(x)$ de la droite réelle tels que $d(M; -2) + d(M; 4) = 10$.

Ta réponse :

1.5 Racines carrées et Calculs de puissances

Racine carrée

Pour tout réel $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique réel **positif** tel que $(\sqrt{a})^2 = a$. On a :

- $\sqrt{a^2} = |a|$ (et **non** a si a peut être négatif)
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ (si $a \geq 0$ et $b \geq 0$)
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (si $a \geq 0$ et $b > 0$)
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général !

Erreurs fréquentes à éviter !

- $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$. En effet : $\sqrt{13} \neq 5$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$ et **non** x . Exemple : $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$.
- $\sqrt{a}$ n'est défini que pour $a \geq 0$.

Simplification de radicaux

1. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$
2. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$
3. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

$$4. \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$5. 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad (\text{même radical} = \text{même dénominateur})$$

$$6. 2\sqrt{3} - \sqrt{12} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

$$7. (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1 \quad (\text{identité remarquable})$$

$$8. \text{Rationaliser } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{1 + \sqrt{5}} = \frac{3(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{3(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{3(1 - \sqrt{5})}{-4}$$

Puissances – rappels et règles

Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Simplification de puissances

$$1. 2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$$

$$2. \frac{3^5}{3^2} = 3^3 = 27$$

$$3. (5^2)^3 = 5^6 = 15625$$

$$4. 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$$

$$5. \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot (ab)^{-4} \cdot (bc)^2}{(abc)^{-2} \cdot a^3 \cdot b} : \text{développer chaque terme, puis simplifier en regroupant les mêmes bases.}$$

1.6 Identités remarquables et Factorisations

Identités remarquables fondamentales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemples de factorisation

1. Factoriser $A(x) = x^3 + 2x^2 + 10 + 5x$

$$A(x) = x^2(x + 2) + 5(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 5)$$

2. Factoriser $B = 3xy + 3 - x - 9y$

$$B = 3(xy + 1) - x(1 + 9y) \dots \text{rearrangeons : } B = 3xy - 9y + 3 - x = 3y(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(3y - 1)$$

3. Factoriser $C(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$$C(x) = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1)$$

4. Factoriser $D(x) = x^3 + 27$

$$D(x) = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) \quad (\text{somme de cubes})$$

Synthèse – Chapitre 1 : Calculs dans $\mathbb{R}$

1. **Valeur absolue** : $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$. Propriétés : $|ab| = |a||b|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

2. **Distance** : $d(x; y) = |x - y|$

3. **Intervalles** : Maîtriser les notations $[a; b]$, $]a; b[$, $[a; +\infty[$, etc. Centre $C = \frac{a + b}{2}$, Rayon $r = \frac{b - a}{2}$.

4. **Équations/inéquations avec valeur absolue** :

$$|x - a| = r \Leftrightarrow x = a \pm r \quad |x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$$

5. **Racines carrées** : $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, rationalisation.

6. **Puissances** : $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$, $a^{-n} = 1/a^n$.

7. **Identités remarquables** : $(a \pm b)^2$, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$.

Exercices de fin de chapitre 1

Série A – Fondamental

A1. Calculer : $|3 - 7|$; $|-5 + 2|$; $|4 \times (-3)|$; $\left| \frac{-8}{4} \right|$

A2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $|x - 1| = 4$ b) $|3x + 6| = 9$ c) $|2x - 5| \leq 3$

A3. Simplifier : $\sqrt{48}$; $\sqrt{200}$; $3\sqrt{5} - \sqrt{45}$; $\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$

A4. Calculer : $\frac{2^5 \times 2^{-3}}{2^4}$; $\left(\frac{3^2}{3^{-1}} \right)^2$; $4^{3/2}$; $8^{2/3}$

Série B – Intermédiaire

B1. Factoriser entièrement :

a) $A(x) = x^3 + 27$

c) $C(x) = x^4 - 1$

b) $B(x) = x^3 - 8$

d) $D(x) = 8x^3 - 12x^2 + 2x - 3$

B2. Simplifier en rationalisant : $\frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} + \frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$

B3. Un centre d'examen de 910 élèves compte 60% de garçons et 40% de filles. Le nombre total d'élèves est égal au double du nombre de garçons admis et à la moitié du nombre de filles admises. Le nombre de garçons admis est égal au triple des filles admises. Trouver le nombre de garçons et le pourcentage d'élèves ayant échoué.

Série C – Approfondissement

C1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.

C2. Calculer $m = -2x^3 - x^2 - 4x + 1$ pour $x = 1 + \sqrt{3}$.

C3. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x - 3| + |x + 1| = 8$. (Indication : étudier les cas selon le signe de chaque expression.)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Chapitre 2

Équations, Inéquations et Systèmes

⊙ **Durée estimée du chapitre : 5 heures**

Chapitre central – beaucoup de techniques

2.1 Équations du premier degré

Équation du premier degré

Une **équation du premier degré** à une inconnue x est une équation de la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$.

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Exemples

1. $3x + 12 = 0 \Rightarrow 3x = -12 \Rightarrow x = -4$. $S = \{-4\}$
2. $5x - 7 = 2x + 8 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$. $S = \{5\}$
3. $\frac{x-1}{2} + \frac{x+3}{4} = 2$: Multiplier par 4 : $2(x-1) + (x+3) = 8 \Rightarrow 3x + 1 = 8 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$.

2.2 Équations du second degré

Activité 2.1 : Découverte du discriminant ⊙ 25 min

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On cherche à écrire $f(x)$ sous la forme $a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

1. Développer $a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et comparer avec $ax^2 + bx + c$.
2. En déduire la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet des solutions si et seulement si $\Delta \geq 0$.
4. Si $\Delta > 0$, exprimer les solutions x_1 et x_2 en fonction de a , b , Δ .

Ta réponse :

✓ Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ par le discriminant

Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$: pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Relations de Viète : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Discriminant réduit Δ' (si b est pair)

Si $b = 2b'$, poser $\Delta' = (b')^2 - ac$.

- $\Delta' < 0$: pas de solution.
- $\Delta' = 0$: $x_0 = -\frac{b'}{a}$.
- $\Delta' > 0$: $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.

Exemples entièrement résolus

1. Résoudre $3x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(1) = 1 - 12 = -11 < 0$. Pas de solution réelle.

2. Résoudre $x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

3. Résoudre $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$\Delta = 144 - 144 = 0. \text{ Solution double : } x_0 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}. S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

4. Discriminant réduit. Résoudre $5x^2 - 38x + 21 = 0$

$$b = -38 = 2 \times (-19) \text{ donc } b' = -19.$$

$$\Delta' = (-19)^2 - 5 \times 21 = 361 - 105 = 256 = 16^2$$

$$x_1 = \frac{19 - 16}{5} = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{19 + 16}{5} = 7$$

5. Recettes. Résoudre $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$a + b + c = 3 - 12 + 9 = 0 \text{ donc } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{3} = 3.$$

6. Recette 2. Résoudre $-x^2 + 8x + 9 = 0$

$$a + c = -1 + 9 = 8 = b \text{ donc } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{9}{-1} = 9.$$

Factorisation grâce aux racines

Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ alors :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $\Delta < 0$: le polynôme est **irréductible** sur $\mathbb{R}$.

2.3 Équations biquadrées

Résolution d'une équation bicarrée

Une équation bicarrée est de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Changement de variable : poser $X = x^2$ ($X \geq 0$).

L'équation devient $aX^2 + bX + c = 0$.

Résoudre en X , puis pour chaque solution $X_0 > 0$, résoudre $x^2 = X_0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{X_0}$.

Si $X_0 = 0$, alors $x = 0$. Si $X_0 < 0$, pas de solution réelle.

Exemples de biquadrées

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Poser $X = x^2$: $X^2 - 5X + 4 = 0$.

$$\Delta = 25 - 16 = 9; X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 4.$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1; x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

$$S = \{-2; -1; 1; 2\}$$

2. $x^6 - 124x^3 - 125 = 0$. Poser $U = x^3 : U^2 - 124U - 125 = 0$.
 $\Delta = 124^2 + 500 = 15376 + 500 = 15876 = 126^2$
 $U_1 = \frac{124 - 126}{2} = -1$ et $U_2 = \frac{124 + 126}{2} = 125$.
 $x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 ; x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$.
 $S = \{-1; 5\}$

2.4 Équations irrationnelles

Résoudre $\sqrt{f(x)} = g(x)$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

Attention : toujours vérifier la condition $g(x) \geq 0$! Elle peut éliminer des solutions parasites.

Exemples irrationnelles

1. Résoudre $\sqrt{2x+1} = x-1$

$$\mathcal{D}_v : 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Condition : } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$(2x+1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 4. \text{ Seul } x = 4 \geq 1 \text{ convient. } S = \{4\}$$

2. Résoudre $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = x + 6$

$$\text{Condition : } x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$$

$$x^2 - 4x + 5 = (x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$-4x + 5 = 12x + 36 \Rightarrow -16x = 31 \Rightarrow x = -\frac{31}{16}$$

$$\text{Vérifier : } -\frac{31}{16} \geq -6 \checkmark ; S = \left\{ -\frac{31}{16} \right\}$$

2.5 Signe d'un trinôme du second degré – Inéquations

Activité 2.2 : Signe d'un trinôme ☉ 20 min

On étudie $f(x) = 2x^2 - x - 3$.

1. Calculer Δ et trouver les racines x_1, x_2 .
2. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ selon les différentes valeurs de x .
3. Résoudre $f(x) \geq 0$ et $f(x) < 0$.

Ta réponse :

✓ **Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$**

Cas	Signe
$\Delta < 0$	Même signe que a partout
$\Delta = 0$ (x_0 racine double)	Même signe que a , nul en x_0
$\Delta > 0$ ($x_1 < x_2$)	Signe de a hors de $[x_1; x_2]$, signe de $-a$ dans $]x_1; x_2[$

Résolution d'inéquations

1. Résoudre $-2x^2 + 4x + 30 \leq 0$

$$\Delta = 16 + 240 = 256; x_1 = \frac{-4-16}{-4} = 5; x_2 = \frac{-4+16}{-4} = -3.$$

Avec $a = -2 < 0$: le trinôme est ≤ 0 hors de l'intervalle, donc pour $x \leq -3$ ou $x \geq 5$.

$$S =]-\infty; -3] \cup [5; +\infty[$$

2. Résoudre $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 5} \geq 0$

Factoriser le numérateur : $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

x	$-\infty$	-3		1		5	$+\infty$
$(x + 3)$	—	0	+	+	+	+	+
$(x - 1)$	—	—	—	0	+	+	+
$(x - 5)$	—	—	—	—	—	0	+
Fraction	—	0	+	0	—		+

$$S = [-3; 1] \cup [5; +\infty[$$

2.6 Systèmes de deux équations à deux inconnues

Activité 2.3 : Méthodes de résolution ⦿ 20 min

Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$ par deux méthodes différentes (combinaison et substitution).

Ta réponse :

Méthode du déterminant (règle de Cramer)

Pour $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$, calculer :

$$\text{Dét} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad D_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} = pd - bq \quad D_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} = aq - pc$$

- Si $\text{Dét} \neq 0$: unique solution $x = \frac{D_x}{\text{Dét}}$, $y = \frac{D_y}{\text{Dét}}$.
- Si $\text{Dét} = 0$ et $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$: système incompatible ($S = \emptyset$).
- Si $\text{Dét} = 0$ et $D_x = D_y = 0$: infinité de solutions.

Exemples de systèmes

1. Système avec solution unique. $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

$$\text{Dét} = 8 - (-15) = 23; D_x = 44 - (-25) = 69; D_y = 10 - 33 = -23$$

$$x = \frac{69}{23} = 3; y = \frac{-23}{23} = -1. S = \{(3; -1)\}$$

2. Système incompatible.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ -4x + 6y = -1 \end{cases}$$

 $\text{Dét} = 12 - 12 = 0$; $D_x = -8 + 3 = -5 \neq 0 \Rightarrow S = \emptyset$.

3. Infinité de solutions.
$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 4x - 8y = 8 \end{cases}$$

 $\text{Dét} = -8 + 8 = 0$; $D_x = -16 + 16 = 0$; $D_y = 8 - 8 = 0$
 $S = \{(2y + 2; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

Problèmes conduisant à des systèmes

L'âne et le cheval. Un âne et un cheval portent chacun des sacs. Le cheval dit à l'âne : "Si je prenais un de tes sacs, je serais chargé deux fois autant que toi ; si tu prenais un des miens, nous serions également chargés." Combien chaque animal porte-t-il de sacs ?

Solution : Soient a (sacs de l'âne) et c (sacs du cheval).

$$\begin{cases} c + 1 = 2(a - 1) \\ a + 1 = c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 1 = 2a - 2 \\ a - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + c = -3 \\ a - c = -2 \end{cases}$$

Par addition : $-a = -5 \Rightarrow a = 5$; $c = a + 2 = 7$.

L'âne porte 5 sacs, le cheval 7 sacs.

2.7 Systèmes de trois équations à trois inconnues

Méthode du pivot de Gauss

1. Choisir une équation "pivot" et éliminer une inconnue dans les autres équations.
2. Répéter avec un système de 2 équations à 2 inconnues.
3. Résoudre par remontée.

Exemple – système 3×3

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 \\ x + 3y - 5z = -16 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Élimination de x : $(L_1) \times 1 - 3 \times (L_2)$ et $(L_3) \times 3 - 4 \times (L_1)$:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 \\ -10y + 17z = 61 \\ 10y - 11z = 43 \end{cases}$$

Élimination de y : $(L_2) + (L_3)$: $6z = 18 \Rightarrow z = 3$

Retour : $-10y + 51 = 61 \Rightarrow y = -1$; $3x + 1 + 6 = 13 \Rightarrow x = 2$.

$$S = \{(2; -1; 3)\}$$

2.8 Systèmes paramétriques

Systèmes paramétriques

Pour un système dépendant d'un paramètre m , calculer le déterminant en fonction de m , discuter selon le signe de $\text{Dét}(m)$, et résoudre dans chaque cas.

Exemple paramétrique

Résoudre et discuter selon m :
$$\begin{cases} mx - 3y = 5 \\ 3x + my = 1 \end{cases}$$

$\text{Dét} = m^2 - (-9) = m^2 + 9 \geq 9 > 0$ pour tout m .

Donc le système admet toujours une solution unique : $x = \frac{5m + 3}{m^2 + 9}$ et $y = \frac{m - 15}{m^2 + 9}$.

Synthèse – Chapitre 2 : Équations, Inéquations, Systèmes

1er degré : $ax + b = 0 \Rightarrow x = -b/a$.

2nd degré : $\Delta = b^2 - 4ac$; $\Delta < 0 : \emptyset$; $\Delta = 0 : x_0 = -b/2a$; $\Delta > 0 : x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Discriminant réduit : Si $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$.

Recettes : $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = c/a$; $a + c = b \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -c/a$.

Factorisation : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Signe du trinôme : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre les racines.

Systèmes : méthode de Cramer, substitution, combinaison linéaire, pivot de Gauss.

Viète : $x_1 + x_2 = -b/a$ et $x_1 x_2 = c/a$.

Exercices de fin de chapitre 2

Série A – Fondamental

A1. Résoudre : a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $13x^2 - 7x - 20 = 0$ c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

A2. Résoudre les inéquations : a) $-5x^2 + 3x - 2 \leq 0$ b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 \geq 0$

A3. Résoudre : a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

A4. Résoudre le système par déterminant :
$$\begin{cases} 5x + 4y = -9 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

Série B – Intermédiaire

B1. Résoudre les équations irrationnelles : a) $\sqrt{3x + 1} = 4 - x$ b) $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x + 6$
c) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{x - 8} = 5$

B2. Résoudre et discuter : $\frac{x^2 + 2x - 3}{2x - 8} \leq 0$

B3. Ali a trois fois l'âge que Boubacar avait quand Ali avait l'âge de Boubacar. Quand

B4. Résoudre $\begin{cases} x + 3y - 5z = -16 \\ 3x - y + 2z = 13 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases}$

C1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$. (Grouper $(x+1)(x+4)$ et $(x+2)(x+3)$, puis poser $X = x^2 + 5x$.)

C2. Résoudre et discuter selon m :
$$\begin{cases} (m-1)x + 3(m-2)y = 2 \\ (2m-1)x - 2y = m+2 \end{cases}$$

C3. Adama dépense $\frac{1}{4}$ de son salaire en nourriture et $\frac{1}{3}$ en loyer ; il lui reste 50 000 F. Quel est son salaire ?

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There are no vertical margin lines, text, or other markings on the page.

Chapitre 3

Vecteurs du Plan

⊙ **Durée estimée du chapitre** : 4 heures

Chapitre géométrique fondamental

3.1 Rappels – Vecteurs

Vecteur

Un **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- Sa **direction** (la droite (AB))
- Son **sens** (de A vers B)
- Sa **norme** (longueur) $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Le **vecteur nul** $\vec{0}$ est le seul vecteur de norme nulle.

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

3.2 Combinaisons linéaires de vecteurs

Combinaison linéaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α, β deux réels. On appelle **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur de la forme :

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

Vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si :

- L'un d'eux est le vecteur nul, ou
- Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k \vec{v}$ (même direction)

Sens : si $k > 0$, même sens ; si $k < 0$, sens contraires.

Exemple de colinéarité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\frac{9}{2}\vec{u} + 5\vec{v} = 2\vec{v} + 3\vec{u}$.

$$9\vec{u} + 10\vec{v} = 4\vec{v} + 6\vec{u} \Rightarrow 3\vec{u} = -6\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = -2\vec{v}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ($k = -2 < 0$: sens contraires).

3.3 Base – Coordonnées d'un vecteur

Base de l'espace vectoriel

On appelle **base** de V tout couple $(\vec{i}; \vec{j})$ de vecteurs **non colinéaires**.

Théorème : Dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière **unique** :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Le couple $(x; y)$ s'appelle les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base.

Calcul avec les coordonnées

Si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors :

- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$
- $\alpha \vec{u}$ a pour coordonnées $(\alpha x; \alpha y)$
- $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ a pour coordonnées $(\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y')$

Exemples de calculs vectoriels

Dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$, $\vec{u}(2; -1)$ et $\vec{v}(1; 3)$.

$$\vec{w} = -2\vec{u} + \vec{v} : \vec{w}(-4 + 1; 2 + 3) = \vec{w}(-3; 5)$$

$$\vec{T} = \vec{u} + 2\vec{v} : \vec{T}(2 + 2; -1 + 6) = \vec{T}(4; 5)$$

3.4 Déterminant de deux vecteurs – Colinéarité analytique

Déterminant de deux vecteurs

Dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$, le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ est :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Colinéarité et déterminant

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$(\vec{u}; \vec{v}) \text{ est une base de } V \Leftrightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$$

Colinéarité analytique

1. $\vec{u}(2; -1)$ et $\vec{v}(1; 3)$: $\det = 6 - (-1) = 7 \neq 0 \Rightarrow$ base, non colinéaires.

2. Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $A(1; 2), B(3; -1), C(7; \alpha)$.

$$\vec{BA}(1 - 3; 2 + 1) = \vec{BA}(-2; 3); \vec{BC}(7 - 3; \alpha + 1) = \vec{BC}(4; \alpha + 1)$$

Triangle ABC rectangle en $A \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.

$$\vec{AB}(2; -3), \vec{AC}(6; \alpha - 2) : 2 \times 6 + (-3)(\alpha - 2) = 0 \Rightarrow 12 - 3\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 6.$$

3.5 Norme d'un vecteur

Norme dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour $\vec{u}(x; y)$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemples de normes

1. $\vec{u}(3; -4) : \|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

2. $\vec{v}(1; 1) : \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

3. Vecteur normé colinéaire à $\vec{u}(3; -4) : \vec{e} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$

Exercices de fin de chapitre 3

Série A – Fondamental

A1. Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}(2; -1)$ et $\vec{v}(1; 3)$. a) Coordonnées de $\vec{w} = -2\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{T} = \vec{u} + 2\vec{v}$.
b) Calculer $\det(\vec{u}; \vec{v})$, $\det(\vec{u}; \vec{S})$ pour $\vec{S}(-4; 2)$. c) $\vec{u}$ et $\vec{S}$ sont-ils colinéaires ? de même sens ?

A2. Dans le repère orthonormé $(O; I; J)$, on donne $A(1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(7; \alpha)$. a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. b) Trouver α pour que le triangle ABC soit rectangle en A .

Série B – Intermédiaire

B1. Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right)$ et $\vec{v}(5; \alpha)$. Trouver α pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

B2. Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas : $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

B3. Soit $ABCD$ un rectangle avec $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm. On définit I, J, K, L tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. Montrer que $IJKL$ est un rectangle.

Série C – Approfondissement

C1. Soit $\vec{u}(3; -1)$ dans la base orthonormée. Trouver un vecteur $\vec{e}_1$ normé colinéaire à $\vec{u}$ et un vecteur $\vec{e}_2$ normé orthogonal à $\vec{u}$. Montrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base orthonormée.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Chapitre 4

Trigonométrie

⊙ **Durée estimée du chapitre : 4 heures**

Angles, cercle trigonométrique, identités

4.1 Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle

Rapports trigonométriques

Dans un triangle rectangle ABC rectangle en A , pour l'angle $\hat{B} = \theta$:

$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} \quad \cos \theta = \frac{\text{côté adjacent à } \theta}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} \quad \cot \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\tan \theta}$$

Relations : $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ et $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

4.2 Cercle trigonométrique et mesure d'angles

Activité 4.1 : Le cercle trigonométrique ⊙ 20 min

Dans un repère orthonormé $(O; A; B)$, place le cercle de centre O et rayon 1. Soit $M(x; y)$ un point de ce cercle tel que $\widehat{AOM} = \theta$.

1. Exprimer x et y en fonction de $\sin \theta$ et $\cos \theta$.
2. Appliquer Pythagore au triangle OMH où H est le pied de la perpendiculaire de M sur l'axe des x . Qu'obtiens-tu ?
3. Convertir 180 en radians en sachant que le demi-cercle a pour longueur π .

Ta réponse :

✓ Cercle trigonométrique et conversions

Tout point M du cercle trigonométrique a pour coordonnées $M(\cos \theta; \sin \theta)$.

Conversions : $360 = 2\pi \text{ rad} = 400 \text{ grd}$; $180 = \pi \text{ rad}$; $1 = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

Exemples : $30 = \frac{\pi}{6}$; $45 = \frac{\pi}{4}$; $60 = \frac{\pi}{3}$; $90 = \frac{\pi}{2}$

Table des valeurs remarquables

Angle (°)	0	30	45	60	90	120	135	150
Angle (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

★ Mémo pour la table

Pour sin des angles 0, 30, 45, 60, 90 : écrire $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$ soit $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$.
 Pour cos : lire la table à l'envers !

4.3 Identités trigonométriques

Activité 4.2 : Relation fondamentale ☉ 15 min

Dans le triangle rectangle ABC (rectangle en A) : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

1. Diviser chaque terme par BC^2 .
2. Reconnaître $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.
3. Écrire la relation fondamentale obtenue.

Ta réponse :

✓ Identités trigonométriques fondamentales

$$\boxed{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1} \quad (\text{relation fondamentale})$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

Angles associés

Angle	sin	cos	tan
$\pi - \alpha$ (supplémentaire)	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$
$-\alpha$ (opposé)	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tan \alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$ (complémentaire)	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cot \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\tan \alpha$

Exemples de simplifications

1. $\sin(180 - 30) = \sin 30 = \frac{1}{2}$

2. $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$, donc $\cos 150 = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Simplifier $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$
 $= \sin x + \sin x - \cos x = 2 \sin x - \cos x$

4. Calculer $F = \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = 1 + \sqrt{2}$$

5. Déterminer $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ sachant que $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ et $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\tan \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3} \cos \alpha. \text{ Relation fondamentale : } \cos^2 \alpha + \frac{4}{9} \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{13}{9} \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \text{ (positif car } \alpha \in [0; \pi/2]); \sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

4.4 Interpolation linéaire – Tables trigonométriques

Utiliser les tables trigonométriques

Pour calculer $\sin 2635'$:

1. Lire $\sin 26 = 0,4384$ et $\sin 27 = 0,4540$.
2. Différence tabulaire : $DT = 0,4540 - 0,4384 = 0,0156$.
3. Interpolation : $x = \frac{35 \times 0,0156}{60} = 0,0091$.
4. $\sin 2635' = 0,4384 + 0,0091 = 0,4475$.

Attention pour $\cos$: la différence tabulaire est **soustraite** (cosinus décroît).

Exemples – interpolation

1. $\cos 7214'$: $\cos 72 = 0,3090$, $\cos 73 = 0,2924$, $DT = 0,0166$.

$$x = \frac{14 \times 0,0166}{60} = 0,0038. \cos 7214' = 0,3090 - 0,0038 = 0,3052$$

2. Trouver θ tel que $\sin \theta = 0,4150$:

$$\sin 24 = 0,4067, \sin 25 = 0,4226, DT = 0,0159.$$

$$\theta - 24 = \frac{0,4150 - 0,4067}{0,0159} \times 1 = 0,5220$$

$$0,5220 = 0,5220 \times 60' = 31,32' \approx 31'19''. \theta \approx 2431'19''.$$

Synthèse – Chapitre 4 : Trigonométrie

Relations fondamentales : $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$; $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$; $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

Angles associés : $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$

Valeurs remarquables : $\sin 30 = \frac{1}{2}$, $\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Conversions : $\alpha \rightarrow \frac{\pi \alpha}{180} \text{ rad}$; $\alpha \text{ rad} \rightarrow \frac{180\alpha}{\pi} \text{ degrés}$

Exercices de fin de chapitre 4**Série A – Fondamental**

A1. Convertir en radians : 150 ; 23 ; 160 ; 270

A2. Convertir en degrés : $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$

A3. Calculer exactement : $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3}$; $\tan 60 - \sin 30$; $2 \cos 45 - \sqrt{2}$

A4. Simplifier : a) $\sin(180 - x)$ b) $\cos(90 - x)$ c) $\tan(\pi + x)$ d) $\sin(-x) + \cos(\pi + x)$

Série B – Intermédiaire

B1. $\sin 2635'$, $\cos 4130'$, $\sin 3545'$, $\cos 6324'$ (utiliser les tables)

B2. Trouver α et β en degrés-minutes-secondes : $\sin \alpha = 0,6958$; $\cos \beta = 0,7899$.

B3. Sachant que $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ avec $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, trouver $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

B4. Démontrer : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

B5. Un observateur est à 10 m d'un poteau. Il voit le sommet sous un angle de 45 par rapport à l'horizontale, et la base sous 11. Quelle est la hauteur du poteau ?

Série C – Approfondissement

C1. On sait que $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ avec $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Calculer $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$.

C2. Soit ABC un triangle équilatéral de côté x et H le pied de la hauteur issue de A . Calculer BH , AH et l'aire du triangle.

C3. Pour se rendre de la ville A à la ville F , un touriste parcourt $ABEF$. Les ports E et F sont visés depuis A et B sous des angles de 25 et 43. Avec les données du schéma ($AB = 4$ km, $BE = 3$ km), calculer EF .

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Chapitre 5

Fonctions Numériques

⊙ **Durée estimée du chapitre : 5 heures**

Chapitre analytique central

5.1 Généralités sur les fonctions

Fonction – image – antécédent

Une **fonction** f de A vers B associe à chaque élément x de A **au plus un** élément $f(x)$ de B .

Vocabulaire :

- $f(x)$ est l'**image** de x par f
- x est l'**antécédent** de $f(x)$ par f
- D_f : **ensemble de définition** (ensemble de départ où f est définie)
- La **courbe représentative** de f est $\{(x; y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$

Déterminer l'ensemble de définition D_f

On cherche les valeurs de x qui poseraient problème :

- **Fraction** : le dénominateur doit être $\neq 0$
- **Racine carrée** : l'expression sous le radical doit être ≥ 0
- **Combinaison** : on intersecte les conditions

Exemples d'ensembles de définition

1. $f(x) = \frac{3x+1}{x-2} : x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2. D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

2. $f(x) = \sqrt{x+1} : x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1. D_f = [-1; +\infty[$

3. $f(x) = \sqrt{x-4} + \frac{1}{x-5} : \begin{cases} x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \end{cases} . D_f = [4; 5[\cup]5; +\infty[$

4. $f(x) = \sqrt{-x^2+3x-2} : -x^2+3x-2 \geq 0 \Rightarrow x^2-3x+2 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 0. D_f = [1; 2]$

5. Calculer $f(3)$ et $f(4)$ pour $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$:

$$f(3) = \frac{9}{10} ; \quad f(4) = \frac{11}{17}$$

Exercices – Ensemble de définition

Déterminer D_f pour chacune des fonctions :

a) $f(x) = 5x^2 - 7$

b) $f(x) = \frac{3x+4}{2x-8}$

c) $f(x) = \sqrt{x+7}$

d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$

e) $f(x) = \sqrt{x-4} + \frac{1}{x-5}$

f) $f(x) = \frac{7x+4}{(x^2-9)(x-1)}$

g) $f(x) = \frac{x+3}{2x-10}$

h) $f(x) = \sqrt{4-x}$

Ta réponse :

5.2 Composition de fonctions

Activité 5.1 : Composition ⦿ 20 min

Soient $f : x \mapsto 2x + 1$, $g : x \mapsto \frac{1}{x}$, $h : x \mapsto x^2$.

1. Calculer $(g \circ f)(3)$ et $(f \circ g)(3)$.
2. Calculer $(g \circ f)(x)$ et $(h \circ f)(x)$ pour tout x valide.
3. La composition est-elle commutative ? Justifier.

Ta réponse :

Composée de deux fonctions

La **composée** de f par g , notée $g \circ f$, est définie par :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

On lit : “ g rond f ”. On applique d’abord f , puis g .

Exemples de compositions

$$f(x) = 2x + 1, g(x) = \frac{1}{x}, h(x) = x^2$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = \frac{1}{7}$$

$$(f \circ g)(3) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad \text{donc } g \circ f \neq f \circ g!$$

$$(g \circ f)(x) = g(2x + 1) = \frac{1}{2x + 1} \quad (\text{valide pour } x \neq -\frac{1}{2})$$

$$(h \circ f)(x) = h(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

Décomposition : $f(x) = \sqrt{5x + 3}$ s’écrit $f = h \circ g$ avec $g(x) = 5x + 3$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

5.3 Image directe – Image réciproque

Image directe et réciproque

Image directe $f(A)$: $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \cap D_f$ tel que $f(x) = y$.

Image réciproque $f^{-1}(B)$ de B : ensemble des $x \in D_f$ tels que $f(x) \in B$.

Pour trouver $f^{-1}([a; b])$: résoudre $a \leq f(x) \leq b$.

Images directes et réciproques

$$f(x) = 3x - 1, g(x) = -5x + 2$$

Image directe de $A = [-5; 4]$ par f :

f est croissante : $f(-5) = -16, f(4) = 11. f(A) = [-16; 11]$

Image directe de $A = [-5; 4]$ par g :

g est décroissante : $g(-5) = 27, g(4) = -18. g(A) = [-18; 27]$

Image réciproque de $B = [1; 3]$ par f :

$$1 \leq 3x - 1 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 3x \leq 4 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}. f^{-1}(B) = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right]$$

5.4 Coïncidence de deux fonctions**Égalité et coïncidence**

$f = g$ si et seulement si $D_f = D_g$ et $\forall x \in D_f, f(x) = g(x)$.

f et g **coïncident** sur C si $C \subset D_f \cap D_g$ et $\forall x \in C, f(x) = g(x)$.

Coïncidence

$f(x) = |2x - 4| + |x + 5|$ et $g(x) = 3x + 1$. Trouver $C \subset \mathbb{R}$ où $f = g$.

x	$]-\infty; -5[$	$[-5; 2[$	$[2; +\infty[$
$f(x)$	$-(2x - 4) - (x + 5) = -3x - 1$	$-(2x - 4) + (x + 5) = -x + 9$	$2x - 4 + x + 5 = 3x + 1$

$f = g$ sur $[2; +\infty[$ car $f(x) = 3x + 1 = g(x)$ pour $x \geq 2$.

Synthèse – Chapitre 5 : Fonctions Numériques

Ensemble de définition : exclure les zéros du dénominateur, imposer ≥ 0 sous les radicaux.

Images et antécédents : image de $x = f(x)$; antécédent de $y = x$ tel que $f(x) = y$.

Composition : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; appliquer f en premier, puis g ; non commutative.

Image directe : si f croissante sur $[a; b]$ alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.

Image réciproque : $f^{-1}([a; b]) =$ ensemble des x tels que $a \leq f(x) \leq b$.

Coïncidence : f et g coïncident sur C si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in C$.

Exercices de fin de chapitre 5**Série A – Fondamental**

A1. Compléter le tableau pour $f(x) = -3x + 5$ avec $x \in \{-5; -3; 0; 3; 5\}$.

A2. Pour $g(x) = \frac{5x - 1}{x + 1}$, calculer les images de $-3, -2, 1, 2, 3$. Trouver les antécédents de 11 et 2.

A3. $f(x) = 3x - 1, g(x) = -5x + 2, h(x) = x^2 + 1$. Calculer : $(f \circ g)(0), (g \circ f)(0), (f \circ h)(1),$

Chapitre 6

Fonctions Polyômes et Rationnelles

⊙ **Durée estimée du chapitre : 4 heures**

Polynômes : étude complète

6.1 Fonctions polyômes

Fonction polynôme de degré n

Une **fonction polynôme de degré n** est une fonction de la forme :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

$D_f = \mathbb{R}$ toujours. Les a_i sont appelés **coefficients**.

Le polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est le plus important.

6.2 Forme canonique – Sommet de la parabole

Mise sous forme canonique

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Le **sommet** de la parabole est $S \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

Si $a > 0$: parabole ouverte vers le haut (minimum au sommet).

Si $a < 0$: parabole ouverte vers le bas (maximum au sommet).

Exemples de formes canoniques

1. $f(t) = -2t^2 + 4t + 3$

$$f(t) = -2(t^2 - 2t) + 3 = -2(t^2 - 2t + 1 - 1) + 3 = -2(t - 1)^2 + 2 + 3 = -2(t - 1)^2 + 5$$

Sommet : $S(1; 5)$ – maximum.

2. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{7}{4}$$

Sommet : $S \left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{4} \right)$ – minimum.

3. Résolution graphique par la forme canonique :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2(t-1)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t-1 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$t_1 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ et } t_2 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

6.3 Division euclidienne des polyômes**Division euclidienne**

Pour diviser $f(x)$ par $g(x)$ ($\deg f \geq \deg g$), on cherche $q(x)$ et $r(x)$ tels que :

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{avec } \deg(r) < \deg(g)$$

Procéder comme pour la division de nombres entiers, terme par terme.

Division euclidienne

Diviser $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ par $g(x) = x^2 + 2x + 1$:

$$2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = (x^2 + 2x + 1)(2x^2 + x + 3) + 0$$

Le quotient est $q(x) = 2x^2 + x + 3$ et le reste est 0 (division exacte).

Théorème de la racine : si $f(a) = 0$, alors $f(x)$ est divisible par $(x - a)$.

Exemple : $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$.

$$f(1) = 1 - 5 + 9 - 7 + 2 = 0 \text{ et } f(2) = 16 - 40 + 36 - 14 + 2 = 0$$

Donc $f(x) = (x-1)(x-2) \cdots$ On factorise par divisions successives : $f(x) = (x-1)^3(x-2)$.

6.4 Méthode de Hörner**Méthode de Hörner**

Pour calculer $f(a)$ et factoriser par $(x - a)$ si $f(a) = 0$:

Aligner les coefficients de f et appliquer la règle :

a	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_0
	a_n	$a_n \cdot a + a_{n-1}$	$\cdots$	reste

Les valeurs de la dernière ligne (sauf le reste) sont les coefficients du quotient.

Méthode de Hörner

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Calculer $f(2)$ et factoriser :

2	1	-7	16	-12
		2	-10	+12
	1	-5	6	0

$f(2) = 0$, quotient $= x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

$f(x) = (x - 2)^2(x - 3)$.

6.5 Identification de polyômes – Coefficients indéterminés

Méthode des coefficients indéterminés

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux.

Exemple : trouver a, b, c tels que $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = (x^2 + 2x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
Développer le membre droit et identifier les coefficients : $a = 2$, $2a + b = 5 \Rightarrow b = 1$,
 $a + 2b + c = 7 \Rightarrow c = 3$.

6.6 Fonctions rationnelles

Fonction rationnelle

Une **fonction rationnelle** h est le quotient de deux polynômes :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{avec } g(x) \neq 0$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}.$$

Décomposition en éléments simples (niveau 10ème)

Pour $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $\deg(f) \geq \deg(g)$: effectuer la division, obtenir $h(x) = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$.

Pour $h(x) = \frac{ax + b}{(x - \alpha)(x - \beta)}$: chercher $h(x) = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$.

Décomposition en éléments simples

1. $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x + 3}$. Division : quotient $3x - 14$, reste 44.

$$f(x) = 3x - 14 + \frac{44}{x + 3}$$

2. $g(x) = \frac{2x + 1}{x(x - 1)}$. Chercher $g(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}$.

$2x + 1 = A(x - 1) + Bx$. En $x = 0$: $1 = -A \Rightarrow A = -1$. En $x = 1$: $3 = B$.

$$g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{3}{x - 1}$$

Synthèse – Chapitre 6 : Polynômes et Rationnelles

Polynôme de degré n : $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $D_f = \mathbb{R}$.

Forme canonique : $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Sommet $S \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Division euclidienne : $f = g \cdot q + r$ avec $\deg(r) < \deg(g)$.

Théorème de la racine : $f(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - a)q(x)$.

Hörner : calcul rapide de $f(a)$ et factorisation par $(x - a)$.

Identification : deux polynômes égaux ont mêmes coefficients.

Fonction rationnelle : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_h = \{x \mid g(x) \neq 0\}$.

Exercices de fin de chapitre 6

Série A – Fondamental

A1. Mettre sous forme canonique : a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ b) $g(x) = -3x^2 + 6x + 1$ c) $h(x) = x^2 + x - 6$

A2. Pour $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$: a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$ b) Factoriser $f(x)$ entièrement

A3. Effectuer la division euclidienne de $h(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ par $p(x) = x^2 - 2x + 1$.

Série B – Intermédiaire

B1. Utiliser la méthode de Hörner pour factoriser $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ sachant que $f(2) = 0$.

B2. Décomposer en éléments simples : a) $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x + 3}$ b) $g(x) = \frac{2x + 1}{x(x - 1)}$ c)

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

B3. Trouver les réels a, b, c tels que $x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Série C – Approfondissement

C1. Développer, réduire et ordonner $(x^3 + 5x^2 - 4x + 1)(2x^2 - 3x + 7)$. Identifier le degré.

C2. Résoudre $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2} = 3$. (Multiplier par x^2 , puis résoudre en x .)

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Chapitre 7

La Droite dans le Plan

⊙ **Durée estimée du chapitre : 3 heures**

Équations de droites et positions relatives

7.1 Équation cartésienne d'une droite

Équation cartésienne

Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Cas particuliers :

— $b \neq 0$: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (forme "réduite" $y = mx + p$)

— $b = 0$: droite verticale $x = -\frac{c}{a}$

Coefficient directeur : $m = -\frac{a}{b}$ (pente)

Trouver l'équation d'une droite passant par deux points

Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, le vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

(M, A, B) colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$

Vecteur normal : $\vec{n}(a; b)$ avec $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$. Si $\overrightarrow{AB}(\alpha; \beta)$ alors $\vec{n}(-\beta; \alpha)$.

Équations de droites

1. Droite passant par $A(1; 3)$ et $B(4; -1)$:

$\overrightarrow{AB}(3; -4)$. Vecteur normal $\vec{n}(4; 3)$.

Équation : $4(x - 1) + 3(y - 3) = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 13 = 0$

2. Droite de coefficient directeur $m = 2$ passant par $C(1; -1)$:

$y - (-1) = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 3$

3. Parallélisme : $(D_1) : 3x + 2y - 1 = 0$ et $(D_2) : 3x + 2y + 5 = 0$.

Même vecteur normal $(3; 2)$ donc parallèles (et distinctes car $-1 \neq 5$).

4. Perpendicularité : $(D_1) : 3x + 2y - 1 = 0$ et $(D_2) : 2x - 3y + 5 = 0$.

Vecteurs directeurs $(2; -3)$ et $(3; 2)$: produit scalaire $6 - 6 = 0 \Rightarrow$ *perpendiculaires*.

5. Distance d'un point à une droite :

$$d(A(x_0; y_0); D : ax + by + c = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d(A(2; 1); D : 3x + 4y - 5 = 0) = \frac{|6 + 4 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{5} = 1$$

Exercices – Droite dans le plan

A1. Donner l'équation de la droite passant par $A(2; 3)$ et $B(-1; 5)$.

A2. Quelle est la pente de la droite $2x - 3y + 7 = 0$? Son ordonnée à l'origine?

A3. $(D_1) : 4x - 3y + 1 = 0$ et $(D_2) : 4x - 3y - 2 = 0$. Sont-elles parallèles?

B1. Trouver la distance du point $P(1; 2)$ à la droite $3x + 4y - 15 = 0$.

B2. Trouver l'équation de la droite perpendiculaire à $D : 2x - y + 3 = 0$ passant par $A(1; -1)$.

C1. Trouver le point d'intersection de $(D_1) : 2x + y - 5 = 0$ et $(D_2) : x - 3y + 1 = 0$.

Ta réponse :

Chapitre 8

Équation du Cercle

⦿ Durée estimée du chapitre : 2 heures

Cercle : définition et équation

8.1 Définition et équation standard

Cercle de centre A et rayon r

$$\mathcal{C}(A; r) = \{M \in P \mid d(A; M) = r\}$$

Équation standard : Si $A(a; b)$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Équation développée : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $c = a^2 + b^2 - r^2$

Reconnaître et remettre sous forme standard

Données $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, compléter les carrés : $\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - \gamma$

Si le membre droit est > 0 : cercle de centre $\left(-\frac{\alpha}{2}; -\frac{\beta}{2}\right)$ et rayon $r = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - \gamma}$.

Si $= 0$: point unique. Si < 0 : ensemble vide.

Exemples

1. Cercle de centre $A(1; -\frac{3}{2})$ rayon 2 :
 $(x - 1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 4$ ou $x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$

2. Reconnaître $x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$:
 $(x - 1)^2 - 1 + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$
 $(x - 1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 4$. Centre $A(1; -\frac{3}{2})$, rayon $r = 2$.

3. $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0$: $(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{4} + \frac{25}{4} - 11 = -\frac{10}{4} < 0$. $S = \emptyset$.

4. **Cercle de diamètre $[AB]$:**

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (angle inscrit dans un demi-cercle = 90)

$A(0; -2)$, $B(2; 1)$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (0 - x)(2 - x) + (-2 - y)(1 - y) = 0$

$x^2 - 2x + y^2 + y - 2 = 0$. Cercle de centre milieu $I(1; -\frac{1}{2})$ et rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Exercices – Équation du cercle

A1. Écrire l'équation du cercle de centre $A(-3; 4)$ et rayon $r = 5$.

A2. Reconnaître si $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ est un cercle. Donner centre et rayon.

B1. Écrire l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 2)$ et $B(3; -2)$.

B2. Cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(-3; 2)$ passant par $P(0; 1)$. Trouver l'équation de $\mathcal{C}$.

C1. Trouver les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ et de la droite $y = x + 1$.

Ta réponse :

Chapitre 9

Produit Scalaire

⊙ **Durée estimée du chapitre :** 4 heures

Un outil puissant pour la géométrie

9.1 Norme d'un vecteur

Norme

La **norme** du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est $\|\vec{u}\| = AB$.

Dans un repère orthonormé : $\vec{u}(x; y) \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

9.2 Définition et expressions du produit scalaire

Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, α l'angle qu'ils forment.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$$

Trois formules du produit scalaire

1. **Formule trigonométrique :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$

2. **Formule analytique** (repère orthonormé, $\vec{u}(x; y)$, $\vec{v}(x'; y')$) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

3. **Formule de développement :**

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}$$

Propriétés algébriques

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité)
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$ (carré scalaire)
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Identités remarquables : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$; $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Applications du produit scalaire**1. Al-Kashi (généralisation de Pythagore) :**

Dans ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\hat{A})$

Application : ABC avec $AB = 5$, $AC = 7$, $\hat{A} = 60$: $BC^2 = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \frac{1}{2} = 74 - 35 = 39$. $BC = \sqrt{39}$.

2. Ensemble $\{\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k\}$:

Soit I milieu de $[AB]$: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

$$- k + \frac{AB^2}{4} < 0 : \emptyset$$

$$- k + \frac{AB^2}{4} = 0 : \{I\}$$

$$- k + \frac{AB^2}{4} > 0 : \text{cercle de centre } I, \text{ rayon } \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$$

Exemple : $AB = 2$, $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 8 \Rightarrow MI^2 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow MI = 3$. Cercle de centre I , rayon 3.

3. Distance d'un point à une droite :

$$d(A; D : ax + by + c = 0) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercices – Produit scalaire

A1. $\vec{u}(3; -4)$ et $\vec{v}(2; 1)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$.

A2. $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ avec $OA = 3$, $OB = 4$ et $\hat{AOB} = 60$. Calculer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

B1. Triangle ABC avec $AB = 5$, $AC = 7$, $\hat{A} = 60$. Calculer BC .

B2. $AB = 4$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 5$.

B3. Montrer que $(D) : 3x + 2y - 1 = 0$ et $(D') : 2x - 3y + 5 = 0$ sont perpendiculaires.

C1. Dans un triangle ABC , $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$. Calculer $\cos(\hat{B})$ puis l'aire du triangle.

Ta réponse :

Chapitre 10

Barycentre

⊙ **Durée estimée du chapitre : 3 heures**

Centre de gravité – lignes de niveau

10.1 Points pondérés et barycentre de 2 points

Barycentre de 2 points pondérés

Étant donnés $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$, le **barycentre** G est l'unique point tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

On en déduit : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ (division du segment $[AB]$)

Coordonnées du barycentre

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, alors $G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$.

Cas particulier : $\alpha = \beta = 1$: G est le milieu de $[AB]$.

Construction et coordonnées

1. G barycentre de $(A; 2)$ et $(B; 5)$: $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7} \overrightarrow{AB}$ (G divise $[AB]$ dans le rapport $5/7$ depuis A)

2. $A(1; 2)$, $B(-3; -2)$, barycentre de $(A; -2)$ et $(B; 4)$:

$$x_G = \frac{-2 \times 1 + 4 \times (-3)}{-2 + 4} = \frac{-14}{2} = -7 ; \quad y_G = \frac{-2 \times 2 + 4 \times (-2)}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$G(-7; -6)$

10.2 Barycentre de 3 points pondérés

Barycentre de 3 points pondérés

Étant donnés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$, $(C; \gamma)$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, le barycentre G est l'unique point tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Coordonnées : $G \left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$

★ *Calcul du barycentre de 3 points par étapes*

1. Calculer $G_1 = \text{barycentre de } (A; \alpha) \text{ et } (B; \beta)$ (si $\alpha + \beta \neq 0$)
2. Calculer $G = \text{barycentre de } (G_1; \alpha + \beta) \text{ et } (C; \gamma)$

10.3 Lignes de niveau

Ensembles définis par des relations vectorielles

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$: ensemble des M dont le projeté H sur (AB) vérifie $AH = \frac{k}{AB}$.
 $\Rightarrow$ Droite $\perp$ à (AB) passant par H .
2. $MA^2 + MB^2 = k$ (soit $I = \text{milieu de } [AB]$) : $\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{2k - AB^2}{4}$
 $\Rightarrow$ Cercle de centre I si $2k > AB^2$, ou $\{I\}$ si $2k = AB^2$, ou $\emptyset$.
3. $MA^2 - MB^2 = k$ (soit $I = \text{milieu de } [AB]$) : $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = k \Leftrightarrow IH = \frac{k}{2AB}$
 $\Rightarrow$ Droite $\perp$ à (AB) passant par H tel que $IH = \frac{k}{2AB}$.

Applications des lignes de niveau

$AB = 2$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 10$.

$I = \text{milieu de } [AB]$. $MI^2 = \frac{2 \times 10 - 4}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow MI = 2$.
 $\Rightarrow$ Cercle de centre I et rayon 2.

Même config, $MA^2 - MB^2 = 6$: $IH = \frac{6}{2 \times 2} = \frac{3}{2}$.
 $\Rightarrow$ Droite $\perp$ à (AB) passant par H tel que $IH = \frac{3}{2}$.

Synthèse – Chapitres 7 à 10

Droite : $ax + by + c = 0$; vecteur directeur $(-b; a)$; vecteur normal $(a; b)$; pente $m = -a/b$.

Perpendicularité : $m_1 \times m_2 = -1$; $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Distance : $d(A; D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Cercle : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; cercle de diamètre $[AB]$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$; Al-Kashi.

Barycentre : G tel que $\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$; coordonnées = moyenne pondérée.

Lignes de niveau : $MA^2 + MB^2 = k \Rightarrow \text{cercle}$; $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Rightarrow \text{cercle}$.

Exercices de fin – Chapitres 7 à 10

Droite – Série A

A1. Donner l'équation de la droite passant par $A(1; 3)$ et $B(-2; -1)$.

A2. Trouver la pente et l'ordonnée à l'origine de $3x - 2y + 6 = 0$.

Cercle – Série A

A3. Équation du cercle de centre $(2; -3)$ et rayon 4.

A4. Reconnaître $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$. Centre ? Rayon ?

Produit scalaire – Série B

B1. Triangle ABC : $a = BC = 8$, $b = AC = 5$, $c = AB = 7$. Calculer $\cos \hat{A}$.

B2. $AB = 6$. Ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

Barycentre – Série B

B3. $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(4; 2)$. Trouver le barycentre G de $(A; 1)$, $(B; 2)$, $(C; -4)$.

B4. $AB = 4$. Décrire l'ensemble des M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$.

Série C – Synthèse géométrique

C1. Soit $ABCD$ un carré de côté 4. G est le barycentre de $(A; 1)$, $(B; 1)$, $(C; 1)$, $(D; 1)$. Que représente G ?

C2. Soit le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ et la droite $D : x + y - 3 = 0$. Calculer la distance du centre à D et déterminer la position relative de D et $\mathcal{C}$.

C3. Problème synthèse. Soient $A(-2; 1)$ et $B(4; 3)$. a) Trouver le cercle de diamètre $[AB]$. b) Trouver l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (comparer avec a). c) Trouver les points du cercle dont l'ordonnée est nulle.

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There is no handwriting or other markings on the paper.