

La trigonométrie :

Classe : 10^{ème} CG

Durée : 12 H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Thème : Trigonométrie

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Séquence 1 : Usage des matériels de géométrie.

1. La Règle :

Activité :

- 1) Quels sont les types de règles que vous connaissez ?
- 2) Citer les usages de chacune d'elles.

Consigne :

C₁ : Travail en groupe.

C₂ : Les réponses doivent être claires et précises.

Synthèse partielle :

Il existe deux types de règles : Règle graduée(RG) et Règle non graduée(RNG).

- ❖ RNG sert à :
 - Tracer une droite ; une demi-droite ; un segment de mesure non donnée.
- ❖ RG sert à :
 - Tracer une droite ; une demi-droite ; un segment.
 - Mesurer un segment.
 - Comparer les longueurs de 2 segments.

2. L'Equerre :

Activité :

34 32 34 / 66 34 32 34

- 1) Quels sont les types d'Equerres que vous connaissez ?
- 2) Citer les usages de chacune d'elles.

Consigne :

C₁ : Travail en groupe.

C₂ : Les réponses doivent être claires et précises.

Synthèse partielle :

Il existe deux types d'Equerres qui ont toutes un angle droit. Elles différencient par les autres angles dont les mesures sont 45° et 45° ou 30° et 60°.

L'Equerre sert à :

- o Construire des angles droits ;
- o Vérifier si un angle est droit ou non ;
- o Vérifier si un angle est obtus ou aigu ;
- o Construire des angles remarquables.

3. Le Compas :

Activité :

Citer les usages du compas.

Consigne :

C₁ : Travail en groupe.

C₂ : Les réponses doivent être claires et précises.

Synthèse partielle

Le compas sert à :

- 📏 Tracer un arc de cercle, un cercle.
- 📏 Reporter la longueur ;
- 📏 Comparer les angles.

4. Rapporteur :

Activité :

Consigne :

C₁ : Travail en groupe.

C₂ : Les réponses doivent être claires et précises.

Synthèse partielle :

Le rapporteur sert à :

- 📏 Mesurer les angles ;
- 📏 Comparer les mesures d'angles ;
- 📏 Construis un angle de mesure donné ;
- 📏 Vérifier si angle est obtus ou aigu.

34 32 34 / 66 34 32 34

☞ Construis un arc de cercle ; un cercle.

Remarque :

Au de la de ces usages ; il existe d'autres usages de chacun de ces matériels

Evaluation :

- 1) Trace deux (2) droites parallèles en utilisant uniquement :
 - a) La règle et l'équerre ;
 - b) La règle et le compas.
 - c) La règle et le rapporteur
- 2) Construis un triangle IBK tels que $IB=3 \text{ cm}$, $IK=4 \text{ cm}$ et $BK=5 \text{ cm}$.
- 3) Construis MLI tel que $\widehat{M}=45^\circ$, $ML=4 \text{ cm}$ et $MI=5 \text{ cm}$.

Séquence2

I/Rapport Trigonométrie

Activité

- 1) Construis un triangle GAO rectangle en G .
- 2) Préciser l'hypoténuse de GAO .
- 3) Préciser le côté opposé et le côté adjacent à l'angle $\widehat{A}$, puis à l'angle $\widehat{O}$.
- 4) On pose $\widehat{A}=\alpha$, $GA=a$, $AO=b$ et $OG=c$.
Exprimer $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ en fonction de a , b et c .

Consigne :

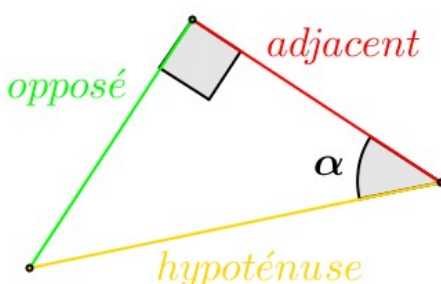
C1 : l'hypoténuse est le côté qui fait face à l'angle droit.

C2 :

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}} \\ \cos \alpha &= \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}} \\ \tan \alpha &= \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}\end{aligned}$$

Synthèse Partielle :

Dans un triangle rectangle, si l'on s'intéresse à un angle aigu α on a :



$\sin \alpha = \frac{\text{coté opposé à } \alpha}{\text{hypothénuse}}$
$\cos \alpha = \frac{\text{coté adjacent à } \alpha}{\text{hypothénuse}}$
$\tan \alpha = \frac{\text{coté opposé à } \alpha}{\text{coté adjacent à } \alpha}$

Remarque :

- 1) L'hypoténuse étant le plus grand côté alors cosinus et sinus sont plus petit que 1
- 2) Il existe d'autres rapports trigonométriques :

- $\text{Sécante} = \frac{1}{\cos \alpha}$
- $\text{Cosecante} = \frac{1}{\sin \alpha}$
- $\text{Cotangente} = \frac{1}{\tan \alpha}$

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}; \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

II. Relations métriques :

Activité 1 :

Soit un triangle BON rectangle en B ; on désigne par H le pied de la hauteur issue de B .

1. Calculer $\cos \hat{O}$ dans les triangles BON et BOH . En déduire OB^2 en fonction de OH et ON . Noter cette relation (1).
2. Calculer $\cos \hat{N}$ dans les triangles BON et BHN . En déduire BN^2 en fonction de NH et ON . Noter cette relation (2).
3. En utilisant les relations (1) e (2), en déduire ON^2 en fonction de OB^2 et BN^2 .

Consigne :

C1 : travail en groupe

C2 : les réponses doivent être claires et précises.

Synthèse partielle :

D'après l'activité on a :

$BN^2 = ON \times NH$

$OB^2 + BN^2 = ON^2$

$OB^2 = ON \times OH$

Théorème :

Dans un triangle rectangle l'hypoténuse au carré est égal à la somme des carrées des deux autres côtés : c'est le théorème de Pythagore.

Activité2 :

Considérons le triangle BON de l'activité précédente, désignons par α l'angle $\hat{O}$.

34 32 34 / 66 34 32 34

1. Calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.
2. En utilisant le théorème de Pythagore, établir une relation entre $\cos^2 \alpha$ et $\sin^2 \alpha$.

Consigne :

C₁ : Travail en groupe.

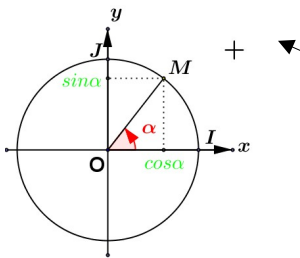
C₂ : Les réponses doivent être claires et précises.

Synthèse partielle :

Dans un triangle rectangle, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$: c'est la relation fondamentale de la trigonométrie.

Cercle trigonométrique :

On muni le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. on appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O et de Rayon l'unité Orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre).



Activité :

Soit (C) un cercle trigonométrique et $M(a; b)$ un point de (C) ; On désigne par $\alpha = \text{mes}(\widehat{OI, OM})$.

1. Calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.
2. En déduire les coordonnées du point M en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

Consigne : IDEM

Synthèse partielle :

Dans un cercle trigonométrique, l'axe des abscisses est l'axe des cosinus et l'axe des ordonnées est l'axe des sinus.

Remarque : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$.

Mesures angulaires :

Activité :

Soit le cercle trigonométrique de centre O et $[\widehat{AOB}]$ un secteur angulaire de 45° .

1. Que vaut la longueur $L =$ (arc)
2. Calculer le rapport $\alpha = \frac{L}{R}$ (R est la Rayon du cercle).

Consigne : IDEM

Synthèse partielle :

1. Le Radian :

L'unité légale de mesure angulaire est le radian (rad). Un radian est représenté par un arc dont la longueur est égale à celle du rayon du cercle. Par exemple le cercle trigonométrique correspond à un angle plein qui fait $2\pi \text{ rad}$.

Une petite histoire sur π

Depuis l'Antiquité, les mathématiciens ont remarqué qu'en mesurant la circonférence d'un cercle et qu'en la divisant par son diamètre, on obtenait toujours le même nombre. Ils ont décidé d'appeler ce nombre pi et de le noter π . Donc :

$$\pi = \frac{\text{circonférence du cercle}}{\text{diamètre}}$$

Vers 200 avant J.-C., **Archimède** a trouvé que pi était à peu près égal à 3,1418 et 1 600 ans plus tard, on connaissait les 14 premières décimales de pi.

Aujourd'hui, grâce à la **puissance de calcul des ordinateurs**, on connaît plus de 1 200 milliards de décimales du nombre pi. Dans la pratique.

Il y a un poème qui permet de retrouver 30 premiers décimaux de pi.

« Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages
Glorieux Archimède, artiste ingénieur, Toi, de qui Syracuse, aime encore la gloire,
Soit ton nom conservé par de savants grimoires... »

En comptant le nombre de lettres de chaque mot (3 pour « Que », 1 pour « j' », 4 pour « aime », etc.), on obtient les 30 premières décimales de π (soit : 3,141592653589793238462643383279)

Formules pour calculer π :

Formule de Wallis $\pi = 2 \times \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots}{1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \dots}$

/ 1 1 1 1 1 \

2. Le degré :

Ce système a pour origine le fait qu'une année dure approximativement 360 jours. Le degré correspond à l'angle ou à l'arc décrit par la terre en un jour.

Chaque degré est subdivisé soit en déci degré ; cent degré soit en 60 minute (') et chaque minutes en 60 secondes (").

3. Le grade :

Le grade est tel que le quadrant comporte 100grades. Chaque grade est subdivisé en déci grades (dgr) ; centigrades (dgr) ;.....

4. Le tour :

Utilisé en Physique, en Mécanique et même en Mathématique.

Angle droit = 0,25 tour

Angle plat = 0,5 tour

Angle complet = 1tour

Conversion angulaire :

1. Formule de conversion :

Soient r, d, g les mesures respectives d'un arc en radians, degrés, et grades. Avec les mêmes unités

les mesures respectives du demi-tour sont π rad, 180° et 200 grades. $\frac{r}{\pi} = \frac{d}{180} = \frac{g}{200}$

2. Tableau de correspondance des angles remarquables :

Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Degré	0	30	36	45	60	90
Grade	0	$\frac{100}{3}$	40	50	$\frac{200}{3}$	100

3. Table Trigonométrique des angles remarquables :

α (en degré)	0	30	45	60	90	180
α (en rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
α (en grade)	0	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100	200
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cotan \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Rapports trigonométriques des angles Supplémentaires, Complémentaires :

1. Angles Supplémentaires :

a) Définition :

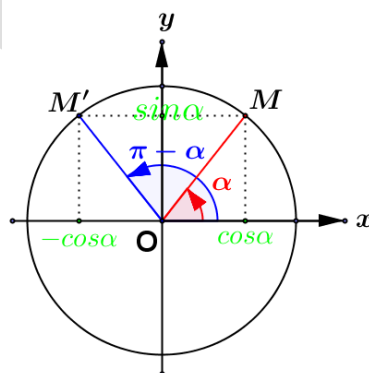
Deux angles sont dits supplémentaires si la somme de leur mesure est égale à 180° (π rd).

b) Activité :

Soient $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $\beta = \frac{5\pi}{6}$ comparer leurs cos et leurs sin puis conclure.

Consigne : IDEM

Synthèse partielle :



$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

📖 Deux angles **supplémentaires** ont **même sinus** et de **cosinus opposés**

2. Angles Complémentaires :

a) Définition :

Deux angles sont dits complémentaires si la somme de leur mesure est égale à 90° .

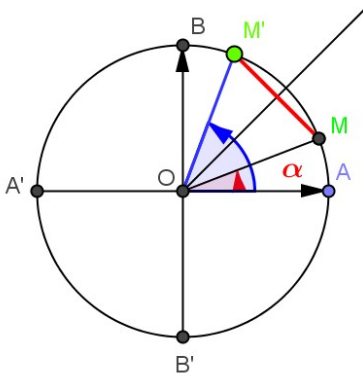
b) Activité :

Soient deux angles x et y tels que : $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = \frac{\pi}{6}$ Comparer $\sin x$ et $\cos y$ puis

$\sin y$ et $\cos x$; conclure.

Consigne : IDEM

Synthèse partielle :



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

Si Deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.