

TRIGONOMÉTRIE

III- Identités Trigonométriques :

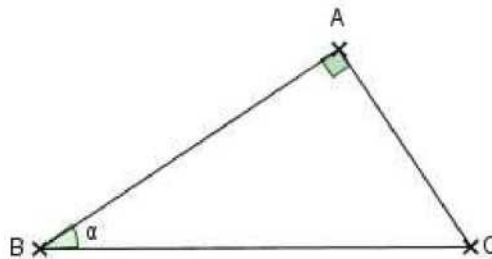
1°) Relation Fondamentale de la trigonométrie:

Activité :

- a) Construisez un triangle ABC rectangle en A tel que $\angle CBA = \alpha$
- b) Appliquer le théorème de Pythagore au triangle rectangle ABC
- c) Déterminez les rapports $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$
- d) Exprimez la relation du théorème de Pythagore en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

Réponses :

a)



a) D'après le théorème de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$

b) $\sin a = \frac{AC}{BC}$; $\cos a = \frac{AB}{BC}$

c) On sait que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ en divisant chaque terme par BC^2 on a

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} \Rightarrow \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

(Relation fondamentale de la trigonométrie)

2°) Autres Relations :

Nous savons que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

• Si $\cos x \neq 0$ en divisant par $\cos^2 x$,

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Si $\sin x \neq 0$ en divisant par $\sin^2 x$,

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

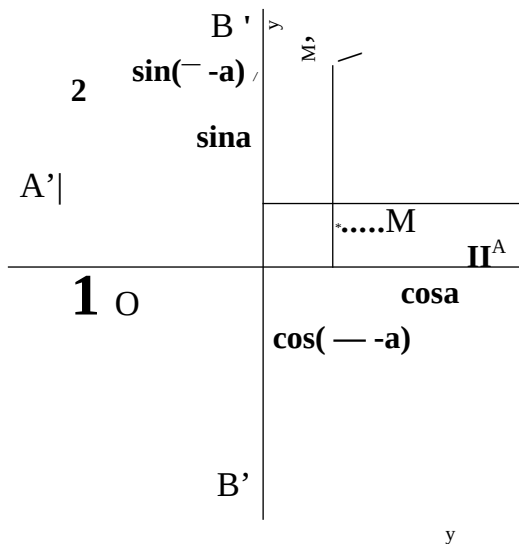
D'où : $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

- 4°) Angles complémentaires : $(\frac{\pi}{2} - a)$ et (a)

- $\frac{\pi}{2}$ radian ou 90° .

Activité : Citez en degrés puis en radians trois exemples d'angles complémentaires.



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cotg(a)$$

M et M' sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice.

- Deux angles sont complémentaires si le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Remarque : $a \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$

IV- Détermination de rapports trigonométriques :

1°) Si le rapport est un nombre entier de degrés :

Une simple lecture de la table trigonométrique ou l'utilisation de la calculatrice nous permet de déterminer sa valeur.

Activité 1 : A l'aide de la table trigonométrique et la calculatrice déterminez :

$$\sin 28^\circ ; \cos 43^\circ ; \cos 87^\circ ; \sin 73^\circ ; \operatorname{tg} 66^\circ$$

Réponses: $\sin 28^\circ = 0,4695$; $\cos 43^\circ = 0,7314$; $\cos 87^\circ = 0,0523$; $\sin 73^\circ = 0,9563$; $\operatorname{tg} 66^\circ = 2,2460$.

2°) Si le rapport n'est pas un nombre entier de degrés :

On procède à une interpolation linéaire.

Activité 2 : A l'aide de la table trigonométrique ou la calculatrice Déterminez

$$\sin 26^\circ 35'$$

Réponses: On remarque que le rapport ne figure pas sur la table trigonométrique.

$$\begin{array}{l} \sin 26^\circ = 0,4384 \\ \sin 27^\circ = 0,4540 \end{array} \quad \sin 26^\circ < \sin 26^\circ 35' < \sin 27^\circ .$$

La différence $0,4540 - 0,4384 = 0,0156$ est appelée la différence Tabulaire (D.T) ; Une augmentation de l'angle de $1^\circ = 60'$ correspond à une augmentation du sinus de la différence tabulaire.

$$\begin{array}{l} 1^\circ = 60' \longrightarrow 0,01561 \\ 35' \longrightarrow x = ? \end{array} \quad \frac{x}{60} = \frac{35 \times 0,0156}{60} = 0,0091$$

$$\therefore \text{Donc } \sin 26^\circ 35' = 0,4384 + 0,0091 = 0,4475$$

Activité 3 : Calculez $\cos 72^\circ 14'$

$$\begin{array}{l} \cos 72^\circ = 0,3090 \\ \cos 73^\circ = 0,2924 \end{array} \quad \underline{DT} = 0,3090 - 0,2924 = 0,0166.$$

Une augmentation de l'angle de 1° correspond à une diminution du cosinus de la différence tabulaire D.T = 0,0166.

$$\begin{array}{l} 1^\circ = 60' \longrightarrow 0,0166 \\ 14' \longrightarrow x = ? \end{array} \quad \frac{x}{60} = \frac{14 \times 0,0166}{60} = 0,0038.$$

$$\text{D'où } \cos 72^\circ 14' = 0,3090 - 0,0038 = 0,3052 .$$

3°) Détermination d'un angle en degrés, minutes et secondes connaissant son Rapport trigonométrique :

Activité 4 : Déterminez l'angle $\underline{\alpha}$ en degrés, minutes et secondes sachant que $\sin \alpha = 0,4150$

$$\begin{array}{l}
 (\sin \\
 24^\circ = 0,4067 \quad | \quad DT = 0,4226 - 0,4067 = 0,0159. \\
 \sin \quad \quad \quad 24^\circ \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad 25^\circ | \\
 25^\circ = 0,4226 \quad | \sin \quad \quad \quad | \sin \quad \quad \quad \sin \\
 25^\circ - 24^\circ = 1^\circ \textcircled{R} \quad 0,4226 - 0,4067 = 0,0159 \quad 0,41 \quad \quad \quad 0,42 \\
 \quad \quad \quad \textcircled{R} \quad 067 \quad \quad \quad 0,4150 - 0,4067 = 0,0083 \quad | \quad 0,0159
 \end{array}$$

$$D'où \underline{\alpha} = 24^\circ + 0,5220^\circ = 24,5220^\circ \quad 0,5220 \times 60' = 31,32' \quad 0,32 \times 60'' = 19,20$$

$$. D'où \underline{\alpha} = 24^\circ 31' 19''$$

Activité 5 :

Déterminez l'angle $\underline{a}$ en degrés, minutes et secondes sachant que $\cos a = 0,3645$

$$\begin{array}{l}
 [\quad \cos \quad DT = 0,3746 - 0,3584 = 0,0162 \\
 68^\circ = 0,3746 \quad \quad \quad a | \cos \quad \quad \quad 69^\circ \\
 \cos \quad \quad \quad 0,3645 \quad \quad \quad | \\
 69^\circ = 0,3584 \quad \quad \quad \\
 69^\circ - 68^\circ = 1^\circ \textcircled{R} \quad DT = 0,0162 \quad \quad \quad (0,0162 \times 1^\circ) \\
 r \wedge \underline{a} - 68^\circ = \frac{0,0162}{0,0083} = 0,6234^\circ \\
 a - 68^\circ \textcircled{R} \quad 0,3746 - 0,3645 = 0,0101 \quad , \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad , \quad 0 \quad 1 \quad 6 \quad 2 \\
 \quad 89
 \end{array}$$

$$D'où a = 68^\circ + 0,6234^\circ = 68,6234^\circ$$

$$0,6234 \times 60' = 37,404'$$

$$0,404 \times 60'' = 24,24'' ;$$

$$D'où a = 68^\circ 37' 24''$$