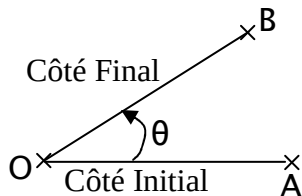


TRIGONOMÉTRIE

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

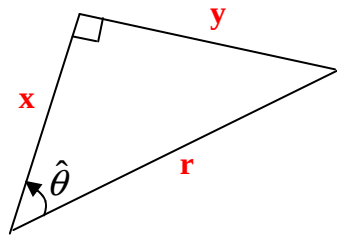
I – Les angles :



Les angles sont construits à partir de la rotation d'une demi-droite autour de son extrémité dans le plan. La position initiale de la demi-droite [OA) est le **côté initial de l'angle $\hat{\theta}$** et la position finale de la demi-droite [OB) est le **côté final de l'angle $\hat{\theta}$** . Les deux côtés se rencontrent en un point appelé le **sommet de l'angle $\hat{\theta}$** .

II – Les Rapports Trigonométriques :

Soit un triangle rectangle de côtés respectifs x ; y et r .



$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{hypothénuse}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{côté adjacent à } \theta}{\text{hypothénuse}} = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{côté adjacent à } \theta} = \frac{y}{x}$$

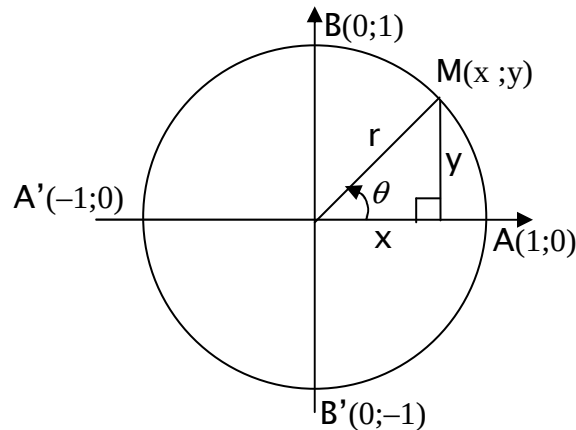
$$\operatorname{cot} g \theta = \frac{\text{côté adjacent à } \theta}{\text{côté opposé à } \theta} = \frac{x}{y}$$

Remarques : $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ et $\operatorname{cot} g \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

III– Fonctions trigonométriques et cercle trigonométrique :

1°) Définition du cercle trigonométrique :

Soit le repère orthonormé (O, A, B) du plan. On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O et de rayon R = 1.



Soit $M(x ; y)$ un point du cercle trigonométrique. $\sin \theta = \frac{y}{r}$ et $\cos \theta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow$
 $y = r \times \sin \theta$ et $x = r \times \cos \theta$ Puisque $r = 1$ alors $y = \sin \theta$ et $x = \cos \theta$ donc
 $M(\cos \theta ; \sin \theta) = (x ; y)$

2°) Mesures d'un angle :

La grandeur d'un angle est mesurée en **degrés** ; **radians** ; et **grades**. $1^\circ = 60'$ et $1' = 60''$.

$$. \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rd} = 400 \text{ grs} \quad ; \quad 180^\circ = \pi \text{ rd} = 200 \text{ grs} \quad ; \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rd} = 100 \text{ grs} .$$

Exemple: Convertir 120° en radians puis en grades.

Table des valeurs de quelques Angles remarquables :

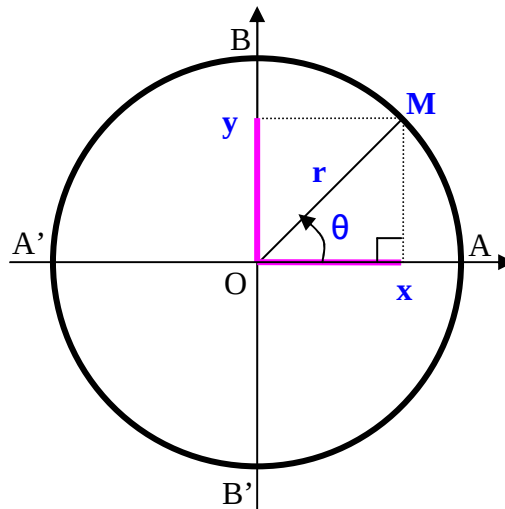
Angles	0° 0 rd	30° $\frac{\pi}{6} \text{ rd}$	45° $\frac{\pi}{4} \text{ rd}$	60° $\frac{\pi}{3} \text{ rd}$	90° $\frac{\pi}{2} \text{ rd}$	120° $\frac{2\pi}{3} \text{ rd}$	135° $\frac{3\pi}{4} \text{ rd}$	150° $\frac{5\pi}{6} \text{ rd}$	180° $\pi \text{ rd}$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

$$A(1; 0); B(0; 1); A'(-1; 0); B'(0; -1).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1; \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

IV- Identités Trigonométriques :

1°) Relation Fondamentale :



Les fonctions circulaires d'un même angle (θ) sont liées par les relations suivantes :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1; \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}; \quad \operatorname{cotg}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)}.$$

Démonstration :

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle OxM :

$x^2 + y^2 = r^2$ en divisant par r^2 on a

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \quad \text{comme} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad \text{Alors} \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

2°) Autres Relations :

Nous savons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Si $\cos x \neq 0$ en divisant par $\cos^2 x$,

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \quad \text{D'où :} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

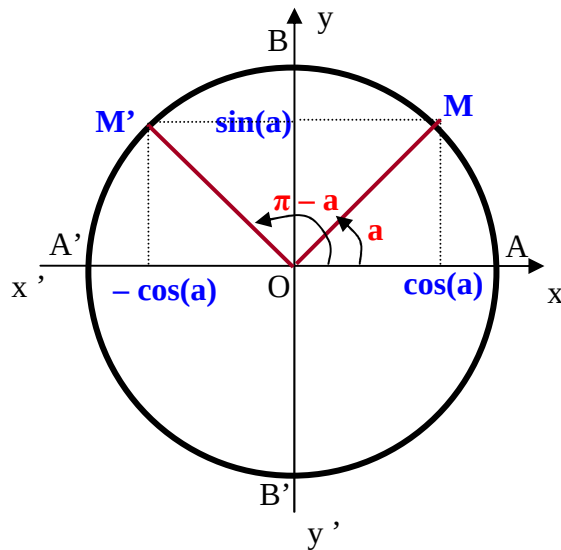
Si $\sin x \neq 0$ en divisant par $\sin^2 x$,

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$$

$$\text{D'où :} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

3°) Angles supplémentaires : $(\pi - a)$ et (a)

– Deux angles sont dits **supplémentaires** si leur somme est égale à π radian ou 180° .



$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

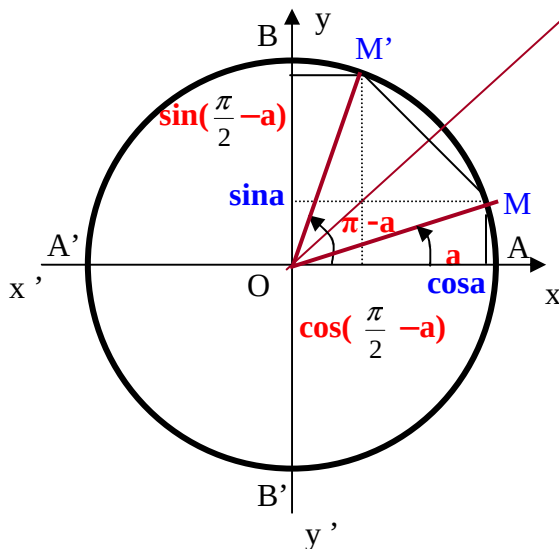
$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$

$$\operatorname{tg}(\pi - a) = -\operatorname{tg}(a)$$

– Deux angles s **supplémentaires** ont **même sinus** et de **cosinus opposés**.

4°) Angles complémentaires : $(\pi/2 - a)$ et (a)

– Deux angles sont dits **complémentaires** si leur somme est égale à $\frac{\pi}{2}$ radian ou 90° .



M et M' sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice.

$$\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$$

$$\operatorname{Cos}(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$$

$$\operatorname{Tg}(\frac{\pi}{2} - a) = \operatorname{cotg}(a)$$

– Deux angles sont **complémentaires** si le **sinus de l'un** est **égal** au **cosinus de l'autre**.

V- Détermination de rapports trigonométriques :

1°) Si le rapport est un nombre entier de degrés :

Une simple lecture de la table trigonométrique nous permet de déterminer sa valeur.

Exemples : $\sin 28^\circ = 0,4695$; $\cos 43^\circ = 0,7314$; $\cos 87^\circ = 0,0523$;

$$\sin 73^\circ = 0,9563 \quad ; \quad \operatorname{tg} 66^\circ = 2,2460.$$

2°) Si le rapport n'est pas un nombre entier de degrés :

On procède à [une interpolation linéaire](#).

Exemple 1 : Calculer $\sin 26^\circ 35'$

On remarque que le rapport ne figure pas sur la table trigonométrique.

$$\begin{cases} \sin 26^\circ = 0,4384 \\ \sin 27^\circ = 0,4540 \end{cases} \quad \sin 26^\circ \leq \sin 26^\circ 35' \leq \sin 27^\circ .$$

La différence $0,4540 - 0,4384 = 0,0156$ est appelée la [différence Tabulaire \(D.T\)](#) ; elle correspond à une augmentation de l'angle de $1^\circ = 60'$.

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ = 60' \rightarrow 0,0156 \\ 35' \rightarrow x = ? \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{35 \times 0,0156}{60} = 0,0091$$

$$\boxed{\text{Donc } \sin 26^\circ 35' = 0,4384 + 0,0091 = 0,4475}$$

Exemple 2 : Calculer $\cos 72^\circ 14'$

$$\begin{cases} \cos 72^\circ = 0,3090 \\ \cos 73^\circ = 0,2924 \end{cases} \quad DT = 0,3090 - 0,2924 = 0,0166 .$$

Une augmentation de l'angle de 1° correspond à une diminution du cosinus de la différence tabulaire $D.T = 0,0166$.

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ = 60' \rightarrow 0,0166 \\ 35' \rightarrow x = ? \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{35 \times 0,0166}{60} = 0,0038 .$$

$$\boxed{\text{D'où } \cos 72^\circ 14' = 0,3090 - 0,0038 = 0,3052}$$

3°) Détermination d'un angle en degrés, minutes et secondes connaissant son Rapport trigonométrique :

Exemple 1 : Déterminer l'angle θ en degrés, minutes et secondes sachant que $\sin \theta = 0,4150$.

$$\begin{cases} \sin 24^\circ = 0,4067 \\ \sin 25^\circ = 0,4226 \end{cases} \quad DT = 0,4226 - 0,4067 = 0,0159 .$$

24°	θ	25°
$\downarrow \sin$	$\downarrow \sin$	$\downarrow \sin$
0,4067	0,4150	0,4226

$$\begin{aligned} 25^\circ - 24^\circ = 1^\circ &\rightarrow 0,4226 - 0,4067 = 0,0159 \\ \theta - 24^\circ &\rightarrow 0,4150 - 0,4067 = 0,0083 \end{aligned} \parallel \Rightarrow \theta - 24^\circ = \frac{0,0083 \times 1^\circ}{0,0159} = 0,5220^\circ$$

$$\text{D'où } \theta = 24^\circ + 0,5220^\circ = \underline{24,5220^\circ}$$

$$0,5220 \times 60' = \underline{31,32'}$$

$$0,3132 \times 60'' = \underline{18,79''}$$

$$\boxed{\text{D'où } \theta = 24^\circ 31' 18'' .}$$

Exemple 2 :

Déterminer l'angle α en degrés, minutes et secondes sachant que $\cos \alpha = 0,3645$.

$$\begin{cases} \cos 68^\circ = 0,3746 \\ \cos 69^\circ = 0,3584 \end{cases} \quad DT = 0,3746 - 0,3584 = 0,0162$$

68°	α	69°
$\downarrow \cos$	$\downarrow \cos$	$\downarrow \cos$
0,3746	0,3645	0,3589

$$\begin{aligned} 69^\circ - 68^\circ = 1^\circ &\rightarrow DT = 0,0162 \\ \alpha - 68^\circ &\rightarrow 0,3746 - 0,3645 = 0,0101 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 69^\circ - 68^\circ = 1^\circ \\ \alpha - 68^\circ \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \alpha - 68^\circ = \frac{(0,0101) \times 1^\circ}{0,0162} = 0,6234^\circ .$$

$$\text{D'où } \alpha = 68^\circ + 0,6234^\circ = \underline{68,6234^\circ}$$

$$0,6234 \times 60' = \underline{37,404'}$$

$$0,404 \times 60'' = \underline{24,24''} ;$$

$$\boxed{\text{D'où } \alpha = 68^\circ 37' 24'' .}$$