

FORMULAIRE DE TRIGONOMETRIE

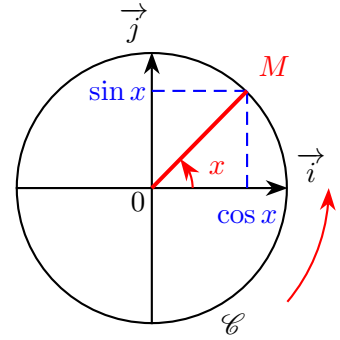
I. Cosinus et sinus d'un réel.

1. Définition :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

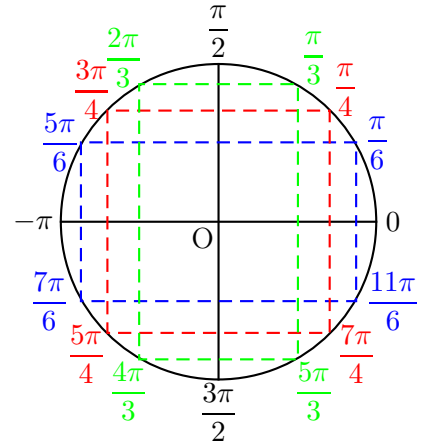
Pour tout réel x , le point M de $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x \text{ rad}$ a pour :

- abscisse $\cos x$
- ordonnée $\sin x$



2. Cosinus et sinus d'angles particuliers :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0



II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus.

1. Périodicité :

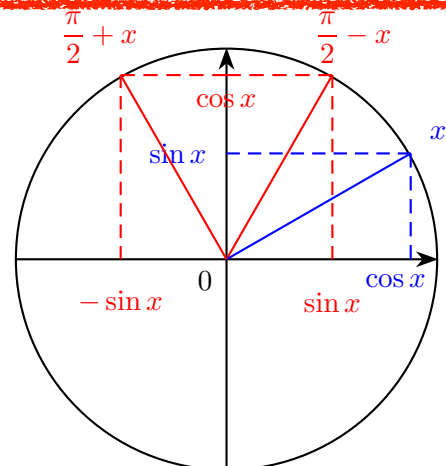
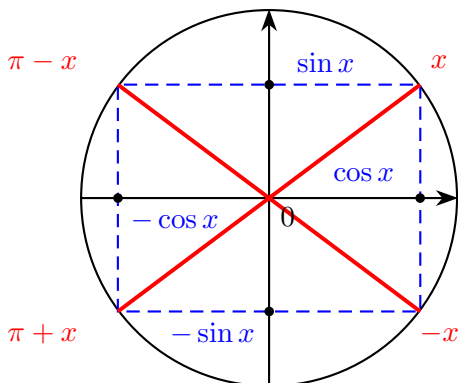
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques.

2. Angles associés :

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$



3. Formules d'addition :

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

4. Formules de duplication et linéarisation :

Pour tout réel a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

III. Etude des fonctions cosinus et sinus.

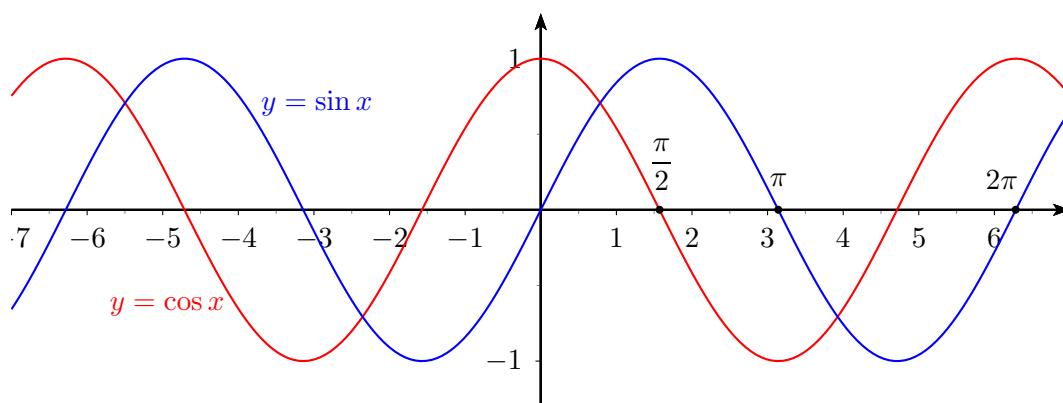
1. Dérivée :

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

♣ si $f(x) = \cos x$ alors $f'(x) = -\sin x$.

♣ si $g(x) = \sin x$ alors $g'(x) = \cos x$.

2. Courbes représentatives :



Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

Extensions : $\cos^3(a) = \frac{\cos(3a) + 3\cos(a)}{4}$

$$\sin^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3\sin(a)}{4}$$

$$\tan^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3\sin(a)}{\cos(3a) + 3\cos(a)}$$

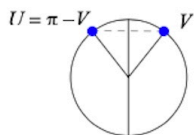
Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \quad \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

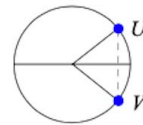
Résolution d'équations trigonométriques



$$\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow (U = V [2\pi] \text{ ou } U = -V [2\pi])$$

$$\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow (U = V [2\pi] \text{ ou } U = \pi - V [2\pi])$$

$$\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V [\pi]$$



Fiche de trigonométrie

1 Lignes trigonométriques des angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

2 Formules élémentaires

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cotan x = \frac{1}{\tan x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

3 Formules de symétrie et de déphasage

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

4 Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

5 Formules de duplication et de linéarisation

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

6 Lignes trigonométriques en fonction de l'angle moitié

$$t = \tan \frac{x}{2}, \text{ alors } \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

7 Transformation produit-somme et somme-produit

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \times \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \times \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \times \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \times \cos \frac{p+q}{2}$$

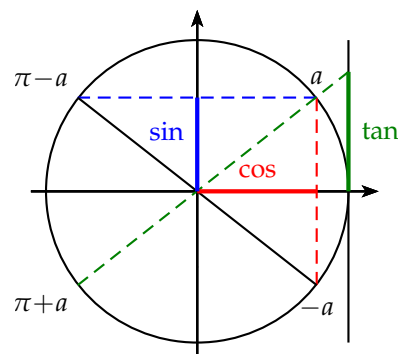
8 Équations trigonométriques

- Équations élémentaires

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2k\pi \text{ ou} \\ b = (\pi - a) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2k\pi \text{ ou} \\ b = -a + 2k\pi \end{cases}$$

$$\tan a = \tan b \Leftrightarrow b = a + k\pi$$



- Équations du type $a \cos x + b \sin y = c$, on transforme la forme en :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \varphi) = c \quad \text{ou} \quad \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \psi) = c$$