

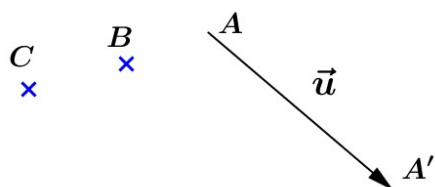
VECTEURS DU PLAN

1. Construction d'un représentant d'un vecteur :

Activité 1 :

Soit t la translation qui envoie A sur A' , B sur B' et C sur C' .

Construire B' et C' .



Synthèse :

Les couples de points (bipoints) $(A; A')$, $(B; B')$ et $(C; C')$ définissent un vecteur caractérisé par :

- une direction : celle de la droite (AA') ,
- un sens : de A vers A' ,
- une longueur : la longueur AA' .

On note $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$. On dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un représentant de $\vec{u}$.

A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et A' son extrémité.

Un vecteur a une infinité de représentants. $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont également des représentants de $\vec{u}$.

Remarque :

La longueur d'un vecteur est aussi appelée la norme du vecteur.

Note historique :



« vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)

Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\overrightarrow{AB}$ en 1920.

A l'origine des vecteurs, un italien, **Giusto Bellavitis** (1803-1880) qui les désignait comme *segments équipollents*.

Conclusion :

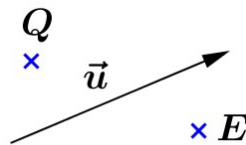
Un vecteur a trois caractéristiques :

- Une direction ;
- Un sens ;
- Une longueur.

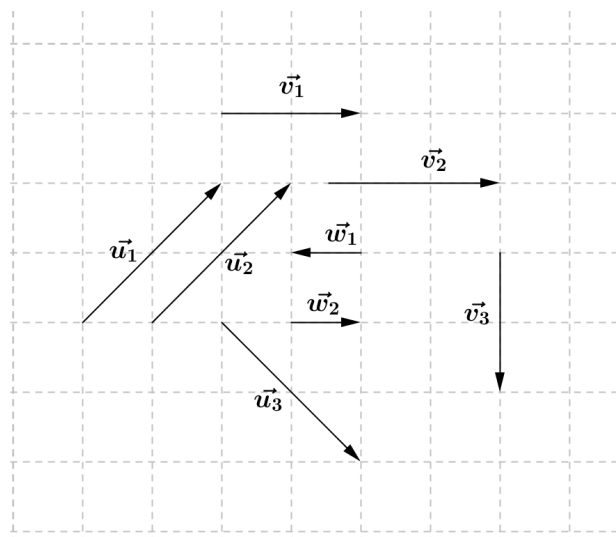
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Activité 2 :

- a) Construire un représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine E et un autre représentant d'extrémité Q .



- b) Soit les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ représentés ci-dessous :



Compléter le tableau suivant par "Oui" ou "Non"

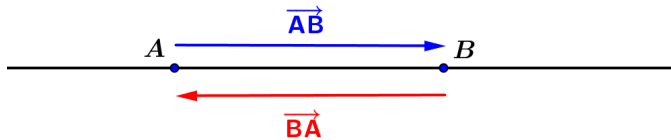
	$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$	$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$	$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$	$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$	$\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$
ont même direction					
ont même sens					
ont même longueur					
sont égaux					

2. Vecteurs opposés :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur.

Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A . Il est noté $\overrightarrow{BA}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction et même norme (longueur) mais sont de sens contraires. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.



On écrit : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Remarque :

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul lorsque les points A et B sont confondus.

On note : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

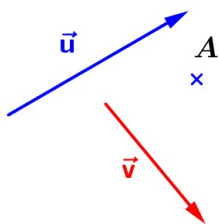
Pour tout point M , on a : $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

3. Somme de vecteurs :

Activité 3 :

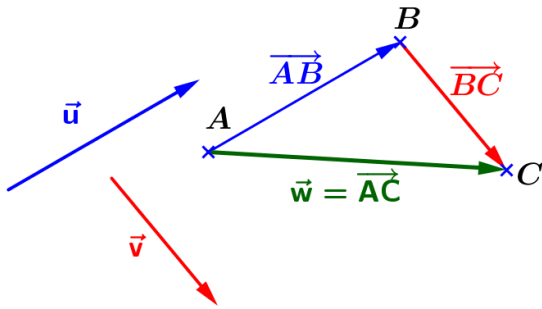
Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Soit trois points A , B et C tels que $t_{\vec{u}}(A) = B$ et $t_{\vec{v}}(B) = C$.



- Construire les points B et C .
- Soit $\vec{w}$ un représentant du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Comparer $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{w}}$.

Synthèse :



Propriété :

La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

On appelle somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Technique de construction 1 :

Pour additionner des vecteurs, on les met bout à bout (origine – extrémité – origine – extrémité...). Le vecteur résultant a l'origine du premier vecteur et l'extrémité du dernier vecteur de la somme.

Activité 4 :

Construire un vecteur représentant la somme des vecteurs dans chacun des cas suivants :

a) 	b) 	c) 	d)
e) 	f) 	g) 	h)

Conséquence 1: La relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Note historique :

Michel Chasles (Fr, 1793-1880) : La relation n'est pas de lui, mais nommée ainsi en hommage à ses travaux sur les vecteurs.

Homme naïf, on raconte qu'il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d'arc à sa mère, Vercingétorix à César,...) !



Activité 5 :

Simplifier les écritures suivantes :

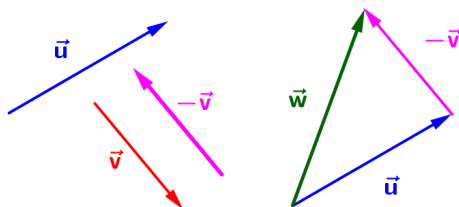
- a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$ d) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

Conséquence 2 : Différence de deux vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.

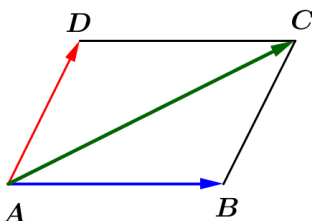
On appelle différence du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$, tel que :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$



Conséquence 3: Propriété caractéristique du parallélogramme

Dire que $ABCD$ est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Démonstration :

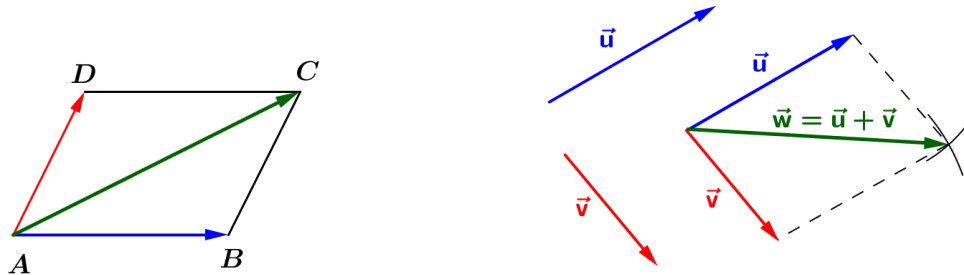
$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles.

Technique de construction 2 :

Soit A , B et D trois points. Pour construire un représentant du vecteur $\vec{AB} + \vec{AD}$, on construit le point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Le vecteur $\vec{AC}$ est un représentant du vecteur $\vec{AB} + \vec{AD}$.

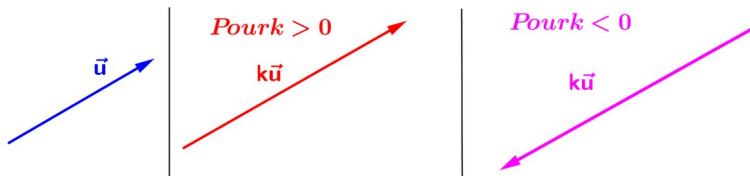


4. Multiplication d'un vecteur par un réel

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\vec{0}$ et k un nombre réel non nul.

On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k , le vecteur noté $k\vec{u}$:

- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$,
- de longueur égale à k fois la longueur de $\vec{u}$ si $k > 0$ et $-k$ fois sa longueur si $k < 0$.

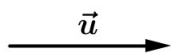


Remarque :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

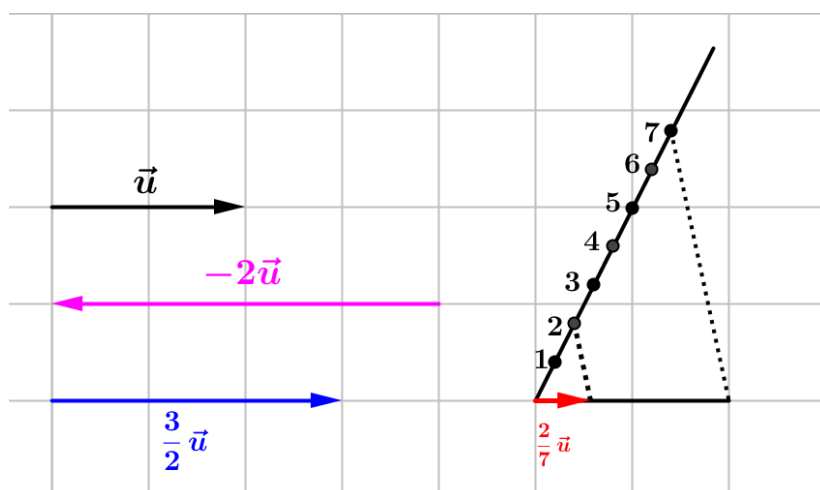
Activité 6 :

- a) Construire les vecteurs $-2\vec{u}$; $\frac{3}{2}\vec{u}$ et $\frac{2}{7}\vec{u}$.



- b) Que peut – on dire des directions des vecteurs $\vec{u}$; $-2\vec{u}$; $\frac{3}{2}\vec{u}$ et $\frac{2}{7}\vec{u}$.

Synthèse :



Les vecteurs $\vec{u}$; $-2\vec{u}$; $\frac{3}{2}\vec{u}$ et $\frac{2}{7}\vec{u}$ ont tous la même direction.

Deux vecteurs qui ont la même direction sont dits colinéaires.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

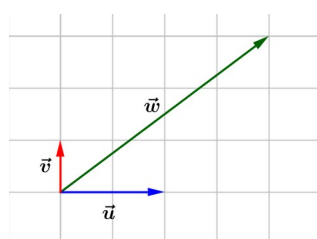
Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

5. Coordonnées d'un vecteur

Activité 7 :

Par lecture graphique, exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Synthèse :

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs de directions différentes et $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. On appelle $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de vecteurs du plan.

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, c'est-à-dire $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. x et y sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

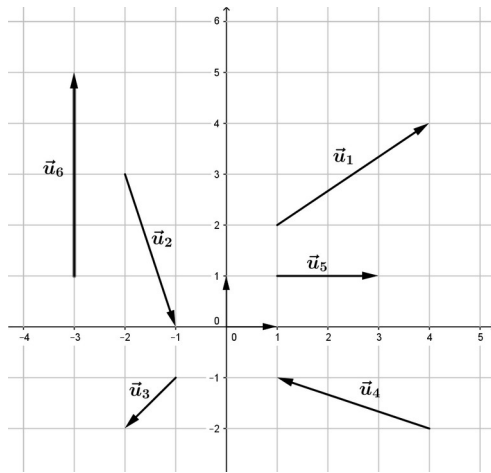
On note : $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Remarques :

- Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
- La base est dite orthogonale si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux (angle de 90°).
- La base est dite normée si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même longueur.
- La base est dite orthonormée si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et ont même longueur.

Activité 8 :

a) Lire les coordonnées des vecteurs suivants :

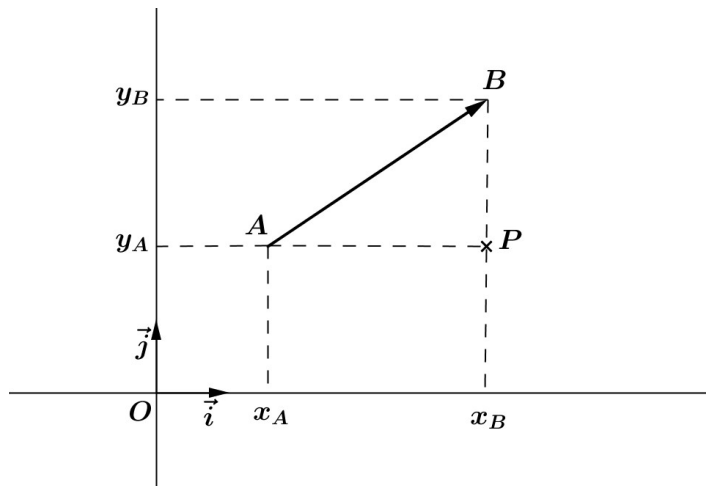


b) Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{q} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{r} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

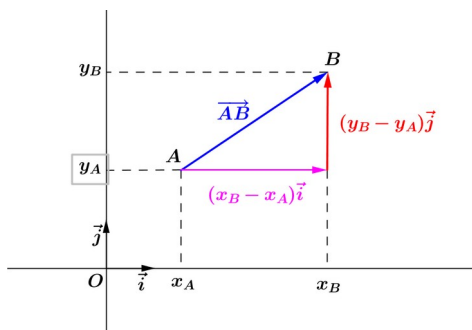
Activité 9 :

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points du plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.



- Écrire $\overline{AP}$ en fonction de x_A et x_B puis $\overline{PB}$ en fonction de y_A et y_B .
- En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- On rappelle que la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB .
Exprimer $\|\overrightarrow{AB}\|$ en fonction de x_A ; x_B ; y_A et y_B . (On pourra utiliser le théorème de Pythagore).

Synthèse :



On a : $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et $P \begin{pmatrix} x_B \\ y_A \end{pmatrix}$ d'où

$$\overline{AP} = x_B - x_A \text{ et } \overline{PB} = y_B - y_A.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ d'où

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AP^2 + PB^2$ d'où

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Propriétés :

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont égaux si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Remarque : Les coordonnées du vecteur nul sont $(0 ; 0)$.

Activité 10 :

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit les points $A(2 ; -3)$; $B(-1 ; 1)$; $C\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$; $\vec{CB}$ et $\vec{CA}$.
- En déduire les coordonnées de $\vec{BA}$; $\|\vec{AB}\|$ et $\|\vec{CA}\|$.
- Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = 3\vec{AB} - 4\vec{CB}$.
- Déterminer les coordonnées du point D tel que $2\vec{AD} - \vec{AB} = \vec{0}$.

6. Milieu d'un segment**Activité 11 :**

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points du plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

I étant le milieu de $[AB]$, on a : $\vec{AI} = \vec{IB}$. En déduire les coordonnées de I en fonction de x_A ; x_B ; y_A et y_B .

Synthèse :

On a : $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées : $I \left(\begin{array}{c} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right)$.

7. Coordonnées de vecteurs et colinéarité :

Activité 12 :

On rappelle que deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont dits colinéaires si et seulement si, il existe

un réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$ c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$.

A. Dire dans chacun des cas suivants si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$

B. Dédurre de la relation $\vec{u} = k \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$, que, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x y' - y x' = 0$.

Synthèse :

Pour vérifier si les vecteurs non nuls $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, on peut procéder comme suit :

- écrire $\vec{u}$ sous la forme $k \vec{v}$ ou $\vec{v}$ sous la forme $k' \vec{u}$ où k et k' sont des réels.
Cette méthode est plus pratique lorsqu'on s'aperçoit mentalement que les vecteurs sont colinéaires.

Exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{v} = -2 \vec{u}$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- lorsque $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$, tirer k dans la relation $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$. On aura $\begin{cases} k = \frac{x}{x'} \\ k = \frac{y}{y'} \end{cases}$.

Si on trouve la même valeur de k , c'est-à-dire $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si par contre on trouve deux valeurs différentes de k , alors les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exemple 1 : $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Soit k un nombre réel.

$$\vec{u} = k \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = -3k \\ 3 = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{5}{3} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

On trouve deux valeurs différentes de k .

Donc il n'existe aucun réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple 2 : $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$

Soit k un nombre réel.

$$\vec{u} = k \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -\frac{3}{2}k \\ 3 = \frac{9}{8}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{8}{3} \\ k = -\frac{24}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{8}{3} \\ k = -\frac{8}{3} \end{cases}.$$

On trouve une même valeur, donc $k = -\frac{8}{3}$ d'où $\vec{u} = -\frac{8}{3} \vec{v}$.

Cela nous permet de conclure que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- On sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\vec{u} = k \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$$

Puisque $\vec{v}$ est non nul, on a $x' \neq 0$ ou $y' \neq 0$.

- ◆ Si $x' \neq 0$, on a : $x = kx' \Leftrightarrow k = \frac{x}{x'}$ d'où

$$y = ky' \Leftrightarrow y = \frac{x}{x'} y' \Leftrightarrow x' y = x y' \Leftrightarrow x y' - x' y = 0.$$

- ◆ De même si $y' \neq 0$, en procédant comme précédemment, on retrouve $x y' - x' y = 0$.

L'expression $x y' - x' y$ est appelée le déterminant des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\text{Dét}(\vec{u} ; \vec{v})$ ou encore $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Conclusion :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x y' - x' y = 0$.

Remarques :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires puisque le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (ou $(\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC})$ ou $(\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DC})$ ou ...) sont colinéaires.
- Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou $(\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA})$ ou $(\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA})$ ou ...) sont colinéaires.

Activité 13 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- A. Soit les vecteurs $\vec{u}(3 ; -1)$; $\vec{v}(-6 ; -2)$ et $\vec{w}(2 ; x)$ (avec $x \in \mathbb{R}$).
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
 - Déterminer le réel x pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
- B. Soit les points : $A(-4 ; 1)$, $B(-1 ; -1)$, $C(2 ; -3)$, $D(-5 ; 6)$, $E(4 ; 0)$, $F(-2 ; 3)$ et $G(x ; 2)$.
- Montrer que les points A , B et C sont alignés.
 - Les points A , D et E sont-ils alignés ?
 - Les droites (CD) et (EB) sont-elles parallèles ?
 - Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?
 - Déterminer le réel x pour que (FG) et (AB) soient parallèles.