

Classe : 10ème Commune

Chapitre : 6

Durée : 12H

Vecteurs du plan :

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologiques

Compétences : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.

Composantes : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions, partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.

Manifestations : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues, inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.

Contenu :

Ressources Educatives :

Ressources humaines : Professeur, élèves,

Ressources Matérielles : Tableau, Livres, cahier, Chiffon, craie, règle, équerre, compas...

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

Séquence1 : Combinaison linéaire

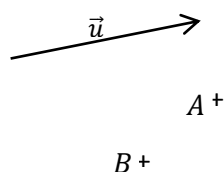
1) Egalité de vecteurs :

Activité :

Vecteur $\vec{u}$ est donné par un représentant. Les points A et B sont donnés.

1) Construire le représentant d'origine A de $\vec{u}$.

2) Construire le représentant d'extrémité B de $\vec{u}$.



Synthèse :

Définition :

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. On dit que $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} (AB)/(CD) \\ AB = CD \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé le vecteur nul et est noté $\vec{0}$.

L'ensemble des vecteurs du plan sera noter ϑ .

Remarque :

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

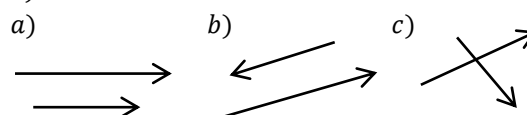
2) Opération sur les vecteurs :

a) Addition de vecteurs :

Activité :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés par des représentants.

1) Construire $\vec{u} + \vec{v}$ dans les cas suivants :



Propriétés :

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs, on a :

$$* \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$* (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$* \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

$$* \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

b) Multiplication d'un vecteur par un réel :

Activité :

Les vecteurs $\vec{u}$ est donné par un représentant.



Construire : $2\vec{u}$; $-3\vec{u}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$.

Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α, β deux réels :

$$* 1\vec{u} = \vec{u}$$

$$* \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$$

$$* (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$* \alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

$$* \alpha\vec{u} = \beta\vec{u} \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

Evaluation :

1) Simplifier les écritures :

$$a) \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v} + 3(\vec{u} - \vec{v})$$

$$b) 3(\vec{u} - 5\vec{v}) - 5(\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v})$$

On considère un vecteur $\vec{u}$ non nul. Résoudre les équations suivantes :

$$a) \vec{x} \in \vartheta; 4(5\vec{x} - \vec{u}) = \frac{2}{3}(\vec{x} - 3\vec{u})$$

$$b) x \in \mathbb{R}; (2x - 3)\vec{u} + 3\vec{u} = \vec{u} - 2x\vec{u}$$

c) Définition :

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Tout vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$ est appelé combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

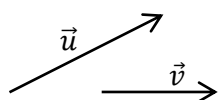
Exemple :

$2\vec{u} - 3\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{i} + \vec{j}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Evaluation :

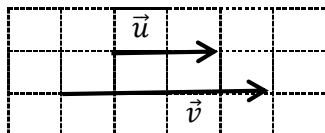
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés par des représentants.



Construire $2\vec{u} + 3\vec{v}$

3) Vecteurs colinéaires :

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés ci-dessous :



Quelle relation y a-t-il entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

On constate que $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{v}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Définition :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit colinéaire s'il existe un nombre réel non nul, k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$.

Remarque :

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils sont même direction.

Dans l'écriture $\vec{u} = k \vec{v}$.

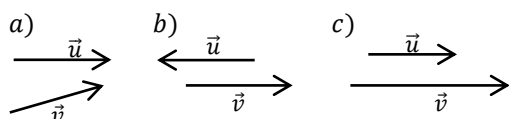
* Si k est positif, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens :

* Si k est négatif, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.

Evaluation :

1) on donne $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés par des représentants. Dire dans chacun des suivants si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires



Séquence2 : Base, coordonnées d'un vecteur

1) Définition :

Tout couple $(\vec{i}; \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires appelé base de $\mathcal{V}$.

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ signifie que $\vec{u}$ est de coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x; y)$.

Exemple :

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Si $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ alors le couple de réel $(2; -1)$ est appelé coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

2) Coordonnées d'une combinaison linéaire :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Si a et b sont des réels, les coordonnées d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'obtiennent comme indiqué ci-dessous.

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$a\vec{u}$	$a\vec{u} + b\vec{v}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ax + bx' \\ ay + by' \end{pmatrix}$

Evaluation :

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $3\vec{v}$, $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

3) Déterminant de deux vecteurs :

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Le nombre réel $xy' - x'y$ est le déterminant de

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est noté $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire si, et seulement si, $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

Evaluation :

Dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$, on donne $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2/5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 5/4 \\ y \end{pmatrix}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

- Trouver le réel y pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.

Préciser, pour cette valeur de y , si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont de même sens ou de sens contraires.