

## I- Combinaison linéaire de vecteurs

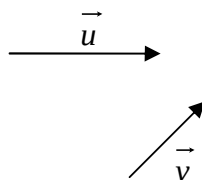
Dans toute la suite  $\mathcal{V}$  désigne l'ensemble de tous les vecteurs du plan.

### 1- Définition :

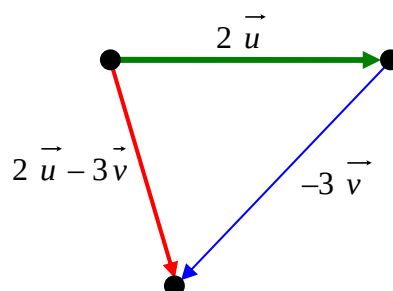
$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  étant deux vecteurs non nuls, on appelle combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  un vecteur  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

a) Exemples :  $\vec{w} = \vec{i} - 5\vec{j}$  ;  $\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  sont des combinaison linéaires de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

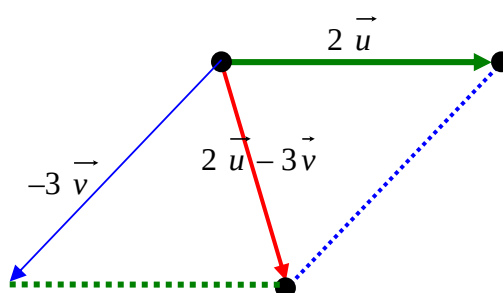
b) Construction d'un représentant d'une combinaison linéaire de vecteurs  
Construire le vecteur  $2\vec{u} - 3\vec{v}$ .



#### - Règle de la relation de Chasles



#### - Règle du parallélogramme



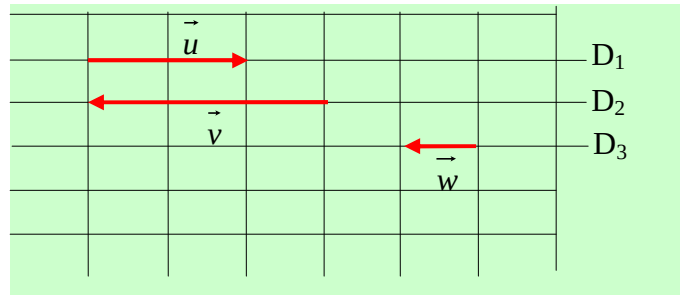
## 2- Vecteurs colinéaires

### a) Vecteurs de même direction

$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont même direction}) \Leftrightarrow (\text{il existe un réel non nul } k \text{ tel que } \vec{u} = k\vec{v})$ .

### b) Exemple :

Soient trois droites  $(D_1)$   $(D_2)$   $(D_3)$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  ;  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

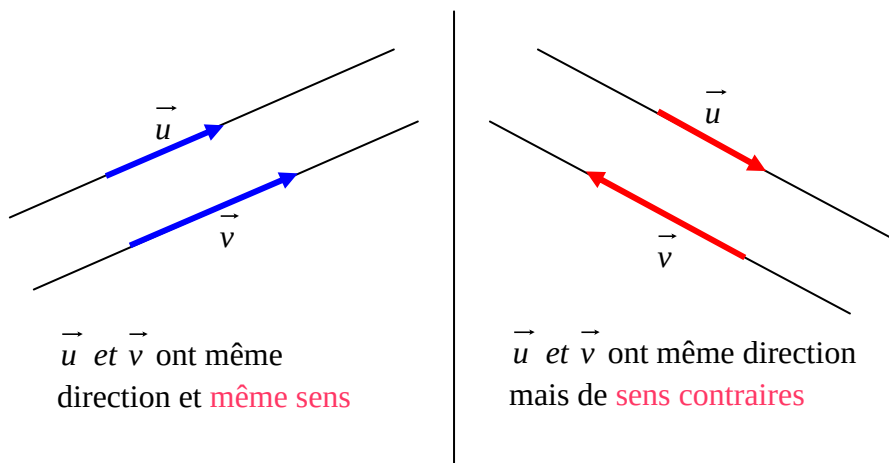


$\vec{v} = 3\vec{w}$  ;  $\vec{u} = -2\vec{w}$  ;  $\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{v}$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  ;  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ont même direction.

### c) Vecteurs de même sens

Soient  $k$  un réel non nul,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls tels que  $\vec{u} = k \times \vec{v}$ .

- Si  $k < 0$  alors on dit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de **sens contraires**
- Si  $k > 0$  alors on dit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de **même sens**.



### d) Vecteurs colinéaires

- Définition : soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathcal{V}$ .

$$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \bullet \text{ L'un des deux vecteurs est nul} \\ \bullet \text{ Ou ces deux vecteurs ont même direction} \end{array} \right)$$

- Remarque 1

$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires}) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls et de directions différentes})$

- Remarque 2

$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \Leftrightarrow (\text{il existe un réel } k \text{ non nul tel que } \vec{u} = k \times \vec{v})$

Exemple : Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que  $\frac{9}{2}\vec{u} + 5\vec{v} = 2\vec{v} + 3\vec{u}$ . Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires. Préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

*Solution*

$$\frac{9}{2}\vec{u} + 5\vec{v} = 2\vec{v} + 3\vec{u} \Leftrightarrow 9\vec{u} + 10\vec{v} = 4\vec{v} + 6\vec{u} \Leftrightarrow 3\vec{u} = -6\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = -2\vec{v}.$$

$k = -2$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** de **sens contraires**.

## II – Base dans $\mathcal{V}$ – Coordonnées d'un vecteur

### 1- Définition d'une base de $\mathcal{V}$

On appelle **base** de  $\mathcal{V}$  **tout couple**  $(\vec{i}; \vec{j})$  de **vecteurs non colinéaires**.

### 2- Théorème :

Dans une base  $(\vec{i}; \vec{j})$  de  $\mathcal{V}$ , tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{V}$  s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ; c'est-à-dire que :  $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

### 3- Définition :

Étant donnée une base  $(\vec{i}; \vec{j})$  de  $\mathcal{V}$ ,  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\vec{u} \in \mathcal{V}$ .

$(x; y)$  est le couple de coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$  signifie que :  $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$ .

On note :  $\vec{u}(x; y)$  ou  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

#### 4- Coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteur dans une base

$\mathcal{V}$  est muni d'une base  $(\vec{i}; \vec{j})$  ; on donne les vecteurs  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$ .

Considérons le vecteur  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ . Déterminer les coordonnées de  $\vec{w}$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

*Solution*

Dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$  on a :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ .

Écrire que  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = a(x\vec{i} + y\vec{j}) + b(x'\vec{i} + y'\vec{j})$

$$\vec{w} = (ax + bx')\vec{i} + (ay + by')\vec{j} \Leftrightarrow \vec{w}(ax + bx'; ay + by').$$

### III – Traduction analytique de la colinéarité

#### 1- Déterminant de deux vecteurs dans une base

$\mathcal{V}$  est muni d'une base  $(\vec{i}; \vec{j})$  ; on donne les vecteurs  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$ .

On appelle déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le réel noté :  $\det(\vec{u}; \vec{v})$  tel que :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

#### 2- Théorème

Étant donnée une base  $(\vec{i}; \vec{j})$  de  $\mathcal{V}$ , quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\mathcal{V}$ .

$$(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \Leftrightarrow (\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0).$$

$$((\vec{u}; \vec{v}) \text{ est une base de } V) \Leftrightarrow (\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0).$$