

CALCUL DANS $\mathbb{R}$: 10^{ème} Cm

Exo1 : calculer les nombres réels suivants :

$$A = \frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}; \quad B = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}; \quad C = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}; \quad D = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}; \quad E = \frac{1 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}};$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} - \frac{1}{7} + \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{4}{5}}; \quad G = \frac{\frac{\frac{8}{3} + \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{7}}}{\frac{\frac{5}{9} + 1}{\frac{4}{6} + 2}}; \quad H = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}{4 + \frac{2}{5}} \div \frac{\frac{4}{5} - \frac{6}{7}}{\frac{7}{5} + \frac{3}{7}}; \quad I = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} \times \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} \div \frac{2 + \frac{5}{6}}{2 - \frac{5}{6}};$$

$$J = (2\sqrt{8} - 3\sqrt{5} + 2)(2\sqrt{8} - 3\sqrt{5} - 2); \quad K = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1 \text{ pour } x = 1 + \sqrt{3}.$$

Exo2 : Ecrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombre premiers :

$$A = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6}; \quad B = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4}; \quad C = \frac{(-5^3) \times (-8)^3 \times (-9)^2}{(15)^2 \times (12)^4};$$

$$D = \frac{0,081 \times 0,36 \times 2560}{0,144 \times 2,16 \times 64}; \quad E = \frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4}; \quad F = \frac{10^2 \times 3^2}{8 \times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}.$$

Exo3 : Simplifier le plus possible les écritures suivantes (rendre rationnel le dénominateur) :

$$A = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}; \quad B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 3} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}; \quad C = \frac{\sqrt{27} + \sqrt{12} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1};$$

$$D = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}}{\sqrt{135} - \sqrt{15}}; \quad E = \sqrt{9(1 - \sqrt{3})^2}; \quad F = \sqrt{3(\sqrt{3} - 2)^2} - \sqrt{4(1 - \sqrt{3})^2};$$

$$G = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{15} - 1)^2; \quad H = \frac{2a - 1}{a + 2} + \frac{3 - a}{2 + a} + \frac{3 - a}{a - 3};$$

$$I = \left(\frac{2a}{3} - \frac{5a}{2}\right)^2 - \left(\frac{4a^2}{9} + \frac{25a^2}{4}\right);$$

$$J = a^4 \times b^2 \times c^{-3} \times a^{-2}; \quad K = \frac{a^3 \times b^5 \times c}{a^2 \times b^7}; \quad L = \frac{a^3 \times b^2 \times (ab)^{-4} \times (bc)^2}{(abc)^{-2} \times a^3 \times b}.$$

Application : calculer :

- J et K pour $a = -4, \quad b = 1, \quad c = 2.$
- L pour $a = -4, \quad b = 2, \quad c = -5.$

Exo3 : Comparer les nombres réels a et b suivants :

$$i_1) a = \frac{11}{3} \text{ et } b = \frac{22}{7}; \quad i_2) a = 3^{11} \text{ et } b = 9^5; \quad i_3) a = 2^{4003} \text{ et } b = 16^{1001};$$

$$i_4) a = \sqrt{(5)^7} \text{ et } b = 5^4; \quad i_5) a = 3\sqrt{7} \text{ et } b = 5\sqrt{3}; \quad i_6) a = 2 + \sqrt{5} \text{ et } b = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}};$$

$$i_7) a = \sqrt{2} - \sqrt{7} \text{ et } b = \sqrt{9 - 2\sqrt{14}}; \quad i_8) a = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{5} + 2};$$

$$i_9) a = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \text{ et } b = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}; \quad i_{10}) a = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}};$$

$$i_{11}) a = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}; \quad i_{12}) a = \frac{1}{1 - \sqrt{5}} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}.$$

Exo4 : Démontrer les égalités suivantes :

$$a) \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{4,5}; \quad b) \sqrt{\sqrt{2} + 1} \times \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 1; \quad c) \frac{\sqrt{20 - \sqrt{320}} - \sqrt{12 + \sqrt{48}}}{\sqrt{3 + \sqrt{3}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} = -2;$$

$$d) \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3 + \sqrt{2}} - \sqrt{6}} = \frac{1}{2}; \quad e) \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}} \text{ pour } a > b \geq 0;$$

$$f) \left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right)^2 = 2(a + b) \text{ pour } a > b \geq 0.$$

Exo5 :

1) Trouver l'écriture décimale illimitée des fractions suivantes sans utiliser une calculatrice :

$$\frac{45}{37}; \quad \frac{124}{9}; \quad \frac{71}{9}; \quad \frac{1926}{99}; \quad \frac{3578}{999}; \quad \frac{78210}{990}.$$

2) Trouver l'écriture fractionnaire des écritures décimales illimitées suivantes :

$$a = 6,\underline{8}...; \quad b = 12,\underline{14}...; \quad c = 5,\underline{583}...; \quad d = 7,\underline{090}...; \quad e = 72,\underline{357}...; \quad f = -3,\underline{095}...$$

3) On donne $a = 4,\underline{27}...$ et $b = -0,\underline{3}...$; calculer : $c = a - b$ et $d = c - b$.

4) Soient $x = 2,\underline{314}...$ et $y = -1,\underline{12}...$;

a) Ecrire x et y sous forme de fraction sachant que x est périodique à 10^{-1} près.

b) Calculer xy ; $x - y$ et $\frac{x}{y}$.

5) Comparer les nombres $a = 2,\underline{314}...$; $b = 2,\underline{314}...$; $c = 2,\underline{314}...$ et $d = 2,314$.

6) Résoudre dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{D}$ et dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) 3x + 2 = 0; \quad b) 2x - 4 = 0; \quad c) 10^3x + 2 = 5; \quad d) 2x - \sqrt[3]{2} = \pi.$$

Exo6 : On donne les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 5\}; B = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{3}{2} \leq x < 4\right\}; C = \{x \in \mathbb{R} / -14 < x \leq 14\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / -17 < x < 1\}; E = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}; F = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 10\};$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} / -9 \leq x < -1 \text{ et } 0 < x \leq \sqrt{5}\}; H = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < 19 \text{ et } -19 < x \leq 2\};$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} / -91 \leq x < 0 \text{ ou } 1 < x \leq 18\}; H = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 11 \text{ ou } -1 < x \leq \sqrt{2}\}.$$

1. Ecrire chaque ensemble sous forme d'intervalle, puis donner sa représentation graphique ;
2. Ecrire sous forme d'ensemble, puis sous forme d'intervalle les ensembles :

$$A \cup B; A \cap B; C \cup D; C \cap D; E \cup F; E \cap F.$$

3. Déterminer : $A \cap \mathbb{Z}; A \cap \mathbb{N}; B \cap \mathbb{Z}; B \cap \mathbb{N}; A \cap B \cap \mathbb{Z}; A \cap B \cap \mathbb{N}.$

Exo7 : Ecrire sous forme d'ensemble, puis donner la représentation graphique des intervalles suivants :

$$A = [0; 12]; B =]-3; 3[; C =]-5; -1[; D = [-\sqrt{3}; 1[; E =]-\infty; 0[; F =]2; +\infty[$$

$$G =]-2; 0[\cup [2; 7]; H = [-13; -2[\cup]-1; 5]; I =]-\infty; 3] \cup [7; 25];$$

$$J = \left[-\frac{2}{3}; 0\right] \cup [3; +\infty[; K =]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[; L =]-\infty; -8[\cup [8; +\infty[.$$

Exo8 : Déterminer l'amplitude A , le rayon r et le centre C des intervalles suivants :

$$A = [-2; 8]; B =]-11; -3[; C = [0; 12]; D =]-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}[; E = \left]-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right[;$$

$$F = \left[\frac{5}{4}; \frac{4}{3}\right]; G = \left[-\frac{5}{4}; 3\right]; H = \left]\frac{5}{4}; 11\right[; I = \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right[; J = \left]\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[.$$

Exo9 : Déterminer l'origine a et l'extrémité b de chacun des intervalles de rayon et de centre donné ci-dessous :

$$\bar{I}(3; 5); I(-7; 4); \bar{I}(6; 6); I\left(1; \frac{5}{2}\right); \bar{I}\left(\frac{31}{24}; \frac{1}{24}\right); I(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}); \bar{I}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right).$$

Exo10 : Le nombre réel x appartient à l'intervalle $I = [-1; 3]$; déterminer à quelle intervalle appartient chacun des nombres suivants :

$$A(x) = 2x - 5; B(x) = -2x + 1; C(x) = |2x + 3|; D(x) = -\frac{3}{1-x}.$$

Exo11 : Résoudre géométriquement les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$|x - 1| \leq 3 ; \quad |3x - 9| = 27 ; \quad |x - 4| - \frac{1}{2} = 0 ; \quad |-2x + 7| = 5 ; \quad |2x - 1| \leq 2 ;$$

$$|x + 2| < -2 ; \quad |x - 1| - 8 \leq -5 ; \quad |x| < 3 ; \quad |1 - x| \geq 4 ; \quad |-2x - 6| \geq 4 ;$$

$$|x| - \frac{1}{2} > 0 ; \quad 2|x| - 3 \leq -1 ; \quad \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right| > 3 ; \quad 2 = \frac{4}{|x|} ; \quad 1 < |3x - 1| \leq 3 ;$$

$$|x - 2| = |x + 3| ; \quad \left| \frac{3}{2} - x \right| \leq \frac{5}{3} ; \quad |x - 2| \leq |x + 5| ; \quad |x + 1| > |x - 7| .$$

Exo12 : Dans chacun des cas suivants, déterminer Des encadrements :

$$x + y ; \quad x - y ; \quad xy ; \quad x^2 ; \quad \frac{1}{x} ; \quad \frac{x}{y} .$$

- a) $2,1 < x < 2,2$ et $3,3 < y < 3,4$.
 b) $-1,5 < x < -1,4$ et $5 < y < 5,1$.
 c) $-4,1 < x < -4$ et $-0,9 < y < -0,8$.

Exo13 :

- 1) On donne : $A(x) = 2x^3 - 5$ et $1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$.
 - a) Donner un encadrement distingué d'amplitude 10^{-2} de $A(\sqrt{2})$.
 - b) Donner l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $A(\sqrt{2})$.
 - c) Donner l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de $A(\sqrt{2})$.
- 2) Montrer que 7,23 est une valeur approchée de $\frac{123}{13}$ à $6 \cdot 10^{-3}$.
- 3) Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $5 \cdot 10^{-4}$ près.

Exo14 :

- 1) a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation : $|x + 2| \leq 8$.
 c) Soit $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{S}$ défini par : $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{S} \text{ et } x \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{S} \cap \mathbb{Z}$. Ecrire par énumération ou par extension les éléments de $\mathcal{A}$.
 d) Citer deux minorants et trois majorants de $\mathcal{A}$.
 e) Quel est l'élément minimum et l'élément maximum de $\mathcal{A}$?
- 2) a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation : $|3x - 12| \leq 3$.
 b) Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{S}$ défini par : $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{S} \text{ et } x \in \mathbb{N}\} = \mathcal{S} \cap \mathbb{N}$. Ecrire par énumération ou par extension les éléments de $\mathcal{B}$.
 c) Citer trois majorants et trois minorants de $\mathcal{B}$.
 d) Quel est l'élément maximum et l'élément minimum de $\mathcal{B}$?

