

I. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

1. Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$

NB : L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$

2. L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -2; 0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$.

NB :

L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté : $\mathbb{Z}^+$ tel que $\mathbb{Z}^+ = \{0; +1; \dots, +\infty\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté : $\mathbb{Z}^-$ tel que $\mathbb{Z}^- = \{-\infty, \dots, -2; -1, \dots, 0\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}^* = \{-\infty, \dots, -2; -1, \dots, +1; +2, \dots, +\infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_+^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}_+^* = \{+1; +2; \dots, +\infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_-^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}_-^* = \{-\infty, \dots, -2; -1\}$$

3. L'ensemble des nombres décimaux:

Un nombre est écrit sous la forme décimale s'il est de la forme

$$a \cdot 10^p \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{Z}$$

Un nombre est dit décimal s'il peut se mettre sous la forme

$$\frac{P}{10^n} \text{ avec } P \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

4. L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{P}{Q} \text{ avec } P \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

5. L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme : $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{R} = \{-\infty; -\sqrt{2}; -\frac{3}{2}; -2; 0; 1; 2; \sqrt{2}; \frac{3}{2}, \dots, +\infty\}.$$

CALCUL DANS IR LTB

Exercice d'application

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.

ID désigne l'ensemble des décimaux.

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels .

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	ID	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
2,5			×	×	×
12					
$-\frac{2}{3}$					
$\sqrt{5}$					
$-\frac{63}{7}$					
π					
$\frac{5}{8}$					
$\frac{\sqrt{3}}{7}$					

2. Répondre par vrai ou faux

$$\sqrt{3} \in ID ; \frac{5}{8} \in ID ; -63 \in \mathbb{N} ; \pi \in \mathbb{N}$$

$$\text{NB : } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

II. Différentes écritures d'un nombre réel :

Un nombre réel peut admettre plusieurs formes d'écriture. Ainsi on a :

1. Écriture sous forme d'une fraction :

On dit qu'un réel est sous forme de fraction lorsqu'il est écrit sous la forme

$$\frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*.$$

2. Écriture décimale – nombres décimaux :

Un nombre est écrit sous la forme décimale s'il est de la forme $a.10^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$.

Un nombre est dit décimal s'il peut se mettre sous la forme $\frac{P}{10^n}$ avec $P \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

3. Écriture décimale illimitée :

En effectuant la division de 45 par 37, on constate que les chiffres 216 se répètent infiniment.

CALCUL DANS IR LTB

On écrit : $\frac{45}{37} = 1, \underline{216}$. Cette écriture est appelée **l'écriture décimale illimitée** de $\frac{45}{37}$;

216 est appelée la **partie périodique**.

4. Classification des nombres réels suivants leurs écritures décimales illimitées :

Activité :

On donne les nombres réels suivants : $a = -2, \underline{7} \dots$, $b = 32,123432762890 \dots$ et $c = 32,1 \underline{49}$

Consigne :

- 1) Calculez : $10a$ puis $10a - a$; déduisez-en la valeur de a sous forme d'une fraction.
- 2) Calculez : $1000c$ puis $1000c - 10c$; déduisez-en la valeur de c sous forme d'une fraction.
- 3) Par un procédé analogue à celles des deux questions précédentes, pouvez-vous écrire b sous forme de fraction ?

Solution

Synthèse :

La technique utilisée ici, permet de passer de l'**écriture décimale illimitée périodique** à l'**écriture fractionnaire**.

Pour passer de l'**écriture fractionnaire** à l'**écriture décimale illimitée**, il suffit d'effectuer la division.

a. Nombres réels dont l'écriture décimale illimitée est périodique :

Exemple : On donne les réels $a = 2,0 \underline{458}$ et $b = -2,8 \underline{52}$

$$a = 2,0 \underline{458} \qquad b = -2,8 \underline{52}$$

$$\begin{aligned}
 a = 2,0 \underline{458} &\Leftrightarrow 1000a - 10a = 20458 - 20 \\
 10a = 20, \underline{458} &\Leftrightarrow 9990a = 20438 \\
 1000a = 20458, \underline{458} &\Leftrightarrow a = \frac{20438}{9990} = \frac{10219}{4995}
 \end{aligned}$$

b. Nombres réels dont l'écriture décimale illimitée est non périodique :

Certains réels tels que $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$, ... n'admettent pas une écriture décimale illimitée périodique. On dit qu'ils ont une écriture décimale illimitée. On ne peut pas écrire ces nombres sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b des entiers relatifs avec $b \neq 0$.

Remarque : Toute écriture décimale représente un nombre réel.

Exercice d'application :

Donner le plus petit ensemble d'appartenance de chacun des nombres suivants :

$$a = \frac{24}{6}, b = -3, c = \frac{3}{5}, d = -\frac{18}{2}, e = \sqrt{9}, f = \sqrt{3}, g = \frac{3}{11}, h = \pi.$$