

1. ADDITION ET SOUSTRACTION

1.1. Aspects mathématiques

1.1.1. Notion d'opération

On appelle « opération dans un ensemble » un procédé qui permet d'associer à tout couple de nombres de cet ensemble un nombre unique du même ensemble.

L'addition dans $\mathbb{N}$ est une opération car elle permet d'associer à tout couple de nombres entiers naturels un nombre qui est leur somme et qui est aussi un entier naturel.

Compte tenu de cette définition, la soustraction n'est pas une opération dans $\mathbb{N}$: il existe des couples d'entiers naturels a et b pour lesquels la différence $a - b$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$. C'est le cas pour 1 et 5, la différence $1 - 5$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$.

1.1.2. L'addition dans $\mathbb{N}$

L'addition est l'opération qui, à deux nombres a et b , permet d'associer leur somme. La somme de deux nombres a et b est le cardinal de la réunion de deux ensembles disjoints, le premier contenant a éléments et le deuxième contenant b éléments. La somme de a et de b est notée $a + b$, a et b s'appellent alors les termes de la somme.

Remarque

Il ne faut pas confondre « somme » et « addition ». Le terme « addition » désigne l'opération alors que le terme « somme » désigne le résultat de l'opération appliquée à un couple de nombres particuliers.

Propriétés de l'addition dans $\mathbb{N}$:

- elle est commutative : pour tout couple de nombres a et b , $a + b = b + a$;
- elle est associative : quels que soient les nombres a , b , c , $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$;

- elle possède un élément neutre : c'est le nombre 0. Quel que soit l'entier a , $a + 0 = 0 + a = a$.

Les propriétés de l'addition sont utiles pour le **calcul réfléchi (@GL.)**. Donnons un exemple simple : dans le calcul $7 + 8$, on peut remplacer 8 par la décomposition additive $7 + 1$ et utiliser ensuite l'associativité de l'addition :

$$\begin{aligned} 7 + 8 &= 7 + (7 + 1) \\ &= (7 + 7) + 1 \\ &= 14 + 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Ce procédé permet de retrouver le résultat de $7 + 8$ si on l'a oublié, à condition, bien sûr, de se souvenir du double de 7...

1.1.3. La soustraction dans $\mathbb{N}$

La différence de deux entiers naturels a et b tels que $a \geq b$ est le nombre c qu'il faut additionner à b pour obtenir a . Cette différence est notée $a - b$.

Le procédé qui, à tout couple (a, b) d'éléments de $\mathbb{N}$, associe leur différence est appelé soustraction. Ce procédé ne définit pas une opération puisqu'il ne permet pas d'associer un entier naturel à un couple (a, b) pour lequel $a < b$. On commet donc un abus de langage toléré quand on dit que la soustraction dans $\mathbb{N}$ est une opération.

36

Propriétés de la soustraction

Bien que, dans $\mathbb{N}$, la soustraction ne soit pas une opération, on peut, cependant, s'intéresser à ses propriétés. Celles-ci sont, d'ailleurs, peu nombreuses :

- elle n'est pas commutative ; contre-exemple : $3 - 5 \neq 5 - 3$;
- elle n'est pas associative ; contre-exemple : $(5 - 3) - 2 \neq 5 - (3 - 2)$. En effet, $5 - (3 - 2) = 5 - 1 = 4$ alors que $(5 - 3) - 2 = 2 - 2 = 0$;
- elle n'a pas d'élément neutre ; 0 a un statut particulier. Sans être un élément neutre, on a tout de même, pour tout nombre n , $n - 0 = n$ et $n - n = 0$;
- enfin, la soustraction possède la propriété dite « des différences égales » : on ne modifie pas une différence en ajoutant ou en retranchant un même nombre à ses deux termes. Par exemple :

$$14 - 8 = (14 + 6) - (8 + 6) = 20 - 14 \text{ ou bien } 14 - 8 = (14 - 2) - (8 - 2) = 12 - 6.$$

Cette propriété des différences égales est utilisée dans la technique de la soustraction classique posée en colonne (« avec retenue »).

1.2. Addition et soustraction : enseignement

Pour un enseignant, la question du sens se pose à trois niveaux :

- celui du concept (sens de l'addition ou de la soustraction) ;

- celui du problème (comment aider les élèves à comprendre un problème et à le résoudre ?) ;
- celui de l'articulation entre la compréhension du problème et la mise en œuvre d'une procédure de résolution.

L'apprentissage des techniques opératoires est précédé d'un apprentissage du sens des opérations, c'est-à-dire d'une étude organisée des situations dans lesquelles l'utilisation des différentes opérations est pertinente. Pour cela, on propose aux élèves des problèmes qui relèvent de l'utilisation de l'une ou l'autre de ces opérations. Dans les nouveaux programmes de 2008, il n'existe pas de rubrique spécifique consacrée à la résolution des problèmes, comme c'était le cas dans les anciens programmes. La résolution des problèmes est intégrée dans chaque domaine (nombres et calcul, géométrie, grandeurs et mesures, organisation et gestion des données). Les programmes indiquent, de plus, que cette résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif, sans précision sur les démarches des élèves. La progression porte plutôt sur la complexité des tâches (problèmes à une opération au cycle 2 ; problèmes de plus en plus complexes au cycle 3). Les programmes de 2002 insistaient sur la nécessité de permettre aux élèves de résoudre les problèmes dans un premier temps par des méthodes personnelles, ce que les programmes 2008 ne semblent pas rejeter tout en insistant sur l'apprentissage de techniques.

Pour chaque opération, on distinguera, dans la suite, apprentissage du sens et apprentissage de la technique. En ce qui concerne l'apprentissage du sens, il convient aussi de souligner que la résolution de problèmes est un lieu de difficultés spécifiques pour les élèves. On observe, par exemple, sur le long terme que les résultats des élèves aux items des évaluations à l'entrée en CE2 ou en 6^e liés à la résolution de problèmes sont inférieurs aux résultats obtenus pour les autres items.

De nombreux chercheurs (psychologues, didacticiens des mathématiques) se sont penchés, depuis environ une trentaine d'années, sur les différents types de problèmes numériques (c'est-à-dire qui se résolvent par des calculs) que l'on propose aux élèves de l'école primaire. Le but de ces travaux était de comparer la signification donnée aux opérations selon les énoncés et d'essayer de dégager une classification des problèmes présentés aux élèves. D'un point de vue pédagogique, ces travaux permettent aux enseignants :

- de connaître les différents sens de chaque opération ;
- de cerner le niveau de difficultés des problèmes proposés en fonction de leur sens (ce qui permet de prévoir les difficultés des élèves) ;
- de vérifier que l'on présente en classe tous les types de problèmes et dans des proportions suffisantes.

Les travaux réalisés ont abouti à deux grands types de classification : une classification des problèmes additifs, c'est-à-dire des problèmes qui se résolvent soit par des additions, soit par des soustractions, et une classification des problèmes multiplicatifs, c'est-à-dire des problèmes qui se résolvent soit par des multiplications, soit par des divisions.

37

1.2.1. Classification des problèmes additifs

Gérard Vergnaud distingue six grandes catégories de problèmes additifs au sens large, c'est-à-dire éventuellement soustractifs (**@Doc. Classification des problèmes additifs**). Il distingue dans ces problèmes des nombres qui désignent des états, qui sont des nombres entiers, positifs à l'école primaire, et des nombres qui traduisent une transformation ou une comparaison qui, eux, peuvent être des entiers positifs ou négatifs.

Nous présentons ainsi :

- les problèmes de type partie-tout ;
- les problèmes de transformation ;
- les problèmes de comparaison ;
- les problèmes avec composition de transformations ;
- les problèmes dits de « composition de comparaisons » ;
- les problèmes dits de « composition d'une comparaison et d'une transformation ».

Il est important de connaître cette classification car elle aide à analyser les situations proposées aux élèves. (**@Ai. Problèmes additifs de type transformation**).

1.2.2. Problèmes additifs et difficultés des élèves

La classification des problèmes additifs que nous venons de décrire a été utilisée pour repérer où se situent les difficultés des élèves en fonction des types de problèmes qui leur sont proposés. Les études qui ont été menées font apparaître deux phénomènes principaux :

- la résolution de certaines classes de problèmes recèle plus d'obstacles que d'autres ; par exemple, les problèmes de composition d'états (1^{re} catégorie) sont globalement mieux réussis par les élèves que les problèmes de comparaison d'états (3^e catégorie) ;
- à l'intérieur même d'une classe de problèmes, certains sont plus difficiles que d'autres en fonction de la nature de l'inconnue, c'est-à-dire de ce que l'on recherche ; par exemple, pour les problèmes de composition d'états, il est plus facile pour les élèves de chercher le résultat d'une composition (comme dans le problème 1 de la 1^{re} catégorie) que de chercher l'un des états (comme dans le problème 2 de la 1^{re} catégorie). De même, dans un problème de transformation, il est plus difficile de chercher un état initial (problème 1 de la 2^e catégorie) qu'un état final (problème 2 de la 2^e catégorie).

D'autres éléments sont aussi à prendre en compte comme, par exemple, la nature positive ou négative d'une transformation ou d'une comparaison, ou bien la cohérence entre certains mots ou expressions langagières (comme « de plus » ou « de moins », « gagner » ou « perdre », « avancer » ou « reculer ») avec l'opération à mettre en oeuvre. À titre d'exemple, comparons les deux énoncés suivants :

- Jean a 12 billes et Pierre en a 5 de plus que lui. Combien Pierre a-t-il de billes ?
- Jean a 12 billes. Il en a 5 de moins que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes ?

Ces deux problèmes de comparaison se résolvent par le calcul $12 + 5 = 17$. Le second sera pourtant nettement moins bien réussi par les élèves. En effet, il est probable que certains élèves associeront mécaniquement l'expression « de moins » à une soustraction et calculeront $12 - 5 = 7$ pour répondre au deuxième problème.

Variables didactiques (@GL.)

On ne peut donc pas se limiter à classer la difficulté des problèmes additifs en fonction de leur appartenance à telle ou telle catégorie de problèmes. Diverses variables didactiques sont exploitables pour faire progresser les élèves :

- la nature de l'inconnue ;
- la formulation de l'énoncé, la structure du texte (les informations sont-elles données dans l'ordre où elles doivent être traitées ?) ;
- la taille des nombres utilisés ou leur nature (nombres entiers petits ou grands, décimaux) ;
- la complexité du vocabulaire utilisé, le contexte décrit par l'énoncé (familier des élèves ou pas) ;
- la place de la question (en début ou en fin d'énoncé).

Il faut aussi observer que la classification présentée ci-dessus n'a été illustrée qu'au moyen de problèmes simples, qui, en particulier, ne supposent pas de calculs intermédiaires par exemple.

1.2.3. Apprentissage de la technique opératoire de l'addition

Cet apprentissage se fait au cycle 2. Dans les nouveaux programmes 2008, les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction sont enseignées au cycle 2, alors que dans les anciens programmes (2002), seule la technique de l'addition était exigible en fin de cycle 2.

• Du comptage vers le calcul

Les premières situations additives sont rencontrées par les élèves à l'école maternelle. Dès la moyenne section et jusqu'en début de CP, les élèves apprennent à résoudre des problèmes additifs simples. Considérons, par exemple, le problème suivant :

Le maître dispose d'une boîte vide. Devant les élèves, il met 4 cubes bleus dans cette boîte puis 3 cubes rouges et leur demande de trouver le nombre de cubes contenus dans la boîte. Il ne leur laisse pas ouvrir la boîte, il ne leur donne pas non plus de cubes. (Si on laisse les élèves ouvrir la boîte ou si on leur donne des cubes, l'activité devient une activité de dénombrement et n'est plus vraiment un problème additif.).

Les élèves résolvent ce type de problèmes selon des procédures qui évoluent : recomptage, surcomptage, décomptage, avant de rencontrer au cycle 2 les premières écritures additives. (@Doc. Du comptage vers le calcul).

Une erreur courante lorsque les élèves surcomptent ou décomptent consiste à démarrer la récitation de la file depuis le nombre qu'ils ont mémorisé. Par exemple, dans le cas du problème additif précédent, l'élève récite « quatre, cinq, six » au lieu de « cinq, six, sept ». Cette erreur est précisément favorisée par le fait que l'élève a mis le nombre quatre dans sa tête, avant toute chose.

• Premières écritures additives

Au niveau des écritures mathématiques, les actions « mettre des cubes bleus et rouges ensemble » ou « ajouter des cubes dans une boîte qui en contient déjà un nombre connu » sont décrites par des égalités additives (par exemple $4 + 3 = 7$) à partir des premiers mois du CP. Ainsi, les symboles $+$ et $=$ sont associés à des actions ou au résultat de ces actions et prennent ainsi leurs premières significations.

Décompositions additives des nombres inférieurs à 10 et apprentissage du répertoire additif.

40

Toujours en début de CP, les nombres compris entre 0 et 10 sont étudiés sous l'angle de leurs différentes décompositions additives. Par exemple, 7 peut s'écrire $7 + 0$ ou $6 + 1$ ou $5 + 2$ ou $4 + 3$ ou à l'aide des décompositions obtenues en échangeant les deux termes. Ces différentes écritures peuvent être obtenues notamment à l'aide de matériel. Par exemple, 1 cube bleu et 6 cubes rouges, cela fait autant de cubes que 4 cubes bleus et 3 cubes rouges.

Cette étude prépare, d'une part, à la construction de la table d'addition, ou répertoire additif, et, d'autre part, à la recherche de compléments à la dizaine supérieure. En effet, au niveau de la table d'addition, un résultat tel que $7 + 5$ pourra être retrouvé, aussi longtemps qu'il n'aura pas été mémorisé, en passant par le nombre 10 :

$$7 + 5 = 7 + 3 + 2 = 10 + 2 = 12$$

La mémorisation du répertoire additif passe par trois phases :

- l'utilisation des tables dans les calculs ;
- l'entraînement à la reconstruction des résultats non encore connus (phase extrêmement importante et s'étalant sur une grande durée) ;
- l'entraînement à la restitution rapide des résultats contenus dans les tables (certaines tables sont plus faciles que d'autres). La mémorisation des tables d'addition n'est pas terminée chez tous les élèves en fin de cycle 2.

• Remarques sur les différents types de calculs

Les programmes de 2002 et le document d'accompagnement sur le calcul mental distinguaient différents types de calcul mental : un calcul mental automatisé et un calcul mental réfléchi. Le calcul mental réfléchi correspondait à l'idée de rendre plus simple un calcul en procédant par étapes successives. Ainsi, dans le domaine du calcul réfléchi, les élèves pouvaient être entraînés à calculer des sommes de plusieurs termes en s'aidant des multiples de 10 et en utilisant les propriétés de l'addition, comme dans l'exemple qui suit, la commutativité et l'associativité :

$$8 + 4 + 7 + 2 + 6 \text{ est transformé en } (8 + 2) + (4 + 6) + 7$$

Un autre axe de travail pouvait porter sur l'entraînement des élèves à décomposer additivement certains termes d'une somme pour en faciliter le calcul. Dans ce cas, les multiples de 10 constituent également des nombres pivots car faciles à ajouter les uns aux autres. Par exemple : $8 + 7 + 9 + 7$ peut être transformé en :

$$(8 + 2) + 5 + (9 + 1) + 6 = 10 + 5 + 10 + 6 = 20 + 5 + 5 + 1 = 20 + 10 + 1 = 31$$

Dans les programmes 2008, l'élève doit calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions et des multiplications simples au cycle 2. Au cycle 3, les programmes indiquent que l'entraînement quotidien au calcul mental portant sur les quatre opérations favorise une appropriation des nombres et de leurs propriétés. Bien que le qualificatif « réfléchi » ne soit pas utilisé, on retrouve bien là une caractéristique du calcul réfléchi. Dans les parties qui suivent, nous parlerons de calcul réfléchi en accord avec cet aspect des programmes.

41

• Calcul en ligne avec décomposition en dizaines et unités

Dans une dernière étape, avant de présenter l'addition en colonne, les élèves apprennent à ajouter des nombres en ligne, en décomposant ceux-ci en dizaines et unités, puis en ajoutant séparément les dizaines et les unités, avant de reconstituer le résultat. Par exemple :

$$23 + 45 = (20 + 3) + (40 + 5) = (20 + 40) + (3 + 5) = 60 + 8 = 68$$

Pour matérialiser cette façon de calculer, on a souvent recours à des arbres de calcul, c'est-à-dire une présentation telle que celle donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 23 + 45 = 20 + 3 + 40 + 5 \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad 60 + 8 \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \quad 68 \end{array}$$

Cette technique de calcul évolue comme dans l'exemple suivant, lorsque le total des unités dépasse 10 :

$$\begin{array}{r}
 28 + 45 = 20 + 8 + 40 + 5 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 60 + 13 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 60 + 10 + 3 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 70 + 3 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 73
 \end{array}$$

Les élèves sont donc conduits à décomposer le nombre d'unités en dizaines et unités et à poursuivre le calcul sur les dizaines, avant d'aboutir au résultat final.

• Calcul posé en colonne

À partir de l'étape précédente, on peut introduire la présentation des calculs en colonne comme une réorganisation des calculs en ligne :

$$\begin{array}{r}
 128 \quad \text{Colonne des unités : 8 et 5 font 13. Je pose 3 et je retiens 1.} \\
 + 45 \quad \text{Colonne des dizaines : 4 et 2 font 6. 6 et 1 de retenue font 7.} \\
 \hline
 73
 \end{array}$$

On peut alors rattacher la présentation des calculs en ligne à celle en colonne pour donner du sens au 1 écrit en retenue : en effet, ce 1 désigne la dizaine à laquelle on était arrivé en décomposant 13 en $10 + 3$.

Au niveau de la chronologie des apprentissages, l'étude de la technique opératoire en colonne peut être limitée aux situations sans retenue en CP et étendue aux situations à retenue en CE1. Cependant, le passage par le calcul en ligne, présenté à l'étape précédente, prend tout son intérêt lorsque l'on aborde les situations à retenue. L'apprentissage de la technique opératoire sera poursuivi au cycle 3, en l'étendant à des nombres de plus en plus grands et, également, en proposant aux élèves des sommes de plus de deux termes. À cet égard, il faut remarquer que seule la technique de l'addition autorise des calculs où interviennent plus de deux nombres.

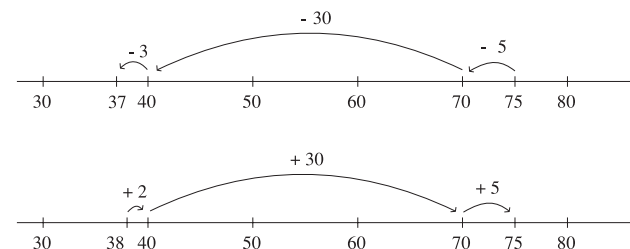
Difficultés des élèves

Les techniques posées en colonnes supposent, outre la connaissance des résultats de tables, une compréhension de la numération de position et, notamment, l'aspect groupement et échange pour le rôle de la retenue. Il n'est donc pas surprenant de trouver certaines erreurs liées à ces aspects pour toutes les opérations. (@Doc. Analyse d'erreurs de calcul).

1.2.4. Apprentissage de la technique opératoire de la soustraction

• Méthode dite « des sauts sur la droite »

On peut observer qu'il y a deux démarches principales pour calculer la différence entre deux nombres. La première consiste à retirer le plus petit nombre du plus grand. La deuxième consiste à chercher ce qu'il faut ajouter au plus petit pour atteindre le plus grand. Considérons, par exemple, la différence $75 - 38$ et représentons sur une droite numérique chacune des deux méthodes :



- Pour le calcul de la différence $75 - 38$, sur le premier dessin, on part de 75, on retire 5, puis 30, puis 3. On retire donc 38. Le résultat est 37.
- Sur le deuxième dessin, on part de 38. On ajoute 2, puis 30, puis 5, on ajoute donc 37.
- Dans les deux cas, on obtient bien $75 - 38 = 37$.

La première méthode consiste à reculer sur la droite de la valeur du petit nombre. La seconde méthode consiste à avancer du petit nombre jusqu'au plus grand. Lors de l'apprentissage du calcul soustractif, les élèves étudient plusieurs manières de produire le résultat d'une soustraction, mais chacune d'elles se rattache à l'une ou l'autre des deux démarches présentées ci-dessus.

La méthode des sauts sur la droite présente de nombreux avantages, en particulier celui de laisser l'enfant maître du choix des valeurs des sauts. Cette technique est largement utilisée en calcul mental et s'avère pleine d'avantages quand il s'agit d'effectuer, par exemple, le calcul d'une durée.

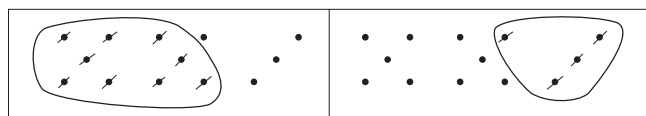
• Premières écritures soustractives

Comme pour l'addition, et avant même que les élèves ne commencent à passer du comptage au calcul, des écritures mathématiques telles $17 - 3 = 14$ peuvent être produites pour traduire des actions précises, comme par exemple : reculer de trois cases sur une piste numérotée (contexte ordinal) ou retirer trois cubes d'une boîte qui en contenait dix-sept (contexte cardinal). Comme pour l'addition, les symboles $-$ et $=$ sont associés à des actions ou au résultat de ces actions et prennent ainsi leurs premières significations. Ces

écritures mathématiques peuvent être produites dès le CP. Il est souhaitable que les écritures $a + b$ et $a - b$ soient, dès le départ, travaillées simultanément pour éviter que l'écriture $a + b$ ne soit utilisée de façon automatique, car étant la seule disponible.

• Calcul mental réfléchi de différences

Il précède l'apprentissage du calcul posé. Mais avant d'y parvenir, les élèves utilisent des procédés soit basés sur des représentations dessinées des nombres (cf. ci-dessous) soit sur le comptage en avançant ou en reculant.



Ces dessins permettent aux élèves de trouver $13 - 9$ (dessin de gauche) et $13 - 4$ (dessin de droite). Ils nous font comprendre aussi vers quoi ces procédés peuvent évoluer si les élèves sont entraînés à verbaliser leurs démarches en se passant progressivement des dessins. (@Doc. Exemples de procédés de calcul réfléchi de différences ; @Ai. Apprentissage du calcul réfléchi).

44

• Les techniques posées en colonne

Bien avant l'étude de la technique classique, les élèves peuvent découvrir diverses techniques posées en colonnes :

- l'addition à trous qui correspond aux problèmes de type recherche de complément ;
- une technique reposant sur le fait que l'on ne change pas une différence quand on ajoute ou retire le même nombre des termes de la différence. (@Doc. Additions à trous et conservation des différences).

• La technique classique posée en colonne

Contrairement à l'addition à trous, la technique classique repose sur l'idée de retirer le nombre le plus petit au plus grand (et non de chercher quel nombre ajouter au petit pour atteindre le grand). Dans ce but, les élèves vont apprendre à retirer, rang après rang (c'est-à-dire d'abord au rang des unités, puis des dizaines...) le chiffre d'en bas au chiffre d'en haut. Lorsqu'à un rang donné, le chiffre d'en haut est inférieur à celui d'en bas, on ajoute dix unités du rang considéré au chiffre d'en haut et une unité au chiffre du rang suivant en bas. On a vu que cette technique repose sur la propriété des différences égales puisqu'on ajoute le même nombre 10 aux deux termes de la différence, ce qui ne modifie pas le résultat. Avec notre exemple, les calculs se présentent de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 7 \text{ } 15 \\ - 3 \text{ } 8 \\ \hline 7 \end{array} \quad \text{puis} \quad \begin{array}{r} 7 \text{ } 15 \\ - 3 \text{ } 8 \\ \hline 3 \text{ } 7 \end{array}$$

On doit observer que la compréhension de la technique classique est problématique pour beaucoup d'élèves car la propriété des différences égales reste souvent abstraite. Des erreurs subsistent qui sont liées à cet aspect mais aussi à une absence de maîtrise de la numération de position lorsque les deux nombres ne sont pas de même longueur. Les élèves ont aussi tendance à confondre les propriétés de l'addition et celles de la soustraction, notamment la commutativité ($2 - 5 = 5 - 2$, par exemple), sans oublier la méconnaissance des tables. (@Doc. Analyse d'erreurs de calcul).

Afin d'aider les élèves à comprendre la propriété des différences égales, certains manuels choisissent de l'illustrer non seulement au travers du calcul réfléchi mais aussi à l'aide d'activités relatives aux mesures de longueur. On peut, par exemple, constater avec les élèves que le segment délimité par les graduations 7 et 12 d'un triple décimètre a une longueur identique à celui délimité par les graduations 17 et 22. Il n'en reste pas moins que le lien entre ce type d'activités et la technique classique n'est pas toujours évident à faire vivre en classe et que pour beaucoup d'élèves, la technique classique de la soustraction est mémorisée plus que comprise.

Remarquons que dans cette technique, les retenues apparaissent en haut et en bas, ce qui conduit certains à la nommer « technique avec les retenues en haut et en bas ». Il est aussi à noter que si la technique classique fait l'objet d'un apprentissage approfondi en CE2, elle est largement reprise au premier trimestre de CM1 car il est indispensable de la maîtriser correctement avant d'aborder la technique opératoire de la division.

45

• La technique anglo-saxonne

La technique classique, mise en œuvre dans notre pays pour effectuer les calculs de différences en colonne, n'est pas celle utilisée dans les pays anglo-saxons.

Dans ces pays, on enseigne une technique qui s'appuie fortement sur des notions relatives à la numération pour traiter les situations à retenue. Observons les étapes de cette technique sur notre exemple. Le calcul est posé en colonne de la même manière. En revanche, lorsqu'il s'agit de retirer 8 unités à 5 unités, les élèves constatent que cela est impossible : il manque des unités. On va alors prélever une dizaine au rang des dizaines du grand nombre et transformer cette dizaine en 10 unités, qui viennent s'ajouter aux 5 unités disponibles : on peut alors retirer les 8 unités. Les calculs s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 15 \\ - 3 \text{ } 8 \\ \hline 7 \end{array} \quad \text{puis} \quad \begin{array}{r} 6 \\ \times 15 \\ - 3 \text{ } 8 \\ \hline 3 \text{ } 7 \end{array}$$

Au rang des dizaines, le calcul consiste donc à retirer 3 dizaines à 6 dizaines. On constate que cette technique utilise donc le principe d'échange d'une dizaine contre dix unités pour traiter les retenues. Elle est parfois appelée « technique avec la dizaine brisée » ou « technique d'emprunt de dizaine » (puisque l'on brise ou que l'on emprunte une dizaine

lorsqu'il n'y a pas assez d'unités au nombre d'en haut) ou encore « technique avec les retenues en haut » car seul, le nombre d'en haut subit des transformations liées aux retenues.

Nous présentons la technique anglo-saxonne dans ce cours pour diverses raisons. Tout d'abord parce que certains maîtres, au CE2, peuvent faire le choix de la préférer à notre technique classique : la technique anglo-saxonne est, en effet, souvent considérée comme plus simple à comprendre et à assimiler pour les élèves, du fait qu'elle utilise essentiellement des connaissances en numération. Cette technique est aussi parfois présentée dans certains manuels avant la technique classique, bien qu'elle ne constitue pas vraiment une étape vers celle-ci, puisque les deux techniques traitent de manière totalement différente les retenues. Cependant, l'enseignement de la technique anglo-saxonne peut constituer une sorte de réinvestissement des connaissances en numération des élèves. Enfin, il est nécessaire de connaître le fonctionnement de cette technique quand on prépare le concours, et notamment d'avoir compris les différences entre celle-ci et la technique classique.

On peut discuter l'opportunité de présenter aux élèves d'autres techniques que la technique usuelle. Un argument fréquemment cité par les enseignants contre l'introduction de techniques variées est le risque de confusion entre ces diverses techniques. En même temps, comme nous l'avons vu, elles permettent d'exploiter des propriétés de nombres et des opérations et peuvent s'avérer utiles pour le calcul réfléchi. Elles constituent aussi des moyens de vérification de calculs soustractifs. ■

46

2. MULTIPLICATION, DIVISION EUCLIDIENNE ET PUISSANCES

2.1. Aspects mathématiques

2.1.1. La multiplication dans $\mathbb{N}$

• Définitions

a. Le produit cartésien de deux ensembles

Considérons deux ensembles A , de cardinal fini égal à a , et B , de cardinal fini égal à b . On constitue le **produit cartésien (@GL.)** de A et de B , noté $A \times B$. On considère alors le procédé qui, au couple $(a; b)$, associe le cardinal de $A \times B$, c'est-à-dire le nombre de couples obtenus en faisant le produit cartésien. On définit de cette manière une opération sur $\mathbb{N}$ que l'on appelle « multiplication sur $\mathbb{N}$ ». On dit que l'on fait le produit de a par b et, par convention, on note $a \times b$ le résultat de l'opération (il arrive aussi que l'on note ce résultat $a.b$ ou tout simplement ab , selon les circonstances). a et b sont appelés les facteurs du produit.

Exemple : si A possède 5 éléments et si B possède 8 éléments, le produit cartésien de A et de B compte 40 éléments (on peut compter les couples un à un pour obtenir ce nombre). On définit ainsi le produit de 5 et de 8 et on écrit $5 \times 8 = 40$.

b. L'addition réitérée

Considérons deux nombres entiers naturels non nuls a et b . À l'aide de l'addition, on sait ajouter le nombre a à lui-même, autant de fois qu'on le souhaite. Si on considère le procédé qui au couple $(a; b)$ associe la somme $a + a + a + \dots + a$ dans laquelle le terme a est répété b fois, alors on définit une opération sur $\mathbb{N}$ appelée « multiplication ». Le produit de a par b , que l'on note $a \times b$, est la somme $a + a + a + \dots + a$ dans laquelle le terme a apparaît b fois.

47

Exemple : si $a = 5$ et $b = 8$, on sait calculer : $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ (cela fait 40). On définit ainsi le produit de 5 et de 8 et on peut écrire :

$$5 \times 8 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40.$$

L'expression $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ est souvent appelée « somme itérée ». Dans ce cas, $5 \times 8 = 5 + 5 + 5 + \dots$ (8 fois).

• Propriétés de la multiplication

Dans $\mathbb{N}$, la multiplication dispose de plusieurs propriétés.

- Elle est commutative. Quels que soient les nombres a et b , $a \times b = b \times a$. Par exemple, $4 \times 3 = 3 \times 4$ (on peut remarquer que cette propriété découle assez naturellement de la première définition donnée plus haut).
- Elle est associative. Quels que soient les nombres a , b et c ,
 $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c$.
Par exemple : $(8 \times 5) \times 7 = 8 \times (5 \times 7) = 8 \times 5 \times 7$.
- Elle dispose d'un élément neutre : c'est le nombre 1.
Quel que soit le nombre a , $a \times 1 = 1 \times a = a$;
- Elle est distributive par rapport à l'addition. Quels que soient les nombres a , b et c ,
 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Par exemple : $3 \times (12 + 9) = (3 \times 12) + (3 \times 9)$. On a également l'égalité suivante : quels que soient les entiers a , b , c tels que $b \leq c$,
 $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$.
- Par ailleurs, le nombre 0 dispose d'un statut particulier pour la multiplication puisque le produit de tout élément de $\mathbb{N}$ par 0 est égal à 0.

Ces propriétés permettent de comprendre l'un des écueils de la définition de la multiplication comme somme itérée. En effet, avec cette définition, la commutativité n'est pas évidente. Pour savoir que $5 \times 8 = 8 \times 5$, quand on ne connaît pas la propriété ou le résultat des tables, on doit calculer $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ et $8 + 8 + 8 + 8 + 8$. Ces deux écritures nécessitent d'être réduites (on trouve 40), pour conclure sur l'égalité.

Par ailleurs, certaines propriétés doivent être amenées comme des conventions. En effet, $a \times 1$ ne peut être expliqué par le sens « répéter une fois » sinon, on aurait $2a$; et $a \times 0 = 0$ non plus (répéter a zéro fois, c'est a). Cet aspect est à prendre en compte quand on enseigne la multiplication à l'école afin que les deux définitions coexistent à travers les situations proposées aux élèves. Les élèves doivent apprendre que dans la définition, on peut décider d'associer au couple $(a; b)$ la somme $b + b + \dots + b$ dans laquelle le terme b apparaît a fois.

• Vocabulaire

On distingue ici les termes « multiplication » (l'opération) et « produit » (le résultat de l'opération). Dans l'expression « le produit de 8 par 7 », les nombres 8 et 7 sont les facteurs du produit.

Les propriétés de la multiplication sont utilisées dans le calcul réfléchi de produits. Calculons, par exemple, 17×8 , sans effectuer la multiplication :

- on peut décomposer 8 en $10 - 2$ et utiliser la distributivité de la multiplication :

$$\begin{aligned} 17 \times (10 - 2) &= 17 \times 10 - 17 \times 2 \\ &= 170 - 34 \\ &= 136 \end{aligned}$$

- on peut décomposer 17 en $10 + 7$ et utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\begin{aligned} (10 + 7) \times 8 &= 10 \times 8 + 7 \times 8 \\ &= 80 + 56 \\ &= 136 \end{aligned}$$

- on peut décomposer 8 en $2 \times 2 \times 2$ et utiliser l'associativité de la multiplication :

$$\begin{aligned} 17 \times 8 &= 17 \times (2 \times 2 \times 2) \\ &= (17 \times 2) \times (2 \times 2) \\ &= (34 \times 2) \times 2 \\ &= 68 \times 2 \\ &= 136 \end{aligned}$$

2.1.2. La division euclidienne

• Définitions

Exemple préalable

Diviser 37 par 5 consiste à chercher le plus grand nombre entier naturel q tel que $5 \times q \leq 37$. En utilisant les tables de multiplication, on trouve que $5 \times 7 = 35$ et $5 \times 8 = 40$. La valeur de q est donc 7, puisque $5 \times 7 < 37 < 5 \times (7 + 1)$ et on peut calculer l'écart entre 37 et 5×7 . Cet écart vaut $37 - 5 \times 7$, c'est le reste qui est inférieur à 7 puisque nous avons cherché le plus grand nombre entier naturel q tel que $5 \times q = 37$.

On peut écrire, pour traduire le résultat des calculs effectués, $37 = 5 \times 7 + 2$ et $2 < 7$.

Théorème et définition 1

Étant donné un nombre entier naturel a et un nombre entier naturel non nul b , effectuer la division euclidienne de a par b consiste à chercher le nombre entier naturel q tel que $b \times q \leq a < b \times (q + 1)$. On admettra que ce nombre existe toujours et qu'il est unique dès lors que b est différent de 0. Effectuer la division euclidienne de a par b consiste donc à encadrer a (appelé « dividende ») par deux multiples consécutifs de b (appelé « diviseur »). Le nombre q est appelé « quotient euclidien de la division de a par b », ou « quotient euclidien par défaut ». $q + 1$ est le « quotient euclidien par excès ».

On peut alors calculer le nombre $r = a - b \times q$. Ce nombre est appelé « reste de la division euclidienne de a par b ». Compte tenu de la double inégalité $b \times q \leq a < b \times (q + 1)$, le nombre r est supérieur ou égal à 0 et strictement inférieur à b .

On traduira donc le résultat de la division euclidienne de a par b en écrivant :

$$a = b \times q + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

Théorème et définition 2

À tout couple d'entiers naturels a et b tel que $b \neq 0$, on peut faire correspondre un couple unique d'entiers naturels q et r tels que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$, q et r sont respectivement le quotient et le reste dans cette division. (**@Ai. Maîtriser le concept de division euclidienne**).

Remarques

- La division euclidienne est aussi appelée « division à quotient entier ».
- Si le reste est égal à 0, on a : $a = b \times q$ et on dit que la division est à quotient exact. Dans ce cas, on peut écrire :

$$a : b = q$$

Par exemple, si on veut diviser 24 par 3, on cherche le plus grand nombre entier q tel que $3 \times q \leq 24$. En utilisant les tables de multiplication, on trouve que $3 \times 8 = 24$. Le quotient est donc 8 et la division est à quotient exact (le reste est nul). Dans ce cas, le quotient euclidien est exact, on écrit :

$$24 : 3 = 8$$

- Le diviseur ne peut jamais être égal à 0. En effet, si $b = 0$, il n'est plus possible d'encadrer a par deux multiples consécutifs de b , et l'on ne peut donc plus trouver de valeur pour q .
- Compte tenu de la manière dont elle a été définie ci-dessus, la division euclidienne n'est pas une opération puisqu'elle associe à un couple d'entiers $(a ; b)$ non pas un entier mais un autre couple d'entiers $(q ; r)$.

Nous avons évité le symbole « $\div$ ». En effet, ce symbole est parfois utilisé pour désigner le quotient euclidien de a par b . Ce symbole est, cependant, souvent utilisé sur les calculatrices pour désigner la division dans $\mathbb{R}$.

À propos de la calculatrice, il faut savoir que certaines machines disposent d'une touche spécifique pour la division euclidienne. Cette touche est couramment une sorte de minipotence ($\div$), mais pas toujours. Elle fournit le quotient et le reste euclidiens pour la division de deux nombres entiers.

• Les propriétés de la division des entiers

Cette étude concernant essentiellement la division à l'école élémentaire, nous ne reprendrons pas ici l'ensemble des définitions et propriétés qui sous-tendent cette théorie. Cependant, nous considérons certains théorèmes, définitions et propriétés qui interviennent implicitement ou explicitement dans les activités proposées aux élèves de l'école élémentaire et que nous reprenons ci-dessous. Les propriétés que nous évoquons prennent appui sur les notions de multiple et de diviseur d'un nombre. Ainsi :

♦ a et b étant deux entiers naturels donnés, et b non nul, s'il existe un entier naturel q tel que $a = bq$, alors q est unique ; on dit indifféremment :

- b divise a ou b est un diviseur de a ;
- a est divisible par b ou a est un multiple de b .

♦ Pour tous entiers naturels a, b et c :

- si a divise b et b divise a , alors $a = b$;
- si a divise b et b divise c , alors a divise c ;
- si a divise b et a divise c , alors a divise $b + c$ et $b - c$ ($b \geq c$).

Plus généralement,

♦ Pour tout entier a , si b et c sont deux multiples de a , alors pour tous entiers α et β , la combinaison linéaire $\alpha b + \beta c$ est un multiple de a , en particulier la somme $b + c$ et la différence $b - c$ (si elle existe dans $\mathbb{N}$) sont des multiples de a .

♦ Pour diviser un nombre par un produit de facteurs, on peut diviser ce nombre par l'un des facteurs, puis le quotient obtenu par un autre facteur et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les facteurs aient été employés.

♦ Si on multiplie ou divise le dividende et le diviseur par le même nombre, le quotient ne change pas.

Remarque

Ces propriétés ne font pas l'objet d'un enseignement à l'école élémentaire.

2.1.3. Puissances d'un nombre

• Puissances d'un nombre d'exposant entier et positif

Définition

On peut être amené à multiplier n'importe quel nombre plusieurs fois par lui-même. Pour alléger l'écriture d'un tel calcul, on utilise une notation particulière faisant intervenir ce que l'on appelle un exposant. Par exemple, l'écriture : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ s'écrit de manière plus concise 2^5 . Cette dernière écriture se lit « 2 exposant 5 ». On dit aussi que 32 est la puissance 5 de 2. On dit encore que l'on a élevé 2 à la puissance 5. L'exposant désigne le nombre de fois où le facteur 2 intervient dans le calcul.

On convient que pour a non nul, on a : $a^0 = 1$. On retiendra, par ailleurs, que $a^1 = a$.

Calculs avec les puissances

Soit a et b , deux nombres entiers. Soit n et p , deux nombres entiers. On a alors les règles suivantes :

$$- a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \text{Exemple : } 7^3 \times 7^2 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7) \\ = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \\ = 7^5$$

$$- a^n \times b^n = (a \times b)^n = (ab)^n \quad \text{Exemple : } 5^3 \times 8^3 = (5 \times 5 \times 5) \times (8 \times 8 \times 8) \\ = (5 \times 8) \times (5 \times 8) \times (5 \times 8) \\ = (5 \times 8)^3$$

$$- (a^n)^p = a^{n \times p} \quad \text{Exemple : } (9^2)^3 = (9 \times 9) \times (9 \times 9) \times (9 \times 9) \\ = 9^{2 \times 3}$$

• Puissances d'exposant entier et négatif

Soit n un entier positif, $-n$ est donc un entier négatif.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{Par exemple : } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

• Puissances de 10

Si n est un entier positif, la définition générale donnée ci-dessus s'applique et 10^n est donc l'entier constitué du chiffre 1 suivi de n zéros.

$$\text{Exemple : } 10^6 = 1\,000\,000$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,00...01 \text{ (nombre décimal ayant } n-1 \text{ zéros après la virgule)}$$

$$\text{Exemple : } 10^{-3} = 0,001$$

2.1.4. Règles de priorité dans les calculs comportant multiplications, divisions et autres opérations

Il peut arriver qu'un calcul en ligne comporte différentes opérations (additions, soustractions, multiplications, divisions). Il existe alors des conventions qui déterminent, en l'absence de parenthèses, dans quel ordre chronologique les calculs doivent être effectués. Ces règles sont précisées ci-dessous :

- en l'absence de parenthèses et si le calcul ne comporte que des additions ou des soustractions, on effectue les calculs de la gauche vers la droite, selon le sens de lecture ;
- en l'absence de parenthèses et si le calcul ne comporte que des multiplications ou des divisions, on effectue les calculs de la gauche vers la droite ;
- en l'absence de parenthèses et si le calcul comporte des multiplications ou des divisions associées à des additions ou des soustractions, on commence par effectuer les multiplications et les divisions, puis on effectue les additions et les soustractions, de la gauche vers la droite. On dit que la multiplication ou la division sont prioritaires par rapport à l'addition ou la soustraction.

Exemple 1

Pour calculer $1 + 2 \times 3$, on calcule d'abord le produit 2×3 , soit 6, auquel on ajoute 1. Le résultat est donc 7 (et non 9 que l'on obtient quand on calcule comme on lit, c'est-à-dire de gauche à droite...) : $1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$.

Exemple 2

Pour calculer $12 : 4 + 3 \times 7$, on calcule en premier lieu $12 : 4$, puis 3×7 (ou dans l'ordre inverse si on le souhaite), puis on ajoute les résultats de ces deux calculs. On trouve donc $3 + 21 = 24$ (et non 42, obtenu en calculant de gauche à droite $12 : 4 = 3$, puis $3 + 3 = 6$, et enfin $6 \times 7 = 42$...) :

$$12 : 4 + 3 \times 7 = 3 + 21 = 24$$

Exemple 3

Pour calculer $80 : 4 \times 5$, on calcule d'abord $80 : 4$, soit 20, puis on multiplie ce nombre par 5 et on obtient 100 ($80 : 4 \times 5 = 20 \times 5 = 100$).

2.1.5. Rôle des parenthèses dans les calculs

Les parenthèses sont utilisées pour modifier l'ordre conventionnel des calculs indiqué ci-dessus. Dans un calcul en ligne, on commence par effectuer les calculs mis entre parenthèses, puis, une fois ces calculs terminés, on applique les règles de priorité usuelles. Si des parenthèses sont imbriquées les unes dans les autres, on commence par effectuer les calculs mis dans les parenthèses intérieures.

Exemple 1

Le résultat du calcul $(1 + 2) \times 3$ est, cette fois, égal à 9.

Exemple 2

Le calcul $5 + 12 : (3 + 1)$ s'effectue de la manière suivante :

$$3 + 1 = 4, \text{ puis } 12 : 4 = 3 \text{ et enfin } 5 + 3 = 8$$

$$5 + 12 : (3 + 1) = 5 + 12 : 4 = 5 + 3 = 8$$

Exemple 3

Le calcul $(9 - (5 + 2)) \times 2$ s'effectue dans l'ordre suivant :

$$5 + 2 = 7, \text{ puis } 9 - 7 = 2 \text{ et enfin } 2 \times 2 = 4$$

$$(9 - (5 + 2)) \times 2 = (9 - 7) \times 2 = 2 \times 2 = 4$$

(@A). Règles de priorité dans un calcul)

2.2. Multiplication et division euclidienne : enseignement

Comme pour les problèmes additifs, il existe des typologies des problèmes multiplicatifs, c'est-à-dire des problèmes qui peuvent être résolus à l'aide d'une multiplication et/ou d'une division.

2.2.1. Classification des problèmes multiplicatifs

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux problèmes multiplicatifs, c'est-à-dire qui se résolvent soit par une multiplication soit par une division. En particulier, nous laisserons de côté les problèmes dits de « quatrième proportionnelle » qui sont des problèmes de proportionnalité impliquant deux calculs (une division et une multiplication). Ces problèmes seront abordés dans le chapitre consacré à la proportionnalité (§2.3.2.)

Il faut, tout d'abord, observer que les problèmes multiplicatifs présentent une grande diversité, ce qui rend difficile l'élaboration d'une classification. Nous avons choisi de proposer la typologie de G. Vergnaud. Nous distinguons ainsi :

- les problèmes de type produit de mesure ;
- les problèmes de comparaison ;
- les problèmes de proportionnalité directe.

(@Doc. Classification des problèmes multiplicatifs).

2.2.2. Apprentissage du calcul multiplicatif

L'apprentissage du calcul multiplicatif débute au CE1, mais la technique posée en colonne n'est réellement enseignée qu'à partir du CE2, puis renforcée au CM1. Cet apprentissage débute par la résolution de problèmes simples. Les élèves vont ainsi découvrir dès le CE1 :

- les premières écritures multiplicatives ;
- le répertoire multiplicatif ;
- le passage des écritures en ligne à la disposition en colonnes ;
- la technique usuelle, dans le cas du produit d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre.

Cet apprentissage les amène à l'utilisation des propriétés de la multiplication. (@Doc. Technique de la multiplication).

Cas de la règle des zéros et passage au calcul d'un produit d'un nombre à deux chiffres par un nombre à deux chiffres

La règle des zéros indique que lorsqu'on multiplie un nombre par 10, il suffit de « mettre un zéro » à droite de ce nombre ; lorsqu'on multiplie par 100, on met deux zéros etc., règle dont l'apprentissage se déroule, en général, au CE2. Pour obtenir le résultat de 5×20 , l'élève pourrait, cependant, raisonner aussi de la manière suivante : 20, c'est 2 dizaines et 5 fois 2 dizaines, c'est 10 dizaines, soit 100 unités. Ce recours à la numération permettra de généraliser la règle lors du passage aux nombres décimaux.

Les situations de fin de CE1 se limitent au cas du calcul d'un produit dont l'un des facteurs possède un seul chiffre. Le CE2 sera donc l'année où les élèves étudieront complètement

la technique posée en colonne en évoluant d'une part vers des produits dont les facteurs comportent plus d'un chiffre, et en apprenant d'autre part à compacter la présentation des calculs, ce qui suppose de retenir mentalement les retenues.

À travers divers exemples, la règle des zéros va être étendue au cas du produit d'un nombre par 20, 30, 50, 200, 300, ... Pour cela, les élèves apprennent à décomposer ces nombres en produits (20, c'est 2×10 ; 50, c'est 5×10 ; 200, c'est 2×100 ...). On saura donc multiplier simplement non seulement par 10, 100 ou 1 000, mais aussi par leurs multiples. La règle des zéros et son extension aux multiples de 10, 100 ou 1 000 vont trouver leur intérêt lorsque les facteurs deviennent des nombres à deux chiffres ou plus. (@Doc. Produit de deux nombres à deux chiffres).

Cette technique fait donc intervenir diverses propriétés de la multiplication :

- la commutativité ($37 \times 25 = 25 \times 37$) ;
- la distributivité de la multiplication sur l'addition ($37 \times 25 = 37 \times (20 + 5)$) ;
- l'associativité ($37 \times 20 = 37 \times (2 \times 10) = (37 \times 2) \times 10$).

Par ailleurs, elle suppose la connaissance des tables, ainsi que celle de la numération pour la gestion des retenues. Des erreurs peuvent donc apparaître en liaison avec une maîtrise insuffisante de l'un ou l'autre de ces points. (@Doc. Analyse d'erreurs de calcul).

2.2.3. Apprentissage de la division

• Difficultés spécifiques aux problèmes de division. Division partition et division quotient

Avant d'évoquer de manière détaillée les étapes de l'apprentissage de la division, faisons un détour par le sens de cette opération.

Tout d'abord, les problèmes de division donnent lieu à des difficultés spécifiques car ils diffèrent des problèmes qui peuvent être résolus par une addition, une soustraction ou une multiplication. Prenons pour exemple l'énoncé suivant : « *Le cuisinier dispose 50 pommes dans des corbeilles qui peuvent contenir 8 pommes* » et les questions qui peuvent être posées :

Q1 : *Combien peut-il remplir de corbeilles ?*

Q2 : *Combien reste-t-il de pommes ?*

Q3 : *Combien faut-il de corbeilles pour ranger toutes les pommes ?*

Q4 : *Combien manque-t-il de pommes pour que toutes les corbeilles soient pleines ?*

Tous ces problèmes se résolvent grâce à la division euclidienne de 50 par 8 :

- pour la Q1, la réponse est le **quotient euclidien par défaut** (@GL.) de 50 par 8 ;
- pour la Q2, la réponse est le reste de la division euclidienne de 50 par 8 ;
- pour la Q3, la réponse est le **quotient euclidien par excès** (@GL.) de 50 par 8 ;
- pour la Q4, la réponse est la différence entre le diviseur et le reste de la division euclidienne de 50 par 8.

En conclusion, dans les problèmes de division, il ne suffit pas de savoir faire l'opération pour pouvoir donner automatiquement la réponse à la question posée. Il faut ensuite interpréter les résultats de l'opération et choisir entre quotient par défaut, quotient par excès, reste, différence entre diviseur et reste. Cette difficulté n'existe pas dans les problèmes qui nécessitent une addition, une soustraction ou une multiplication : le résultat de l'opération est la réponse à la question posée.

Observons ensuite les deux problèmes suivants :

Problème 1

« J'ai 26 billes. Je souhaite les partager équitablement entre 3 enfants en faisant en sorte de donner le plus grand nombre possible de billes à chacun. Combien chaque enfant aura-t-il de billes ? »

Problème 2

« J'ai 26 billes. Je souhaite faire des lots de 3 billes afin de les donner à des enfants. Je souhaite faire le plus grand nombre possible de lots. Combien y aura-t-il de lots ? »

Si l'on veut utiliser la division pour résoudre ces problèmes, la solution s'obtient en cherchant le quotient euclidien de 26 par 3. La technique opératoire mise en œuvre est la même pour chacun des deux problèmes. Pourtant, ces deux problèmes n'ont pas du tout le même sens.

56

Le premier pourrait être résolu, compte tenu des nombres utilisés, en simulant le partage décrit par l'énoncé c'est-à-dire par exemple en distribuant des billes fictives à 3 enfants fictifs. La solution du problème serait alors obtenue en comptant, à la fin du partage, le nombre de billes de l'un des enfants. La solution du problème représente la valeur d'une part. On dit qu'il s'agit d'un problème de **division partition (@GL.)** ou d'une situation de division-partage. Exprimé différemment, cela signifie que le dividende représente un nombre de billes et le diviseur un nombre d'enfants, le quotient représentant un nombre de billes par enfant.

Le deuxième problème pourrait être résolu, toujours compte tenu des nombres utilisés, en simulant la constitution de paquets de 3 billes : on constitue des paquets jusqu'à ne plus avoir assez de billes pour en faire un de plus. La solution s'obtient alors en comptant le nombre de paquets. Cette solution représente donc un nombre de parts, la valeur de chaque part ayant été fixée au départ. On dit qu'il s'agit d'un problème de **division quotition (@GL.)** ou d'une situation de division-groupement. Cela signifie aussi que le dividende et le diviseur sont de même nature : il s'agit d'un nombre de billes. Le quotient est, quant à lui, d'une autre nature : il s'agit d'un nombre de lots.

Nous avons décrit ici ces deux grands sens de la division afin d'illustrer une particularité de cette opération. Le sens le plus commun de cette opération, intuitivement, est le sens partition. Cela signifie que ce sont les problèmes de partition que l'on rattache le plus naturellement à l'opération division. Dit autrement, « diviser », « partager », voire « distribuer » sont des verbes assez communément considérés comme synonymes. Pour les élèves, cette situation

est d'ailleurs renforcée par le fait que dès la fin de l'école maternelle, ils ont pu avoir à résoudre des problèmes de division en recourant à un partage équitable et maximal (c'est-à-dire conduisant à constituer la part la plus grande possible).

En revanche, la technique opératoire de la division est à rapprocher du sens quotition. En effet, lorsqu'on effectue la division de 26 par 3, on dit : « Dans 26, combien de fois 3 ? ». Tout se passe donc comme si on cherchait combien de paquets de 3 on peut constituer avec 26. Et cela quel que soit le problème de division à résoudre. Quand on résout le premier problème par la technique classique, tout se passe donc comme si on calculait en faisant des paquets de 3 billes qui seront ensuite redistribués aux enfants.

• Procédures de calcul du quotient et du reste d'une division

Pour calculer le quotient et le reste d'une division, les élèves peuvent utiliser diverses procédures selon la taille des nombres en jeu et leur nature, selon les relations arithmétiques plus ou moins simples entre le dividende et le diviseur, et évidemment, selon leurs connaissances du moment. Au cycle 2, les élèves ont déjà été confrontés à des problèmes de division. Le problème suivant « Il y a 25 élèves dans la classe. Le maître distribue un ballon pour deux élèves. Combien faut-il de ballons ? » peut être résolu par schématisation. La vérification peut être faite en réalisant effectivement l'action.

Mais dès le CE2 et le CM1, les procédures de calcul évoluent. On distingue généralement les procédures :

- par additions successives du diviseur ;
- par soustractions successives du diviseur ;
- par additions ou soustractions de multiples connus du diviseur, ce qui correspond à une optimisation des méthodes précédentes ;
- par encadrement du dividende par des multiples du diviseur ;
- et enfin, par utilisation de la technique posée en potence, donc la technique classique. (@Doc. Calcul du quotient et du reste d'une division euclidienne).

a. La technique classique (par « tranches »)

La technique classique de la division (dite « en potence ») va alors apparaître comme une version plus compacte des calculs précédents.

Exemple : diviser 4 897 par 37

Vous trouverez ci-dessous un résumé de cette technique. Les différentes étapes de cette technique consistent à :

- rechercher le nombre de chiffres du quotient ;
- rechercher les chiffres du quotient en déterminant des quotients partiels ;
- trouver le quotient par addition des quotients partiels ;
- conclure en fournissant l'écriture canonique de la division euclidienne.

57

$$\begin{array}{r}
 4 \ 8 \ 9 \ 7 \\
 - \ 3 \ 7 \ 0 \ 0 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 9 \ 7 \\
 - \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\
 \hline
 8 \ 7 \\
 - \ 7 \ 4 \\
 \hline
 1 \ 3
 \end{array}$$

Le quotient de la division est la somme des quotients partiels : $100 + 30 + 2 = 132$.
 $4\,897 = (37 \times 132) + 13$ et $13 < 37$
 Dans cette méthode, 4 897 est décomposé en somme de multiples de 37 et d'un reste.
 $4\,897 = 3\,700 + 1\,110 + 74 + 13 = (37 \times 100) + (37 \times 30) + (37 \times 2) + 13$.
 100, 30 et 2 sont des quotients partiels.
 (@Doc. Technique usuelle de la division euclidienne)

À la fin du cycle 3, l'écriture des quotients partiels n'est plus attendue. Les élèves écrivent directement 132, tout en conservant les soustractions intermédiaires :

$$\begin{array}{r}
 4 \ 8 \ 9 \ 7 \\
 - \ 3 \ 7 \ 0 \ 0 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 9 \ 7 \\
 - \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\
 \hline
 8 \ 7 \\
 - \ 7 \ 4 \\
 \hline
 1 \ 3
 \end{array}$$

58

Soulignons, pour finir, que le passage de la procédure par encadrement du dividende par des multiples du diviseur à la technique classique dite « par tranches » a pour intérêt de limiter le répertoire des multiples avec lequel on travaille. En effet, à chaque moment de la division, le dividende sur lequel on opère est inférieur à 10 fois le diviseur. On ne manipule donc les multiples du diviseur que jusqu'à 9 fois le diviseur au maximum. En revanche, les élèves se voient alors contraints de mentaliser ce répertoire, c'est-à-dire qu'ils ne l'écrivent plus intégralement, mais recherchent dans leur tête l'encadrement du dividende sur lequel ils travaillent. Remarquons enfin qu'en quittant l'école primaire, les élèves laissent fréquemment les soustractions apparentes dans le calcul de la division, alors que, dans la technique classique, elles sont en principe effectuées mentalement.

(@Ai. Maîtriser les techniques opératoires ; @Ai. Maîtriser la division posée). ■

3. MULTIPLES ET DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER NATUREL

3.1. Multiples d'un entier naturel

Définition

Un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b s'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$. On dit aussi que a est divisible par b .

Notation

$6\mathbb{N}$: ensemble des multiples de 6.
 $6\mathbb{N} = \{0, 6, 12, \dots\}$

Remarques

- $1\mathbb{N} = \mathbb{N}$;
- Tout entier naturel n est multiple de 1 et de lui-même : $n = n \times 1$;
- 0 est multiple de tout entier naturel.

Pour savoir si un nombre entier naturel a est multiple d'un entier naturel b , il faut faire la division euclidienne de a par b : si le reste est 0, alors a est multiple de b ; si le reste est différent de 0, alors a n'est pas multiple de b .

Théorème 1

Si a et b sont deux entiers naturels multiples d'un entier naturel c , alors $a + b$ est aussi multiple de c .

Démonstration

Si a est multiple de c , alors il existe un entier naturel k tel que $a = k \times c$.
 Si b est multiple de c , alors il existe un entier naturel k' tel que $b = k' \times c$.

59

Alors $a + b = k \times c + k' \times c = (k + k') \times c$.

k et k' étant deux entiers naturels, $k + k'$ l'est aussi, donc $a + b$ est multiple de c .

Théorème 2

Si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b et que b est multiple d'un entier naturel c , alors a est multiple de c .

Démonstration

Si a est multiple de b , alors il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$.

Si b est multiple de c , alors il existe un entier naturel k' tel que $b = k' \times c$.

Alors $a = k \times (k' \times c) = (k \times k') \times c$.

k et k' étant deux entiers naturels, $k \times k'$ l'est aussi, donc a est multiple de c .

Remarques

- Tout entier naturel pair est un multiple de 2, il est de la forme $2k$, avec k entier naturel.
- Tout entier naturel impair est de la forme $2k + 1$, où k est un entier naturel.
- La somme de deux nombres entiers naturels pairs est un nombre entier naturel pair (voir démonstration de ce point ci-dessous).

Démonstration

60

Si p est un entier naturel pair, il peut s'écrire sous la forme $2k$ où k est un entier.

Si p' est un entier naturel pair, il peut s'écrire sous la forme $2k'$ où k' est un entier.

Alors $p + p' = 2k + 2k' = 2(k + k')$.

Or k et k' sont deux entiers donc $k + k'$ est aussi entier.

$p + p'$ est égal au produit de 2 par un autre entier, c'est donc un entier naturel pair.

On démontre de la même façon que la somme de deux nombres entiers naturels impairs est un nombre entier naturel pair :

si p est un entier naturel impair, il peut s'écrire sous la forme $2k + 1$ où k est un entier ;

si p' est un entier naturel impair, il peut s'écrire sous la forme $2k' + 1$ où k' est un entier.

Alors $p + p' = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1)$

Or k et k' sont deux entiers donc $k + k' + 1$ est aussi entier.

$p + p'$ est égal au produit de 2 par un autre entier, c'est donc un entier naturel pair.

3.2. Diviseurs d'un entier naturel

Définition

Un entier naturel a est diviseur d'un entier naturel b si et seulement si b est multiple de a : il existe un entier naturel k tel que $b = k \times a$. On dit aussi que a divise b , ce qui signifie que le reste de la division de a par b est 0.

Exemples : $5 \times 6 = 30$ donc 5 et 6 sont diviseurs de 30.

$1 \times 4 = 4$ donc 1 et 4 sont diviseurs de 4.

Remarques

- Tout entier naturel admet comme diviseurs 1 et lui-même.
- Tout entier naturel a est diviseur de 0 : quel que soit l'entier naturel a , $0 \times a = 0$.

Vocabulaire

Les expressions suivantes sont équivalentes :

- a est divisible par b ;
- b est un diviseur de a ;
- b divise a ;
- a est multiple de b ;
- le reste dans la division de a par b est nul.

(@Ai. Maîtriser les expressions concernant la divisibilité)

Ensemble des diviseurs d'un nombre entier naturel

Exemple : $D(36) = \{1 ; 36 ; 2 ; 18 ; 3 ; 12 ; 4 ; 9 ; 6\}$

Nous vous proposons dans la rubrique « Documents » une autre méthode de recherche de l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel, ainsi qu'un procédé permettant de déterminer le nombre de diviseurs d'un entier naturel. (@Doc. Recherche des diviseurs d'un entier naturel)

61

Théorème 1

Si un entier naturel c est diviseur de deux entiers naturels a et b , alors il est aussi diviseur de $a + b$.

Démonstration

c est diviseur de a : il existe un entier naturel k tel que $a = k \times c$;

c est diviseur de b : il existe un entier naturel k' tel que $b = k' \times c$;

alors $a + b = k \times c + k' \times c = (k + k') \times c$;

k et k' étant deux entiers naturels, $k + k'$ l'est aussi

donc c est diviseur de $a + b$.

Théorème 2

Si un entier naturel a est diviseur d'un entier naturel b et que b est diviseur d'un entier naturel c , alors a est aussi un diviseur de c .

Démonstration

a est diviseur de b : il existe un entier naturel k tel que $b = k \times a$;

b est diviseur de c : il existe un entier naturel k' tel que $c = k' \times b$;

alors $c = k' \times (k \times a) = (k' \times k) \times a$;

k et k' étant deux entiers naturels, $k' \times k$ l'est aussi donc a est diviseur de c .

3.3. Nombres entiers naturels premiers (@GL.)

Définition

Un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs. Ces deux diviseurs sont 1 et lui-même.

Les nombres entiers naturels premiers inférieurs à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19. De plus, l'ensemble des nombres entiers naturels premiers est infini. **Attention !** 0 et 1 ne sont pas premiers (1 ne possède, en effet, qu'un seul diviseur).

Remarque

Pour savoir si un nombre n est premier, il suffit d'essayer de le diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$. Si n n'est divisible par aucun de ces nombres, c'est qu'il est premier.

Exemple : 2 693 est-il un nombre premier ? À la calculatrice, on constate que $\sqrt{2693} \approx 51,9$. On essaye alors, toujours avec la calculatrice, de diviser 2 693 par les nombres premiers inférieurs à 51,9. On constate alors qu'aucun de ces nombres ne divise 2 693 donc 2 693 est bien un nombre premier. Attention, s'il faut le démontrer, toutes les divisions doivent être écrites. (@Doc. Prouver qu'un nombre est premier).

62

3.4. Décomposition d'un entier naturel en un produit de facteurs premiers

Propriété

Tout entier naturel n peut être décomposé en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, sous forme réduite et ordonnée.

Pour déterminer cette décomposition, on peut évidemment procéder par tâtonnement pour des nombres simples. Par exemple :

$12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$. Dans cette décomposition, les facteurs premiers sont 2 et 3.

$75 = 3 \times 25 = 3 \times 5 \times 5 = 3 \times 5^2$. 3 et 5 sont des facteurs premiers.

Cependant, cette méthode s'avère peu généralisable.

La méthode la plus efficace consiste à tester des divisions de n par chaque nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. On divise n par le premier nombre premier p_1 . S'il est divisé sans reste, on reprend le processus avec le quotient trouvé (n/p_1). On ajoute p_1 à la liste des facteurs intervenant dans la décomposition de n . S'il n'est pas divisible par p_1 , on divise n par le nombre premier suivant p_2 , et ainsi de suite.

Les essais de divisions peuvent être optimisés de diverses manières, notamment en utilisant des critères de divisibilité (voir ci-contre). Par exemple, si n est impair, on évite de tester la division par 2.

Exemple

Dans l'exemple suivant, 2 et 5 sont des nombres premiers (p_1 et p_2 de la méthode). On divise 200 par 2. Le quotient trouvé, 100, est encore divisible par 2. On divise 100 par 2. En reprenant le processus, on atteint 25. 25 n'est pas divisible par 2 ni par 3. Le prochain nombre premier est 5. On divise 25 par 5. On continue le processus jusqu'à un reste nul.

Ce qui sous-entend :

$$\begin{array}{l|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{aligned} 200 &= 2 \times 100 \\ &= 2 \times 2 \times 50 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 25 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \end{aligned}$$

d'où $200 = 2^3 \times 5^2$ dans les deux cas.

Exercice

Soient les nombres A et B tels que :

$$A = 2 \times 3^4 \times 3 \times 15 \text{ et } B = 30^3.$$

Quelles sont les puissances de 3 qui divisent A ?

Quelles sont les puissances de 3 qui divisent B ?

Solution

Décomposons A et B en produit de facteurs premiers :

$$A = 2 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times 3 \times (3 \times 5) = 2 \times 3^6 \times 5.$$

Donc les puissances de 3 qui divisent A sont : 3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; 3^5 ; 3^6 .

$$B = (2 \times 3 \times 5)^3 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3.$$

Donc les puissances de 3 qui divisent B sont : 3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3 .

63

3.5. Nombre de diviseurs d'un entier naturel

Pour trouver le nombre de diviseurs d'un nombre, on peut procéder par tâtonnement. Ainsi, pour 200, on peut trouver toutes les écritures multiplicatives de deux facteurs :

1	2	4	5	8	10
200	100	50	40	25	20

On trouve ainsi 12 diviseurs. Cette méthode n'est pas sans risque car certaines valeurs peuvent être oubliées, d'où l'intérêt d'une méthode plus généralisable (@Doc. Recherche des diviseurs d'un entier naturel).

Exemple

Cherchons le nombre de diviseurs de 200.

La méthode consiste à écrire la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 200, selon la méthode décrite précédemment : $200 = 2^3 \times 5^2$.

Il y a 4 choix possibles pour le facteur 2 ($2^0, 2^1, 2^2, 2^3$). Pour chacune de ces possibilités, il y a 3 choix possibles pour le facteur 5 ($5^0, 5^1, 5^2$), c'est-à-dire $4 \times 3 = 12$ diviseurs pour 200.

Propriété

Si n admet pour décomposition en facteurs premiers $a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$, avec α, β, γ entiers et a, b et c premiers, alors le nombre de diviseurs de n est $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

3.6. PGCD : plus grand commun diviseur

Considérons deux nombres entiers naturels non nuls a et b . Chacun de ces deux nombres possède un certain nombre de diviseurs. On peut observer que a et b ont au moins 1 comme diviseur commun, puisque 1 divise tous les nombres entiers. Le plus grand diviseur commun à a et à b sera noté PGCD ($a ; b$).

Exemple

Cherchons le plus grand diviseur commun à 48 et 36.

64

• **Première méthode** : on écrit la liste des diviseurs des deux entiers naturels et on cherche le plus grand nombre commun aux deux listes.

$D(48) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48\}$

$D(36) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$

Donc PGCD ($48 ; 36$) = 12

• **Deuxième méthode** : on écrit les décompositions en facteurs premiers des deux nombres. Le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions, chacun étant affecté de son plus petit exposant, est le PGCD des deux nombres.

$48 = 2^4 \times 3$

$36 = 2^2 \times 3^2$

Donc PGCD ($48 ; 36$) = $2^2 \times 3 = 12$.

(@Ai. PGCD de deux nombres par décomposition ; @Ai. PGCD de deux nombres par divisions successives)

La recherche du PGCD de deux entiers naturels est utile pour rendre une fraction irréductible. (voir chapitre 4, §1.2.2.).

Définition

Deux entiers naturels dont le PGCD est 1 sont dits premiers entre eux.

Exemples : PGCD ($3 ; 4$) = 1 donc 3 et 4 sont premiers entre eux ;

PGCD ($25 ; 8$) = 1 donc 25 et 8 sont premiers entre eux ;

PGCD ($4 ; 8$) = 2 donc 4 et 8 ne sont pas premiers entre eux.

Propriété

Si un entier naturel est divisible par deux entiers naturels a et b premiers entre eux, alors il est divisible par le produit $a \times b$.

Par exemple, un entier n qui est divisible par 2 et par 5 l'est aussi par 10, car 2 et 5 sont premiers entre eux. Mais 116 qui est divisible par 2 et 4 ne l'est pas par 8. En effet, 2 et 4 ne sont pas premiers entre eux car leur PGCD est 2.

3.7. PPCM : plus petit commun multiple

Considérons deux entiers naturels a et b non nuls. Ils possèdent chacun une infinité de multiples, dont certains sont communs. Considérons le plus petit des multiples communs non nul à a et à b . On le note PPCM ($a ; b$).

Exemple

Cherchons le plus petit multiple commun à 48 et 36.

$48 \mathbb{N} = \{0 ; 48 ; 96 ; 144 ; 192 ; 240 ; 288 \dots\}$

$36 \mathbb{N} = \{0 ; 36 ; 72 ; 108 ; 144 ; 180 ; 216 ; 252 ; 288 \dots\}$

Le plus petit multiple commun non nul à 48 et 36 est 144 : PPCM ($48 ; 36$) = 144.

Attention !

- Il y a d'autres multiples communs à 48 et 36, ce sont tous des multiples du PPCM.
- Le PPCM de a et de b n'est, dans le cas général, pas ab , mais inférieur : PPCM ($48 ; 36$) = 144 alors que $48 \times 36 = 1\,728$.

Méthodes de recherche

• Première méthode

On écrit la liste ordonnée des multiples de 48 puis celle des multiples de 36. On cherche le plus petit nombre commun non nul (voir exemple ci-dessus).

• Deuxième méthode

On écrit les décompositions en produit de facteurs premiers des deux nombres. Puis, on écrit le produit des facteurs premiers qui figurent dans l'une ou l'autre des deux décompositions, chacun étant pris avec son plus grand exposant. Ce produit est le PPCM des deux nombres entiers considérés.

$48 = 2^4 \times 3$

$36 = 2^2 \times 3^2$

Donc PPCM ($48 ; 36$) = $2^4 \times 3^2 = 144$.

(@Ai. PPCM de deux nombres par décomposition ; @METH. Utilisation du PGCD et du PPCM).

65

La recherche du PPCM de deux entiers a et b est utile pour trouver le dénominateur commun quand on calcule la somme de deux fractions de dénominateurs a et b (cf. chapitre 4 § 1.2.3.)

Remarque

On a $\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = a \times b$.

3.8. Critères de divisibilité pour les nombres écrits en base 10

Les critères (ou caractères) de divisibilité sont des propriétés qui permettent de reconnaître sans faire la division, si un nombre est multiple de 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25.

On les démontre en se servant de propriétés sur la numération.

• Critères de divisibilité usuels

- ◆ Un nombre entier naturel est multiple de 2 s'il est pair (si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8).
- ◆ Un nombre entier naturel A est multiple de 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres de droite est lui-même multiple de 4.

Démonstration pour un nombre A de 4 chiffres :

66

$$\begin{aligned} A &= \overline{mcd u} \\ &= m \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + u \\ &= 10^2(10m + c) + 10d + u \\ &= 4 \times 25(10m + c) + 10d + u \\ &= 4 \times 25(10m + c) + \overline{du} \end{aligned}$$

Pour que A soit multiple de 4, il faut que l'on puisse factoriser 4 dans la dernière expression. Il faut donc que $\overline{du}$ soit multiple de 4.

- ◆ Un nombre entier naturel A est multiple de 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres de droite est lui-même multiple de 8.
- ◆ Un nombre entier naturel est multiple de 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- ◆ Un nombre entier naturel est multiple de 10, 100 ou 1 000 s'il se termine par un, deux ou trois zéros.
- ◆ Un nombre entier naturel est multiple de 3 si la somme de ses chiffres est multiple de 3.

Démonstration pour un nombre B de 4 chiffres :

$$\begin{aligned} B &= \overline{mcd u} \\ &= m \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + u \\ &= m(999 + 1) + c(99 + 1) + d(9 + 1) + u \\ &= 999m + 99c + 9d + m + c + d + u \\ &= 3(333m + 33c + 3d) + m + c + d + u \end{aligned}$$

Pour que B soit multiple de 3, il faut que l'on puisse factoriser 3 dans la dernière expression, donc que $m + c + d + u$ soit multiple de 3.

- ◆ Un nombre entier naturel est multiple de 9 si la somme de ses chiffres est multiple de 9. On démontre ce critère de la même façon que précédemment.

- ◆ Un nombre est multiple de 25 s'il se termine par 00, 25, 50 ou 75.

(@A1. Maîtriser les critères de divisibilité).

• Critères de divisibilité composés

Considérons l'exemple suivant : pour qu'un nombre soit multiple de 6, il faut qu'il soit à la fois multiple de 2 et de 3 : on peut donc utiliser les critères de divisibilité par 2 et par 3.

Exemple

1 284 est multiple de 2 car il est pair. Il est également multiple de 3 car la somme de ses chiffres est $1 + 2 + 8 + 4 = 15$ et 15 est un multiple de 3. En conclusion, 1 284 est multiple de 6.

Remarque

Un nombre divisible par a et b n'est pas toujours divisible par ab mais est divisible par le PPCM de a et de b .

Exemple : 24 est divisible par 6 et 12 mais pas par 72.

67

Exercice 1

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont multiples de 5 ?
 1 025 ; $3,6 \times 10^2$; 312×10^0 ; 0×10^6 ; $40\,120 \times 10^{-1}$; 19×10^6 .

Solution

1 025 ; $3,6 \times 10^2 = 360$; $19 \times 10^6 = 19\,000\,000$; $0 \times 10^6 = 0$. Ces quatre nombres sont des multiples de 5 car ils se terminent par 0 ou 5.

$312 \times 10^0 = 312$; $40\,120 \times 10^{-1} = 4\,012$. Ces deux nombres ne sont pas multiples de 5.

Exercice 2

Un nombre N a pour écriture décimale $\overline{72a83b}$.
 N est divisible par 6 et par 45. Quel est le chiffre b ?
 Déterminez N .

Solution

N est divisible par 6 : il existe un entier naturel k tel que $N = k \times 6 = k \times 2 \times 3$ donc N est divisible par 2 et par 3.

N est divisible par 45 : il existe un entier naturel k' tel que $N = k' \times 9 \times 5$ donc N est divisible par 9 et par 5.

Comme N est divisible par 2 et par 5 et que 2 et 5 sont premiers entre eux, il est divisible par 10, donc le chiffre b est 0.

Or N est divisible par 9 donc la somme de ses chiffres est divisible par 9, ce qui signifie que $20 + a$ est divisible par 9. En essayant les valeurs possibles pour le chiffre a , on voit que la seule possibilité est $a = 7$, car $27 = 3 \times 9$.

Donc $N = 727\,830$. ■

4. ENSEIGNEMENT

Les programmes 2008, dans la rubrique « nombres et calculs » précisent qu'au cycle 3, les élèves doivent étudier les « relations arithmétiques entre les nombres d'usage courant : double, moitié, quadruple, quart, triple, tiers..., la notion de multiple ». Notons que les programmes 2002 précisait déjà que le mot « multiple » était à connaître au cycle 3. Dans les documents d'application de ces programmes, les textes rappelaient les deux sens du terme « diviseur » : le sens de « diviseur exact » par équivalence avec le terme « multiple » (« 5 est diviseur de 35 » est équivalent à « 35 est un multiple de 5 »), le deuxième sens étant « le nombre par lequel on divise ». Le premier sens reste celui dont l'apprentissage est visé au cycle 3.

La notion de multiple et diviseur ne fait pas l'objet d'une étude systématique au cycle 3. Elle relève essentiellement du collège. (@Doc. **Apprentissage de la notion de multiple au cycle 3**).

(@Ae.)

(@Bib.)