

Séquence II I : Rappels et compléments des propriétés de IR.

I. Pré-évaluation :

Activité1 : On considère les nombres réels $a = -0,25$ et $b = -12$ et l'ensemble des nombres utilisés quotidiennement.

Consigne : 1) Citer les différents nombres de nombre que vous connaissez.

2) Mettre le réel a :

- sous la forme : $\frac{p}{10^n}$ ou $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

- sous forme de fraction irréductible.

3) Mettre le nombre réel b :

- sous la forme : $\frac{p}{10^n}$ ou $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

- sous la forme d'un quotient.

Synthèse partielle :

On retient que les ensembles de nombres sont :

- Les nombres naturels ($\mathbb{N}$)
- Les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)
- Les nombres décimaux ($\mathbb{D}$)
- Les nombres rationnels ($\mathbb{Q}$)
- Les nombres irrationnels

II. Situation problème :

Activité2 : On donne le tableau suivant :

	42	-12	$\frac{15}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{2}$	$\sqrt{-3}$	π	$-\sqrt{25}$	$-\frac{25}{10^3}$
IN									
Z									
D									
Q									
IR									

2) Cocher ou indiquer par une croix à chaque fois qu'un nombre du tableau appartient à un ensemble de celui-ci.

Synthèse partielle : On dit que l'on a identifié les nombres appartenant à un ensemble donné.

Activité2 : On donne les nombres réels x et y tel que : $-3 \leq x \leq -1$ et $4,1 \geq y \geq 3,9$

Consigne : Trouver un encadrement de chacun des réels suivants :

$$x + y; x \times y; x^2; y^2; |x|; |y|; \frac{x}{y}$$

Synthèse partielle : On dit que l'on a déterminé les encadrements de : somme, produit, rapport, de deux nombres réels ainsi que des carrés des valeurs absolues des réels.

Activité 3 : On donne les réels $A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$; $B = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \times \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$;

$$C = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{5}}{4 + \frac{2}{5}}, D = \frac{(0,6)^2 \times 12^2 \times 54^3}{9^2 \times 5^2 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4}$$

Consigne : 1) Ecrire le plus simplement les réels A et B

2) Ecrire sous forme de fraction irréductible le réel C

3) Ecrire le réel D sous forme de produit de puissances entières de nombres premiers.

Synthèse générale : On retient :

Soit a et b élément de IR $(a; b) \in \mathbb{Z}^2$

$$1) (a \times b)^n = a^n \times b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; (a^n)^m = a^{n \times m}; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \frac{1}{a^n} = a^{-n}; a^0 = 1; a^1 = a$$

$$2) \text{ Soit } (a; b) \in \mathbb{IR}_+^*$$

$$a) \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$b) \text{ Si } a \text{ est un réel quelconque et non nul on a : } \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

c) Soit a , b, c et d des réels non nuls on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}; \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}; a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}; \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

b non nul et d non nul

Activité 4 : On considère les sous ensembles de IR suivants :

$$I = \mathbb{IR} - [0; 2]; J = \mathbb{IR} - \{-1, 2, 7\}; K = \{x \in \mathbb{IR}; -1 \leq x < 3\}; = \{x \in \mathbb{IR}; -3 \leq x \text{ et } x \geq 3\}$$

$$\text{et les ensembles } I_1 = [-1; 4] \text{ et } I_2 = \left[-\frac{1}{2}; 7\right]$$

Consigne : 1) Ecrire chacun des sous ensembles de IR : I ; J ; K et L sous forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles.

2) Déterminer le centre ; le rayon et l'amplitude des intervalles I_1 et I_2

Synthèse partielle : Soit $I = [a; b]$ un intervalle de centre c et de rayon r. On retient que :

Le centre c de I est : $C = \frac{a+b}{2} \leq \text{rayon } r = \frac{b-a}{2}$ et l'amplitude $A = b - a$

Activité 5 : On donne les expressions :

$$A(x) = (2x+2)^2; B(x) = (3x-1)^3; C(x) = x^3+1; D(x) = 8x^3-1$$

Consigne : 1) Développer les expressions A(x) et B(x)

2) Factoriser C(x) et D(x)

Synthèse partielle : On retient que $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

III. **Synthèse générale** :

A) 1) **Nombre naturels** : a) l'ensemble des nombres naturels est noté par $\mathbb{N}$ et s'écrit

$$\mathbb{N} = \{0, 2, 3, 4, 5, \dots\} \text{ et } \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

b) **Exemple et contre exemples** : $254 \in \mathbb{N}; -5 \notin \mathbb{N}$;

c) **Remarque** : R1) Le plus petit élément de $\mathbb{N}$ est 0 mais $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

R2) L'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$ sont des lois de composition interne c'est-à-dire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a+b) \in \mathbb{N} \text{ et } (a \times b) \in \mathbb{N}.$$

2) **Entiers relatifs** :

a) **Définition** : les entiers relatifs sont tous les nombres naturels ainsi que leurs opposés, il est noté $\mathbb{Z}$ et s'écrit : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

b) **Exemples et contre exemples** : $-2 \in \mathbb{Z}; 2,5 \notin \mathbb{Z}$

3) **Nombres décimaux** :

a) **Définition** : On appelle nombres décimaux tout nombre qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{p}{10^n} \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple : -3,75 est un nombre décimal ; +12 est un nombre décimal.

3) **Nombres rationnels** :

a) **Définition** : On appelle nombre rationnel tout nombre qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{p}{q} \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*$$

Exemples et contre exemple : $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $-50 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{5}$ non élément de $\mathbb{Q}$

Remarque : Il existe des nombres rationnels qui sont des décimaux et des rationnels qui ne sont pas des décimaux.

Exemples : $\frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{7}{2} \in \mathbb{ID}$ car $\frac{7}{2} = 3,5 = \frac{35}{10}$ mais $\frac{1}{3}$ non élément de $\mathbb{ID}$

4) **L'ensemble des nombres irrationnels :**

- a) **Définition :** On appelle nombres irrationnels tout nombre qui ne peut pas se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$

Exemples : $\sqrt{2}$; $\frac{-\pi}{1-\sqrt{3}}$ sont des nombres irrationnels.

NB : Tous les nombres qui nous utilisons (ou qui ont été mentionnés) ci-dessus sont des nombres réels il est noté $\mathbb{R}$.

On retient que : *INCZC IDCQCIR*

B) **Puissances entières de nombres réels :**

- a) **Définition :** Soit a appartenant à $\mathbb{R}$ et n un réel non nul. On appelle puissance entière de a , le nombre réel noté a^n et qui s'écrit $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ ou n est l'exposant et a la base de la puissance. De plus si $a \neq 0$ alors $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et $a^0 = 1$

- b) **Propriétés :** Pour tous entiers relatifs m et n ; pour tous nombres réels non nul a ; b , on

$$p1) (a \times b)^n = a^n \times b^n; \quad p2) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad p3) (a^n)^m = a^{n \times m}; \quad p4) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

$$p5) \frac{1}{a^n} = a^{-n}; \quad p6) a^0 = 1; \quad a^1 = a; \quad p6) (-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

C) **Quotient et racine carrée :**

- 1) Pour tous réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$ on a :

$$p1) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}; \quad p2) \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}; \quad p3) a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}; \quad p4) \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d};$$

$$p5) \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

2) **Racine carrée :**

- a) **Définition :** Soit a un réel non nul, la racine carrée de a est noté $\sqrt{a}$ qui est l'unique réel positif dont le carré est a

- b) **Propriété :** Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$p1) \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}; p2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0); p3) \sqrt{a^2} = |a|; p4) (\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$$

Attention : D'une façon générale : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

D) **Identités remarquables** : $\forall (a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

IV. **Evaluation** :

Exercice1 : Soit x et y deux réels vérifiant : $-4,2 \leq x \leq -3,2$ et $2,5 \geq y \geq 2,3$

Consigne : Trouver un encadrement des réels $x+y$; $x-y$; $\frac{x}{y}$; et xy

Exercice2 : On considère les réels A, B, C et D tels que :

$$A = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2; B = \sqrt{7 + \frac{16}{8} + \frac{35}{2} - \frac{6}{4}}; C = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \times \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

Consigne : Vérifier que les nombres A, B et C sont des entiers naturels

Exercice 3 : On considère les réels A et B dans les cas suivants :

$$a) A = \frac{5}{7} \text{ et } B = \frac{7}{10}; b) A = 2 - 2\sqrt{7} \text{ et } B = 2 - 3\sqrt{3}; c) A = 5^{13} \text{ et } B = 25^6$$

Consigne : Dans chacun des cas ci-dessus, comparer les réels A et B ;