

Travaux dirigés sur calculs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1 :

1°) Compléter par une croix si le nombre est élément de l'ensemble :

Nombres	-7	$\frac{\sqrt{25}}{5}$	$2 + \pi$	$\frac{-14}{1000} + 7$	$7, \underline{156} \dots$	$\frac{\sqrt[4]{16}}{4}$	$(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})$
Ensembles							
$\mathbb{N}$							
$\mathbb{Z}$							
$\mathbb{D}$							
$\mathbb{Q}$							
$\mathbb{R}$							

2°) Compléter les pointillés par le symbole adéquat :

a°) $345 \dots \mathbb{N}$	d°) $5,34 \dots \mathbb{Z}$	h°) $\frac{1}{3} \dots \mathbb{Q}$	l°) $\mathbb{R} \dots \mathbb{Q}$
b°) $2,8 \dots \mathbb{N}$	e°) $-4,001 \dots \mathbb{D}$	i°) $\frac{0,1}{0,002} \dots \mathbb{Q}$	m°) $\mathbb{N} \dots \mathbb{N}^*$
c°) $\{0; 1\} \dots \mathbb{N}$	f°) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right\} \dots \mathbb{D}$	j°) $\{\sqrt{5}\} \dots \mathbb{Q}$	n°) $\mathbb{Z} \dots \mathbb{R}$
c°) $\left\{\frac{-6}{3}; 5\right\} \dots \mathbb{N}$	g°) $3\pi \dots \mathbb{D}$	k°) $(\sqrt{7} + 5) \dots \mathbb{Q}$	o°) $\mathbb{Q} \dots \mathbb{D}$

Exercice 2 :

1°) Ecrire les nombres suivants sous la forme de $\frac{a}{10^b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

$$a = \frac{7}{4}; b = -\frac{6}{5}; c = \frac{1}{25}; e = \frac{3}{5^{-4}}; f = \frac{-6}{27 \cdot 2^{-5}}; g = \frac{24^7}{20^3 \cdot 144^{-3}}.$$

2°) Mettez sous la forme de $\frac{a}{b}$ les nombres suivants avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

$$h = 1, \underline{323} \dots; i = 0, \underline{517} \dots; j = -6, \underline{163} \dots; k = 9, \underline{23415} \dots$$

3°) Déterminer écriture fractionnaire de chacun des nombres suivants :

$$l = 3, \underline{55} \dots + 2, \underline{02} \dots; m = 7, \underline{5} \dots - 25, \underline{12} \dots; n = 6, \underline{7} \dots \times 2, \underline{12} \dots; l = 3, \underline{341} \dots \div 2, \underline{25} \dots$$

Exercice 3 :

1°) Ecrire chacun des nombres suivants à l'aide de puissance entières de nombre premiers :

$$A = \frac{3500000 \times (1800)^{-15} \times ((-12))^5}{160^{-13} \times 240 \times 25^7}; C = \frac{(0,125^{-3})^{\frac{2}{6}} \times (0,00360 \cdot 10^2)^5 \times \left(-\frac{25}{2}\right)^3}{(-0,810^4)^{\frac{3}{7}} \times 18000000}; D = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3}}{\sqrt[7]{81} \cdot \sqrt{12}};$$

$$E = \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{27}} \cdot (\sqrt[4]{36})^3 \cdot \sqrt[5]{324}}{(\sqrt[5]{\sqrt{3}})^2}; F = \frac{27^{-\frac{2}{3}} \times 49^{\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{5}{4}}}{(\sqrt[5]{243})}.$$

2°) Déterminer l'entier relatif n dans chacun des cas suivants :

$$a°) (4^{3n})^2 \times 2^{-4} = 2^{3n+14}; b°) (3^2)^{n-1} = 729; \left(7^{\frac{1}{4}}\right)^{12n+8} \times \frac{1}{7^{-2}} = 7^{81}; c°) \frac{25^{n-2} \times 5^{2n}}{125^{n+2}} = 625.$$

3°) Simplifier les expressions suivantes :

$$F = \sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}; G = \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^{n-4} + 4^{n+1})^3}; F = \frac{a^8 b^6 c^4 - a^3 b^2 c}{a^{10} b^8 c^6 - a^5 b^4 c^3}.$$

Exercice 4 :

1°) Calculer chacune des expressions suivantes en donnant les résultats sous forme des fractions irréductibles.

$$A = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{2 + \frac{2}{3}}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{7}{2 + \frac{2}{2}}}; B = \frac{\frac{1 + \frac{2}{7} + \frac{7}{3} - 1}{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}}}{\frac{7}{6} + \frac{4}{4} + \frac{5}{2}}; C = \left(\frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} \times \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{3}}{\frac{5}{3}}\right) \div \left(\frac{2 + \frac{5}{6}}{2 - \frac{5}{6}}\right); D = \frac{5 + \frac{2 - \frac{7}{3}}{1 + \frac{3}{2}}}{5 + \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}}} \div \frac{1}{\frac{5}{12} - \frac{3}{4}}; F = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}}}.$$

2°) Simplifier les expressions suivantes :

$$G = \frac{x-1}{2x} \times \left(\frac{x+1}{x-1} - 1 \right) ; B = \frac{\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1}} ; C = \frac{\frac{x+3}{1-3x} + \frac{x-3}{1+3x}}{\frac{x^2-9}{1-9x^2}} ; D = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}{x^2 - \frac{1}{x^2}} ; E = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \div \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^2}$$

4°) Calculer les expressions suivantes :

$$F = \frac{3\beta-5}{6} - \frac{4\beta+1}{18} + \frac{\beta+15}{36} + \beta + 3 ;$$

$$G = \frac{4\beta^2}{2\beta-1} + \frac{1}{2\beta+1} - \frac{4\beta}{4\beta^2-1} ;$$

$$H = \frac{9\beta}{9\beta+3} - \frac{6\beta}{3\beta-1} - \frac{3\beta+3}{9\beta^2-1} ;$$

Exercice 5 :

1°) Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels :

a°) $-3\sqrt{18} + 6\sqrt{128} + 7\sqrt{512}$; b°) $\sqrt{6} - 13\sqrt{96} + 5\sqrt{726}$.

2°) Rendre rationnels les dénominateurs des nombres réels suivants :

$$L = \frac{2}{\sqrt{5}-2} \quad \left| \quad N = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{13}}{\sqrt{11}} \quad \right| \quad P = \frac{2\sqrt{32}-\sqrt{50}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \quad \left| \quad L = \frac{-8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right.$$

$$M = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} \quad \left| \quad O = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} \quad \right| \quad q = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} \quad \left| \quad M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}} \right.$$

3°) Calculer les expressions :

$$R = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} ; S = \sqrt{2 + \sqrt{45 + \sqrt{11 + \sqrt{22 + \sqrt{9}}}}} ; T = 2 \sqrt{37 - \sqrt{\frac{21}{25} + \frac{1}{6}}} \sqrt{6 + \sqrt{103 - 2\sqrt{\frac{9}{4}}}}$$

4°) Déterminer entier relatif x dans des suivants.

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4 + \sqrt{1}}}} = 12 ; \sqrt{\sqrt{\sqrt{X+5}}} = \sqrt{\sqrt{3}}$$

Exercice 6 :

1°) Développer les expressions suivantes :

$$A = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^4 ; B = (2\sqrt{7} + 2)^2 + (-2 + \sqrt{2})^2 ; C = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 ; D = (a + b + c)^2 ; E = (\alpha + \beta + \theta)^3$$

2°) Développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes chacune des expressions suivantes :

$$F(x) = (2x + 1)^3(2x^2 - 3x + 1) + 2x^3 - 4x + 1 ; G(x) = (-5x + 1)(3x - 2)(x^4 + 7) ; H(x) = (\sqrt{3} + 2)^2(3x^4 - 7)^4 + (\sqrt{3}x^5 + 6x^3 + 2x - \sqrt{3})$$

3°) Factoriser les expressions suivantes :

$$I(x) = 16x^2 - 121 ; L(x) = 4 - \frac{x^2}{81} ; M(x) = x^2 - \left(\frac{1}{3}x + 1 \right)^2 ; N(x) = 27 - x^3 ; O(x) = \frac{5\sqrt{5}}{75} - 27x^3 ;$$

$$P(x) = \frac{8}{7\sqrt{7}} - 2\sqrt{2}x^3 ; Q(x) = (-2x + 1)^2 - (-7x^2 + 2x + 1)^2 ; T(x) = 3ab + 4a^2b^3 - 5a^2b ; S(x) = (x + 1)^3 + (x^2 + 2x + 1)^2(x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2(x + 2) ; R(x) = ax + by + a - bx - ay - b$$

2°) Soit $A = (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + p^2$. Montrer que $A = a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice 7 :

1°) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (\sqrt{11} - \sqrt{10})^{10} (\sqrt{10} + \sqrt{11})^{11} ;$$

$$B = (\sqrt{7} - \sqrt{5})^6 (\sqrt{7} + \sqrt{5})^7 ;$$

$$B = \left(\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \right)^2$$

2°) Montrer les expressions suivantes :

$$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} ; \left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right) = 2(a + b) \text{ où } a > b \geq 0 ;$$

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a+1} + \sqrt{a+1-\sqrt{2a+1}} = \sqrt{2}; \frac{\frac{a+\sqrt{2}}{a-\sqrt{2}} - \frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}}{1 - \frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}; \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}} = \frac{1}{2}.$$

5°) On pose : $x = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$ et $y = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$.

Vérifier que : $4x - y = 0$.

Exercice8 :

1°) On pose $A = \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$.

a°) Comparer les nombres $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ et $\sqrt{4+\sqrt{7}}$ puis en déduire le signe de A .

b°) Calculer A^2 puis déduire la valeur de A .

2°) On donne $x = \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ et $y = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

a°) Montrer que x est défini puis calculer $(1-\sqrt{5})^2$ et $(1+\sqrt{5})^2$.

b°) Calculer x^2 ; y^2 et xy .

c°) En déduire $x + y$

3°) Démontrer que : $a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$.

4°) Soient x et y deux réels tels que $0 \leq y \leq x$. Comparer les réels $\frac{x-y}{x+y}$ et $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Exercice9 :

1°) Donner un encadrement de :

$A = 2 + 3\sqrt{3}$ sachant que $5,25 < \sqrt{3} < 6,1$ à 10^{-2} près

$B = 2 - 7\sqrt{6}$ sachant que $-2,543 < \sqrt{6} < 3,134$ à 10^{-4} près

$C = \frac{5}{-5+2\sqrt{7}}$ sachant que $3 < \sqrt{7} < 4$.

2°) Déterminer l'encadrement de $K = \frac{x+y}{xy}$ lorsque : $2 < x < 3$ et $-9 < y < -8$.

3°) Soient a et b deux nombres réels vérifiant $b < a < b+1$ et $-5 < b < -3$.

Encadrer $a+b$ et $a-2b$.

4°) On donne $m = 1 - 2\sqrt{3}$; $p = \sqrt{13-4\sqrt{3}}$ et $q = \sqrt{13+4\sqrt{3}}$

a°) Montrer que m est négatif.

b°) Calculer m^2 puis déduire que p et m sont opposés.

c°) Encadrer m à 10^{-2} sachant que : $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

d°) Montrer que : $p \times q = 11$.

Exercice10 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$|x-7| = 3$; $|3x+1| = 2$; $|4-5x| = -14$; $|2x+5| = |12x+11|$; $d(2x+1; -3) = d(2; 5)$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$|2x-4| < 5$; $|\sqrt{5}x+5| \leq 5$; $|13-2x| \leq 0$; $|\sqrt{3}-x| \geq 0$; $-\sqrt{7} \cdot |2x+1| \leq -7$; $1 \leq |x-1| \leq 3$

3°) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$5 \leq |-2x+3| \leq 7$; $|x+6| + |4-2x| = 8$; $|x-5| > |x+4|$.

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$E(x-\sqrt{2}) = 4$; $E(1-2x) = -2$; $E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = \sqrt{2}$; $2E(x) - 1 = 0$; $E(|x|) = 1$; $|E(x) - 5| = 6$; $E\left(\sqrt{|x|} - \frac{1}{3}\right) = 1$

5°) Démontrer que : $|7a-1| \leq |3a+19| + 4|a-5|$.

1°) Déterminer l'origine a et l'extrémité b de chacun des cas suivants :

$I(-8; 5)$; $I\left(1; \frac{2}{3}\right)$; $I(\sqrt{5}; 3\sqrt{5})$; $I\left(\frac{7}{17}; \frac{16}{17}\right)$.

Exercice11 :

I°) 1°) Démontrer que pour tout entier naturel non nul on a : $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.

2°) En déduire une expression plus simple du produit : $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{20^2}\right)$.

3°) n étant un nombre entier naturel, écrire sans radical au dénominateur de l'expression : $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

4°) En déduire une expression simple de la somme : $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

II°) 1°) Démontrer que : $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

2°) Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

3°) En déduire que : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice12 :

I°) Soient x et y deux réels tels que : $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases}$.

a°) Démontrer que : $|xy| < 1$. En déduire que $1 + xy > 0$.

b°) Développer $(1-x)(1-y)$ et $(1+x)(1+y)$.

c°) Démontrer que : $\left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1$.

2°) Soit x un réel tel que : $x \neq -1$.

a°) Montrer que : $\frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x} - 1 + x$.

b°) Démontrer que : si $|x| \leq \frac{1}{2}$ alors : $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2$ et $0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2$.

c°) En-déduire que : $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + 2x^2$.