

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS – SYSTÈMES

1- Résolution des équations et des inéquations

1-1- Résolution d'équations à une inconnue

1-1-1- Résolution d'équations du premier degré à une inconnue (avec paramètre)

Activité 1 :

Quel est ce nombre réel dont le produit par 3 augmenté de 2 est égal à 5 ?

Consigne :

- Choix de l'inconnue.
- Mise en équation.
- Résolution.

Synthèse :

On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{R}$ toute égalité pouvant s'écrire sous la forme $ax+b=0$, où a et b sont des réels et ($a \neq 0$). Les réels a et b sont les coefficients et x la variable où l'inconnue de l'équation.

Pour résoudre une équation qui peut se mettre sous la forme $ax+b=0$, où ($a \neq 0$). On peut procéder comme suit :

$$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{a} \text{ d'où l'ensemble solution est noté } S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

NB :

Lors de la résolution d'une équation du premier degré, si :

- $a=0$ et $b \neq 0$ alors l'ensemble solution est le vide $s = \emptyset$
- $a=0$ et $b=0$ alors l'ensemble solution est $\mathbb{R}$.

Activité 2 :

On considère les équations paramétriques d'inconnue réel x définie par :
(E_m): $(m+1)x+2=m+3$ et (E_t): $tx+3=0$.

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

Consigne pour (E_m)

- Pour $m+1=0$, résoudre l'équation (E_m).
- Pour $m+1 \neq 0$, que vaut l'inconnue réel x ?

Consigne pour (E_t)

- a. Pour $t=0$, est – il possible de trouver une valeur pour l'inconnue réel x .
- b. Pour $t \neq 0$, que vaut l'inconnue réel x ?

Synthèse :

Pour résoudre des équations paramétriques on distingue deux cas

- Si $a=0$ ensuite on déduit les solutions possibles
- Si $a \neq 0$ ensuite déterminer les solutions possibles

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $-2x+6=0$
- b. $5(x+4)=3x-6$
- c. $\sqrt{2}x-6=4$
- d. $\frac{x+1}{x-2}=3$ (équation se ramenant au premier degré)
- e. $x+3=3x+4$

1-1-2- Forme canonique d'un trinôme du second degré

Activité :

On considère le trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$

Vérifier que $P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Synthèse :

On appelle trinôme du second degré ou fonction polynôme du second degré toute fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout x on associe ax^2+bx+c où a , b et c sont des réels et x l'inconnue réel.

Posons $\Delta=b^2-4ac$ alors la forme canonique du trinôme du second degré peut s'écrire $P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$; où le réel Δ est appelé le discriminant.

Application :

Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes :

- a. $F(x)=9x^2+6x-1$
- b. $G(x)=x^2+3x-4$
- c. $H(x)=-3x^2+12x-9$

1-1-3- Résolution de l'équation du second degré a une inconnue par la méthode du discriminant

Activité :

Soit l'équation $(E): x^2 + 2x - 3 = 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ (E) .

Consigne :

- Donner une forme canonique de (E) .
- Montrer que $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$
- Trouver les inconnues réels x dans $x-1=0$ et $x+3=0$
- Conclure.

Synthèse :

On appelle équation du second degré à une inconnue, toute équation qui peut se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des réels et a est non nul.

Pour résoudre une telle équation on calcule le discriminant réel Δ , on discute suivant les valeurs de Δ

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution donc l'ensemble solution est le vide. $S = \emptyset$
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ donc l'ensemble solution est $S = \{x_1; x_2\}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$ donc l'ensemble solution est $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

Application :

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- $3x^2 - x + 2 = 0$
- $-6x^2 + 3x + 9 = 0$
- $x^2 - 9 = 0$
- $-2x^2 + 3x = 0$
- $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} - 2 = 0$

Remarque :

Lors de la résolution d'une équation du second degré si :

- $a+b+c=0$ alors $x_1=1$ et $x_2=\frac{c}{a}$; $S=\left\{1; \frac{c}{a}\right\}$.
- $a-b+c=0$ alors $x_1=-1$ et $x_2=-\frac{c}{a}$; $S=\left\{-1; -\frac{c}{a}\right\}$.
- $c=0$ alors $ax^2+bx=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=-\frac{b}{a}$
- $b=0$ alors $ax^2+c=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } -\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \text{si } -\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \text{impossible} \end{cases}$.
- b pair alors on pose $b'=\frac{b}{2}$ et on calcule le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$
 - Si $\Delta' < 0$ alors pas de solution
 - Si $\Delta' > 0$ alors $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$
 - Si $\Delta = 0$ alors $x_0 = -\frac{b'}{a}$.

1-1-4- Factorisation du trinôme du second degré

Activité :

On donne une fonction polynôme du second degré : $F(x) = 2x^2 - 3x - 2$

Donner si possible une forme factoriser de $F(x)$.

Consigne :

- a. Donner si possible la forme canonique de $F(x)$.
- b. A partir de la question a., donner une factorisation de $F(x)$.
- c. Conclure.

Synthèse :

- En calcule le discriminant réel Δ alors
 - Si $\Delta > 0$ alors x_1 et x_2 sont les zéros de ax^2+bx+c donc on a : $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
 - Si $\Delta < 0$ alors pas de zéros donc pas de factorisation possible.
 - Si $\Delta = 0$ alors x_0 est l'unique zéro donc $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$.
- On peut utiliser la forme canonique du polynôme.

1-2- Résolution d'inéquation à une inconnue

1-2-1- Résolution d'inéquation du premier degré à une inconnue

Activité :

Déterminer si possible les nombres réels dont le produit par 3 diminué de 4 est plus petit à 2.

Consigne :

- a. Choix de l'inconnue
- b. Mise en équation
- c. Conclure.

Réponse :

- a. Choix de l'inconnue : Soit x l'inconnue
- b. Mise en équation : $3x - 4 < 2$
- c. Conclusion : $x < 2 \implies x \in]-\infty; 2[$

Synthèse :

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, on peut tracer une droite graduée.

Les inéquations du premier degré peuvent s'écrire sous la forme $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ et $ax + b \geq 0$ a et b sont les coefficients réels et a est non nul.

Application :

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

- a. $2x + 4 > 0$
- b. $-x - 5 < 0$
- c. $\frac{1}{2}x + 3 < 6$

1-2-2- Etude du signe du binôme $ax + b$

L'étude du signe du binôme $ax + b$ dépend du signe du coefficient de l'inconnue réel x . Pour cela on peut utiliser un tableau de signe :

Posons $ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe contraire de a	0	Signe de a

Interprétation du tableau de signe :

Si $a > 0$ alors $\begin{cases} \forall x \in \left] -\infty; -\frac{b}{a} \right[; \leq \text{binôme } ax+b \text{ est négatif} \\ \forall x \in \left] -\frac{b}{a}; +\infty \right[; \leq \text{binôme } ax+b \text{ est positif} \end{cases}$

Si $a < 0$ alors $\begin{cases} \forall x \in \left] -\frac{b}{a}; +\infty \right[; \leq \text{binôme } ax+b \text{ est négatif} \\ \forall x \in \left] -\infty; -\frac{b}{a} \right[; \leq \text{binôme } ax+b \text{ est positif} \end{cases}$

Application :

Déterminer le signe des binômes dans chacun des cas :

- a. $F(x) = 2x + 8$
- b. $G(x) = -x - 3$
- c. $H(x) = 3x - 9$

1-2-3- Utilisation de l'étude de signe du binôme pour résoudre les inéquations du premier degré à une inconnue

Activité :

Soit le binôme $f(x) = 3x + 5$. Etudier le signe de $f(x)$;

Consigne :

- a. Posez $f(x) = 0$ puis trouvez l'inconnue réel x .
- b. Faire un tableau de signe de $f(x)$
- c. Conclure.

Synthèse

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue on peut utiliser l'étude du signe de $ax + b$.

Application :

Résoudre les inéquations en utilisant le tableau de signe

- a) $-4x + 7 > 0$
- b) $6 - 2x < 0$
- c) $3x + 9 \geq 0$
- d) $-7x + 8 \leq 0$
- e) $3x - 6 < 3 + 4x$

1-2-4- Etude du signe du trinôme du second degré

Activité :

Etudier le signe du trinôme $f(x) = 3x^2 - x - 2$

Consigne

- Vérifier l'égalité suivante : $(x+1)(3x+2) = 3x^2 - x - 2$.
- Etudier le signe de l'expression : $x+1$
- Etudier le signe de l'expression : $3x+2$
- Regrouper le signe des deux expressions dans le même tableau
- Faire le produit des signes
- Conclure.

Synthèse :

Pour étudier le signe de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, on peut calculer le discriminant réel $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme n'admet pas de zéro. On a le tableau suivant :

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a

- Si $\Delta > 0$ alors le trinôme admet deux zéros x_1 et x_2 avec $(x_1 < x_2)$. On a le tableau suivant :

x	$-\infty$ $+\infty$	x_1	x_2		
ax^2+bx+c	Signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

- Si $\Delta = 0$ alors le trinôme admet un seul zéro x_0 . On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_0
	$+\infty$	
ax^2+bx+c	Signe de a	0
		signe de a

Application :

Etudier le signe des trinômes suivants : $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$;

$$g(x) = -x^2 + 4x + 4 \text{ et } h(x) = 4x^2 + x + 3$$

1-2-5- Résolution d'inéquation du second degré à une inconnue

Pour résoudre une inéquation du second degré à une inconnue on peut étudier le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

