

EXERCICES SUR LES FONCTIONS : 10^{ème} Cm

Exo1 : Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme du second degré :

- Mettre $P(x)$ sous la forme canonique puis factoriser $P(x)$;
 - En déduire les racines éventuelles de P ;
 - Etudier le signe de $P(x)$.
- a. $P(x) = x^2 - 3x + 2$; b. $P(x) = x^2 + 5x + 4$; c. $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$;
d. $P(x) = x^2 + 4x + 5$; e. $P(x) = -x^2 - 5x + 6$; f. $P(x) = x^2 + 4x + 4$;
g. $P(x) = x^2 + 2x + 2$; h. $P(x) = -2x^2 + x - 2$; i. $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 9$.

Exo2 : Dans chacun des cas suivants, où Q est un polynôme de degré 2 :

- Utiliser le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ pour trouver les racines éventuelles de Q ;
 - En déduire si possible la forme factorisée de $Q(x)$. (**Indication** : si x_1 et x_2 sont 2 racines distinctes de Q alors $Q(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$).
 - Etudier le signe de $Q(x)$.
- a. $Q(x) = x^2 - 5x + 4$; b. $Q(x) = -13x^2 + 7x + 20$; c. $Q(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$;
d. $Q(x) = -\sqrt{2}x^2 + 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}$; e. $Q(x) = x^2 + 3x + 4$; f. $Q(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - 2$.

Exo3 : on donne le polynôme P et un nombre réel α .

Dans chacun des cas suivants :

- Vérifier que $P(x)$ peut être factoriser par $(x - \alpha)$, autrement dit vérifier que α est une racine ou un zéro de P ;
 - Déterminer $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $\forall x, P(x) = (x - \alpha)Q(x)$; (utiliser ces 2 méthodes : la méthode des **coefficients indéterminés** et la méthode de **Hörner**) ;
 - Factoriser, si possible, $Q(x)$;
 - Etudier le signe de $P(x)$.
- a. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ et $\alpha = 2$.
b. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$ et $\alpha = 2$.
c. $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $\alpha = \frac{3}{2}$.
d. $P(x) = x^3 - 7x - 6$ et $\alpha = -1$.
e. $P(x) = 3x^3 - 2x - 1$ et $\alpha = 1$.
f. $P(x) = -2x^3 - x^2 + 4x - 4$ et $\alpha = -2$.
g. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ et $\alpha = 1$.
h. $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $\alpha = \sqrt{3}$.

Exo4 : Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel a pour que f soit divisible par g , puis effectuer la division euclidienne de f par g .

- | | | |
|----------------------------------|----|--------------------|
| a. $f(x) = ax^3 - 4x^2 + 7x - 6$ | et | $g(x) = x - 2$. |
| b. $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax - 2$ | et | $g(x) = x + 2$. |
| c. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + a$ | et | $g(x) = x^2 - 4$. |

Exo5 : soit le polynôme $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$.

- 1) Calculer $f(2)$ et $f(-3)$;
- 2) En déduire une factorisation de $f(x)$;
- 3) Trouver les zéros de f et leur **ordre de multiplicité** ;
- 4) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Exo6 :

- 1) Soit $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x + 3}$. Après avoir déterminer D_f ; montrer en effectuant une **division euclidienne** qu'il existe les réels a, b, c telles que, $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 3}$.
- 2) Même question pour $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2}$.
- 3) Soit $g(x) = \frac{2x + 1}{x(x - 1)}$. Après avoir déterminer D_g ; en utilisant la méthode des **coefficients indéterminés**, déterminer les réels a, b , tels que, $\forall x \in D_g, g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1}$.
- 4) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, on a : $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}$.

Exo7 : on donne $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $g(x) = (x - 1)^2$.

- 1) En effectuant la division euclidienne de f par g ; montrer qu'il existe 4 réels a, b, c, d tels que $\forall x \neq 1; \frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{(x - 1)^2}$.
- 2) En utilisant la méthode des **coefficients indéterminés**, trouver les réels α, β, γ tels que; $\frac{f(x)}{g(x)} = x + \alpha + \frac{\beta}{x - 1} + \frac{\gamma}{(x - 1)^2}$.

Exo8 :

- 1) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait : $a(x^2 + 9) + b(x^2 - 9) = 6^3$.
- 2) Déterminer les réels c et d tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait : $c(x + 3) + d(x - 3) = 12$.
- 3) soit la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{6^3}{x^4 - 81}$.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
 - b. Déduire de la première question qu'il existe deux réels p et q tels que, $\forall x \in D_f$, on ait : $f(x) = \frac{p}{x^2 + 9} + \frac{q}{x^2 - 9}$.
 - c. Démontrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que, $\forall x \in D_f$, on ait :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x + 3} + \frac{\beta}{x - 3} + \frac{\gamma}{x^2 + 9}.$$

