

Exercice 1:

Mettre sous forme canonique les expressions suivantes :

- 1) $f(x) = 2x^2 + 6x + 15$; 2) $f(x) = x^2 + 4x + 5$;
- 3) $f(x) = 3x^2 + 9x + 1$; 4) $f(x) = -x^2 - 5x + 4$;
- 5) $f(x) = -2x^2 - 3x + 5$; 6) $f(x) = x^2 - 8x + 7$;
- 7) $f(x) = 3x^2 + 18x + 27$; 8) $f(x) = x^2 + 10x + 1$

Exercice 2:

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

- 1) Calculer $P(2)$
- 2) Déterminer les réels a ; b ; c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 3:

Montrer que la fonction polynôme f définie par

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'une fonction polynôme g que l'on déterminera.

Exercice 4:

Soit le polynôme $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels, et le polynôme $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Trouver les réels a et b pour que le polynôme $f(x)$ soit divisible par $g(x)$.

Exercice 5:

Soient f et g deux fonctions polynômes définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4 \quad \text{et} \quad g(x) = (x - 1)^2.$$

- 1) En effectuant la division euclidienne de f par g montrer qu'il existe 4 réels

$$a, b, c, d \text{ telles que pour tout } x \neq 1 ; \frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{(x - 1)^2}.$$

- 2) En utilisant la méthode des coefficients indéterminés trouver les constantes

$$\text{réels } a ; b ; c \text{ telles que } \frac{f(x)}{g(x)} = x + a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}.$$

Exercice 6:

Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 2}$. Montrer qu'il existe trois réels a ; b ; c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.

Exercice 7:

Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$ dans chacun des cas suivants :

1°) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x - 1$

2°) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x - 3$

3°) $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 1$ et $g(x) = x^2 + x - 6$.

Exercice 8:

Soit la fonction numérique h définie par $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)(x - 3)}$.

Sur $\mathbb{R} - \{1 ; 3\}$ la fonction h coïncide-t-elle avec une fonction polynôme ?

Exercice 9:

Trouvez la fonction polynôme g de degré 4 qui coïncide avec la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $\{0 ; \frac{1}{2} ; 3\}$.

Exercice 10:

Soit P la fonction polynôme de degré 4 telles que :

$P(0) = -10$; $P(1) = -11$; $P(-1) = -7$; $P(2) = 56$; $P(-2) = 4$.

Trouver le polynôme $P(x)$ pour tout nombre réel x .

Exercice 11:

Soit le polynôme $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

1°) Trouvez les réels a et b tels que pour tout réel x , $f(x) = (x^2 + ax + b) - x^4$

2°) En déduire une factorisation de $f(x)$.

Exercice 12:

Déterminer le nombre réel a pour que 2 soit une racine du polynôme

$P(x) = 3x^2 - ax + 2a - 12$. Factorisez $P(x)$ et en déduire son autre racine.

Exercice 13:

I)- Soit le polynôme $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$.

1°) Calculer $f(2)$ et $f(-3)$

2°) En déduire une factorisation de $f(x)$

3°) Trouvez les zéros de f et leur ordre de multiplicité.

II)- On donne $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

1°) Calculer $P(2)$ et $P(-2)$

2°) Donnez tous les zéros de P en précisant leur ordre de multiplicité.

Exercice 14:

Après déterminé l'ensemble de définition, simplifier l'expression de $f(x)$ dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 7x + 6} ; & 2) f(x) &= \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 - 19x - 30} ; \\ 3) f(x) &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2} ; & 4) f(x) &= \frac{2x^3 - 7x - 4}{2x^3 + 7x^2 - 53x - 28} . \end{aligned}$$

Exercice 15 :

Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Trouver les réels a, b, c, d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}$.

Exercice 16 :

1) Trouver les nombres réels A et B tels que : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$.

En déduire la valeur de la somme S telle que :

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} .$$

2) Trouver les nombres réels A, B, C que :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} . \text{ En déduire la valeur de la somme } S \text{ telle}$$

$$\text{que : } S = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} .$$

Exercice 17 :

Soit le polynôme $f(x)$ définie par $f(x) = x^3 - 14x + 8$.

on admet que f admet trois racines réelles distinctes notées : $\alpha ; \beta ; \lambda$.

1) Calculer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\lambda}$ puis calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2$ sans calculer $\alpha ; \beta ; \lambda$.

2) Calculer $f(-4)$ et déterminer alors les trois zéros de f et leurs ordres de multiplicité. Vérifier les résultats précédents.

Exercice 18 :

1°) Montrer que si un polynôme $P(x)$ se factorise par $x - \alpha$ alors α est racine de $P(x)$.

2°) Soit p un entier naturel tel que $p \geq 1$. Effectuer le produit suivant :

$$(x - \alpha)(x^{p-1} + \alpha x^{p-2} + \alpha^2 x^{p-3} + \alpha^3 x^{p-4} + \dots + \alpha^{p-3} x^2 + \alpha^{p-2} x + \alpha^{p-1})$$

En déduire qu'il existe un polynôme $Q_p(x)$ tel que pour tout réel x ,

$$x^p - \alpha^p = (x - \alpha)Q_p(x).$$

3°) Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n .

Montrer que, pour tout réel x et α .

$$P(x) - P(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \dots + a_2(x^2 - \alpha^2) + a_1(x - \alpha)$$

4°) En déduire que si α est racine de $P(x)$, alors le polynôme se factorise par $(x - \alpha)$.

Exercice 19 :

1°) Former un polynôme $P(x)$ du 3^{ème} degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$P(x) - P(x-1) = x^2$$

En déduire une expression de la somme S_2 définie par :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

2°) Former un polynôme $P(x)$ du 4^{ème} degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$P(x) - P(x-1) = x^3$$

En déduire une expression de la somme S_3 définie par :

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

3°) Calculer de façon analogue $S_4 = 1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.

Exercice 20 :

On considère sur une droite les points A ; B ; C et M tous distincts deux à deux, d'abscisses respectives a ; b ; c et x .

1°) Exprimer en fonction de a ; b ; c ; x le réel.

$$P(x) = MA^2 \times \overline{BC} + MB^2 \times \overline{CA} + MC^2 \times \overline{AB} + \overline{BC} \times \overline{CA} \times \overline{AB}.$$

2°) Quel semble être le degré de P ?

3°) Calculer $P(a)$; $P(b)$; $P(c)$.