

# Travaux Dirigés de Mathématiques

## 10ème Année – Programme du Mali

*Exercices progressifs, de l'essentiel à l'approfondissement*

Version enrichie – Inspirée des ressources de **Adama Traoré**, Professeur Lycée Technique  
Bamako

**Légende de difficulté :** ★ Fondamental   ★★ Intermédiaire   ★★★ Ap-  
profondissement

**Ce TD contient :**  $\approx$  250 questions réparties en 40 exercices couvrant les 10  
chapitres du programme.

## Contents

|    |                                     |    |
|----|-------------------------------------|----|
| 1  | Calculs dans $\mathbb{R}$           | 2  |
| 2  | Équations, Inéquations et Systèmes  | 5  |
| 3  | Vecteurs du Plan                    | 8  |
| 4  | Trigonométrie                       | 10 |
| 5  | Fonctions Numériques                | 13 |
| 6  | Fonctions Polynômes et Rationnelles | 16 |
| 7  | La Droite dans le Plan              | 18 |
| 8  | Équation du Cercle                  | 20 |
| 9  | Produit Scalaire                    | 22 |
| 10 | Barycentre                          | 24 |
| 11 | Exercices de Synthèse et Problèmes  | 26 |

# 1 Calculs dans $\mathbb{R}$

## Exercice 1 ★ – Valeur absolue et distance

1. Calcule sans calculatrice :

$$\begin{array}{llll} \bullet | -7 | & \bullet |(-4)^2| & \bullet | -5 \times 3 | & \bullet | \pi - 4 | \\ \bullet | 3 - 8 | & \bullet | -3 + 5 | & \bullet \left| \frac{-6}{2} \right| & \bullet | 2\sqrt{3} - 4 | \end{array}$$

2. Soient  $a = -5$  et  $b = 3$ . Vérifie numériquement :  $|ab| = |a||b|$  ;  $|a + b| \leq |a| + |b|$  ;  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$  ;  $|a - b| = |b - a|$ .

3. Calcule les distances :  $d(4,7; 2,3)$  ;  $d(-9; 3)$  ;  $d(-2; 6)$  ;  $d(5; -5)$  ;  $d\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ .

4. Détermine le centre, le rayon et l'amplitude des intervalles :  $[-3; 7]$  ;  $]4; 12[$  ;  $[-5; -1]$  ;  $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$  ;  $\left[\frac{5}{4}; \frac{4}{3}\right]$ .

5. Écris sous forme d'intervalle et représente sur une droite numérique :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq 11\} & \text{b) } \{x \in \mathbb{R} \mid -9\} & & \\ 9 \leq x < 15\} & \text{e) } \{x \in \mathbb{R} \mid -12 < x \leq 1\} & \text{f) } \mathbb{R} \setminus \{3\} & \\ \text{c) } \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 12\} & \text{d) } \{x \in \mathbb{R} \mid x > & & \end{array}$$

6. Détermine l'intervalle  $I(C; r)$  (origine et extrémité) pour :  $I\left(2; \frac{1}{4}\right)$  ;  $I\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$  ;  $I(-4; 7)$  ;  $I(3; 9)$  ;  $I\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ .

## Exercice 2 ★ – Résolution avec valeur absolue

Résous dans  $\mathbb{R}$ . Donne la solution sous forme d'ensemble ou d'intervalle.

1. Équations :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |x - 2| = 5 & \text{d) } |-3x + 4| = 6 & \text{g) } |3x - 1| = 8 \\ \text{b) } |x + 3| = 4 & \text{e) } |x + 2| = |x - 3| & \text{h) } |2x - 7| = 0 \\ \text{c) } |2x + 6| = 5 & \text{f) } |x - 2| = |x + 5| & \text{i) } |x - 1| = |2x + 3| \end{array}$$

2. Inéquations :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |x - 2| < 5 & \text{d) } |3x + 6| > 9 & \text{g) } |-x + 4| \leq 9 \\ \text{b) } |x + 3| \geq 4 & \text{e) } |x - 2| \leq |x + 5| & \text{h) } |5x - 3| < 12 \\ \text{c) } |2x - 1| \leq 3 & \text{f) } |x + 1| > |x - 7| & \text{i) } |x + 2| + |x - 3| \geq 7 \end{array}$$

3. Soit  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 4| \leq 10\}$ . Écrire  $A$  par énumération, puis trouver son maximum, son minimum, et 3 majorants.

### Exercice 3 ★★– Racines carrées et puissances

1. Simplifie sans calculatrice :

a)  $\sqrt{48}$

d)  $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$

g)  $\sqrt{3}(\sqrt{12} - \sqrt{27})$

b)  $\sqrt{75}$

e)  $\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$

h)  $(\sqrt{5} + 1)^2$

c)  $\sqrt{200}$

f)  $3\sqrt{28} - 2\sqrt{63}$

i)  $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

2. Rationalise :

a)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

d)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

b)  $\frac{5}{\sqrt{3} - 1}$

e)  $\frac{27 + \sqrt{12} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

c)  $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

f)  $\frac{1}{1 - \sqrt{3}} + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}$

3. Calcule les expressions suivantes :

a)  $\frac{3^5 \times 9^2}{27^3}$

c)  $4^{3/2}$  et  $8^{2/3}$  et  $27^{-1/3}$

b)  $\left(\frac{2^3}{2^{-1}}\right)^2$

d)  $\frac{(-5)^3 \times (-9)^2}{18^4 \times 12^3}$  (signe et valeur)

4. Compare sans calculatrice :

a)  $a = 3\sqrt{7}$  et  $b = 5\sqrt{3}$

c)  $a = 1 + \sqrt{5}$  et  $b = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

b)  $a = \sqrt{19} + 2\sqrt{7}$  et  $b = \sqrt{13} + 2\sqrt{3}$

d)  $a = \frac{1}{2 + \sqrt{5}}$  et  $b = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

### Exercice 4 ★★– Factorisations

Factorise complètement les expressions :

a)  $A(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

g)  $G(x) = x^4 - 1$

b)  $B(x) = x^3 - 27$

h)  $H(x) = (2x - 3)^2 + (3 - 2x)(x - 1) - 6 + 4x$

c)  $C(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

d)  $D = xy + x + y + 1$

i)  $I(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$  (chercher racines entières)

e)  $E = x^3 - y^3 - x^2y + xy^2$

f)  $F(x) = 8x^3 - 12x^2 + 2x - 3$

j)  $J = 3xy + 3 - x - 9y$

**Exercice 5 ★★– Encadrements**

1. Soient les réels  $a$  et  $b$  tels que  $3 \leq a \leq 7$  et  $2 \leq b \leq 5$ . Trouve un encadrement de :  $a + b$  ;  $a - b$  ;  $ab$  ;  $\frac{a}{b}$  ;  $a^2 - b^2$ .
2. Soient  $x$  et  $y$  tels que  $3 < x < 6$  et  $-5 < y < -3$ . Encadre :  $x + y$  ;  $x - y$  ;  $3y - 2x$  ;  $xy$  ;  $\frac{x}{y}$  ;  $\frac{x-2}{y^2}$ .
3. Soient  $a$  et  $b$  tels que  $-4 \leq a \leq -2$  et  $-6 \leq b \leq -3$ . Encadre :  $a + b$  ;  $a \times b$  ;  $\frac{a}{b}$  ;  $a^2 - b^2$ .

**Exercice Bonus / Approfondissement****Problème – Centre d'examen**

Un centre d'examen de 910 élèves compte 60% de garçons. Le nombre total d'élèves est égal au double du nombre de garçons admis et à la moitié du nombre de filles admises. Le nombre de garçons admis est le triple des filles admises. a) Trouve le nombre de garçons et de filles dans ce centre. b) Calcule les pourcentages d'admis par genre. c) Quel est le pourcentage d'élèves ayant échoué ?

**Démonstration :** Soient  $a, b > 0$ . Montre que  $(a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$ . Puis montre que

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq 4.$$

## 2 Équations, Inéquations et Systèmes

### Exercice 6 ★ – Équations du second degré

Résous dans  $\mathbb{R}$  (préciser la méthode utilisée) :

1.  $x^2 + 4x - 5 = 0$

7.  $4x^2 - 12x + 9 = 0$

2.  $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

8.  $5x^2 - 38x + 21 = 0 \quad (\Delta')$

3.  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$

9.  $x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (\Delta')$

4.  $13x^2 - 7x - 20 = 0$

10.  $2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad (factoriser)$

5.  $3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad (recette)$

11.  $3x^2 + 5 = 0$

6.  $-x^2 + 8x + 9 = 0 \quad (recette)$

12.  $2x^2 - 32 = 0$

#### ★ Indication

Recette R1 : si  $a + b + c = 0$ , alors  $x_1 = 1$  et  $x_2 = c/a$ .

Recette R2 : si  $a + c = b$ , alors  $x_1 = -1$  et  $x_2 = -c/a$ .

$\Delta'$  : si  $b = 2b'$ , poser  $\Delta' = b'^2 - ac$ .

### Exercice 7 ★★ – Équations par substitution et bicarrées

1. Équations bicarrées (poser  $T = x^2$ ) :

a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

e)  $x^6 - 124x^3 - 125 = 0 \quad (\text{poser } U = x^3)$

b)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

f)  $(x^2 - 9)^2 - 4(x^2 - 9) + 3 = 0$

c)  $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

d)  $3x^4 - 8x^2 - 3 = 0$

2. Substitutions variées :

a)  $(x^2 + x + 2)(x^2 + x - 8) = 0$ . Poser  $u = x^2 + x$ .

b)  $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 6 = 0 \quad (x \neq 2)$ .

c)  $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$ . Poser  $u = x + \frac{1}{x}$ .

d)  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ . Grouper  $(x+1)(x+4)$  et  $(x+2)(x+3)$ .

e)  $x^2 + 2 + \frac{8}{x^2 + 2} = 6$ .

f)  $\frac{3-4x^2}{5} - 2(3-4x) + 25 = 0$ .

**Exercice 8 ★★– Signe d'un trinôme et inéquations**

1. Étudie le signe (discriminant, tableau de signes) :

a)  $f(x) = 2x^2 + x + 1$

d)  $p(x) = 9x^2 + 6x + 1$

b)  $g(x) = x^2 - 11x + 30$

e)  $q(x) = -2x^2 + 4x + 30$

c)  $h(x) = -x^2 + 4x - 3$

f)  $r(x) = 3x^2 + 5x + 4$

2. Résous les inéquations :

a)  $-2x^2 + 4x + 30 \leq 0$

e)  $\frac{x+3}{2x-8} < 2$

b)  $3x^2 + 5x + 4 > 0$

f)  $\frac{x^2 - x - 4}{2x^2 - x - 3} \geq 0$

c)  $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$

g)  $(x^2 + 3x + 5)^2 \leq 16$

d)  $\frac{x^2 + 2x - 3}{2x - 8} \leq 0$

h)  $\frac{2x^2 - x - 3}{x^2 + 2} \leq 0$

3. Inéquations irrationnelles :

a)  $\sqrt{3x+1} = 4 - x$

e)  $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-8} = 1$

b)  $\sqrt{x} - 2\sqrt{2x+1} = -7$

f)  $\sqrt{x^2+2x+1} = x - 1$  (*attentif!*)

c)  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-8} = 5$

g)  $\sqrt{x^2-2x-15} = x + 3$

d)  $1 + \sqrt{3x-2} = \sqrt{2x+1}$

h)  $\sqrt{x-3} \geq 1 - \sqrt{x+3}$

**Exercice 9 ★★– Systèmes d'équations**

1. Résous par la méthode du déterminant (règle de Cramer) :

a) 
$$\begin{cases} 5x + 4y = -9 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + 4y = 10 \\ -3x + 5y = 4 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x + 2y = 9 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} 3x + y = 20 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

2. Résous les systèmes à 3 inconnues (pivot de Gauss) :

$$a) \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - y + 2z = 13 \\ x + 3y - 5z = -16 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y + z = 10 \\ x - 3y + 4z = 0 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$$

### 3. Problèmes concrets :

- a) *Fruits* : Pour 5 melons et 2 oranges : 760 F. Pour 3 melons et 1 orange : 440 F. Prix d'un melon ? d'une orange ?
- b) *L'âne et le cheval* : Un âne et un cheval portent des sacs. Si le cheval prend 1 sac de l'âne, il porte le double. Si l'âne prend 1 sac du cheval, ils sont à égalité. Combien de sacs chacun ?
- c) *Ali et Boubacar* : Ali dit à Boubacar : "J'ai trois fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. Quand tu auras l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera 98 ans." Trouver l'âge de chacun.

### 4. Systèmes paramétriques – Résoudre et discuter selon $m$ :

$$a) \begin{cases} mx - 3y = 5 \\ 3x + my = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} mx + 4y = 3m - 2 \\ x + my = m^2 - 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (m - 1)x + 3(m - 2)y = 2 \\ (2m - 1)x - 2y = m + 2 \end{cases}$$

### Exercice Bonus / Approfondissement

#### Traversée du désert

Deux automobiles traversent ensemble le désert. Avant la dernière étape, les conducteurs décident de répartir la réserve de carburant pour que les deux réservoirs soient égaux. Il reste 40 litres dans la réserve, 9 litres dans un réservoir et 17 litres dans l'autre.

- a) Combien de litres ajouter dans chaque réservoir ?
- b) Si la consommation est de 8 litres/100 km et que les réservoirs ont une capacité de 50 litres, quelle est la distance maximale que chaque voiture peut encore parcourir ?

### 3 Vecteurs du Plan

#### Exercice 10 ★ – Coordonnées et opérations

Dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ , on donne  $\vec{u}(2; -1)$  et  $\vec{v}(1; 3)$ .

1. Exprime comme combinaisons linéaires de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  :  $\vec{w} = -2\vec{u} + \vec{v}$  ;  $\vec{T} = \vec{u} + 2\vec{v}$  ;  $\vec{S} = 3\vec{u} - \vec{v}$  ;  $\vec{R} = -\vec{u} + 4\vec{v}$ .
2. Donne les coordonnées de  $\vec{w}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{S}$ ,  $\vec{R}$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ .
3. Calcule  $\det(\vec{u}; \vec{v})$ . Le couple  $(\vec{u}; \vec{v})$  forme-t-il une base de  $V$  ?
4. Soient  $\vec{S}(-4; 2)$  et  $\vec{R}(2; 6)$ . Trouver  $\alpha$  et  $k$  tels que  $\vec{S} = \alpha\vec{u}$  et  $\vec{R} = k\vec{v}$ . Conclure sur la colinéarité et le sens.
5. Exprime  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  comme combinaisons linéaires de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
6. Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on donne  $A(1; 2)$ ,  $B(3; -1)$ ,  $C(7; \alpha)$ . Trouve  $\alpha$  pour que : a)  $A, B, C$  soient alignés. b) Le triangle  $ABC$  soit rectangle en  $A$ .

#### Exercice 11 ★★ – Colinéarité, bases et norme

1. Trouve  $\alpha$  pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires. Précise le sens.

a)  $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right)$  et  $\vec{v}(5; \alpha)$

c)  $\vec{u}(3; -4)$  et  $\vec{v}(-6; \alpha)$

b)  $\vec{u}(2; -3)$  et  $\vec{v}(\alpha; 6)$

d)  $\vec{u}(-1; 2)$  et  $\vec{v}(3; \alpha)$

2. Dans chacun des cas, exprime  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  en fonction de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

a)  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

c)  $\vec{u} = -2\vec{i}$  et  $\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$

b)  $\vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}$  et  $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j}$

3. Dans la base orthonormée  $(\vec{i}; \vec{j})$ , on donne  $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ .

a) Calcule  $\|\vec{u}\|$ .

b) Trouve  $\vec{e}_1$  unitaire, colinéaire à  $\vec{u}$ , de même sens.

c) Trouve  $\vec{e}_2$  unitaire, orthogonal à  $\vec{u}$  (deux solutions possibles).

d) Montre que  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base orthonormée.

e) Calcule les coordonnées de  $\vec{v}(3; -4)$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

4. **Quadrilatère  $ABCD$  :**  $AB = 5$  cm,  $BC = 3$  cm (rectangle). Soient  $I, J, K, L$  tels que  $\vec{AI} = \frac{1}{5}\vec{AB}$ ,  $\vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ ,  $\vec{CK} = \frac{1}{5}\vec{CD}$ ,  $\vec{DL} = \frac{1}{3}\vec{DA}$ .

a) Exprime  $\vec{IJ}$  en fonction de  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$ .

b) Montre que  $IJKL$  est un rectangle.

**Exercice 12 ★★★ – Vecteurs et géométrie**

1. Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  tels que  $\vec{u} = 2\vec{v}$  et  $\vec{w} = -5\vec{u}$ .
  - a) Trouver  $a$  tel que  $\vec{w} = a\vec{u} + 3\vec{v}$ .
  - b) Trouver  $b$  tel que  $\vec{w} = -7\vec{u} + b\vec{v}$ .
  - c) Exprimer  $\vec{u}$  comme combinaison linéaire de  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .
2. **Théorème des milieux vectoriel.** Soit  $ABCD$  un quadrilatère quelconque.  $M$  est le milieu de  $[AC]$  et  $N$  est le milieu de  $[BD]$ . Montre que  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ .
3. Dans le repère orthonormé  $(O; I; J)$ , soient les points  $A(1; 2)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(4; 3)$ .
  - a) Calcule les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ .
  - b) Calcule  $\|\overrightarrow{AB}\|$ ,  $\|\overrightarrow{AC}\|$ ,  $\|\overrightarrow{BC}\|$ .
  - c) Le triangle  $ABC$  est-il isocèle ? équilatéral ? rectangle ?
  - d) Trouve le milieu  $I$  de  $[BC]$  et montre que  $AI = \frac{BC}{2}$ .

## 4 Trigonométrie

### Exercice 13 ★ – Conversions et table

1. Convertis en radians : 150 ; 23 ; 120 ; 270 ; -60 ; 300 ; 210.

2. Convertis en degrés :  $\frac{2\pi}{3}$  ;  $\frac{5\pi}{6}$  ;  $\frac{3\pi}{4}$  ;  $\frac{7\pi}{4}$  ;  $-\frac{\pi}{3}$  ;  $\frac{11\pi}{6}$ .

3. Détermine la valeur exacte (sans calculatrice) :

a)  $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3}$

d)  $\cos \frac{2\pi}{3}$

g)  $\cos \frac{7\pi}{6}$

b)  $\tan 60 - \cot 45$

e)  $\sin 120 + \cos 150$

h)  $\sin \frac{5\pi}{3}$

c)  $\sin \frac{5\pi}{6}$

f)  $\tan \frac{3\pi}{4}$

i)  $\cos \frac{11\pi}{6}$

4. Calcule les expressions  $F$  suivantes :

a)  $F = \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi$

b)  $F = \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6}$

c)  $F = \sin(180 - 30) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

d)  $F = 2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos(90 - 50 \text{ grad})$

e)  $F = 3 \sin \pi \cos \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6} \sin \frac{3\pi}{4}$

### Exercice 14 ★★ – Identités et simplifications

1. Démontre :

a)  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

b)  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

c)  $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x \quad (\text{si } \cos x \neq 0)$

d)  $\frac{\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 \tan x$

e)  $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{9\pi}{10} + \sin^2 \frac{6\pi}{10} + \sin^2 \frac{4\pi}{10} = 2$

2. Simplifie pour  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right[$  :

a)  $f(x) = \cos(200 \text{ grad} - x) + \sin(180 - x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$

b)  $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x + 2 \sin x$

$$c) \ h(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

3. Détermine  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  dans les cas suivants :

$$a) \ \tan \alpha = \frac{2}{3} \text{ et } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b) \ \cos \alpha = -\frac{2}{3} \text{ et } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

$$c) \ \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ et } x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[. \text{ Calcule aussi } \tan x.$$

$$d) \ \cot \alpha = \frac{3}{4} \text{ et } \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

### Exercice 15 ★★– Tables et interpolation

1. Détermine à l'aide des tables (méthode d'interpolation) :  $\sin 2843'$  ;  $\cos 4130'$  ;  $\sin 3545'$  ;  $\cos 6324'$  ;  $\tan 5217'$ .
2. Détermine en degrés-minutes-secondes les angles  $\alpha$  et  $\beta$  :  $\sin \alpha = 0,6958$  ;  $\cos \beta = 0,7899$  ;  $\sin \gamma = 0,4150$  ;  $\cos \delta = 0,3645$ .
3. Dans un triangle rectangle  $ABC$  rectangle en  $A$ ,  $AB = 6$  cm et  $\angle ABC = 35$ . Calcule  $AC$  et  $BC$ .
4. Soit  $OAB$  un triangle rectangle en  $A$  avec  $OA = 3$  cm,  $AB = 2$  cm. Soit  $C$  tel que  $OBC$  est rectangle en  $B$  avec  $OC = 5$  cm. Calcule  $BC$ .

### Exercice 16 ★★– Problèmes trigonométriques

1. **Poteau électrique.** Un observateur est à 10 m d'un poteau. Il voit le sommet sous un angle de 45 et la base sous un angle de 11 au-dessus de l'horizontale. Quelle est la hauteur du poteau ?
2. **Triangle équilatéral.** Côté  $x$ ,  $H$  = pied de la hauteur depuis  $A$ . Calcule  $BH$ ,  $AH$ , l'aire du triangle en fonction de  $x$ .
3. **Triangle isocèle.**  $ABD$  isocèle de base  $AB = 5$  cm. Calcule  $AD$  et  $DH$  (pied de la hauteur depuis  $D$ ) en fonction des angles.
4. **Triangle quelconque.** Dans le triangle  $ABC$  avec  $AB = 7$  cm,  $BC = 5$  cm,  $\hat{B} = 52$ . Calcule  $AC$  (loi d'Al-Kashi).
5. **Trajet géographique.** Un touriste va de  $A$  à  $F$  par  $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$ . Les ports  $E$  et  $F$  sont vus depuis  $A$  et  $B$  sous des angles de 25 et 43. Avec  $AB = 200$  km (calculatrice autorisée), calcule  $EF$ .

**Exercice Bonus / Approfondissement****Identités et équations trigonométriques avancées**

1. Démontrer que  $\cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{6\pi}{10} + \cos \frac{4\pi}{10} = 0$ .
2. Résoudre dans  $[0; 2\pi[$  : a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$     b)  $\cos x = -\frac{1}{2}$     c)  $\tan x = 1$     d)  $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ .
3. Un triangle  $ABC$  quelconque a  $\hat{A} = 60$ ,  $b = AC = 7$ ,  $c = AB = 5$ . Calculer  $a = BC$ , puis  $\sin \hat{B}$  et l'aire du triangle.

## 5 Fonctions Numériques

### Exercice 17 ★ – Ensemble de définition et images

1. Détermine  $D_f$  pour chaque fonction :

a)  $f(x) = \frac{3x+4}{2x-8}$

f)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2x-10}}$

b)  $f(x) = \sqrt{2x-6}$

g)  $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$

c)  $f(x) = \frac{7x+4}{(x^2-9)(x-1)}$

h)  $f(x) = \sqrt{-x^2+3x-2}$

d)  $f(x) = \frac{x+9}{\sqrt{x-7}}$

i)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

e)  $f(x) = \sqrt{x+5} + \frac{3}{2x-8}$

j)  $f(x) = \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+4}$

2. Soit  $f(x) = -3x + 5$  et  $g(x) = \frac{5x-1}{x+1}$ .

a) Complète les tableaux de valeurs :  $x \in \{-5; -3; 0; 3; 5\}$  pour  $f$  et  $x \in \{-3; -2; 1; 2; 3\}$  pour  $g$ .

b) Quels sont les antécédents de 14, -4, 5 par  $f$  ?

c) Quels sont les antécédents de 11, 2, 7 par  $g$  ?

3. Dis dans chaque cas si  $f = g$ . Justifie.

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-2)(x+2)$  et  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 4$

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+2$

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^4-4}{x^2+2}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$

### Exercice 18 ★★ – Composition et décomposition

Soient  $f(x) = -3x + 1$ ,  $g(x) = x^2 + 2$  et  $h(x) = \frac{x+3}{x}$ .

1. Calcule :  $(f \circ g)(0)$  ;  $(g \circ f)(0)$  ;  $(f \circ h)(1)$  ;  $(h \circ f)(1)$  ;  $(g \circ h)(3)$  ;  $(h \circ g)(3)$ .

2. Détermine les expressions de  $(f \circ g)(x)$ ,  $(g \circ f)(x)$ ,  $(h \circ f)(x)$ ,  $(f \circ h)(x)$ ,  $(g \circ h)(x)$ .

3. La composition est-elle commutative ? Justifie par un exemple.

4. Fais le schéma de calcul associé à chacune des fonctions :  $f(x) = 8x - 5$  ;  $f(x) = -3x^3 + 9$  ;  $f(x) = \sqrt{5x+3}$  ;  $f(x) = \frac{4x-3}{2x+6}$  ;  $f(x) = (2x+1)^2 - 9$ .

5. Décompose en composées de fonctions simples :

a)  $p(x) = (3x+1)^2$

b)  $q(x) = \sqrt{2x+5}$

c)  $r(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

d)  $s(x) = \left(\frac{1}{2x+3}\right)^2 + \sqrt{2x+3}$

**Exercice 19 ★★ – Images directes et réciproques**

1. Trouve les images directes par  $f(x) = 3x - 1$  des intervalles :  $A = [-5; 4]$  ;  $B = ]3; 8[$  ;  $C = ]-9; 0]$  ;  $D = [-11; -8]$ .
2. Trouve les images directes par  $g(x) = -5x + 2$  des mêmes intervalles.
3. Soit  $h(x) = x^2 + 1$ . Trouve l'image directe de :  $I = [0; 5]$  ;  $J = ]6; 8[$  ;  $K = [-4; -1]$  ;  $L = [-3; 3]$ .

**★ Indication**

Attention :  $h$  n'est pas monotone sur tout  $L = [-3; 3]$ . Identifier le minimum de  $h$  sur  $L$  en cherchant le sommet de la parabole.

4. Trouve l'image réciproque par  $f(x) = 2x - 1$  de :  $[1; 3]$  ;  $] -\infty; 5]$  ;  $\{7\}$ .
5. Trouve l'image réciproque par  $g(x) = x^2 - x - 2$  de :  $\{0\}$  ;  $[0; +\infty[$ .
6. Soit  $f(x) = 2|x - 4| + |x + 5|$  et  $g(x) = 3x + 1$ .
  - a) Développe  $f(x)$  sans valeur absolue sur chaque intervalle pertinent.
  - b) Trouve la partie  $C$  de  $\mathbb{R}$  sur laquelle  $f$  et  $g$  coïncident.

**Exercice 20 ★★ – Fonctions par morceaux et graphe**

$$1. \text{ Soit } f \text{ définie sur } [-5; 4] \text{ par : } f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \in [-5; -2] \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} & \text{si } x \in [-2; 2] \\ 2x - 2 & \text{si } x \in [2; 4] \end{cases}$$

- a) Trace la représentation graphique.
  - b) Dresse le tableau de variations.
  - c) Trouve l'image directe de  $[-5; 4]$  par  $f$ .
  - d) Trouve l'image réciproque de  $[0; 2]$  par  $f$ .
2. Étudie la fonction  $g(x) = |x - 2| + |x + 1|$  : développe sans valeur absolue par cas, puis trace la courbe.
  3. La fonction  $h$  est donnée par sa courbe (supposons :  $h(-4) = -2$ ,  $h(-2) = 0$ ,  $h(0) = 3$ ,  $h(2) = 0$ ,  $h(3) = -1$ ). Détermine graphiquement :

- a) Les intervalles de croissance et de décroissance.
- b) L'image directe de  $[-4; -2]$  par  $h$ .
- c) L'image réciproque de  $[-2; 0]$  par  $h$ .
- d) Les antécédents de 0 et de 3 par  $h$ .

**Exercice Bonus / Approfondissement****Exercice avancé – Images par une fonction homographique**

Soit  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ , de domaine  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

1. Trouve l'image directe de  $A = ]-1; 4]$  et de  $B = [-5; 3]$  par  $f$ .

*Indication : sur  $] -1; 4]$ ,  $f$  est décroissante. Étudier  $f(-1^+)$  et  $f(4)$ .*

2. Montre que  $f(f(x)) = x$  sur  $D_f \setminus \{0\}$  (autrement dit,  $f$  est sa propre réciproque sur cet ensemble).

3. La fonction  $f$  est-elle croissante ou décroissante sur son domaine ? Justifie en comparant  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  pour  $x_1 < x_2$  (avec  $x_1, x_2 \in ]-1; +\infty[$ ).

## 6 Fonctions Polynômes et Rationnelles

### Exercice 21 ★ – Forme canonique et parabole

- Mets sous forme canonique  $a(x - h)^2 + k$  et donne le sommet, l'axe de symétrie, le sens d'ouverture et l'extremum :
  - $f(x) = x^2 - 6x + 5$
  - $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$
  - $f(x) = -x^2 + 3x + 4$
  - $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$
  - $f(x) = -2t^2 + 4t + 3$
  - $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$
- Pour  $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$  : calcule les racines, puis vérifie les relations de Viète  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  et  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ .
- Un projectile est lancé verticalement. Sa hauteur (en m) au temps  $t$  (en s) est  $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$ .
  - Quelle est la hauteur initiale ?
  - À quel moment atteint-il la hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?
  - Quand retombe-t-il au sol ?

### Exercice 22 ★★ – Division euclidienne et factorisation

- Effectue la division euclidienne de  $f$  par  $g$  et écris  $f = g \cdot q + r$  :
  - $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$  et  $g(x) = x^2 - 2x + 1$
  - $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$  et  $g(x) = x^2 + 2x + 1$
  - $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$  et  $g(x) = x - 1$
- Utilise la méthode de Hörner pour calculer  $f(2)$  et factoriser  $f(x)$  par  $(x - 2)$  :
  - $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$
  - $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$
  - $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$  (chercher d'abord  $f(1)$  et  $f(2)$ )
- Pour le polynôme  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$  :
  - Montre que 1 et 2 sont des racines.
  - Déduis la factorisation complète de  $f(x)$ .
  - Résous  $f(x) = 0$ .
- Identifie les polynômes (méthode des coefficients indéterminés) :  $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = (x^2 + 2x + 1)(ax^2 + bx + c)$ . Trouve  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**Exercice 23 ★★ – Fonctions rationnelles et asymptotes**

1. Effectue la division euclidienne, détermine les asymptotes et esquisse la courbe :

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

c)  $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x + 3}$

2. Décompose en éléments simples :

a)  $g(x) = \frac{2x + 1}{x(x - 1)}$  sous la forme  $\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}$ .

b)  $h(x) = \frac{x + 5}{(x - 1)(x + 2)}$  sous la forme  $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$ .

c)  $k(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 1}$ . (Faire d'abord la division)

3. Étudie le signe de  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$  et résous  $f(x) \leq 0$ .

**Exercice Bonus / Approfondissement****Polynômes : développement et identification**

Développer, réduire et ordonner :  $(x^3 + 5x^2 - 4x + 1)(2x^2 - 3x + 7)$

Puis trouver les réels  $a, b, c, d$  tels que :  $x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$  et vérifier par Hörner.

**Application :** Résoudre  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$  en cherchant d'abord une racine entière évidente.

## 7 La Droite dans le Plan

### Exercice 24 ★ – Équations de droites

- Écris une équation cartésienne de la droite :
  - Passant par  $A(3; 2)$  de vecteur directeur  $\vec{u}(1; 2)$
  - Passant par  $A(-1; 3)$  et  $B(2; 5)$
  - Passant par  $A(1; 4)$  et parallèle à  $(D) : 3x - y + 2 = 0$
  - Passant par  $A(1; 4)$  et perpendiculaire à  $(D) : 3x - y + 2 = 0$
  - Passant par  $A(2; 3)$  et de coefficient directeur  $m = -\frac{2}{3}$
- Pour la droite  $(D) : 4x + 2y - 5 = 0$ , détermine :
  - Un vecteur directeur et un vecteur normal.
  - Le coefficient directeur  $m$  et l'ordonnée à l'origine  $p$ .
  - La distance du point  $M(3; 1)$  à  $(D)$ .
- Détermine la nature de la position relative (parallèles, confondues, sécantes) et trouve l'intersection si elle existe :
  - $(D_1) : 3x + 2y - 6 = 0$  et  $(D_2) : x + \frac{2}{3}y - 6 = 0$
  - $(D_1) : 5x + 4y - 9 = 0$  et  $(D_2) : x + 3y - 7 = 0$
  - $(D_1) : 2x - y + 3 = 0$  et  $(D_2) : 4x - 2y - 6 = 0$

### Exercice 25 ★★ – Distance, parallélisme, perpendicularité

- Calcule la distance :
  - Du point  $M(3; 1)$  à la droite  $(D) : 2x - y + 3 = 0$
  - De l'origine  $O(0; 0)$  à la droite  $(D') : 3x + 4y - 10 = 0$
  - Du point  $P(1; -2)$  à la droite passant par  $A(0; 3)$  et  $B(4; 0)$
  - Du point  $Q(2; 5)$  à la droite  $(D) : x - 2y + 4 = 0$
- Trouve l'équation de la droite :
  - Parallèle à  $(D) : 3x - 2y + 1 = 0$  passant par  $P(2; -1)$
  - Perpendiculaire à  $(D) : x + 3y - 2 = 0$  passant par  $A(-1; 4)$
  - Équidistante de  $A(1; 2)$  et  $B(5; -2)$  et parallèle à  $AB$
- Passage entre représentations :
  - Convertis  $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -7 - 2t \end{cases}$  en équation cartésienne.

- b) Convertis  $(D) : 3x + 2y - 4 = 0$  en représentation paramétrique.
- c) Convertis  $(D) : 4x - 3y + 1 = 0$  en équation réduite  $y = mx + p$ .

## 8 Équation du Cercle

### Exercice 26 ★ – Écrire et identifier des cercles

1. Donne une équation du cercle :

- a) De centre  $A(2; -1)$  et rayon  $r = 3$ .
- b) De centre  $\Omega(-3; 4)$  et rayon  $r = 5$ .
- c) De centre  $\Omega(-3; 2)$  passant par  $P(0; 1)$ .
- d) De diamètre  $[AB]$  avec  $A(0; -2)$  et  $B(2; 1)$ .
- e) De centre  $C(1; -2)$  et tangent à l'axe des abscisses.

2. Détermine centre et rayon, ou conclus à l'impossibilité :

- a)  $x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$
- b)  $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
- c)  $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0$
- d)  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
- e)  $4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 3 = 0$  (divise par 4 d'abord)

3. Les points suivants sont-ils sur le cercle  $(C) : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$  ?  $P(5; -1)$  ;  $Q(2; 2)$  ;  $R(-1; -1)$  ;  $S(2; -4)$  ;  $T(2 + 3 \cos 30; -1 + 3 \sin 30)$ .

### Exercice 27 ★★ – Position droite-cercle et tangente

Soit  $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  et les droites  $(D_1) : x - y + 1 = 0$ ,  $(D_2) : x + y - 10 = 0$ ,  $(D_3) : 2x - y - 1 = 0$ .

- 1. Détermine le centre  $\Omega$  et le rayon  $r$  de  $(C)$ .
- 2. Pour chaque droite, calcule  $d(\Omega; D_i)$  et détermine la position (sécante, tangente, extérieure).
- 3. Pour la droite sécante, détermine les deux points d'intersection avec  $(C)$ .
- 4. La tangente en  $T(4; -1)$  au cercle est perpendiculaire au rayon  $\Omega T$ . Écris son équation.
- 5. Trouve les points du cercle dont l'ordonnée est nulle (intersections avec l'axe des  $x$ ).

### Exercice 28 ★★★ – Cercle circonscrit et inscrit

1. Soit le triangle  $ABC$  avec  $A(1; 0)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(3; 4)$ .

- a) Calcule  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ . Quelle est la nature du triangle ?

- b) Détermine l'équation du cercle circonscrit (centre équidistant de  $A, B, C$ ).
  - c) Détermine l'isobarycentre  $G$  de  $ABC$  et vérifie qu'il est sur chaque médiane.
- 2.** Soit le triangle  $OAB$  avec  $O(0;0)$ ,  $A(4;0)$ ,  $B(0;3)$ . Il est rectangle en  $O$ .
- a) Montre que le centre du cercle circonscrit est le milieu de  $[AB]$ .
  - b) Écris l'équation de ce cercle.
  - c) Vérifie que  $O, A, B$  sont bien sur ce cercle.

## 9 Produit Scalaire

### Exercice 29 ★ – Calculs de produits scalaires

Dans la base orthonormée  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on donne  $\vec{u}(3; 4)$ ,  $\vec{v}(-1; 2)$ ,  $\vec{w}(0; -3)$ .

1. Calcule  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$ ,  $\|\vec{w}\|$ .
2. Calcule  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w}$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .
3. Calcule  $(2\vec{u} + 5\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 3\vec{w})$ .
4. Calcule  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ ,  $\|2\vec{v} + \vec{w}\|$ ,  $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|$ .
5. Soient  $\vec{p}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$  et  $\vec{q}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Ces vecteurs forment-ils une base orthonormée ?

### Exercice 30 ★★ – Produit scalaire et triangle

1. Triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ ,  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ . Calcule  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$ .
2.  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ ,  $BC = 6$ . Calcule  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et la mesure de  $\widehat{BAC}$  (Al-Kashi).
3. Calcule les longueurs et les angles de chaque triangle  $ABC$  :
  - a)  $A(2; 3)$ ,  $B(5; 1)$ ,  $C(4; 0)$
  - b)  $A(5; -1)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(-7; 2)$
  - c)  $A(1; 1)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $C(2; 4)$
4. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ ,  $\|\vec{u}\| = 2$ ,  $\|\vec{v}\| = 3$ . Calcule :
  - a)  $3\vec{u} \cdot (-4\vec{v})$
  - b)  $\frac{1}{2}\vec{u} \cdot \frac{4}{3}\vec{v}$
  - c)  $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
  - d)  $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$
  - e)  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$
  - f)  $\|\vec{u} - \vec{v}\|$
5. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$ ,  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $\|\vec{v}\| = 1$ . On pose  $\vec{w} = \vec{u} + x\vec{v}$ .
  - a) Exprime  $\|\vec{w}\|^2$  en fonction de  $x$ .
  - b) Détermine  $x$  pour que  $\vec{w}$  soit un vecteur unitaire.

### Exercice 31 ★★ – Ensembles de points et angles

1. Détermine l'ensemble des points  $M$  vérifiant :

- a)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 10$  avec  $AB = 4$
- b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -17$  avec  $AB = 2$
- c)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$  avec  $AB = 8$

d)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  avec  $A(-3; 4)$  et  $B(7; 2)$

e)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}$  avec  $A(1; 2)$  et  $B(-1; -1)$

2. Les couples  $(\vec{u}; \vec{v})$  forment-ils une base orthonormée de  $V$  ?

a)  $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$  et  $\vec{v} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$

b)  $\vec{u} = -5\vec{i} + 12\vec{j}$  et  $\vec{v} = -\frac{3}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$

c)  $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$  et  $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. Détermine le cosinus de l'angle  $(\vec{u}; \vec{v})$  :

a)  $\vec{u}(3; 4)$  et  $\vec{v}(12; 5)$     b)  $\vec{u}(-1; 2)$  et  $\vec{v}(12; 7)$     c)  $\vec{u}(7; -12)$  et  $\vec{v}(12; 7)$     d)  $\vec{u}(1; 1)$  et  $\vec{v}(3; 0)$

4. Soient  $A(2; 2)$ ,  $B(4; 4)$ ,  $C(3; -3)$ . Calcule l'angle  $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$ .

### Exercice 32 ★★★ – Applications géométriques du produit scalaire

1. **Trapèze rectangle**  $ABCD$  :  $AB = 5$ ,  $AD = 4$ ,  $CD = 8$ ,  $\widehat{DAB} = 90$ . Calcule :  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}$  ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  ;  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC}$  ;  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$  ;  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

2. **Théorème de la médiane.** Dans un triangle  $ABC$ ,  $M$  est le milieu de  $[BC]$ . Montre que  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$ . (Utiliser  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$  et développer.)

3. **Cercle et angle inscrit.** Soit  $(C)$  un cercle de rayon  $r = 3$ ,  $[AB]$  un diamètre,  $M$  un point du cercle distinct de  $A$  et  $B$ .

a) Montre que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ . (Exprimer  $\overrightarrow{MA}$  et  $\overrightarrow{MB}$  via le centre.)

b) En déduire que l'angle  $\widehat{AMB} = 90$  (théorème de Thalès dans le demi-cercle).

## 10 Barycentre

### Exercice 33 ★ – Barycentre de 2 et 3 points

1. Construis le barycentre  $G$  pour chaque cas et calcule  $\overrightarrow{AG}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  :
  - a)  $(A; 2)$  et  $(B; 5)$
  - b)  $(A; -5)$  et  $(B; 2)$
  - c)  $(A; 2)$  et  $(B; 4)$
  - d)  $(A; 1)$  et  $(B; -3)$
2. Calcule les coordonnées du barycentre  $G$  :
  - a)  $G$  bary. de  $(A(-2; 4); -2)$  et  $(B(4; -2); 4)$ .
  - b)  $G$  bary. de  $(A(1; 0); 1)$ ,  $(B(0; 2); 2)$ ,  $(C(-1; 1); 3)$ .
  - c) L'isobarycentre du triangle  $A(0; 0)$ ,  $B(6; 0)$ ,  $C(3; 6)$ .
  - d)  $G$  bary. de  $(A(2; -1); 1)$ ,  $(B(-1; 3); 2)$ ,  $(C(4; 2); -4)$ .
3. Vérifie que pour tout point  $M$  : si  $G$  est l'isobarycentre de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , alors  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

### Exercice 34 ★★ – Lignes de niveau

On se place dans un repère orthonormé. On donne deux points  $A$  et  $B$  avec  $AB = 4$ .

1. Détermine l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$  pour :  $k = -1$  ;  $k = 0$  ;  $k = 2$  ;  $k = 8$ .
2. Détermine l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $MA^2 + MB^2 = k$  pour :  $k = 8$  (cercle ?) ;  $k = 4$  ;  $k = 2$  (vide ?).
3. Détermine l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $MA^2 - MB^2 = k$  pour :  $k = 4$  ;  $k = 0$  ;  $k = -8$ .
4. Avec  $A(-3; 4)$  et  $B(7; 2)$ , détermine et représente l'ensemble des points  $M(x; y)$  vérifiant :
  - a)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  (nature géométrique ?)
  - b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 10$
  - c)  $MA^2 + MB^2 = 50$
  - d)  $MA^2 - MB^2 = 40$

**Exercice 35 ★★★ – Barycentre et géométrie avancée**

1. Soit  $ABC$  un triangle avec  $G$  isobarycentre. Montre que les droites médianes  $AI$ ,  $BJ$ ,  $CK$  (où  $I$ ,  $J$ ,  $K$  sont les milieux des côtés opposés) se coupent toutes en  $G$ .
2. Soient  $(A; \alpha)$ ,  $(B; \beta)$ ,  $(C; \gamma)$  trois points pondérés avec  $\alpha + \beta \neq 0$ . Soit  $G_1$  le barycentre de  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$ . Montre que le barycentre  $G$  de  $(A; \alpha)$ ,  $(B; \beta)$ ,  $(C; \gamma)$  est aussi le barycentre de  $(G_1; \alpha + \beta)$  et  $(C; \gamma)$ .
3. Soit  $ABCD$  un carré de côté 4. Trouver le barycentre  $G$  de  $(A; 1)$ ,  $(B; 1)$ ,  $(C; 1)$ ,  $(D; 1)$ . Quelle est la signification géométrique de ce point ?

## 11 Exercices de Synthèse et Problèmes

### Exercice 36 ★★– Synthèse : Droite et Cercle

Soit le triangle  $ABC$  avec  $A(1; 0)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(3; 4)$ .

1. Calcule  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ . Quelle est la nature du triangle ?
2. Détermine les angles  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  à l'aide du produit scalaire.
3. Détermine l'équation du cercle circonscrit au triangle.
4. Détermine l'équation de chaque médiane et montre qu'elles se coupent en  $G$ .
5. Trouve l'équation de la droite  $AB$  et la distance de  $C$  à cette droite. En déduire l'aire du triangle.

### Exercice 37 ★★– Synthèse : Fonctions et Équations

Une usine produit  $x$  objets par jour. Son coût journalier (en milliers de F) est  $C(x) = x^2 - 10x + 30$ .

1. Déterminer  $D_C$ .
2. Mettre  $C(x)$  sous forme canonique. Quel est le nombre d'objets minimisant le coût ? Quel est ce coût minimum ?
3. Pour quel(s) niveau(x) de production le coût est-il de 14,75 milliers de F ?
4. Si le prix de vente unitaire est 7,5 milliers de F, le revenu est  $R(x) = 7,5x$ . Trouver le(s) seuil(s) de rentabilité ( $C(x) = R(x)$ ). Pour quel(s) intervalle(s) de  $x$  fait-on du bénéfice ?

### Exercice 38 ★★★– Synthèse géométrie analytique complète

Soit le cercle  $(C) : x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$  et la droite  $(D) : 2x - y + 1 = 0$ .

1. Détermine le centre  $\Omega$  et le rayon  $r$  de  $(C)$ .
2. Calcule  $d(\Omega; D)$ . La droite  $(D)$  est-elle sécante, tangente ou extérieure à  $(C)$  ?
3. Si  $(D)$  est sécante, détermine les deux points d'intersection  $P$  et  $Q$ .
4. Calcule la longueur de la corde  $PQ$ .
5. La tangente à  $(C)$  en  $P$  est perpendiculaire au rayon  $\Omega P$ . Écris son équation.
6. Détermine l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$  et compare avec  $(C)$ .

**Exercice 39 ★★★ – Problème complet : Barycentre + Produit scalaire**

Dans un repère orthonormé, soient  $A(0; 4)$ ,  $B(-3; 0)$ ,  $C(3; 0)$ .

1. Montre que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ . Est-il équilatéral ?
2. Calcule les trois angles du triangle.
3. Soit  $G$  l'isobarycentre de  $ABC$ . a) Calcule les coordonnées de  $G$ . b) Montre que  $G$  est sur la médiane issue de  $A$ .
4. Soit  $M$  un point du plan. Développe  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  en utilisant le barycentre  $G$  :  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ .
5. Détermine l'ensemble des points  $M$  tels que  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 54$ .

**Exercice Bonus / Approfondissement****Grand problème de synthèse finale**

Soient les fonctions  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  et  $g(x) = -x + 3$ .

**Partie A.** Étude de  $f$ . 1. Détermine les racines de  $f$ , son sommet, sa forme canonique. 2. Trace  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  dans un repère. 3. Résous  $f(x) \leq g(x)$  (points où la parabole est en dessous de la droite).

**Partie B.** Intersections et mesures. 4. Trouve les points d'intersection  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ . 5. Calcule  $AB$ . 6. Calcule l'angle que  $\mathcal{C}_g$  fait avec l'axe des  $x$ .

**Partie C.** Barycentre et cercle. 7. Soit  $C$  le sommet de  $\mathcal{C}_f$ . Calcule les coordonnées de  $G$ , isobarycentre de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . 8. Détermine le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . 9. Montre que  $G$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  si et seulement si  $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = 0$  et vérifie si c'est le cas.

**Exercice 40 ★★★ – Récapitulatif toutes notions**

Résoudre entièrement et justifier chaque étape.

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $|2x - 3| + |x + 1| = 8$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  et discuter selon  $m \in \mathbb{R}$  : 
$$\begin{cases} (2 - m)x - 3y = 1 - m \\ (m + 4)x + (m + 6)y = 2 \end{cases}$$
3. Factoriser  $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$  sachant que  $P(1) = P(2) = 0$ .
4.  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$ . Déterminer  $D_f$ , simplifier  $f$ , étudier son signe, puis trouver l'image directe de  $[-3; 0]$  par  $f$ .
5. Dans la base orthonormée, soient  $A(1; 3)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(-2; 1)$ . a) Calculer les angles du triangle. b) Déterminer l'équation du cercle de diamètre  $[AB]$ . c) Le point  $C$  est-il à l'intérieur, sur ou à l'extérieur de ce cercle ? Justifier.

**Bilan des compétences – 10ème Année**

- |                                                                                 |                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| ✓ Calculs avec valeurs absolues, intervalles                                    | ✓ Utiliser la table trigonométrique et les identités   |
| ✓ Simplifier racines carrées et puissances                                      | ✓ Étudier les fonctions (domaine, images, composition) |
| ✓ Résoudre équations du 2 <sup>d</sup> degré ( $\Delta$ , recettes, $\Delta'$ ) | ✓ Maîtriser forme canonique et asymptotes              |
| ✓ Résoudre équations par substitution et bicarrées                              | ✓ Factoriser polynômes (Hörner, racines)               |
| ✓ Résoudre équations irrationnelles                                             | ✓ Écrire équation d'une droite ou d'un cercle          |
| ✓ Étudier le signe d'un trinôme                                                 | ✓ Calculer produit scalaire et angles                  |
| ✓ Résoudre systèmes $2 \times 2$ et $3 \times 3$                                | ✓ Déterminer un barycentre et des lignes de niveau     |
| ✓ Travailler avec vecteurs (coordonnées, colinéarité, norme)                    | ✓ Résoudre des problèmes de synthèse                   |