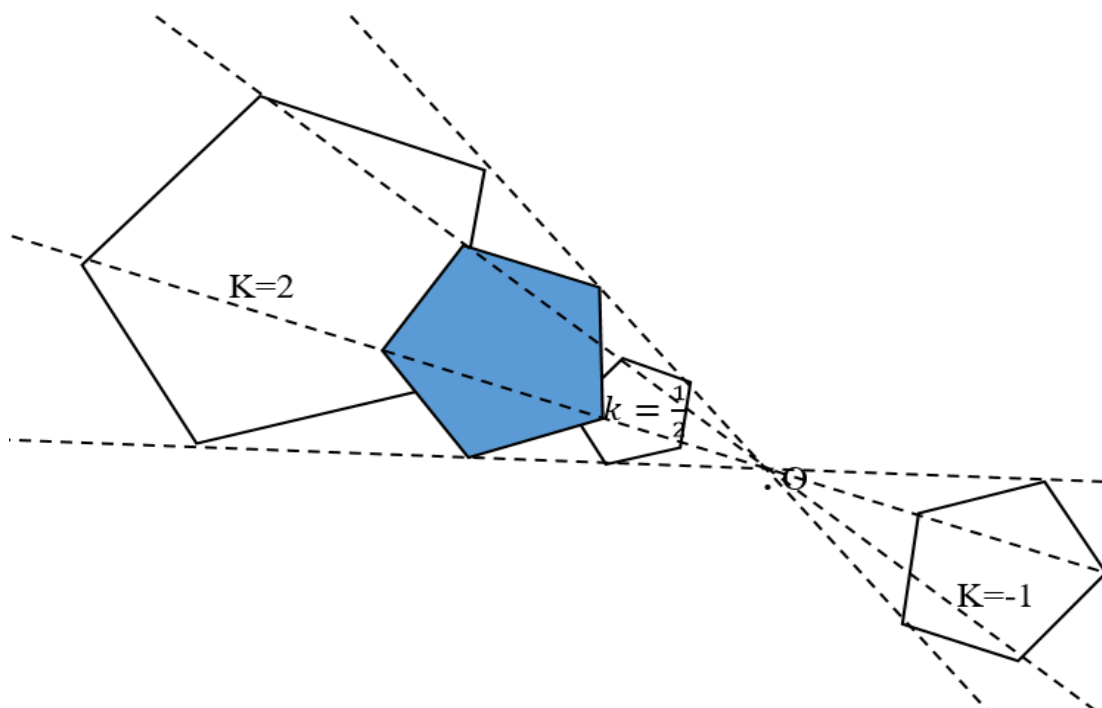


UEPM

Union des Enseignants pour la Promotion des Mathématiques

Brochure de mathématiques pour la 10^{ième} année commune



Année académique 2021-2022
Les mathématiques pour tous

Union des Enseignants pour la Promotion des Mathématiques (UEPM)

Brochure de mathématiques pour la 10^{ième} Commune générale

Sous la direction de Amadou Kanfo, professeur aux lycées de Bamako

Les auteurs

Amadou Kanfo 60620812

Soumané Traoré 73780802

Lassine Traoré 66476825

Fadiala Konaté 78264559

Arouna Koné 74054123

Josué Diarra 72420129

Diakaridia Koné 90068381

Ouedrago 73632947

Saïbou Traoré 78452742

Mamadou Tangara 97079588

Yaya Coulibaly 75976269

Programmes de mathématiques de la 10^{ième} année commune générale

Trigonométrie

- Utilisation des matériels de géométrie :
- Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle,
- Changement d'unité en trigonométrie :
- Présentation à l'aide de symétries des rapports trigonométriques des angles remarquables de mesures comprises entre 0° et 180° (Utilisation du cercle trigonométrique)
- Relation fondamentale de la trigonométrie.
- Rapports trigonométriques des angles complémentaires, supplémentaires.
- Résolution de problèmes pratiques liés à la trigonométrie.

Calcul dans $\mathbb{R}$

- Pratique des opérations et des inégalités portant sur des nombres réels, en particulier les décimaux et les rationnels.
- Intervalles de $\mathbb{R}$; valeur absolue et distance sur la droite numérique ; Résolution graphique de l'équation x appartient à $\mathbb{R}$, $|x-a| = \alpha$.
- Majorant, minorant, maximum, minimum d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
- Calcul approché : approximation décimale d'ordre n , arrondi d'ordre n , encadrement d'un nombre réel, ordre de grandeur d'une valeur numérique. On effectuera une mise au point des connaissances sur les nombres réels :
- Différentes écritures d'un nombre réel ;
- Savoir reconnaître si un nombre est rationnel, décimal ou entier. On s'attachera à apprendre aux élèves à organiser un calcul, un calcul approché :
- Choisir un programme de calcul adopté au problème.
- Choisir les écritures des nombres réels ou les valeurs approchées qui conviennent.
- Présenter convenablement le résultat (savoir déceler et écarter tout résultat aberrant). Il ne s'agira pas de recherche systématique d'un majorant, d'un maximum etc. mais plutôt d'apprendre aux élèves à reconnaître si un nombre réel est un majorant ou un minorant d'un sous-ensemble donné de $\mathbb{R}$.

Equations du premier degré et du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ (formation et résolution)

D. Rappels et compléments des propriétés de

R. - Propriétés de la valeur absolue d'un réel :

E. Calcul de distance de deux nombres réels

- Propriétés des intervalles de $\mathbb{R}$ (centre, rayon, longueur).

F. Résolution graphique d'équations de la forme $|x - c| = \alpha$

G. Résolution d'une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$, calcul du discriminant.

H. Résolution dans $\mathbb{R}$ de quelques équations irrationnelles du type $\sqrt{ax+b} = cx + d$. I.

Résolution graphique d'inéquations de la forme : $|x - c| < \alpha$; $|x - c| > \alpha$; $|x - c| \leq \alpha$; $|x - c| \geq \alpha$

J. Inéquations du type : $f(x) \leq a$ ou $f(x) \leq g(x)$

K. (Résolution graphique ; f et g étant des fonctions définies dans le programme)

L. Grandeurs proportionnelles (directement ou inversement)

Résolution graphique dans $\mathbb{R}^2$ d'équations et inéquations

Systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

- Interprétation graphique des inéquations et systèmes d'équations, résolution
- Initiation à la programmation linéaire : problème d'optimisation et de minimisation
- Mise en équation d'un problème pratique puis résolution
- Proportionnalité et pourcentage

Fonction numérique d'une variable réelle.

- Diverses déterminations.
- Détermination graphique d'images
- Variation d'une fonction numérique

Etude de cas simples : $x \rightarrow ax + b$; $x \rightarrow x^2$; $x \rightarrow 1/x$; $x \rightarrow \sqrt{x}$

■ Les fonctions polynômes :

■ Les fonctions rationnelles : $x \rightarrow (ax+b)/(cx+d)$; $x \rightarrow (ax^2+bx+c)/(ex+f)$

Géométrie plane

- Caractérisation des vecteurs du plan
- Barycentre de 2 à 4 points du plan.
- Caractérisation du produit scalaire de 2 vecteurs du plan

- Résolution des problèmes de calcul de distance.
- Droite dans le plan
- Cercle dans le plan

Logique :

- Les connecteurs « et », « ou », « négation »
- Les quantificateurs : « quel que soit /pour tout(e) », « il existe »
- Notion d'exemple, notion de contre-exemple, notion de vérification, notion de déduction, notion de conjecture, notion d'équivalence.

Transformations et isométries du plan

- Homothétie ponctuelle
- Isométries du plan

Géométrie dans l'espace

- Activités pratiques dans l'espace
- Figures géométriques dans l'espace

Séquence 1 : calcul dans $\mathbb{R}$

I. Rappels et complément des propriétés de $\mathbb{R}$

1. Rappels sur les ensembles

Définition

- L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots \dots + \infty\}$
- L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{-\infty \dots; -2; 0; 1; 2; \dots + \infty\}$.
- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

On appelle ensemble des nombres réels, l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels on la note par $\mathbb{R}$ donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Remarque

$\mathbb{R}$ est le plus grand ensemble ; $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$; $-\infty$ est appelé moins infini, $+\infty$ est appelé plus infini.

$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$ l'ensemble des nombres réels négatifs.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ l'ensemble des nombres réels privés de zéro.

2. Écriture décimale – Nombres décimaux

Définition : x étant un nombre réel quelconque, x est un nombre décimal s'il existe un entier relatif p tel que $x = \frac{10}{p^n} n \in \mathbb{Z}^*$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$ et nous avons : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

3. Rappels sur certaines opérations dans $\mathbb{R}$

a) Quotients

Définition

Soit a est un nombre réel et b un nombre réel non nul. On appelle quotient de a par b le nombre réel q tel que : $a = bq$. On le note $\frac{a}{b}$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$

Propriétés

Pour tous nombres réels a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$ on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

✚ Si de plus $c \neq 0$ on a : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

b) Puissance

Définition

Soit a un nombre réel, n un entier naturel non nul. On appelle a à la puissance n , le nombre réel noté a^n tel que : $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$.

Si $a \neq 0$, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$; $a^0 = 1$

Propriétés

Pour tous entiers relatifs n, m et pour tous nombres réels a, b on a :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $a^1 = a$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ avec $b \neq 0$ $(a^n)^m = a^{nm}$
- $(-a)^n = \begin{cases} -a^n & \text{si } n \text{ est impaire} \\ a^n & \text{si } n \text{ est paire} \end{cases}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

c) Racine carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif. La racine carrée de a est le nombre réel noté $\sqrt{a}$ dont son carré est égale a .

Propriétés

Soient a et b deux nombres réels positifs et n un entier naturel on a :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$)
- $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Remarque

- $\sqrt{a}$ n'a de sens que si a est positif.
- $\forall a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Comparaison de deux nombres réels

Règle

Pour comparer deux nombres réels, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

- Etudier le signe de leur différence ;
- Les comparer à un nombre intermédiaire ;
- S'ils sont strictement positifs ; comparer leurs carrés ; leurs racines carrées ou leurs inverses.

Propriétés

Soient a ; b et c des nombres réels

Si $a > 0$; $b > 0$ et $c > 0$;

- $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$;
- $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$;
- $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$;

Si $a < 0$; $b < 0$ et $c < 0$;

- $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$;
- $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$;

II. Propriétés de la valeur absolue

1. Définition

Soit x un nombre réel la valeur absolue de x est le nombre réel positive noté $|x|$ tel que :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2. Propriétés

Soient x et y deux nombres réels on a :

- $|x| \geq 0$;
- $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$;
- $|x| = |y| \Rightarrow x = y$ ou $x = -y$;
- $|x \times y| = |x| \times |y|$;
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$) ;
- $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $\forall a > 0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

III. Distances de deux nombres réels

a) Définition

Soit x et y deux nombres réels. La distance de x à y est le nombre réel positif noté $d(x; y)$ définit par : $d(x; y) = |x - y|$.

b) Propriétés

Soient x et y deux nombres réels :

- $d(x; y) \geq 0$; $d(x; y) = d(y; x)$;
- $d(x; y) = 0 \Rightarrow x = y$ $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$

IV. Propriétés des intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$. On appelle intervalle a, b l'ensemble des éléments compris entre a et b .

1. Centre et rayon d'un intervalle

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$:

- Le centre de l'intervalle $a; b$ est le nombre réel C tel que $C = \frac{a+b}{2}$
- Le rayon de l'intervalle $a; b$ est le nombre réel r tel que $r = \frac{b-a}{2}$

2. Réunion et intersection d'intervalle dans $\mathbb{R}$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- La réunion des intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels qui appartient à I ou à J . Elle est notée $I \cup J = \{x \in \mathbb{R}, x \in I \text{ ou } x \in J\}$.
- L'intersection des intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui appartient à la fois à I et à J . Elle est notée $I \cap J = \{x \in \mathbb{R}, x \in I \text{ et } x \in J\}$.

V. Résolution d'équation avec valeur absolue

1. Equation du type $|x - c| = r$ ($r > 0$)

Soient c un nombre réel et r un réel positif. Pour tout nombre réel x , on a :

$$|x - c| = r \Leftrightarrow d(x; c) = r$$

$$\Leftrightarrow x - c = r \text{ ou } -(x - c) = r$$

$$\Leftrightarrow x = c + r \text{ ou } x = c - r$$

$$S = \{c - r; c + r\}.$$

2. Inéquations avec valeurs absolue

- **Inéquation du type : $|x - c| \leq r$ ($r > 0$) ou $|x - c| \geq r$ ($r > 0$)**

Soit c un nombre réel et r un réel positif. Pour tout nombre réel x , on a :

$$\checkmark \quad |x - c| \leq r \Leftrightarrow d(x; c) \leq r$$

$$\Leftrightarrow -r \leq x - c \leq r$$

$$\Leftrightarrow c - r \leq x \leq c + r$$

$\Leftrightarrow x \in [c - r; c + r]$. D'où l'ensemble solution est $S = [c - r; c + r]$.

$$\checkmark \quad |x - c| \geq r \Leftrightarrow d(x; c) \geq r$$

$$\Leftrightarrow x \geq c + r \text{ où } x \leq c - r \Rightarrow S =] - \infty; c - r] \cup [c + r; +\infty [.$$

Exercices**Exercice 1**

1. Calcule

$$A = \left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right); B = 3 - \frac{7}{5}; C = \frac{6}{7} + \frac{3}{7}; D = \frac{4}{3} + 2; E = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{9}}; F = \frac{1}{\frac{3}{4}};$$

$$G = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{7}}; H = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}; I = \frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}; J = 4 \times \frac{7}{3}; k = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{4}{2} + \frac{2}{1+3}}};$$

$$L = \frac{2}{\frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{2} + \frac{5}{2 - \frac{2}{7}}}$$

2. Calcule

$$A = 32 \times 34; B = 34 - 1 \times 342; C = (5 - 2)5;$$

$$D = (-2)^5 \times (-2)^4; E = \frac{7^{-3}}{7^{-7}}; F = a^{-4} \times b^{-4}; G = \frac{a^2}{a^5}$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, détermine des encadrements de : $x + y$; $x - y$; xy ; $\frac{x}{y}$; x^2

- a) $2,1 < x < 2,2$ et $3,3 < y < 3,4$
- b) $-3 < x < -1$ et $5 < y < 8$
- c) $-6 < x < -2$ et $-2 < y < -1$

Exercice 3

On donne les intervalles suivants : $A = [-2; 1[$; $B =]-1; +\infty[$; $C =]-\infty; 2]$; $D =]0; 5]$; $E = [-4; 4]$; $F =]-1; 6[$

- a) Détermine le centre, le rayon et l'amplitude des intervalles A, B, C, D, E et F .
- b) Représente les intervalles A, B, C, D, E et F sur un axe.
- c) Déterminer : $A \cap B$; $C \cap D$; $E \cap F$; $A \cup B$; $C \cup D$; $E \cup F$.

Exercice 4

1. Simplifie les expressions suivantes :

$$X = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{20} + \sqrt{75}$$

$$Y = 3\sqrt{44} - 5\sqrt{11} + 8\sqrt{121}$$

$$Z = 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8} + 7\sqrt{128}$$

2. Ecris les nombres sans radical au dénominateur

$$A = \frac{5}{\sqrt{8}} ; B = 3\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} ; C = \frac{-4}{\sqrt{3} + \sqrt{27}} ; D = \frac{5}{\sqrt{2} - 1} ; E = \frac{-2}{1 + \sqrt{11}} ; F = \frac{3}{\sqrt{7} - 2\sqrt{5}} ;$$

$$G = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} ; H = \frac{1 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{6} - 5}$$

Exercice 5

Le périmètre d'un rectangle est compris entre 72,8 cm et 73,2 cm. Sa largeur est comprise entre 14,1 cm et 14,2 cm.

- Donne un encadrement de sa longueur.
- Donne un encadrement de son aire.

Exercice 6

Résous dans IR

$$(E1): |6 - x| = 3 ; (E2): |x - 3| - 1 = 0 ; (E3): |2 + x| = 5 ;$$

$$(E4): |2x - 1| = 2 ; (E5): |4x - 4| - 8 = 0 ; (E6): |x - 2| = -4 ;$$

$$(I1): |x - 2| \leq 5 ; (I2): |x + 6| > 2 ; (I3): \left| \frac{2}{3} - x \right| < \frac{7}{6} ;$$

$$(I4): |8 - x| \geq 1 ; (I5): |5 - 2x| - 4 < 1 ; (I6): |2x + 1| + 1 > 3.$$

Exercice 7

Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$A = 321,76 \times 10^4 ; B = 0,943 ; C = 12,82 \times 10^{-2} ; D = 234267839 ;$$

$$E = 0,00023 \times 10^{-4} ; F = 2314,003 \times 10^{10} ; G = 0,001 \times 0,6 \times 10^3.$$

Exercice 8

Donne les formes simplifiées des expressions suivantes :

$$A = \frac{35 \times 10^3 \times 21 \times 3^{-3} \times 5^2}{12 \times 7 \times 49 \times 3^4} ; B = \frac{(3 \times 10^{-3})^3}{\sqrt{9} \times 10^4} ; C = \frac{3^{10} \times 7}{10^{-3} \times 2^5} ;$$

$$D = 122 \times 3 \times 5 - 2 \times 42 \times 2 ; E = (3 \times 16)^4 \times 27 - 1 \times 5$$

Exercice 9

Ecris chacun des nombres ci-dessous sous la forme $2^m \times 3^n \times 5^p \times 7^q$ avec m, n, p, q entiers relatifs.

$$6^5 \times 15^4 \times 14^{-5} ; 2^5 \times 7^{-2} \times 10^4 ; \frac{2^5 \times 5^{-3}}{3^4 \times 21^{-7}}$$

Exercice 10

Compare les nombres réels suivants :

$$\frac{11}{7} \text{ et } \frac{35}{17} ; \frac{230}{151} \text{ et } \frac{110}{43} ; 2\sqrt{10} \text{ et } 11 ; 2 - 10\sqrt{7} \text{ et } 2 - 8\sqrt{11} ; 5 - \sqrt{3} \text{ et } 5 + \sqrt{3}$$

Exercice 11

Soient a et b deux nombres réels tels que : $a \geq -1$ et $b \geq 2$.

Quel est le signe de $a + b$? $2a + b$? $a - 3b$?

Exercice 12

Vérifie que :

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 7\sqrt{(1 + 4)^2}}}}} = 3$$

$$\sqrt{4 + 3\sqrt{8 + 4\sqrt{9 + 5\sqrt{(2 + 6)^2}}}} = 4$$

Exercice 13

Ecris les nombres suivants sous la forme $a \times 10^n$ avec $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$

$$24,543 ; 432000000 ; 0,00321 ; 0,76503$$

Exercice 14

On considère le tableau suivant

a	b	$ a $	$ b $	$ a \times b $	$ a \times b $	$ a + b $	$ a + b $
4	7						
-2	5						
6	-3						
-1	-8						

a) Complète le tableau ci-dessus

b) Compare dans chaque cas : $|a \times b|$ et $|a| \times |b|$; $|a + b|$ et $|a| + |b|$.

Exercice 15

Ecris sans le symbole de la valeur absolue les nombres suivants :

$$|1 - \sqrt{2}| ; |2\sqrt{3} - 3| ; |-7| ; \left| \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right| ; |5 + \sqrt{7}| ; \left| 2,5 - \frac{5}{3} \right|$$

Exercice 16

Soit y un nombre réel positif :

$$\text{Démontre que : } \frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+y}+1}$$

Exercice 17

Donne l'écriture fractionnaire des nombres suivants

$$a = 6, \underline{8} \dots ; b = 2, \underline{16} \dots, c = 7, \underline{142} \dots ; d = 32, \underline{5} \dots ; e = 4, \underline{20} \dots ; f = 1, \underline{256} \dots ;$$

$$g = 5, \underline{271} \dots ; h = 21, \underline{3241} \dots$$

Exercice 18

Lancée le 24 Août 1994, la sonde Agent H arriva à proximité de la planète Neptune (4,5 milliards de km) le 28 Août 2021.

Combien de temps les signaux émis par la sonde ont-ils mis pour parvenir aux antennes de réception situées sur Terre sachant que ses signaux voyagent à la vitesse de la lumière ?

Donnée : vitesse de la lumière : 300000km/s.

Exercice 19

Le QG de l'UEPM (Union des Enseignants pour la Promotion des Mathématiques) est construit sur un triangle isocèle et rectangle ayant une aire de $3,92 \text{ m}^2$.

Détermine à 1 cm près, les dimensions de ses côtés ?

Exercice 20

Pour tout entier n , on considère les nombres :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ (nombres de Fibonacci)}$$

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \text{ (nombres de Lucas)}$$

Vérifie que, pour $n = 0 ; 1 ; 2$; ces nombres sont des entiers.

Corrections des exercices

Exercice 1

1. Calculons

Dans cette partie nous utiliserons les propriétés des quotients

$$\begin{aligned} \text{➤ } A &= \left(\frac{7}{3} + \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{7 \times 4}{3 \times 4} + \frac{9 \times 3}{4 \times 3}\right) - \left(\frac{1 \times 2}{2 \times 1} + \frac{1 \times 2}{1 \times 2}\right) = \left(\frac{28+27}{12}\right) - \left(\frac{1+2}{2}\right) \\ &= \frac{55}{12} - \frac{3}{2} = \frac{55 \times 2}{12 \times 2} - \frac{12 \times 3}{2 \times 12} = \frac{110-36}{24} = \frac{74}{24} ; A = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

$$\text{➤ } E = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{9}} = \frac{3}{5} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{10} ; \quad E = \frac{27}{10}$$

$$\text{➤ } H = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1 \times 4}{1 \times 4} + \frac{3 \times 1}{4 \times 1}}{\frac{1 \times 4}{1 \times 4} - \frac{3 \times 1}{4 \times 1}} = \frac{\frac{4+3}{4}}{\frac{4-3}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{1} = 7 ; H = 7$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } k &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{5+12}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{17}{4}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{17}{25}} = \frac{1}{\frac{25+17}{25}} = \frac{1}{\frac{42}{25}} = \frac{25}{42} ; k = \frac{25}{42} \end{aligned}$$

2. Calculons

Utilisation des propriétés de puissances

$$A = 3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$$

$$C = (5^{-2})^5 = 5^{(-2) \times (5)} = 5^{-10}$$

$$D = (-2)^3 \times (-2)^4 = (-2)^{3+4} = (-2)^7$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminons des encadrements de : $x + y$; $x - y$; xy ; $\frac{x}{y}$; x^2

a) $2,1 < x < 2,2$ et $3,3 < y < 3,4$

$$\begin{array}{r} 2,1 < x < 2,2 \\ + \\ 3,3 < y < 3,4 \\ \hline 5,4 < x + y < 5,6 \end{array}$$

Cherchons l'encadrement de $-y$

$$3,3 < y < 3,4 \Rightarrow -3,4 < -y < -3,3$$

$$x - y : \frac{2,1 < x < 2,2}{-3,4 < -y < -3,3} \quad \underline{\quad} \quad -1,3 < x - y < -1,1$$

$$x \cdot y : \frac{2,1 < x < 2,2}{3,3 < y < 3,4} \quad \underline{\quad} \quad 6,93 < x \cdot y < 7,48$$

Cherchons l'inverse de y

$$3,3 < y < 3,4 \Rightarrow \frac{1}{3,4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3,3}$$

$$\frac{x}{y} : \frac{2,1 < x < 2,2}{\frac{1}{3,4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3,3}} \quad \underline{\quad} \quad \frac{2,1}{3,4} < \frac{x}{y} < \frac{2,2}{3,3}$$

$$x^2 : (2,1)^2 < x^2 < (2,2)^2$$

$$4,41 < x^2 < 4,84$$

Exercice 3

$$A = [-2 ; 1[; B =] - 1 ; +\infty [$$

a) Déterminons le centre le rayon et l'amplitude

$$A = [-2 ; 1[: \text{le centre } c = \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2} ; \text{le rayon } r = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} ; \text{l'amplitude : } l = 1 + 2 = 3$$

$$B =] - 1 ; +\infty [\text{ ce n'est pas possible car } b \text{ n'existe pas}$$

b) Représentation

c) Déterminons

$$A \cap B =] - 1 ; 1[\text{ et } A \cup B = [-2 ; +\infty [$$

Exercice 4

1. Simplifions :

$$X = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{20} + \sqrt{75}$$

$$\begin{aligned}
 X &= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{4 \times 5} + \sqrt{25 \times 3} \\
 &= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{25} \times \sqrt{3} \\
 &= 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 5\sqrt{3} = -4\sqrt{5} + 5\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$X = -4\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 Y &= 3\sqrt{44} - 5\sqrt{11} + 8\sqrt{121} \\
 &= 3\sqrt{4 \times 11} - 5\sqrt{11} + 8\sqrt{11^2} \\
 &= 3\sqrt{4} \times \sqrt{11} - 5\sqrt{11} + 88 \\
 &= 6\sqrt{11} - 5\sqrt{11} + 88
 \end{aligned}$$

$$Y = \sqrt{11} + 88$$

2. Ecrivons les nombres sans radical au dénominateur

$$A = \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{5 \times \sqrt{8}}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{8}}{8}$$

$$D = \frac{5}{\sqrt{2} - 1} = \frac{5(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{5\sqrt{2} + 5}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} = \frac{5\sqrt{2} + 5}{2 - 1} = \frac{5\sqrt{2} + 5}{1} = 5\sqrt{2} + 5$$

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{3}{\sqrt{7} - 2\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{7} + 2\sqrt{5})}{(\sqrt{7} - 2\sqrt{5})(\sqrt{7} + 2\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{7} + 6\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{7} + 6\sqrt{5}}{7 - 20} \\
 &= \frac{3\sqrt{7} + 6\sqrt{5}}{-13}
 \end{aligned}$$

Exercice 5

Soit p le périmètre du rectangle, L la longueur, l la largeur et s son aire.

$$72,8 < p < 73,2; \quad 14,1 < l < 14,2 \quad ? < L < ?$$

a) On sait $p = 2 \times (L + l) \Rightarrow L = \frac{p}{2} - l$ donc on fera un encadrement pour avoir L

$$72,8 < p < 73,2 \Rightarrow \frac{72,8}{2} < \frac{p}{2} < \frac{73,2}{2} \Rightarrow 36,4 < \frac{p}{2} < 36,6 \quad (1)$$

$$14,1 < l < 14,2 \Rightarrow -14,2 < -l < -14,1 \quad (2), \text{ formons un système avec le (1) + (2)}$$

$$\begin{aligned} 36,4 &< \frac{p}{2} < 36,6 \\ &+ \\ -14,2 &< -l < -14,1 \\ 22,2 &< \frac{p}{2} - 1 < 22,5 \\ \Rightarrow 22,2 &< \frac{p}{2} - 1 < 22,5 \\ \Rightarrow 22,2 &< L < 22,5 \end{aligned}$$

b) Son aire

$S = L \times l$ on fait de la même manière que a) mais cette fois c'est le produit de L par l .

Exercice 6

Réolvons dans IR

$$(E1): |6 - x| = 3 \Leftrightarrow 6 - x = 3 \text{ ou } 6 - x = -3$$

$$\Leftrightarrow -x = 3 - 6 \text{ ou } -x = -3 - 6$$

$$\Leftrightarrow -x = -3 \text{ ou } -x = -9$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 9 \text{ donc } S = \{3 ; 9\}$$

$$(E2): |x - 3| - 1 = 0 \Leftrightarrow |x - 3| = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 1 \text{ ou } x - 3 = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 3 \text{ ou } x = -1 + 3$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 2 \text{ donc } S = \{4 ; 2\}$$

$$(E4): |2x - 1| = 2 \Leftrightarrow |2(x - \frac{1}{2})| = 2$$

$$\Leftrightarrow |2| \cdot \left| x - \frac{1}{2} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 1 \text{ ou } x - \frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+1}{2} \text{ ou } x = \frac{-2+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{-1}{2} \text{ donc } S = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$$

$$(I1) : |x - 2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - 2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -5 + 2 \leq x - 2 + 2 \leq 5 + 2$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow S = [-3; 7]$$

$$(I2) : |x + 6| > 2 \Leftrightarrow x + 6 > 2 \text{ ou } -(x + 6) > 2$$

$$\Leftrightarrow x > 2 - 6 \text{ ou } x + 6 < -2$$

$$\Leftrightarrow x > -4 \text{ ou } x < -2 - 6$$

$$\Leftrightarrow x > -4 \text{ ou } x < -8 \Leftrightarrow S =] -\infty; -8[\cup] -4; +\infty[$$

Exercice 7

Donnons l'écriture scientifique des nombres suivants

$$A = 321,76 \times 10^4 = 3,2176 \times 10^2 \times 10^4 = 3,2176 \times 10^6$$

$$E = 0,00023 \times 10^{-4} = 2,3 \times 10^{-4} \times 10^{-4} = 2,3 \times 10^{-8}$$

$$F = 2314,003 \times 10^{10} = 2,314003 \times 10^3 \times 10^{10} = 2,314003 \times 10^{13}$$

Exercice 8

Donnons les formes simplifiées des expressions suivantes

$$A = \frac{35 \times 10^3 \times 21 \times 3^{-3} \times 5^2}{12 \times 7 \times 49 \times 3^4} = \frac{5 \times 7 \times (2 \times 5)^3 \times 3 \times 7 \times 3^{-3} \times 5^2}{3 \times 4 \times 7 \times 7 \times 3^4} = \frac{5 \times 7 \times 2^3 \times 5^3 \times 3 \times 7 \times 3^{-3} \times 5^2}{3 \times 3^4 \times 7^3 \times 3^2}$$

$$= \frac{5^5 \times 7^2 \times 2^3 \times 3^{-2}}{3^5 \times 7^3 \times 3^2} = 5^5 \times 7^2 \times 2^3 \times 3^{-2} \times 3^{-5} \times 7^{-3} \times 2^{-2}$$

$$A = 5^5 \times 7^{-1} \times 2 \times 3^{-7}$$

$$D = 12^2 \times 3 \times 5^{-2} \times 42 \times 2 = (3 \times 4)^2 \times 3 \times 5^{-2} \times 6 \times 7 \times 2 = 3^2 \times 4^2 \times 3 \times 5^{-2} \times 2 \times 3 \times 7 \times 2$$

$$= 3^4 \times 2^4 \times 5^{-2} \times 2 \times 7 \times 2$$

$$D = 3^4 \times 2^6 \times 5^{-2} \times 7$$

Exercice 9 : même procéder que l'exercice 8

Exercice 10

Comparons les nombres réels suivants :

$$\triangleright \frac{11}{7} \text{ et } \frac{35}{17} : \frac{11}{7} - \frac{35}{17} = \frac{11 \times 17 - 35 \times 7}{7 \times 17} = \frac{187 - 245}{119} = \frac{-58}{119} < 0$$

$$\frac{11}{7} - \frac{35}{17} < 0 \Rightarrow \frac{11}{7} < \frac{35}{17}$$

$$\triangleright 2\sqrt{10} \text{ et } 11 : (2\sqrt{10})^2 = 4 \times 10 = 40 \text{ et } 11^2 = 121$$

$$40 < 121 \Rightarrow 2\sqrt{10} < 11$$

Exercice 11

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \geq -1$ et $b \geq 2$.

Le signe de $a + b$:

$$a \geq -1$$

+

$$b \geq 2$$

$$a + b \geq 1$$

$a + b \geq 1 \Rightarrow a + b$ est positif.

Exercice 12

Vérifions que : $\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 7\sqrt{(1 + 4)^2}}}}} = 3$

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 7\sqrt{(1 + 4)^2}}}}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 7\sqrt{(5)^2}}}}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 7 \times 5}}}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 35}}}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{36}}}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4x6}}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 24}}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{25}}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3x5}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{16}}$$

$$= \sqrt{1 + 2x4}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 7\sqrt{(1 + 4)^2}}}}} = 3$$

Exercice 13 : de la même manière que l'exercice 7.

Exercice 14

a) complétons

a	b	$ a $	$ b $	$ a \times b $	$ a \times b $	$ a + b $	$ a + b $
4	7	4	7	28	28	11	11
-2	5	2	5	10	10	3	7

b) Comparons :

➤ $a = 4$ et $b = 7$: $|a \times b| = |a| \times |b| = 28$ et $|a + b| = |a| + |b| = 11$

➤ $a = -2$ et $b = 5$: $|a \times b| = |a| \times |b| = 10$ et $|a + b| < |a| + |b|$

Exercice 15

Ecrivons sans le symbole de la valeur absolue les nombres suivants :

➤ $|1 - \sqrt{2}|$: cherchons le signe $1 - \sqrt{2}$

$$1^2=1 \text{ et } (\sqrt{2})^2=2 \Rightarrow 1 - \sqrt{2} < 0 \text{ donc } |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

➤ $\left| \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right|$: cherchons le signe de $2 - \sqrt{3}$

$$2^2 = 4 \text{ et } (\sqrt{3})^2 = 3 \Rightarrow 4 > 3 \Rightarrow 2 > \sqrt{3} \text{ donc } 2 - \sqrt{3} > 0$$

$$\left| \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 16

Soit y un nombre réel positif :

Démontrons que : $\frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+y}+1}$

$\frac{1}{\sqrt{1+y}+1}$ cherchons à rendre rationnelle

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}+1} = \frac{\sqrt{1+y}-1}{(\sqrt{1+y}+1)(\sqrt{1+y}-1)} = \frac{\sqrt{1+y}-1}{(\sqrt{1+y})^2-1^2} = \frac{\sqrt{1+y}-1}{1+y-1} = \frac{\sqrt{1+y}-1}{y}$$

D'où $\frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+y}+1}$

Exercice 17

Donnons l'écriture fractionnaire des nombres suivants

$$a = 6, \underline{8} \dots \Rightarrow 10a = 68, \underline{8} \dots$$

$$\Rightarrow 10a - a = 68,8 - 6,8$$

$$\Rightarrow 9a = 62 \Rightarrow a = \frac{62}{9}$$

$$b = 2,\underline{16} \dots \Rightarrow 100b = 216,\underline{16} \dots$$

$$\Rightarrow 100b - b = 216,16 - 2,16$$

$$\Rightarrow 99b = 214$$

$$\Rightarrow b = \frac{214}{99}$$

$$c = 7,1\underline{42} \dots \Rightarrow 10c = 71,\underline{42} \dots \Rightarrow 1000c = 7142,\underline{42} \dots$$

$$\Rightarrow 1000c - 10c = 7142,42 - 71,42$$

$$\Rightarrow 990c = 7071$$

$$\Rightarrow c = \frac{7071}{990}$$

Exercice 18

$$d = 4,5 \times 10^9 \text{ km et } v = 3 \times 10^5 \text{ km/s}$$

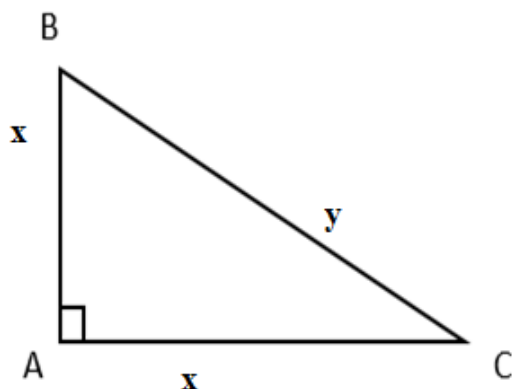
Le temps mis est :

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v}$$

$$\Rightarrow t = \frac{4,5 \times 10^9}{3 \times 10^5}$$

$$\Rightarrow t = 1,5 \times 10^4 \text{ s}$$

Exercice 19



Le triangle est rectangle et isocèle. Soit s l'aire du triangle : $s = 3,92\text{m}^2$

$$S = \frac{x \cdot x}{2} \Rightarrow S = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow 3,92 \times 2 = x^2$$

$$\Rightarrow 7,84 = x$$

$$\Rightarrow \sqrt{7,84} = x \text{ ou } -\sqrt{7,84} = x;$$

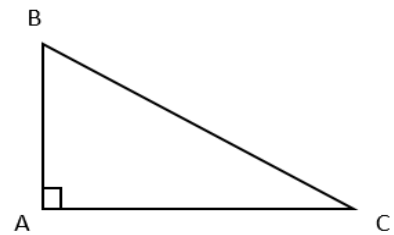
$$\Rightarrow x = 2,8\text{m} \simeq 3 \text{ m car la distance est toujours positive}$$

Séquence 2 : trigonométrie

Utilisation des matériels géométrique

Triangle rectangle

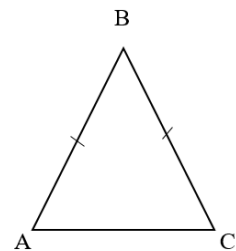
On appelle triangle rectangle, tout triangle comportant un angle de 90° . On peut le construire à partir de la règle et du rapporteur.



Triangle isocèle

Un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés ont la même mesure.

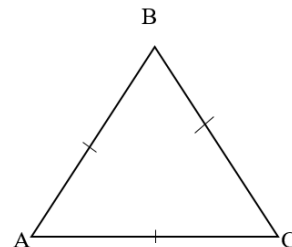
On peut le construire à l'aide de la règle et du compas.



Triangle équilatéral

C'est un triangle dont les trois côtés ont la même mesure.

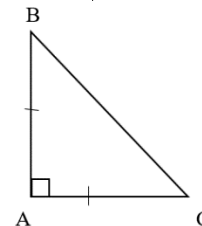
On peut le construire à l'aide d'une règle et d'un compas.



Triangle rectangle isocèle

Il s'agit d'un triangle à la fois rectangle et isocèle.

On peut le construire à l'aide d'une règle et d'un compas.



Remarque : dans un triangle ABC ; la somme des angles intérieurs est égale à 180°

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Rapports trigonométriques dans un triangle rectangle

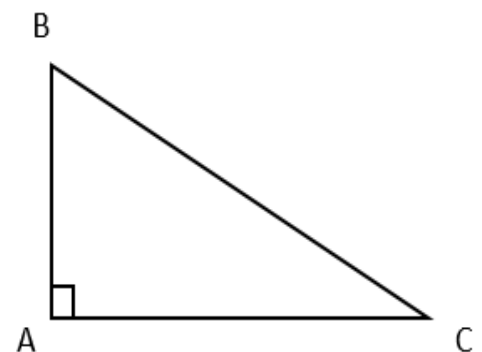
Soit ABC un triangle rectangle en A.

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénus}} = \frac{AB}{BC} \text{ et } \cos \hat{C} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénus}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénus}} = \frac{AC}{BC} \text{ et } \cos \hat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénus}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{AC} \text{ et } \cotan \hat{C} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} \text{ et } \cotan \hat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} = \frac{AB}{AC}$$

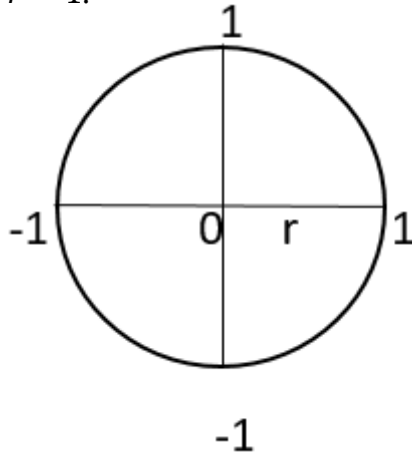


Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme du carré des deux autres côtés. Dans le triangle ci-dessus, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Changement d'unité en trigonométrie

Cercle trigonométrie : le cercle trigonométrique dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est le cercle de centre O et de rayon $r = 1$.



Unité de mesure d'un angle : il y a trois unités de mesure à savoir le degré, le radian et le grade.

$$\frac{d}{180^0} = \frac{r}{\pi \text{radian}} = \frac{g}{200 \text{gadian}}$$

Par ailleurs il y a les sous multiples du degré : $1^0 = 60'$ et $1' = 60''$.

Présentation à l'aide de symétries des rapports trigonométriques des angles remarquables de mesures comprises entre 0^0 et 180^0

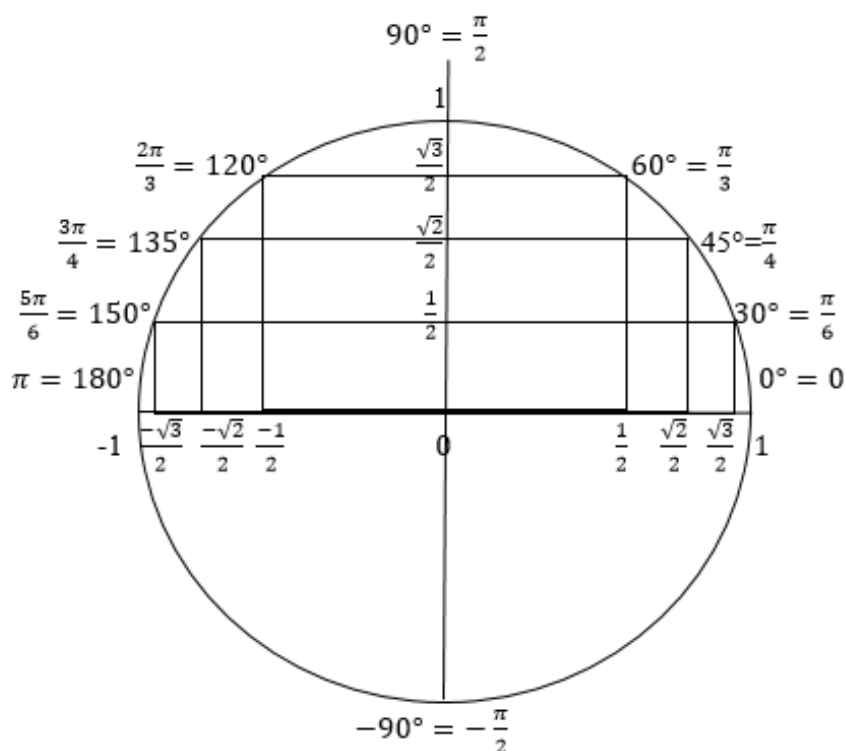


Tableau trigonométrique

α en degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Impos- sible	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	Impos- sible	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Impos- sible

Remarque : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; on a : $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ et $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Relations trigonométriques

Rélation fondamentale de la trigonométrie : $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Autre relation en trigonométrie : $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ et $1 + \cotan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Angles associés

Angles opposés	$\begin{cases} \sin -\alpha = -\sin \alpha \\ \cos -\alpha = \cos \alpha \end{cases}$
----------------	---

Angles opposés	$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$
----------------	---

Angles complémentaires	$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \end{cases}$
------------------------	--

Angles dont la différence est π	$\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$
-------------------------------------	--

Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \end{cases}$
---	---

Rapports trigonométriques des angles complémentaires et supplémentaires

Angles complémentaires : deux angles sont complémentaires si leurs somme est 90^0 ou $\frac{\pi}{2}$ radian.

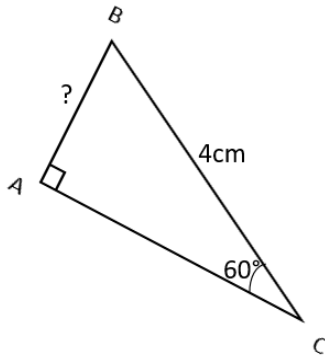
Angles supplémentaires : deux angles sont supplémentaires si leurs somme est 180^0 ou π radian.

Exercices

Exercice 1

Construire un triangle ABC rectangle en B à l'aide de la règle et de l'équerre. Montre l'hypoténuse ainsi que les côtés adjacent et opposé suivant l'angle C.

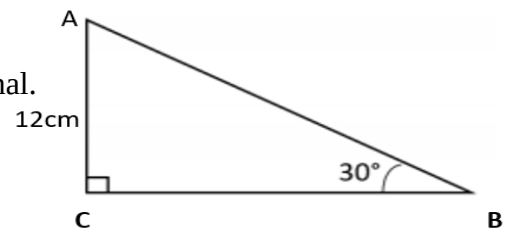
Exercice 2



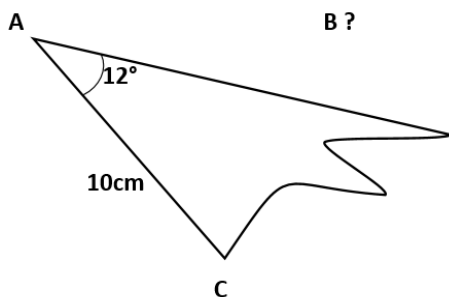
1. le quel des rapports $\sin \hat{C}$; $\cos \hat{C}$; $\tan \hat{C}$ et $\cot \hat{C}$ il faudra utiliser pour calculer AB ?
2. En déduire AB.

Exercice 3

1. Place le point H sur AB tel que CH et AB soient orthogonal.
2. Détermine CH.



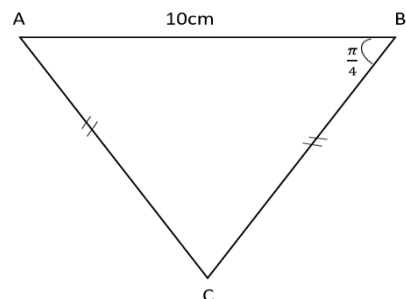
Exercice 4



1. Place le point B sur la figure tel que ABC soit un triangle rectangle en B.
2. Détermine AB et BC.

Exercice 5

1. Place le point H sur [AB] sachant que $(AB) \perp (CH)$.
2. Détermine CH.



Exercice 6

Soit OIJ un triangle rectangle en J tel que $OJ = 2,5\text{cm}$ et $OI = 5,8\text{cm}$.

Trace ce triangle et détermine IJ.

Exercice 7

Complète le tableau suivant

Degré	30				70	
Radian		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{7}$		
Grade			50			35

Exercice 8

Converti pour compléter le tableau ci-dessous.

Degré	5					2,6
Minute		3000			500	
Seconde			36000	4326		

Exercice 9

Complète le tableau suivant

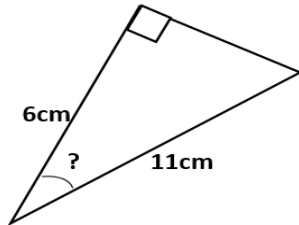
α en degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α en radian									
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
$\cos \alpha$									
$\tan \alpha$									
$\cot \alpha$									

Exercice 10

1. Soit $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, détermine $\cos \alpha$ sachant que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

2. Soit $\alpha \in [0; \pi]$, détermine $\sin \alpha$ sachant que $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$.
3. Soit $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, détermine $\tan \alpha$ sachant que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Exercice 11

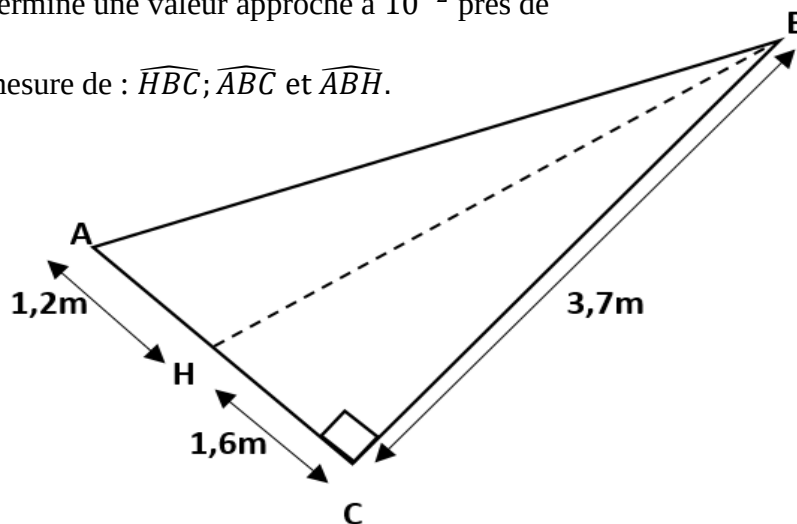


1. Donne la nature de ce triangle après l'avoir donné un nom.
2. Réponds à la question posée par la figure.
3. Détermine le troisième angle.

Exercice 12

Détermine une valeur approchée à 10^{-2} près de

la mesure de : $\widehat{HBC}$; $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABH}$.



Exercice 13

Calcule : $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)$; $\tan\frac{5\pi}{4}$; $\cot\frac{4\pi}{3}$; $\sin\frac{8\pi}{6}$; $\cos\frac{7\pi}{6}$; $\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$; $\sin\frac{10\pi}{6}$.

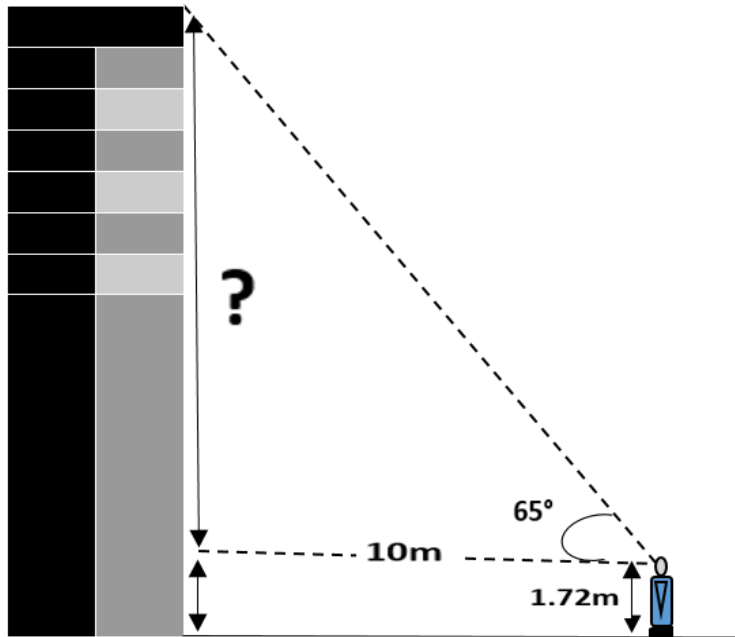
Exercice 14

1. Détermine le complémentaire des angles suivants : 30° ; 45° ; 13° ; 79° ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{5}$.
2. Détermine le supplémentaire des angles suivants : 30° ; 45° ; 143° ; 97° ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{5}$.

Exercice 15

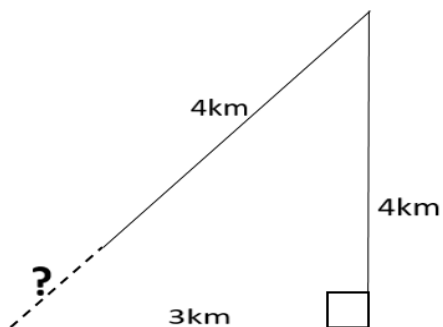
Détermine les angles d'un triangle sachant que les trois angles sont des entiers naturels consécutifs. Trace ce triangle et donne sa nature.

Exercice 16



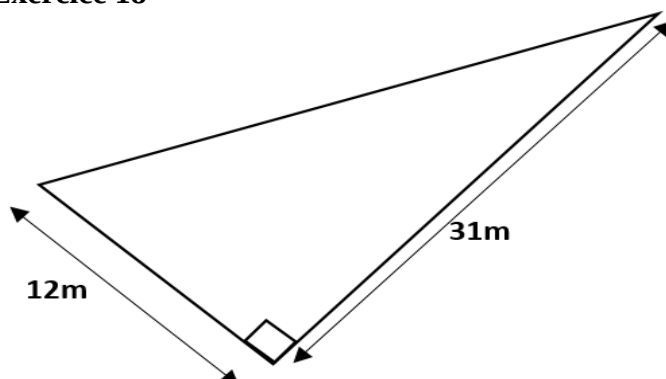
NB : les murs du géant sont orthogonaux par rapport à l'horizontale.

Exercice 17



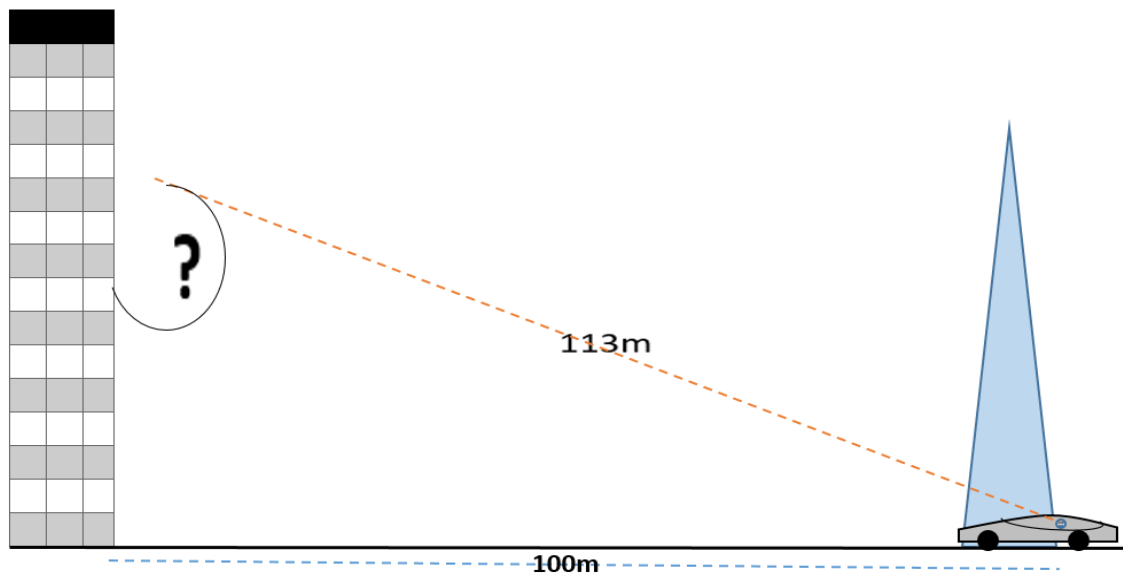
1. Donne un nom à ce triangle puis détermine sa nature.
2. Réponds à la question posée par la figure.
3. Détermine la mesure de chaque angle de ce triangle.
4. Détermine le périmètre de ce triangle.

Exercice 18



Yacoub et Abdou sont volontaires pour une course dont le gagnant aura une récompense de 15000FCFA. Sur des distances de moins de 100m, Yacoub est plus doué qu'Abdou ; mais sur des distances de plus de 100m Abdou est plus redoutable. La course se fait ainsi : au signal les deux coureurs décollent au même point et ne vont pas dans le même sens. Chacun doit faire le tour du terrain rectangulaire ci-dessus pour arriver au point de départ. Le premier arrivant est le gagnant de la course. Qui est plus favorisé par cette course.

Exercice 19



Alors que le cortège du président N'golo tournait la tour de la pyramide ; il fut atteint à la tête par une balle qui voyageait à 2Km/s provenant du géant immeuble Tindi. Sachant que le président se situait à 100m de l'immeuble, la balle à parcourir 113m pour atteindre sa cible. Détermine l'angle du tireur (sniper) comme indiqué dans la figure.

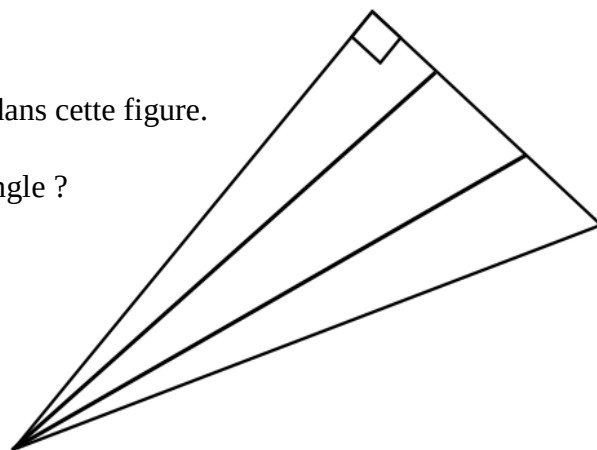
NB : les murs de l'immeuble Tindi font 90° avec l'horizontale.

Exercice 20

Détermine le nombre de triangle dans cette figure.

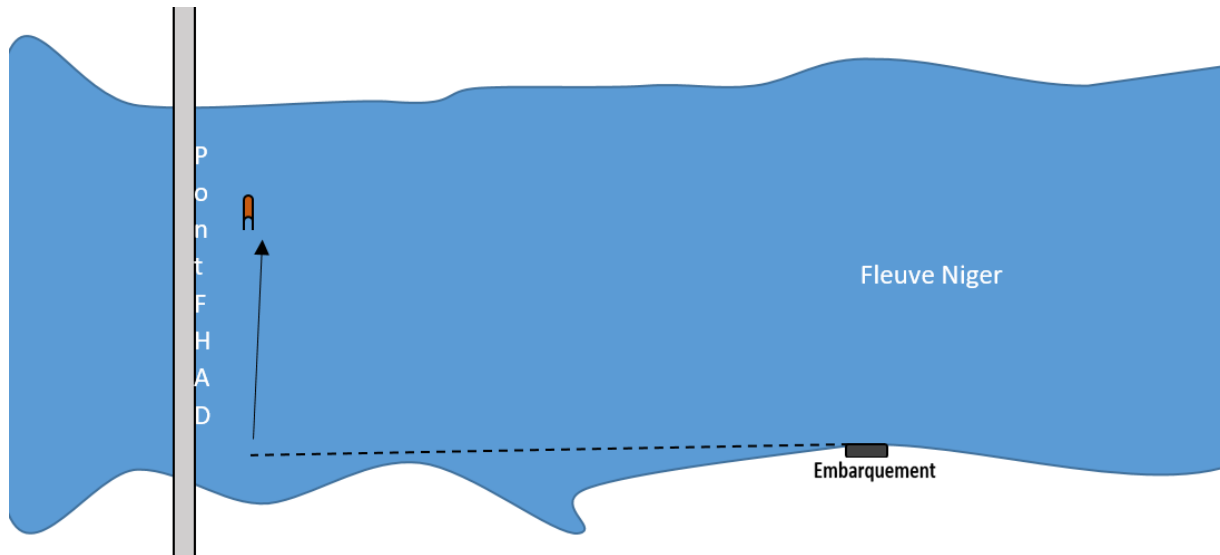
Combien y a-t-il de triangle rectangle ?

Combien ne sont pas rectangle ?

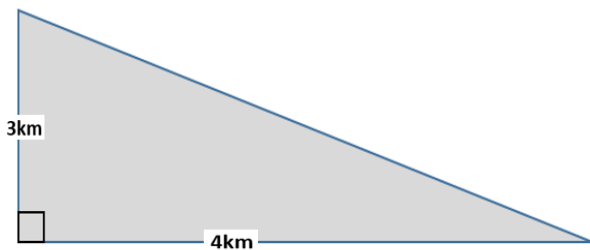


Exercice 21

Un bateau contenant des touristes embarqua à un point d'embarquement du fleuve Niger et se dirige orthogonalement vers le pont FHAD. Au bout de 3km parcourut, il fait un virage de 90° à droite où il parcourt encore 1km. Suivant quel angle il doit virer à droite à nouveau pour arriver tout droit sur le point d'embarcation.



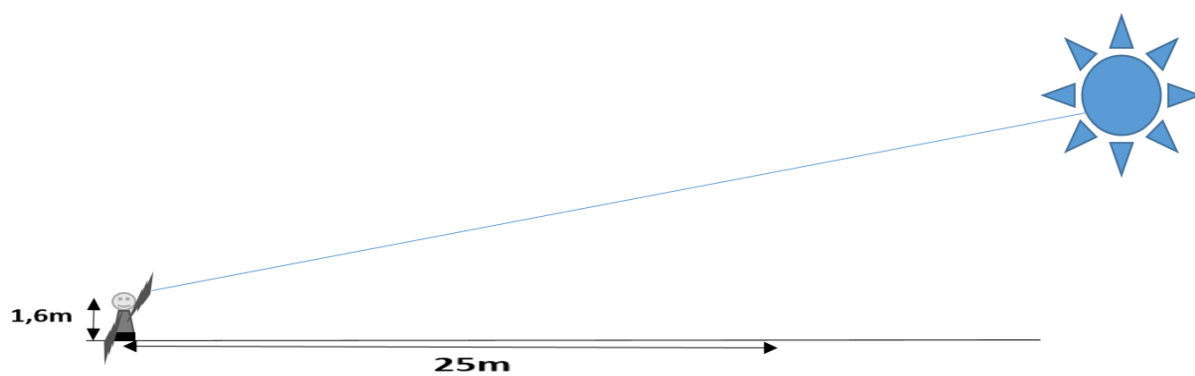
Exercice 22



A l'occasion du 70^{ième} anniversaire de Chérif Ousmane Madani Haïdara, l'association Ançar Dine décide d'entourer entièrement leur terrain triangulaire à l'aide des dattiers. Ainsi, l'on plantera un dattier à chaque 4m à partir d'un sommet. Sachant que chaque plante coûte 4500FCFA, combien dépensera l'association pour obtenir le nombre de plante nécessaire pour entourer tout le terrain.

Exercice 23

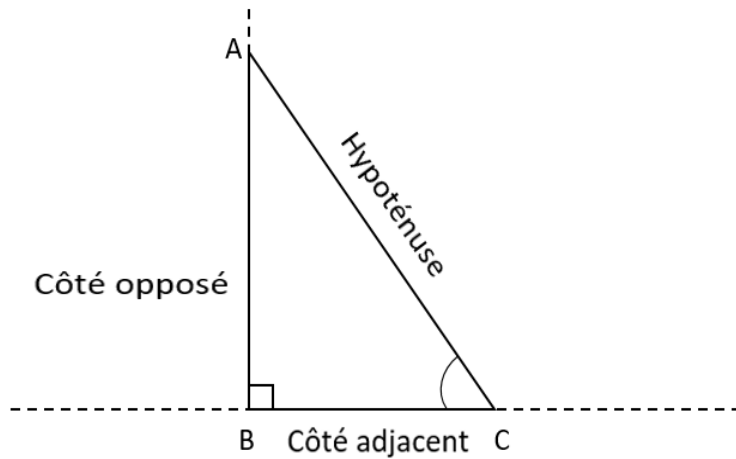
Pour que les rayons du soleil ne touchent pas Hitler, il faudra planter orthogonalement une plaque à 25m devant ce dernier. Sachant que les rayons frôlent la terre suivant un angle de 15° . Détermine la longueur minimale de la plaque pour que les rayons ne touchent pas Hitler.



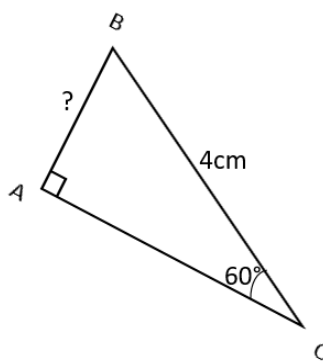
Corrections des exercices

Exercice 1

On construit un triangle ABC rectangle en B à l'aide de la règle et de l'équerre puis on montre l'hypoténuse ainsi que les côtés adjacent et opposé suivant l'angle C.



Exercice 2



1. le quel des rapports $\sin \hat{C}$; $\cos \hat{C}$; $\tan \hat{C}$ et $\cot \hat{C}$ il faudra utiliser pour calculer AB ?

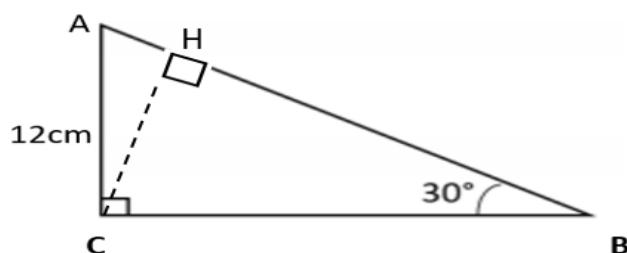
il faudra utiliser $\sin \hat{C}$ pour calculer AB.

2. En déduire AB.

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AB}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{4} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}\text{cm}$$

Exercice 3

1. Place le point H sur AB tel que CH et AB soient orthogonal.



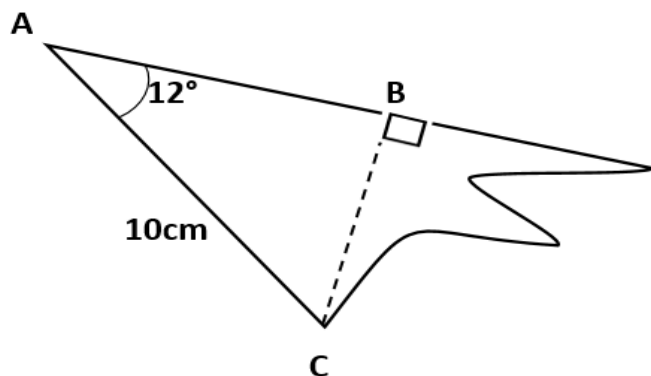
2. Détermine CH.

On sait que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 30^\circ + 90^\circ = 180 \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$.

$$\sin \hat{A} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{CH}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{12} \Rightarrow CH = 6\sqrt{3}\text{cm}.$$

Exercice 4

1. Place le point B sur la figure tel que ABC soit un triangle rectangle en B.



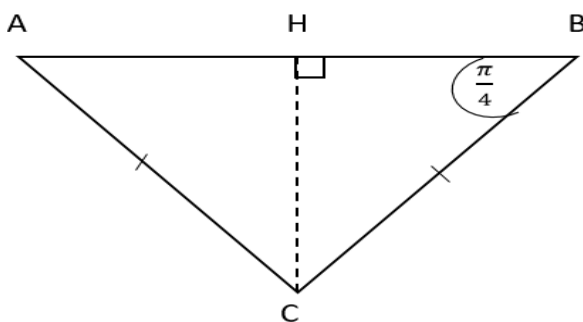
2. Détermine AB et BC.

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cos 12^\circ = \frac{AB}{10} \Rightarrow \cos 12^\circ = \frac{AB}{10} \Rightarrow AB = 10 \cos 12^\circ \Rightarrow AB = 9,781\text{cm}.$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \sin 12^\circ = \frac{BC}{10} \Rightarrow BC = 10 \sin 12^\circ \Rightarrow BC = 2,079\text{cm}.$$

Exercice 5

1. Place le point H sur [AB] sachant que $(AB) \perp (CH)$.



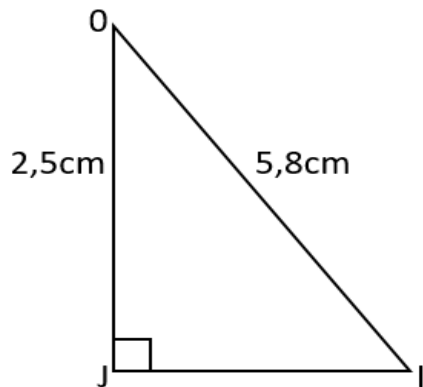
2. Détermine CH.

$$\tan \hat{B} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = \frac{CH}{5} \Rightarrow CH = 5 \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow CH = 5\text{cm}. (AB = 10\text{cm} \Rightarrow HB = 5\text{cm})$$

Exercice 6

Soit OIJ un triangle rectangle en J tel que $OJ = 2,5cm$ et $OI = 5,8cm$.

Trace ce triangle et détermine IJ .



$$OI^2 = OJ^2 + IJ^2 \Rightarrow IJ^2 = OI^2 - OJ^2 \Rightarrow IJ^2 = 5,8^2 + 2,5^2 \Rightarrow IJ^2 = 33,64 + 6,25 \Rightarrow IJ^2 = 39,89 \Rightarrow IJ = 6,31cm.$$

Exercice 7

Complète le tableau suivant

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} \Rightarrow \frac{30}{180} = \frac{r}{\pi} \Rightarrow r = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \Rightarrow \frac{30}{180} = \frac{g}{200} \Rightarrow g = \frac{100}{3}$$

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} \Rightarrow \frac{d}{180} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \Rightarrow \frac{d}{180} = \frac{1}{2} \Rightarrow d = 90^\circ$$

$$\frac{r}{\pi} = \frac{g}{200} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{g}{200} \Rightarrow g = 100$$

.

.

.

Degré	30	90°	45°	$\frac{180}{7}$	70	$\frac{63}{2}$
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{40}$
Grade	$\frac{100}{3}$	100	50	$\frac{200}{7}$	$\frac{700}{9}$	35

Exercice 8

$$1^\circ \rightarrow 60' \text{ et } 5^\circ \rightarrow x \Rightarrow x = \frac{5 \times 60}{1} \Rightarrow x = 300$$

$$1^\circ \rightarrow 3600'' \text{ et } 5^\circ \rightarrow x \Rightarrow x = \frac{5 \times 3600}{1} \Rightarrow x = 18000$$

$$1^\circ \rightarrow 60' \text{ et } x \rightarrow 3000' \Rightarrow x = \frac{1 \times 3000}{60} \Rightarrow x = 50$$

$$1' \rightarrow 60'' \text{ et } 3000' \rightarrow x \Rightarrow x = \frac{60 \times 3000}{1} \Rightarrow x = 180000$$

$$1^\circ \rightarrow 3600'' \text{ et } x \rightarrow 36000' \Rightarrow x = \frac{1 \times 36000}{3600} \Rightarrow x = 10$$

$$1' \rightarrow 60'' \text{ et } x \rightarrow 36000'' \Rightarrow x = \frac{1 \times 36000}{60} \Rightarrow x = 600$$

.

.

.

Degré	5	50	10	1,20	8,33	2,6
Minute	300	3000	600	72,1	500	156
Seconde	18000	180000	36000	4326	30000	9360

Exercice 9

Complète le tableau suivant

- 1^{er} action : convertir tous les angles en radian.

α en degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
$\cos \alpha$									
$\tan \alpha$									
$\cot \alpha$									

- 2^{ème} action : sinus et cosinus sont réciproques

α en degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
$\tan \alpha$									
$\cot \alpha$									

- 3^{ème} action : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ et $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

α en degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				

cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Impossi.				
cot α	Impossi.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0				

- 4^{ème} action : la ligne 90° est comme un miroir qui reflète les différentes valeurs à droite.

Toutes les images changent de signe sauf la ligne sinus.

α en degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Impossi.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot α	Impossi.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Impossi.

Exercice 10

1. Soit $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, détermine $\cos \alpha$ sachant que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

$$\text{On a : } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \boxed{\cos \alpha = \frac{3}{5}} \text{ où } \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ rejeté}$$

2. Soit $\alpha \in [0; \pi]$, détermine $\sin \alpha$ sachant que $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$.

$$\text{On a : } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{21}{25} \Rightarrow \boxed{\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}} \text{ où } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5} \text{ réjété.}$$

3. Soit $\alpha \in [-\pi; 2\pi]$, détermine $\tan \alpha$ sachant que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{25}{16} - 1 \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4} \text{ réjété où } \boxed{\tan \alpha = -\frac{3}{4}}$$

Exercice 11

1. Donne la nature de ce triangle après lui avoir donné un nom.

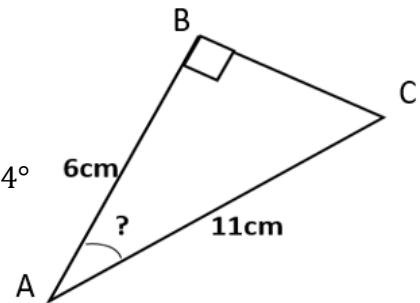
Ce triangle est rectangle en B.

2. Répondre à la question posée par la figure.

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{6}{11} \Rightarrow \hat{A} = \cos^{-1} \frac{6}{11} \Rightarrow \hat{A} = 56,94^\circ$$

3. Détermine le troisième angle.

$$\text{On a : } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 56,94^\circ + 90^\circ + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{C} = 33,05^\circ.$$



Exercice 12

Détermine une valeur approché à 10^{-2} près de

la mesure de : $\widehat{HBC}$; $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABH}$.

$$\tan \widehat{HBC} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow \tan \widehat{HBC} = \frac{1,6}{3,7} \Rightarrow$$

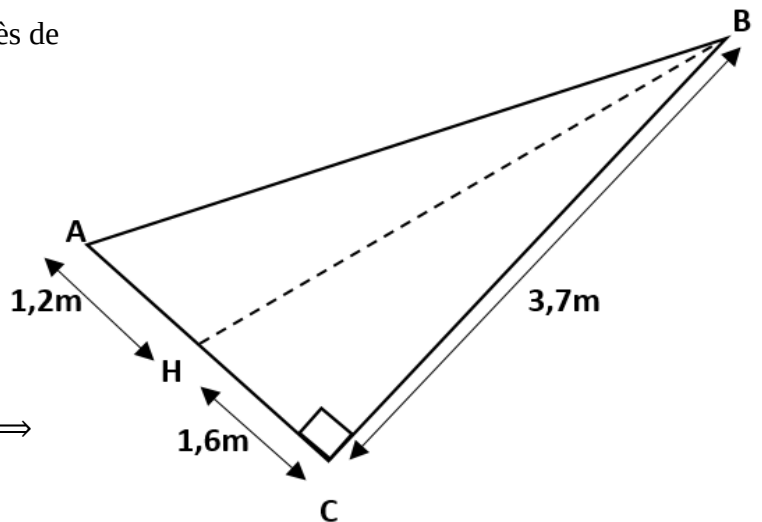
$$\widehat{HBC} = \tan^{-1} \left(\frac{1,6}{3,7} \right) \Rightarrow \widehat{HBC} = 23,38^\circ$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \tan \widehat{ABC} = \frac{1,6 + 1,2}{3,7} \Rightarrow$$

$$\widehat{ABC} = \tan^{-1} \left(\frac{2,8}{3,7} \right) \Rightarrow \widehat{ABC} = 37,11^\circ$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{HBC} + \widehat{ABH} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ABC} - \widehat{HBC} \Rightarrow \widehat{ABH} = 37,11^\circ - 23,38^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABH} = 13,73^\circ$$



Exercice 13

Calcule : $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\tan\frac{5\pi}{4}$; $\cot\frac{4\pi}{3}$; $\sin\frac{8\pi}{6}$; $\cos\frac{7\pi}{6}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $\sin\frac{10\pi}{6}$.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan\frac{5\pi}{4} = \frac{\sin\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{-\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1;$$

$$\cot\frac{4\pi}{3} = \frac{\cos\frac{4\pi}{3}}{\sin\frac{4\pi}{3}} = \frac{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-\cos\frac{\pi}{3}}{-\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \sin\frac{8\pi}{6} = \sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\frac{10\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 14

1. Détermine le complémentaire des angles suivants : 30° ; 45° ; 13° ; 79° ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{5}$.

$$x + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 60^\circ; \quad x + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ; \quad x + 13^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 77^\circ;$$

$$x + 79^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 11^\circ; \quad x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0; \quad x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}; \quad x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{10}.$$

2. Détermine le supplémentaire des angles suivants : 30° ; 45° ; 143° ; 97° ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{5}$.

$$x + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 150^\circ; \quad x + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 135^\circ; \quad x + 143^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 37^\circ; \quad x + 97^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 83^\circ; \quad x + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}; \quad x + \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}; \quad x + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}.$$

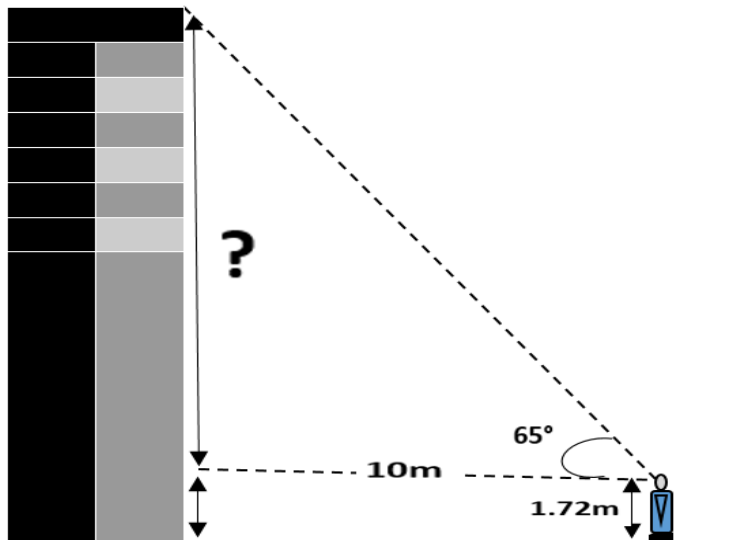
Exercice 15

Détermine les angles d'un triangle sachant les trois angles sont des entiers naturels consécutifs.
Trace ce triangle et donne sa nature.

$$\text{Soit } x \text{ le plus petit des angles. On a : } x + (x + 1) + (x + 2) = 180^\circ \Rightarrow 3x + 3 = 180^\circ \Rightarrow x = 59^\circ$$

Donc les trois angles sont : 59° ; 60° et 61° .

Exercice 16

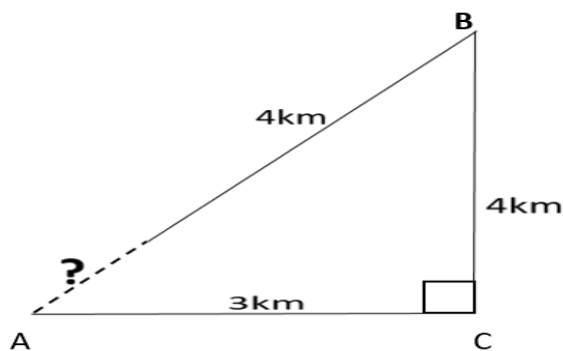


NB : les murs du géant sont orthogonaux par rapport à l'horizontale.

Soit x l'angle demandé, on a $\tan 65^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \tan 65^\circ \Rightarrow x = 21,44^\circ$

Exercice 17

1. Donne un nom à ce triangle puis détermine sa nature.



Le triangle ABC est rectangle en C.

2. Répond à la question posée par la figure.

Soit x le côté demandé. D'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow (x + 4)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 25 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(1)(-9) = 64 + 36 = 100$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2} = -9 \notin \mathbb{N}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2} = 1$$

Donc $x = 1\text{km}$.

3. Détermine la mesure de chaque angle de ce triangle.

D'après la figure, $\hat{C} = 90^\circ$

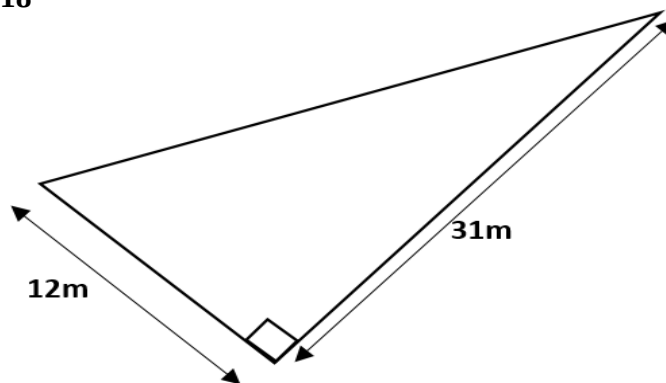
$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{4}{4+1} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{4}{5} \Rightarrow \hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \hat{A} = 53,13^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 53,13^\circ - 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 36,86^\circ$$

4. Détermine le périmètre de ce triangle.

$$P = AB + AC + BC = 5 + 3 + 4 = 12\text{km.}$$

Exercice 18



Yacoub et Abdou sont volontaires pour une course dont le gagnant aura une récompense de 15000FCFA. Sur des distances de moins de 100m, Yacoub est plus doué qu'Abdou ; mais sur des distances de plus de 100m Abdou est plus redoutable. La course se fait ainsi : au signal les deux coureurs décollent au même point et ne vont pas dans le même sens. Chacun doit faire le tour du terrain rectangulaire ci-dessus pour arriver au point de départ. Le premier arrivant est le gagnant de la course. Qui est plus favorisé par cette course.

Il faut tout d'abord connaître la distance minimale parcouru par les deux coureurs. Pour cela il faut connaître le périmètre du triangle.

Soit x l'hypoténuse du terrain. D'après le théorème de Pythagore on a :

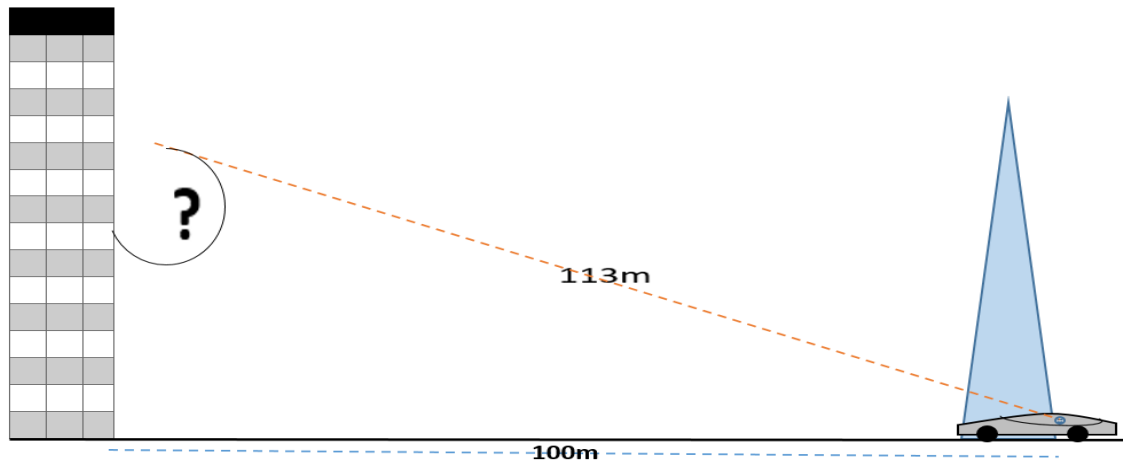
$$x^2 = 12^2 + 31^2 \Rightarrow x^2 = 1105 \Rightarrow x = 33,24\text{m ou } x = -33,24\text{m réjété}$$

Alors le périmètre est $P = 12 + 31 + 33,24 = 76,24\text{m.}$

Donc la distance minimale parcouru par les deux coureurs est proche de 76,24m.

D'après ce résultat, Yacoub est plus favorisé par cette course.

Exercice 19



Alors que le cortège du président N'golo tournait la tour de la pyramide ; il fut atteint à la tête par une balle qui voyageait à 2Km/s provenant du géant immeuble Tindi. Sachant que le président se situait à 100m de l'immeuble, la balle à parcourus 113m pour atteindre sa cible. Détermine l'angle du tireur (sniper) comme indiqué dans la figure.

NB : les murs de l'immeuble Tindi font 90° avec l'horizontale.

Soit x l'angle du tireur. On a : $\sin x = \frac{100}{113} \Rightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{100}{113}\right) \Rightarrow x = 62,24^\circ$

Exercice 20

Détermine le nombre de triangle dans cette figure.

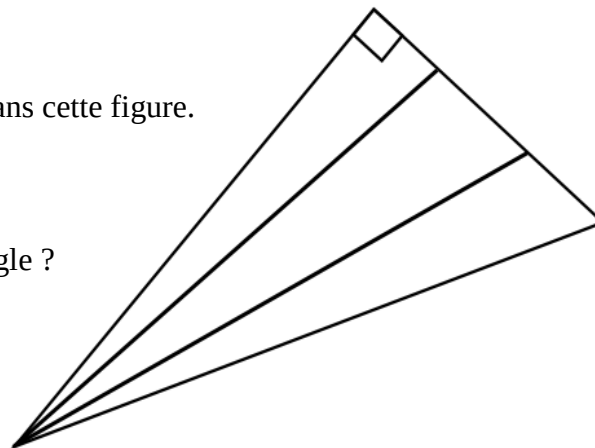
Il y'a 6 triangles dans cette figure.

Combien y a-t-il de triangle rectangle ?

Il y'a trois triangles rectangles.

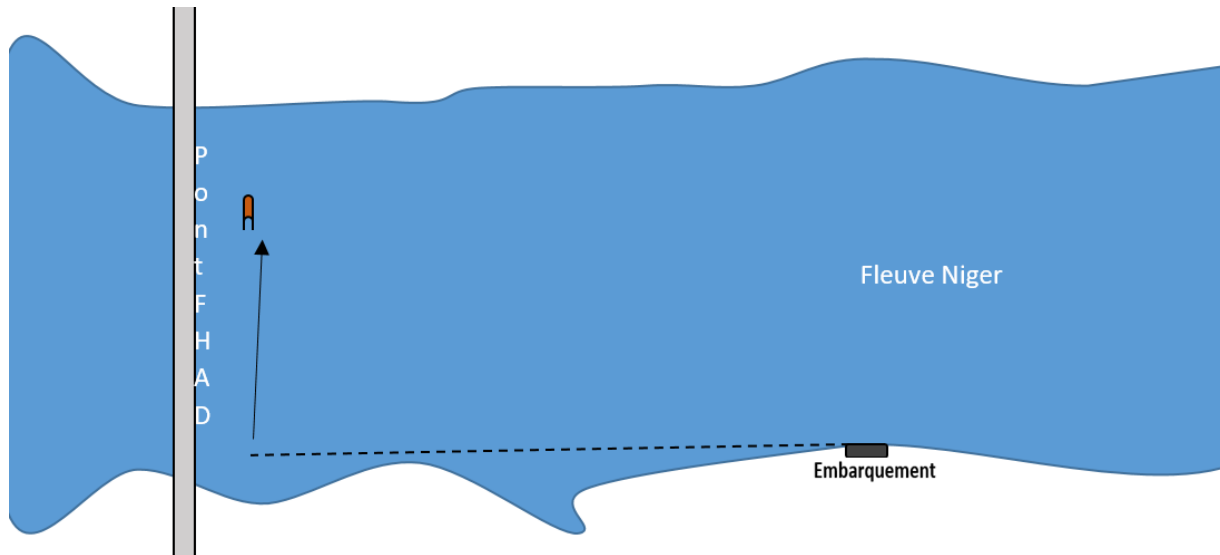
Combien ne sont pas rectangle ?

Il y'a trois triangles non rectangles.



Exercice 21

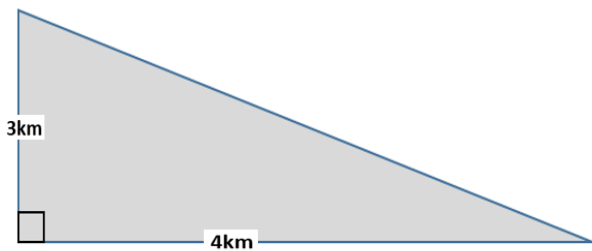
Un bateau contenant des touristes embarqua à un point d'embarquement du fleuve Niger et se dirige orthogonalement vers le pont FHAD. Au bout de 3km parcourut, il fait un virage de 90° à droite où il parcourut encore 1km. Suivant quel angle il doit virer à droite à nouveau pour arriver tout droit sur le point d'embarcation.



Soit θ l'angle à la quel le bateau doit virer pour arriver droit sur le point de départ.

$$\text{On a : } \tan \theta = \frac{3}{1} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(3) \Rightarrow \theta = 71,56^\circ$$

Exercice 22



A l'occasion du 70^{ième} anniversaire de Chérif Ousmane Madani Haïdara, l'association Ançar Dine décide d'entourer entièrement leur terrain triangulaire à l'aide des dattiers. Ainsi, l'on plantera un dattier à chaque 4m à partir d'un sommet. Sachant que chaque plante coûte 4500FCFA, combien dépensera l'association pour obtenir le nombre de plante nécessaire pour entourer tout le terrain.

Il faut tout d'abord connaitre le périmètre du triangle.

Soit x l'hypoténuse du terrain. D'après le théorème de Pythagore on a :

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5km \text{ ou } x = -5km \text{ réjété}$$

Alors le périmètre est $P = 5 + 3 + 4 = 12km$.

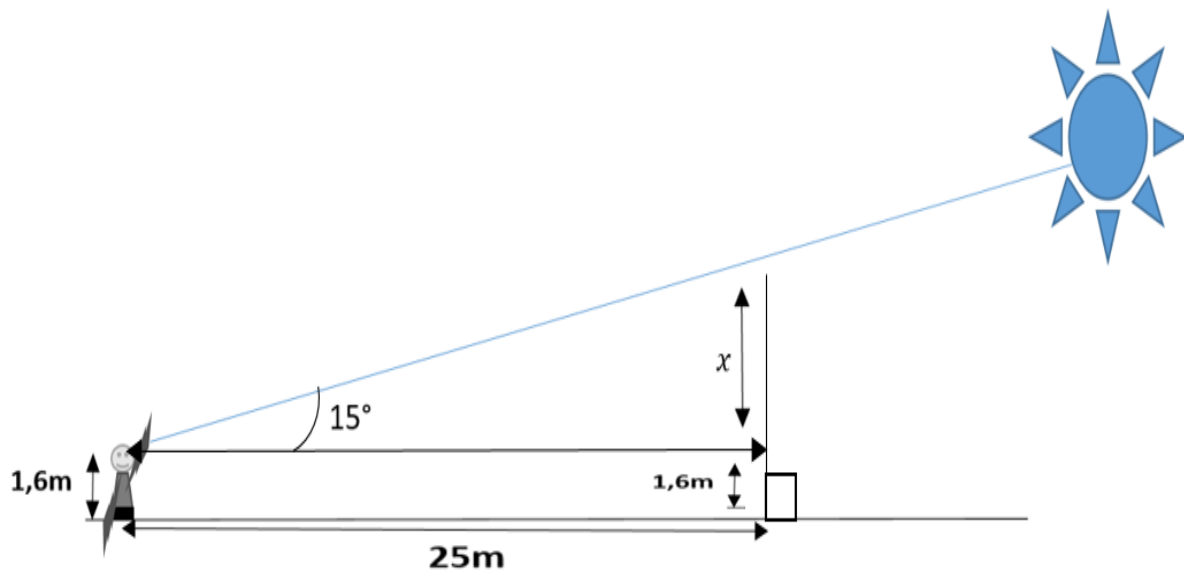
Ensuite on convertit 12km en m. $12km = 12000m$

$$\text{On divise par 4 ; } \frac{12000m}{4m} = 3000$$

Donc il faut trois plantes. D'où l'association Ançar Dine dépensera $3000 \times 4500 \text{FCFA} = 13500000 \text{FCFA}$.

Exercice 23

Pour que les rayons du soleil ne touchent pas Hitler, il faudra planter orthogonalement une plaque à 25m devant ce dernier. Sachant que les rayons frôlent la terre suivant un angle de 15° . Détermine la longueur minimale de la plaque pour que les rayons ne touchent pas Hitler.



La longueur du plaque est $x + 1,6$.

Par ailleurs $\tan 15^\circ = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 25 \tan 15^\circ \Rightarrow x = 6,69 \text{ m}$

Alors la longueur du plaque est $x + 1,6 = 6,69 + 1,6 = 8,29\text{m}$.

Séquence 3 : équations-inéquations-systèmes

I. Equation du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

- 1) **Définition** : on appelle équation du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ toute équation de la forme (ou qui peut se ramener à la forme) $ax + b = 0$ où $a \neq 0$; a et b sont des réels sont des réels.

Exemples : $2x + 5 = 0$; $\frac{-1}{2} + 3x = 1 - x$ et $\sqrt{2} = \sqrt{3}x$

- 2) **Résolution** : soit (E) : $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ une équation du premier degré.

(E) admet une unique solution $x = \frac{-b}{a}$

Exemple : résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $3x + 6 = 0$; $1 - 5x = x + 2$;

$$\frac{-2}{5}x - \frac{2}{5} = 5x$$

N.B : la précision de l'ensemble dans lequel ($\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$) se fait la résolution est très important pour écrire l'ensemble solution de l'équation.

II. Equation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

- 1) **Définition** : on appelle équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ toute équation pouvant s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$; a ; b et c sont des réels.
 $2x^2 - 3x + 1 = 0$; $-\frac{3}{2}x^2 + \sqrt{3}x = 5$ et $6 + 3x(x - 2) - 2x(x - 4) = 0$ sont des exemples d'équations du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
- 2) **Résolution** : soit (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ une équation du second degré.

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E), on procède comme suit :

- on calcule tout d'abord le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
- si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$ alors (E) admet une solution double $x_0 = \frac{-b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$ alors (E) n'admet pas de solutions.

Exemple : résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 ; -x^2 - 2x + 3 = 0 ; 4x^2 + 4x + 1 = 0 ; -5x^2 + 2x - 4 = 0$$

III. Inéquation du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

1) **Définition** : soit (E) : $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ une équation du premier degré.

En remplaçant l'égalité de (E) par l'un des signes d'inégalités ($<$; $\leq$; $>$; $\geq$) nous aurons une inéquation du premier degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

2) Résolution

a) **Signe du binôme** ($ax + b$)

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe contraire de a		signe de a

Dresser le tableau de signe des binômes suivants : $7x + 4$; $\sqrt{5} - 2x$ et $2 + x$

b) **Méthode pratique** : soit (I) : $ax + b < 0$ où $a \neq 0$ une inéquation du premier degré. Pour résoudre (I) on procède comme suit :

- on étudie le signe de $ax + b$;
- puis on en déduit l'ensemble solution.

N.B : les inégalités ($<$ et $\leq$) font référence au signe moins ($-$) et les inégalités ($>$ et $\geq$) au signe plus ($+$). Les intervalles seront fermés si l'inégalité est large et ouvert si elle est stricte.

IV. Inéquation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

1) **Définition** : soit (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ une équation du second degré.

En remplaçant l'égalité de (E) par l'un des signes d'inégalités ($<$; $\leq$; $>$; $\geq$) nous aurons une inéquation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

2) Résolution

a) **Signe du trinôme** ($ax^2 + bx + c$)

$$ax^2 + bx + c = 0 ; \Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$ alors on a deux solutions x_1 et x_2 ; supposons $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	<i>signe de a</i>	$\bigcirc$ <i>signe de -a</i>	$\bigcirc$ <i>signe de a</i>	

➤ Si $\Delta = 0$ alors on a une solution double x_0

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	<i>signe de a</i>	$\bigcirc$	<i>signe de a</i>

➤ Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solutions

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	<i>signe de a</i>	

b) Méthode pratique

Pour résoudre l'une des inéquations ($ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$) on étudie le signe de $ax^2 + bx + c$ et enfin on en déduit l'ensemble solution.

V. Autres types d'équations et d'inéquations

Exemple 1 : les équations rationnelles.

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\frac{x-3}{4x-8} = \frac{2-x}{3-x}$; $\frac{x^2-x-1}{x+2} = 2x+3$

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x-3}{4x-8} = \frac{2-x}{3-x}$

$$D_v = \{x/x \in \mathbb{R}; 4x - 8 \neq 0 \text{ et } 3 - x \neq 0\}$$

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 ; 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 ; \text{ d'où } D_v = \mathbb{R} - \{2 ; 3\}$$

$$\frac{x-3}{4x-8} = \frac{2-x}{3-x} \Rightarrow (x-3)(3-x) = (4x-8)(2-x)$$

$$\Rightarrow -x^2 + 6x - 9 = -4x^2 + 16x - 16 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{7}{3} ; \text{ donc } S = \{1 ; \frac{7}{3}\}$$

Exemple 2 : inéquations rationnelles.

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $\frac{2x-8}{x^2+5x-6} \leq \frac{1}{x+2}$; $\frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2+x}$

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2+x}$

$$D_v = \{x / x \in \mathbb{R} ; x \neq 0 ; x + 1 \neq 0 \text{ et } x^2 + x \neq 0\} \Rightarrow D_v = \mathbb{R} - \{-1 ; 0\}$$

$$\frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2+x} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x(x+1)} \geq \frac{8}{x^2+x} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x(x+1)} - \frac{8}{x(x+1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-7}{x(x+1)} \geq 0$$

$$x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{7} \text{ ou } x = \sqrt{7}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	-1	0	$\sqrt{7}$	$+\infty$	
$x^2 - 7$	+	○	-	-	-	○	+
x	-	-	-	○	+	+	
$x + 1$	-	-	○	+	+	+	
$x(x + 1)$	+	+	-	+	+		
$\frac{x^2 - 7}{x(x + 1)}$	+	-	+	-	+		

$$S =] - \infty ; -\sqrt{7}] \cup] - 1 ; 0[\cup [\sqrt{7} ; +\infty[$$

VI. Equations irrationnelles du type $\sqrt{ax+b} = cx+d$

$$\sqrt{ax+b} = cx+d \Rightarrow \begin{cases} cx+d \geq 0 \\ ax+b = (cx+d)^2 \end{cases}$$

Exemple

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sqrt{3x+7} = x+1$; $(x+1) - \sqrt{4x-15} = 4$

$$\sqrt{3x+7} = x+1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x+7 = (x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-1 ; +\infty[\\ x_1 = 3 ; x_2 = -2 \end{cases}$$

Donc $S = \{3\}$

En général, $\sqrt{P(x)} = Q(x) \Rightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^2 \end{cases}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.

Exercices**Exercice 1**

Résous dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes : $3x + 2 = 2x + 5$; $5x + 3 = 2x - 6$;

$$-5 + x = 2 ; 7 + 3x = -4 ; 9 - 3x = 15 + 2x ; \frac{5}{3}x + 4 = \frac{2}{7} ; \frac{x+2}{-x+3} = \frac{1}{2} ; \frac{x+2}{-5} = \frac{-3x+4}{2}$$

Exercice 2

Vérifie si les réels -2 ; $\frac{5}{4}$; 1 et $\sqrt{2}$ sont solutions des équations (E) et (E') définies respectivement par : (E) : $-2x + 1 = 2 - 3x$ et (E') : $3 + 4x = 8$

Exercice 3

Un père de 45 ans a deux fils Ali et Moussa d'âges respectifs 12 ans et 16 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera la somme de l'âge de ses fils.

Exercice 4

On donne les polynômes $P(x) = x(x + 2) - x - 2$ et $Q(x) = 4x^2 - 2x + (2x - 1)^2$.

- Factorise $P(x)$ et $Q(x)$.
- En déduis les solutions de l'équation $P(x) = 0$ puis de $Q(x) = 0$.

Exercice 5

1) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) x^2 - 13x + 12 = 0 ; b) 2x^2 - 4x + 2 = 0 ; c) 3x^2 + x + 1 = 0 ; d) 7x^2 + 9x + 2 = 0 ; e) -3x^2 + x + 4 = 0 ; f) x^2 + 4x + 4 = 0$$

2) Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) -x^2 - 3x + 4 \geq 0 ; b) x^2 + 4x + 4 < 0 ; c) 2x^2 - 2x + 3 > 0 ;$$

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant l'étude du signe du binôme :

$$a) -2x + 1 \leq 0 ; b) 5 + 3x \geq -5 ; c) \frac{x+2}{-x+3} < \frac{1}{2} ; d) \frac{x+2}{-5} > \frac{-3x+4}{2}$$

$$e) (2x - 1)(3x + 2) > 0 ; f) \frac{4-3x}{(x+2)(4-2x)} < 0 ; g) \frac{(5x+5)(4x+2)}{(x-2)(4-x)} \geq 0 h) \frac{x^2-x-4}{2x^2-x-3} > 0$$

i) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \geq \frac{6}{5}$; j) $(x-5)(x^2-12x+24) \geq 0$

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations irrationnelles suivantes :

1) $\sqrt{3x+1} = 3-x$; 2) $x - \sqrt{2x+1} = 1$; 3) $\sqrt{-x^2+4x+5} = x-6$;

4) $\sqrt{7x-3} + 3 = 2x$; 5) $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 = 0$

Exercice 8

Aboubacar possède d'un jardin rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur et un champ de forme rectangulaire dont l'aire est le double de l'aire du jardin. Le périmètre du champ est égal à celui du jardin augmenté de 44 mètres. L'aire du champ étant égale à 64m^2 , calcule les dimensions du jardin puis celles du champ.

Exercice 9

Moussa dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont il dispose. Dans un second magasin, il dépense la moitié du reste. Et après avoir ensuite acheté un objet à 500F, il lui reste 400F.

De quelle somme disposait-il au départ ?

Exercice 10

Fatoumata dépense le quart de son salaire à la nourriture, le tiers de son salaire à la location et il lui reste la somme de 50000F. Détermine le montant du salaire de Fatoumata.

Exercice 11

Soit ABC un triangle rectangle en A. Détermine les dimensions de ABC sachant que les mesures de ses côtés sont trois entiers consécutifs.

Exercice 12

Trouve le nombre naturel dont son triple diminué de quatre vaut son double augmenté de cinq.

Exercice 13

- 1) Deux capitaux dont la différence est 25 000F et dont le rapport est $\frac{9}{4}$. Quels sont ces deux grandeurs ?

- 2) Trouve deux nombres sachant que leur rapport $\frac{2}{9}$ et leur somme 22 440 F.

Exercice 14

- 1) Une personne dépense le quart de son salaire pour son loyer, les $\frac{3}{7}$ pour sa nourriture. Il lui reste 594F pour les autres dépenses. Quel est son salaire ?
- 2) Trouve deux nombres naturels pairs et consécutifs dont leur somme vaut 206.
- 3) Mamadou a ajouté 17 à son âge puis a multiplié ce résultat par 2 et a trouvé 48. Quel âge a-t-il ?
- 4) Dans un jardin, le tiers de la surface est recouvert par des fleurs, un sixième par les plantes vertes et le reste, soit 150m², est occupé par la pelouse. Calcule l'aire de ce jardin.

Exercice 15

Un magicien demande à un spectateur de :

- Choisir un nombre ;
- Le multiplier par deux ;
- Retrancher 3 à ce produit ;
- Multiplier le tout par 6.

Le magicien annonce comme résultat 294. Détermine le nombre choisi par le spectateur.

Exercice 16

Deux ouvriers mettent 12 heures pour cultiver un champ. Combien d'heures mettraient quatre ouvriers pour cultiver le même champ.

Exercice 17

Quatre dactylos ont mis 8 heures pour taper un rapport de 160 pages. Combien de temps mettraient six dactylos pour taper ce même rapport ?

Exercice 18

Un robinet qui débite 18 litres à la minute met 28 heures pour remplir un bassin. Quel temps mettrait-il si son débit était de 42 litres à la minute ?

Exercice 19

Un camion pesant à vide deux tonnes doit passer sur un pont limité à six tonnes. Détermine le nombre de caisses maximales de 118 Kg peut-il transporter sur ce pont sans risque de surcharge ?

Exercice 20

Une cartouche d'encre noire pour imprimante achetée en magasin coûte 17,9€. Achetée sur un site internet, la cartouche coûte 16,5€ mais il y a des frais de port, d'un montant de 4,9€ quel que soit le nombre de cartouches achetées. A partir de combien de cartouches achetées l'achat sur internet est-il moins cher qu'en magasin ?

Exercice 21 (source CIAM)

On considère l'équation (E): $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

- a) Précise les contraintes sur l'inconnue x
- b) Trouve une solution de l'équation (E) qui soit un nombre entier.
- c) Résous (E) dans $\mathbb{R}$.

Exercice 22 (sur internet)

Deux commerçantes ont 30000F et 10000F. sachant que leur capital à chacun augmente chaque semaine de 5000F.

Au bout de combien de temps le capital de la première sera-t-il égal à la moitié de la seconde ?

Exercice 23 (source CIAM)

On dit qu'un rectangle est d'or lorsque le rapport de la longueur à la largeur est égal au rapport du demi-périmètre à la longueur.

Trouve les dimensions de tous les rectangles d'or dont la longueur dépasse exactement la largeur de 2cm.

Corrections des exercices

Exercice 1

- $3x + 2 = 2x + 5 \Rightarrow 3x - 2x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3$; donc $S_{\mathbb{Z}} = S_{\mathbb{R}} = \{3\}$
- $\frac{5}{3}x + 4 = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{5}{3}x = \frac{2}{7} - 4 \Rightarrow \frac{5}{3}x = \frac{-12}{7} \Rightarrow x = \frac{-12}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{-36}{35}$

$$\frac{-36}{35} \in \mathbb{R} \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-36}{35} \right\} ; \frac{-36}{35} \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$$

- $\frac{x+2}{-5} = \frac{-3x+4}{2} \Rightarrow 2(x+2) = -5(-3x+4) \Rightarrow -13x = -24 \Rightarrow x = \frac{24}{13}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{24}{13} \right\} \text{ et } S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$$

- $\frac{x+2}{-x+3} = \frac{1}{2}$

$$D_v = \{x/x \in \mathbb{R} ; -x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\frac{x+2}{-x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(x+2) = -x+3 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \quad \text{et} \quad S_{\mathbb{Z}} = \emptyset$$

Exercice 2

(E) : $-2x + 1 = 2 - 3x$; vérifions si les réels -2 ; $\frac{5}{4}$; 1 et $\sqrt{2}$ sont solutions de (E).

- Pour $x = -2$: $-2(-2) + 1 = 2 - 3(-2) \Rightarrow 5 = 8$ fausse ; donc -2 n'est pas solution de (E).
- Pour $x = \frac{5}{4}$: $-2\left(\frac{5}{4}\right) + 1 = 2 - 3\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{7}{4}$ fausse ; donc $\frac{5}{4}$ n'est pas solution de (E).
- Pour $x = 1$: $-2(1) + 1 = 2 - 3(1) \Rightarrow -1 = -1$ vraie ; donc 1 est solution de (E).
- Pour $x = \sqrt{2}$: $-2(\sqrt{2}) + 1 = 2 - 3(\sqrt{2}) \Rightarrow -2\sqrt{2} + 1 = 2 - 3\sqrt{2}$ fausse ; donc $\sqrt{2}$ n'est pas solution de (E).

Exercice 3

Soit t le nombre d'années où l'âge du père sera la somme de l'âge de ses fils.

$(45 + t) = (12 + t) + (16 + t) \Rightarrow -t = -17 \Rightarrow t = 17$. D'où dans 17 ans l'âge du père sera la somme de l'âge de ses fils.

Exercice 4

Soit $P(x) = x(x + 2) - x - 2$

a) Factorisons $P(x)$

$$P(x) = x(x + 2) - x - 2 = x(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x - 1)$$

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1$$

$$\text{D'où } S = \{-2; 1\}$$

Exercice 5

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - 13x + 12 = 0$; $\Delta = (-13)^2 - 4(1)(12) = 169 - 48 = 121$

$$\Delta > 0, \text{ on a : } x_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{121}}{2(1)} = \frac{13-11}{2} = 1 ; x_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{121}}{2(1)} = \frac{13+11}{2} = 12$$

$$\text{Donc } S = \{1; 12\}$$

b) $3x^2 + x + 1 = 0$; $\Delta = (1)^2 - 4(3)(1) = 1 - 12 = -11$

$$\Delta < 0, \text{ donc } S = \emptyset$$

c) $x^2 + 4x + 4 = 0$; $\Delta = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

$$\Delta = 0, \text{ on a : } x_0 = \frac{-(-4)}{2(1)} = -2 ; S = \{-2\}$$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-x^2 - 3x + 4 \geq 0$

$$-x^2 - 3x + 4 = 0 ; \Delta = (-3)^2 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{3-5}{-2} = 1 ; x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{3+5}{-2} = -4$$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$-x^2 - 3x + 4$	$-$	$+$	$-$	

$$S = [-4; 1]$$

b) $x^2 + 4x + 4 < 0$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 ; \Delta = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$$

$$\Delta = 0, \text{ on a : } x_0 = \frac{-(-4)}{2(1)} = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x^2 + 4x + 4$	+		+

$$S = \emptyset$$

c) $2x^2 - 2x + 3 > 0$

$$2x^2 - 2x + 3 = 0 ; \Delta = (-2)^2 - 4(2)(3) = 4 - 24 = -20$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 - 2x + 3$	+	

$$S =]-\infty ; +\infty[$$

Exercice 6

Réolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-2x + 1 \leq 0 ; -2x + 1 = 0 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x + 1$	+		-

$$S = \left[\frac{1}{2} ; +\infty \right[$$

b) $5 + 3x \geq -5 \Rightarrow 10 + 3x \geq 0 ; 10 + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{-10}{3}$	$+\infty$
$10 + 3x$	-		+

$$S = \left[\frac{-10}{3} ; +\infty \right[$$

c) $(2x - 1)(3x + 2) > 0$

$$(2x - 1)(3x + 2) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \text{ ou } 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{-2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
-----	-----------	----------------	---------------	-----------

$2x - 1$	$-$	$-$	$+$
$3x + 2$	$-$	$+$	$+$
$(2x - 1)(3x + 2)$	$+$	$-$	$+$

$$S = \left] -\infty ; -\frac{2}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$$

d) $\frac{4-3x}{(x+2)(4-2x)} < 0$; $4 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$; $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$;

$$4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$4 - 3x$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$4 - 2x$	$+$	$+$	$+$	$-$	
$(x + 2)(4 - 2x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	
$\frac{4 - 3x}{(x + 2)(4 - 2x)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$$S = \left[-2 ; \frac{4}{3} \right] \cup [2 ; +\infty[$$

e) $\frac{x+2}{-5} > \frac{-3x+4}{2} \Rightarrow \frac{x+2}{-5} - \frac{-3x+4}{2} > 0 \Rightarrow \frac{-13x+24}{-10} > 0$; $-13x + 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{24}{13}$

x	$-\infty$	$\frac{24}{13}$	$+\infty$
$-13x + 24$	$+$	$-$	
-10	$-$	$-$	
$\frac{-13x + 24}{-10}$	$-$	$+$	

$$S = \left] -\infty ; \frac{24}{13} \right[$$

f) $\frac{x+2}{-x+3} < \frac{1}{2}$; $D_v = \{x/x \in \mathbb{R}; -x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\frac{x+2}{-x+3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+2}{-x+3} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{3x+1}{-2x+6} < 0$$
; $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$; $-2x + 6 = 0 \Rightarrow$

$$x = 3$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$	3	$+\infty$
$3x + 1$	$-$	$+$	$+$	
$-2x + 6$	$+$	$+$	$-$	
$\frac{3x + 1}{-2x + 6}$	$-$	$+$	$-$	

$$S = \left] -\infty ; \frac{-1}{3} \right[\cup] 3 ; +\infty [$$

Exercice 7

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations irrationnelles suivantes :

$$1) \sqrt{3x+1} = 3-x \Rightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3x+1 = (3-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \geq -3 \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x_1 = 1 ; x_2 = 8 \end{cases}$$

$$S = \{1\}$$

$$2) x - \sqrt{2x+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = x+1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = (x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{0\}$$

$$3) \sqrt{-x^2+4x+5} = x-6 \Rightarrow \begin{cases} x-6 \geq 0 \\ -x^2+4x+5 = (x-6)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ 2x^2 - 16x + 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x_1 = \frac{8-\sqrt{2}}{2} ; x_2 = \frac{8+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{8+\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$4) \sqrt{7x-3} + 3 = 2x \Rightarrow \sqrt{7x-3} = 2x-3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 7x-3 = (2x-3)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x \geq 3 \\ 4x^2 - 19x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x_1 = \frac{3}{4} ; x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow S = \{4\}$$

$$5) \sqrt{x^2+1} - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2+1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x \geq 1 \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x_1 = 0 ; x_2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

Exercice 8

Soient L la longueur du jardin et l sa largeur ; on a : $2L = l$.

Soient x et y respectivement la longueur et la largeur du champ ; on a : $xy = 2Ll$.

De plus on a : $2(x + y) = 2(L + l) + 44$ et $xy = 64$.

Calculons :

- Les dimensions du jardin

$$2Ll = 64 \Rightarrow Ll = 32 \Rightarrow 2l^2 = 32 \Rightarrow l^2 = 16 \Rightarrow l = 4m ; L = 2l = 8m$$

- Les dimensions du champ

$$\begin{cases} x + y = 34 \\ xy = 64 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 34t + 64 = 0 \Rightarrow t_1 = 2 ; t_2 = 32 ; x = 32m \text{ et } y = 2m.$$

Exercice 9

Soit S la somme que dispose Moussa.

$$S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{2}R - 500 = 400 \text{ où } R = \frac{3}{4}S.$$

$$S - \frac{1}{4}S - \frac{3}{8}S = 900 \Rightarrow \frac{8S - 2S - 3S}{8} = 900 \Rightarrow 3S = 7200 \Rightarrow S = 2400. \text{ Donc Moussa disposait } 2400 \text{ francs CFA au départ}$$

Exercice 10

Soit T le salaire de Fatoumata.

$$T - \frac{1}{4}T - \frac{1}{3}T = 50000 \Rightarrow \frac{12T - 3T - 4T}{12} = 50000 \Rightarrow 5T = 600000 \Rightarrow T = 120000$$

Le salaire de Fatoumata est 120000F.

Exercice 11

Soient z ; $z + 1$ et $z + 2$ les dimensions de ce triangle.

$$(z + 2)^2 = (z + 1)^2 + z^2 \Rightarrow z^2 - 2z - 3 = 0 \Rightarrow z_1 = -1 ; z_2 = 3 ; \text{ on a } z = 3.$$

D'où les dimensions de ce triangle sont : 3 ; 4 et 5.

Exercice 12

Soit u ce nombre naturel ; $3u - 4 = 2u + 5 \Rightarrow u = 9$

Exercice 13

1) Supposons A et B ces deux grandeurs telles que $A > B$.

$$A - B = 25000 \text{ et } \frac{A}{B} = \frac{9}{4} \Rightarrow 4A - 9B = 0$$

$$\begin{cases} A - B = 25000 \\ 4A - 9B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 45000 \text{ et } B = 20000$$

2) Soient x et y ces deux nombres avec $x < y$.

$$x + y = 22440 \text{ et } \frac{x}{y} = \frac{2}{9} \Rightarrow 9x - 2y = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 22440 \\ 9x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4080 \text{ et } y = 18360$$

Exercice 14

1) Soit A son salaire.

$$A - \frac{1}{4}A - \frac{3}{7}A = 594 \Rightarrow \frac{28A - 7A - 12A}{28} = 594 \Rightarrow A = 1848F$$

2) Supposons a et b ces deux nombres avec $a = 2n$ et $b = 2n + 2$ où $n \in \mathbb{N}$.

$$a + b = 4n + 2 = 206 \Rightarrow n = 51, \text{ d'où } a = 102 \text{ et } b = 104.$$

3) Soit t l'âge de Mamadou.

$$2(t + 17) = 48 \Rightarrow t = 7, \text{ l'âge de Mamadou est } 7 \text{ ans.}$$

4) Soit A l'aire de ce jardin.

$$A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{6}A = 150 \Rightarrow \frac{18A - 6A - 3A}{18} = 150 \Rightarrow A = 300$$

Donc l'aire de ce jardin est $300m^2$.

Exercice 15

Soit t le nombre choisi par le spectateur.

$$[(t \times 2) - 3] \times 6 = 294 \Rightarrow t = 26$$

Exercice 16

Soit t ce temps ; $t = \frac{4 \times 12}{2} = 24h$.

Exercice 17

Soit x ce temps ; $x = \frac{6 \times 8}{4} = 12h$.

Exercice 18

Soit t ce temps. Calculons d'abord la contenance L de ce bassin.

$$L = 18 \times 1680 = 30240 \text{ l} ; t = \frac{30240}{42} = 720 \text{ min} = 12 \text{ h.}$$

Exercice 19

Soit n le nombre de caisses maximales.

$$118n + 2000 < 6000 \Rightarrow n < 33,89 \Rightarrow n = 33.$$

Exercice 20

Soit m le nombre de cartouches à partir du quel l'achat sur internet est moins cher qu'en magasin.

$$16,5m + 4,9 < 17,9m \Rightarrow m > 3,5 \Rightarrow m = 4$$

Exercice 22

Choix de l'inconnue :

Soit x le nombre de semaines nécessaires.

Traduction du problème

Augmentation du capital de la 1^{ère} commerçante = $30000 + 5000x$

Augmentation du capital de la 2^{ème} commerçante = $100000 + 5000x$

On a ainsi : $30000 + 5000x = \frac{1}{2}(100000 + 5000x)$

La résolution :

$$30000 + 5000x = \frac{1}{2}(100000 + 5000x) \Leftrightarrow 60000 + 10000x = 100000 + 5000$$

$$\Leftrightarrow 10000x - 5000x = 100000 - 60000 \Leftrightarrow 10x - 5x = 100 - 60 \Leftrightarrow 5x = 40$$

$$5x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{5} = 8$$

Conclusion : Au bout de 8 semaines, le capital de la 1^{ère} commerçante sera égal à la moitié de la 2^{ème} commerçante.

Exercice 23

Soit x la longueur en cm du rectangle. Comme elle doit dépasser la largeur de $2cm$, alors $x \in]2; +\infty[$

Mise en équation :

Si $L = x$ alors $l = x - 2$

Le rectangle est d'or si et seulement si : $\frac{x}{x-2} = \frac{x+x-2}{x}$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{x+x-2}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{2x-2}{x} \Leftrightarrow x^2 = (x-2)(2x-2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 2x^2 - 4x - 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(4) = 36 - 16 = 20$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{20}}{2(1)} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2} = 3 - \sqrt{5} \notin]2; +\infty[$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{20}}{2(1)} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2} = 3 + \sqrt{5}$$

Conclusion Un rectangle d'or dont la longueur dépasse la largeur de 2cm a pour longueur $L = (3 + \sqrt{5})\text{cm}$ et pour largeur $l = (1 + \sqrt{5})\text{cm}$

Séquence 4 : systèmes d'équations et d'inéquations

1. Systèmes d'équations du 1^{er} degré à deux inconnues

a. **Définition** : on appelle systèmes linéaires (S) de deux équations à deux inconnues, le système défini par :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ ou } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des nombres réels.}$$

b. Résolution algébrique

Méthode de déterminant

Soit (S) le système défini par : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Le déterminant du système (S) est : $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

On a : $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

On a Trois cas :

Si $D \neq 0$, $D_x \neq 0$ et $D_y \neq 0$ alors il existe une unique solution au système (S):

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ et } y = \frac{D_y}{D}$$

Si $D = 0$ et $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ alors le système (S) n'admet pas de solution

Si $D = 0$ et $D_x = D_y = 0$ alors le système (S) admet une infinité de solution

c. Résolution graphique

L'existence de solution d'un système linéaire (S) de deux équations à deux inconnues dépend de l'intersection des deux droites (D1) et (D2) vérifiant chacune l'une des équations du système.

Trois cas peuvent alors se produire :

- Les droites (D1) et (D2) sont sécantes. Il existe alors une unique solution au système : les coordonnées du point d'intersection de (D1) et (D2)
- Les droites (D1) et (D2) sont strictement parallèles. Il n'existe aucune solution au système
- Les droites (D1) et (D2) sont confondues. Il existe alors une droite solution au système

2. Systèmes d'inéquations du 1^{er} degré à deux inconnues

a. **Définition** : un système (S) d'inéquations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :

$$(S) : \begin{cases} ax + by \leq c \\ a'x + b'y \geq c' \end{cases} \text{ ou } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des nombres réels.}$$

b. Résolution : Partage du plan par une droite

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts :
L'un est l'ensemble des points du plan dont le couple de coordonnées $(x; y)$ vérifie $ax + by + c \leq 0$

– L'un est l'ensemble des points du plan dont le couple de coordonnées $(x; y)$ vérifie $ax + by + c \geq 0$

3. Systèmes d'équations linéaires à trois inconnues

Définition

Un système (S) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y et z est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \text{ où } a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', d, d' \text{ et } d'' \text{ sont des nombres réels}$$

N.B : résoudre (S), c'est trouver tous les triplets (x, y, z) qui vérifient les trois équations du système (S) soit par la méthode de substitution ou par la méthode de pivot de Gauss.

Exercices

Exercice 1

- Résous les systèmes (S) $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases}$ et (S') $\begin{cases} (2 + \sqrt{3})x + 2y = 1 \\ x + (2 - \sqrt{3})y = 2 \end{cases}$
- Résous les systèmes (S) $\begin{cases} 3x + y - z = 6 \\ x + 2y + z = 4 \\ -2x + y + z = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - 2y - z = 11 \\ 2x - 5y - 2z = 3 \\ -5x - y + 2z = -33 \end{cases}$
- Résous graphiquement les systèmes : $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 4y - 6 \geq 0 \\ 2x - y + 3 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$
- Résous et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m les systèmes suivants :
 $\begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -2x + m^2y = m \\ x - my = 1 - m \end{cases}$

Exercice 2

Résous les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$

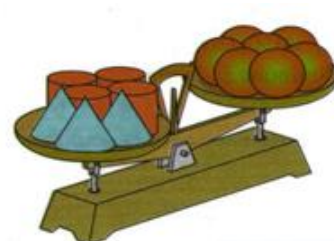
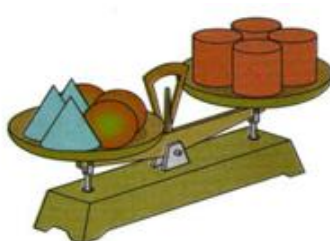
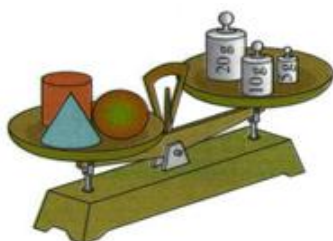
- $\begin{cases} 2x - \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 0,2x + 0,5y = 0 \\ x - y = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 2x + 5y = 14 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x + 5y - 5 = 0 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x + y - 5 = 5 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}y = 1 \\ \frac{x+2y}{7} = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$

Exercice 3

- Montre l'égalité $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$
- La différence de deux nombres a et b est 6 et leur produit est 216. Détermine ces deux nombres.
- Trouve les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre 44m et d'aire 120m².

Exercice 4

Trouve la masse de chaque objet (boule, cylindre et cône) sachant que dans chaque cas la balance est en équilibre.



Exercice 5

Une salle de cinéma contient 150 places. Une entrée à plein tarif coûte 45F, et une entrée à tarif réduit 30F. La salle est pleine, et la recette est de 6000F. Combien y a-t-il de spectateurs de chaque catégorie ?

Problèmes pratiques : au marché 3 clientes Fanta, Salimata et Mariam achètent les mêmes variétés de fruits.

Fanta achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes et paie 620 F CFA, Salimata achète 3 ananas, 5 mangues et une papaye et paie 530 F CFA et Mariam achète 1 ananas, 7 mangues et une papaye et paie 430 F CFA.

Quel est le prix d'un ananas, d'une mangue et d'une papaye ?

Corrections des exercices

Exercice 1

1. Résolvons le système (S) $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases}$

Méthode de déterminant : $\det(s) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$,

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 30 - 6 = 24,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 50 = -38$$

Le système admet une seule solution $x = \frac{D_x}{\det(s)} = \frac{24}{2} = 12$ et $y = \frac{D_y}{\det(s)} = \frac{-38}{2} = -19$.

$$S = \{12; -19\}$$

Méthode mixte : $\begin{cases} 4x + 2y = 10 & (1) \\ 5x + 3y = 3 & (2) \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -3 \\ 2 \end{array} \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x - 6y = -30 \\ 10x + 6y = 6 \end{cases}$$

$$-2x = -24 \Rightarrow x = 12$$

Remplaçons x dans l'équation (1) par sa valeur, on a : $4(12) + 2y = 10 \Leftrightarrow 2y = -38 \Rightarrow y = -19$ d'où $S = \{12; -19\}$.

Résolution graphique du système : $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Soit (D) la droite d'équation : $x + y = 3$

Si : $x = 0 \Rightarrow y = 3$;

Si $x = 1 \Rightarrow y = 2$

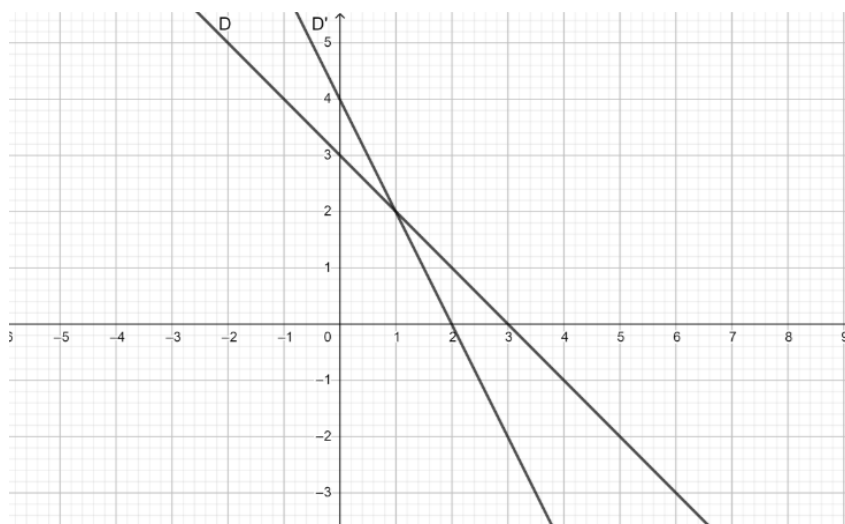
x	0	1
y	3	2

Soit (D') la droite d'équation : $2x + y = 4$

Si : $x = 0 \Rightarrow y = 4$

Si $x = 2 \Rightarrow y = 0$

x	0	1
y	4	2



Le point d'intersection de (D) et (D') est la solution du système : $S = \{1; 2\}$

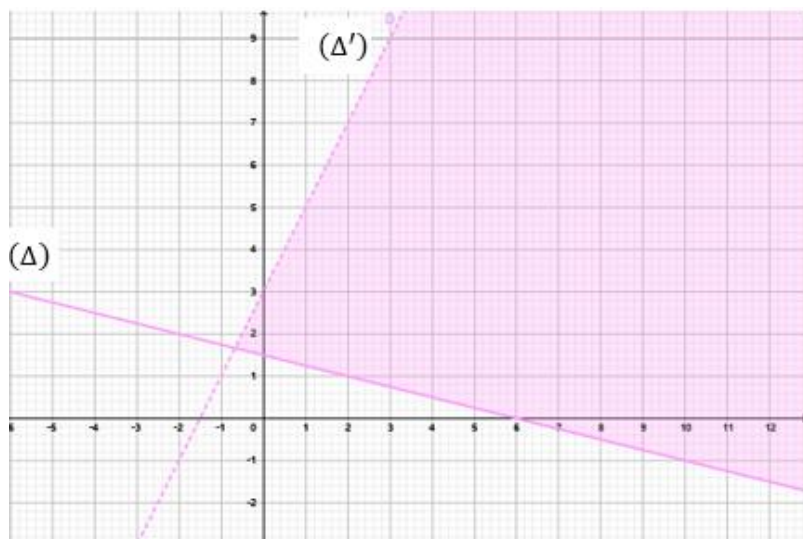
$$\begin{cases} x + 4y - 6 \geq 0 \\ 2x - y + 3 > 0 \end{cases}$$

Représentons graphiquement les droites d'équations :

$$(\Delta): x + 4y - 6 = 0 \quad \text{et} \quad (\Delta'): 2x - y + 3 = 0$$

Les solutions de la première inéquation correspondent au demi-plan fermé de frontière (Δ) ne contenant pas 0 ; les solutions de la deuxième inéquation correspondent au demi-plan ouvert de frontière (Δ') qui contient 0.

Les solutions du système correspondent aux points de la zone colorée sur la figure.



$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} 3x + y - z = 6 & (1) \\ x + 2y + z = 4 & (2) \\ -2x + y + z = -1 & (3) \end{cases}$$

A l'aide de l'équation (1), exprimons z en fonction de x et de y : $z = 3x + y - 6$, expression que l'on substitue (remplace) à z dans les équations (2) et (3) :

$$\begin{cases} x + 2y + (3x + y - 6) = 4 \\ -2x + y + (3x + y - 6) = -1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

On résout comme on veut ce dernier système : il admet une solution unique : $x = 1, y = 2$.

On en déduit : $z = -1$

Le système admet une seule solution : $x = 1, y = 2$ et $z = -1$

Exercice 5

Soient x les spectateurs qui entrent en plein tarif et y les spectateurs qui entrent en tarif réduit.

La salle est pleine et il y a 150 places nous pousse à écrire $x + y = 150$. La recette est 6000F, une entrée à plein tarif est 45F et à tarif réduit est 30F nous pousse à écrire $45x + 30y = 6000$.

On forme un système d'équation à l'aide des équations trouver. On a :

$$\begin{cases} x + y = 150 & (1) \\ 45x + 30y = 6000 & (2) \end{cases}$$

On peut résoudre cet système à l'aide de plusieurs méthode :

Méthode d'addition

$$\begin{array}{rcl} -45 & \begin{cases} x + y = 150 \\ 45x + 30y = 6000 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} -45x - 45y = -6750 \\ 45x + 30y = 6000 \end{cases} \\ 1 & & \\ \hline & & -15y = -750 \Rightarrow y = 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -30 & \begin{cases} x + y = 150 \\ 45x + 30y = 6000 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} -30x - 30y = -4500 \\ 45x + 30y = 6000 \end{cases} \\ 1 & & \\ \hline & & 15x = -1500 \Rightarrow x = 100 \end{array}$$

Méthode de substitution

$$\begin{cases} x + y = 150 & (1) \\ 45x + 30y = 6000 & (2) \end{cases}$$

Dans (1), on a : $x + y = 150 \Rightarrow x = 150 - y$

Remplaçons x par sa valeur dans (2) : $45x + 30y = 6000 \Rightarrow 45(150 - y) + 30y = 6000 \Rightarrow -15y = -750 \Rightarrow y = 50$.

On remplace y par sa valeur dans $x = 150 - y$. On a : $x = 150 - y \Rightarrow x = 150 - 50 \Rightarrow x = 100$.

Méthode mixte

$$\begin{array}{rcl} -45 & \left\{ \begin{array}{l} x + y = 150 \\ 45x + 30y = 6000 \end{array} \right. & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -45x - 45y = -6750 \\ 45x + 30y = 6000 \end{array} \right. \\ & & \hline & & -15y = -750 \Rightarrow y = 50 \end{array}$$

On remplace y par sa valeur dans (1) $x + y = 150$. On a : $x = 150 - y \Rightarrow x = 150 - 50 \Rightarrow x = 100$.

Méthode du déterminant

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 45x + 30y = 6000 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 45 & 30 \end{vmatrix} = 30 - 45 = -15$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 150 & 1 \\ 6000 & 30 \end{vmatrix} = 150 \times 30 - 6000 = 4500 - 6000 = -1500$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 150 \\ 45 & 6000 \end{vmatrix} = 6000 - 45 \times 150 = 6000 - 6750 = -750$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1500}{-15} = 100 \text{ et } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-750}{-15} = 50$$

Méthode de comparaison

$$\begin{cases} x + y = 150 & (1) \\ 45x + 30y = 6000 & (2) \end{cases}$$

Dans (1) on a : $x + y = 150 \Rightarrow x = 150 - y$

Dans (2) on a : $45x + 30y = 6000 \Rightarrow 45x = 6000 - 30y \Rightarrow x = \frac{6000 - 30y}{45}$

On a : $x = x \Rightarrow 150 - y = \frac{6000 - 30y}{45} \Rightarrow 6750 - 45y = 6000 - 30y \Rightarrow 15y = 750 \Rightarrow y = 50$

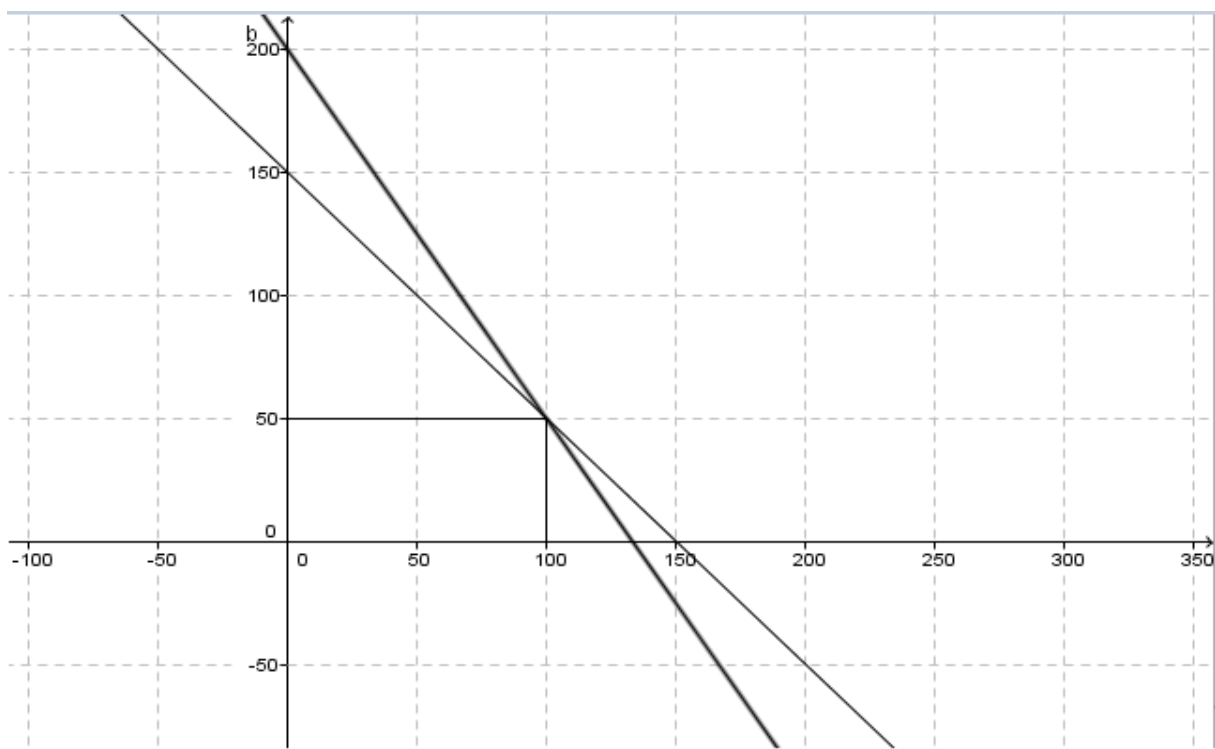
Dans (1), on a : $x + y = 150 \Rightarrow y = 150 - x$

Dans (2), on a : $45x + 30y = 6000 \Rightarrow 30y = 6000 - 45x \Rightarrow y = \frac{6000-45x}{30}$

On a : $y = y \Rightarrow 150 - x = \frac{6000-45x}{30} \Rightarrow 4500 - 30x = 6000 - 45x \Rightarrow 15x = 1500 \Rightarrow x = 100$

Méthode graphique

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 45x + 30y = 6000 \end{cases}$$



Résolution de problèmes pratiques

Au marché 3 clientes : Fanta, Salimata et Mariam achètent les mêmes variétés de fruits.

Fanta achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes et paie 620 F CFA, Salimata achète 3 ananas, 5 mangues et une papaye et paie 530 F CFA et Mariam achète 1 ananas, 7 mangues et une papaye et paie 430 F CFA.

Quel est le prix d'un ananas, d'une mangue et d'une papaye ?

Solution

Mise en équation

Soit x le prix d'un ananas, y celui d'une manque et z celui d'une papaye.

- La phrase Fanta achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes et paie 620 F CFA se traduit en équation par : $2x + 5y + 4z = 620$ (1)
- La phrase Salimata achète 3 ananas, 5 mangues et une papaye et paie 530 F CFA se traduit par : $3x + 5y + z = 530$ (2)
- La phrase Mariam achète 1 ananas, 7 mangues et une papaye et paie 430 F CFA par :

$$x + 7y + z = 430 \quad (3)$$

Ainsi de (1), (2) et (3) on a le système (S)
$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 620 & (1) \\ 3x + 5y + z = 530 & (2) \\ x + 7y + z = 430 & (3) \end{cases}$$

Résolution

A l'aide de l'équation (3), exprimons x en fonction de y et de z : $x = 430 - 7y - z$, expression que l'on substitue (remplace) à x dans les équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} 2(430 - 7y - z) + 5y + 4z = 620 \\ 3(430 - 7y - z) + 5y + z = 530 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -9y + 2z = -240 \\ -16y - 2z = -760 \end{cases}$$

On résout comme on veut ce dernier système : il admet une solution unique : $x = 90, y = 40$.

On en déduit : $z = 60$.

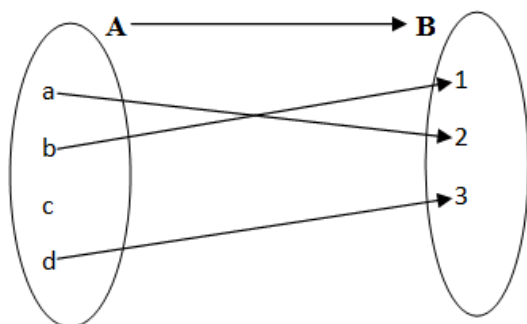
Conclusion : le prix d'un ananas est 90F, celui d'une mangue est 40F et celui d'une papaye est 60F.

Séquence 5 : fonction numérique d'une variable réelle

I) Généralité

1) Définition

Si A et B sont ensembles non vides. On appelle fonction de A vers B toute correspondance qui ; à chaque élément de A associe un ou zéro élément de B .



Vocabulaire et notation

On dit que f est une fonction de A vers B qui ; à x , associe $f(x)$. A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée de f .

On note $f : A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x)$$

$f(x)$ est l'image de x par f et x est appelé l'antécédent de $f(x)$

2) Graphe d'une fonction

a) Définition

Le plan est muni d'un repère.

On appelle graphe d'une fonction f définie de A vers B l'ensemble de couples

$(x ; y) \in A \times B$ tels que $x \in A$ et $y = f(x) \in B$.

L'ensemble des point $p(x ; y) \in Cf$ est appelé courbe représentative de f .

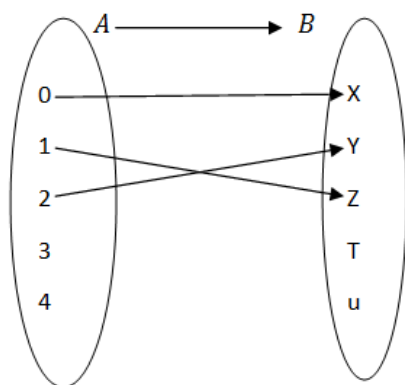
3) Ensemble de définition d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie de A vers B .

On appelle ensemble de définition de f l'ensemble des éléments qui ont une image par f .

L'ensemble de définition de f est noté Df .



$$Df = \{0; 1; 2\}$$

Remarque : toute fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction de la forme $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$; où A et B sont des fonctions polynômes ; est définie si $B(x) \neq 0$.

Toute fonction de la forme $f(x) = \sqrt{A(x)}$ avec A une fonction polynôme est x définie si $A(x) \geq 0$.

4) Détermination d'une fonction

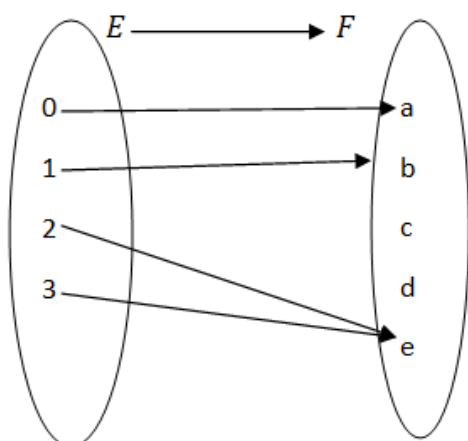
Il existe plusieurs façons de déterminer une fonction

a) Par table de valeur

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-5	-3	2	5	7	10	12	15

La première ligne est l'ensemble de départ et la deuxième ligne est l'ensemble d'arrivé. Ainsi : $f(1) = 2$; $f(3) = 7$ et l'antécédent de 7 est 3

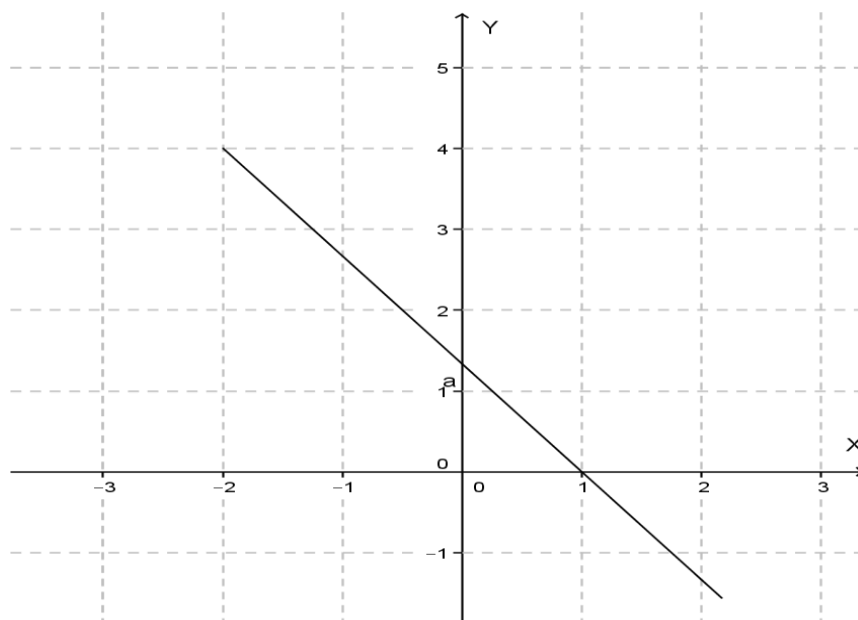
b) Par un diagramme



E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivée. Ainsi : l'image de 0, 1 et 2 sont respectivement a, b et c.

c) Par une représentation graphique

La figure ci-dessous représente une fonction. Les images de 1 et -2 sont respectivement 4.



d) Par formule explicite

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ est la forme explicite de la fonction f . On a $f(1) = 4$ et $f(0) = 5$.

5) Fonctions égales sur un ensemble

Définition

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble E . On dit que les fonctions f et g sont égales sur E ou qu'elles coïncident sur E lorsque pour tout $x \in E$; $f(x) = g(x)$

II) Composition de fonction

1) Schémas de calcul associé à une fonction

Un schéma de calcul ou un organigramme indique les différentes étapes d'exécutions d'un programme de calcul d'une fonction.

Exemple : dresse le schéma de calcul associé à chacune des fonctions f et g définie par :

$$f(x) = 2x + 3 ; g(x) = (x - 1)\sqrt{x + 2}.$$

2) Composition des fonctions

a) Définition

f étant une fonction de E vers F ; g une application de F vers G , la fonction notée $g \circ f$ de E vers G est définie par $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \rightarrow G$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

III) Etude graphique

1) Image et antécédents d'un nombre

Le plan est muni du repère $(O ; I ; J)$

Lecture d'image

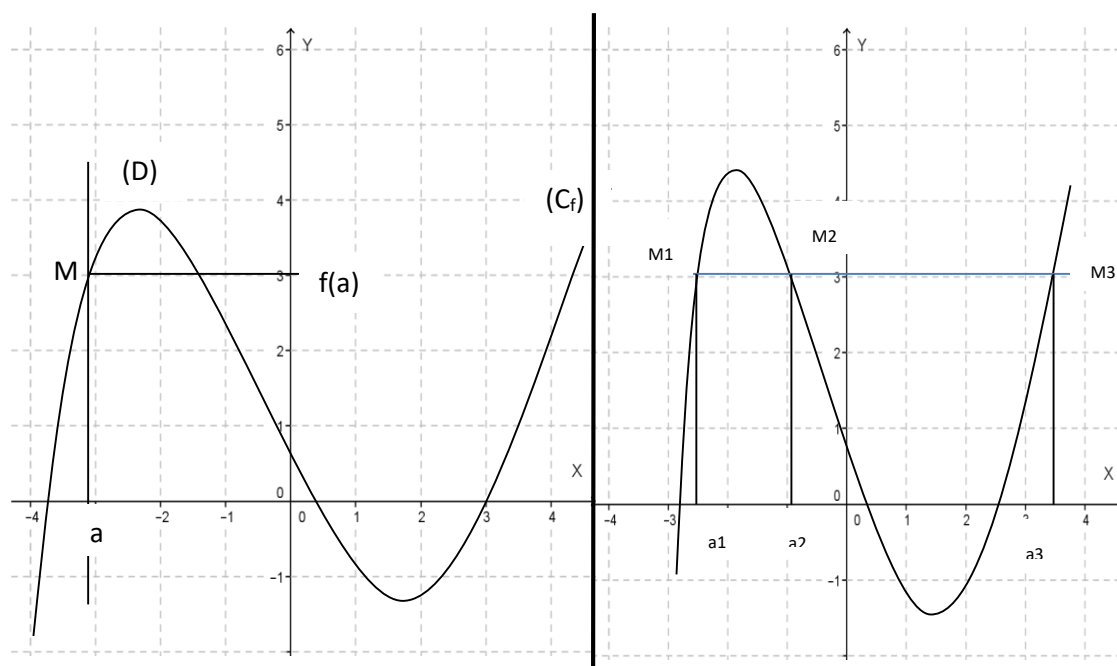


Fig1

Fig2

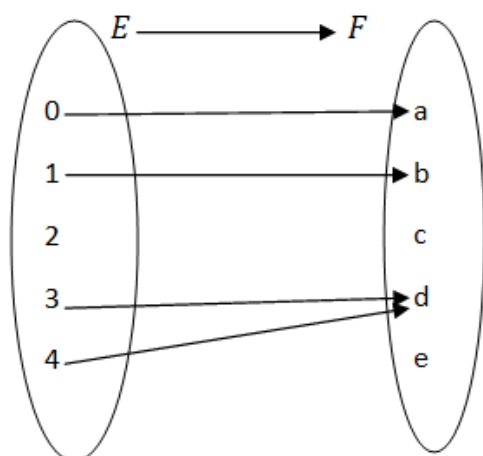
Dans la Fig1, l'image de a par f est $f(a)$ (ordonnée du point M). L'antécédent de $f(a)$ est a .

Dans la Fig2 les images de a_1 , a_2 , a_3 sont 3.

2) Image directe d'un ensemble

Définition : soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie de A vers B et E une partie de A .

On appelle image directe de E par f ; l'ensemble des images par f de tous les éléments de E . On la note $f(E)$.

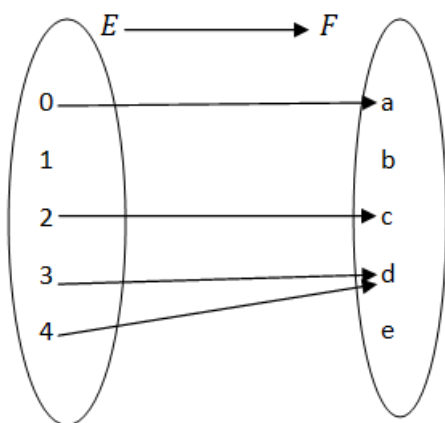


3) Image réciproque d'une fonction

Définition

f est une fonction de A vers B et F une partie de B .

On appelle image réciproque de F par f , l'ensemble F' des antécédents par f de tous éléments de F .



4) Variation d'une fonction

a) Minimum et maximum d'une fonction

Définition

f est une fonction numérique d'une variable réelle définies sur un ensemble E et a est un élément de E . Si pour tout $x \in E$; $f(a) \leq f(x)$, on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur E .

Si pour tout $x \in E$, $f(a) \geq f(x)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur E .

b) Sens de variation d'une fonction

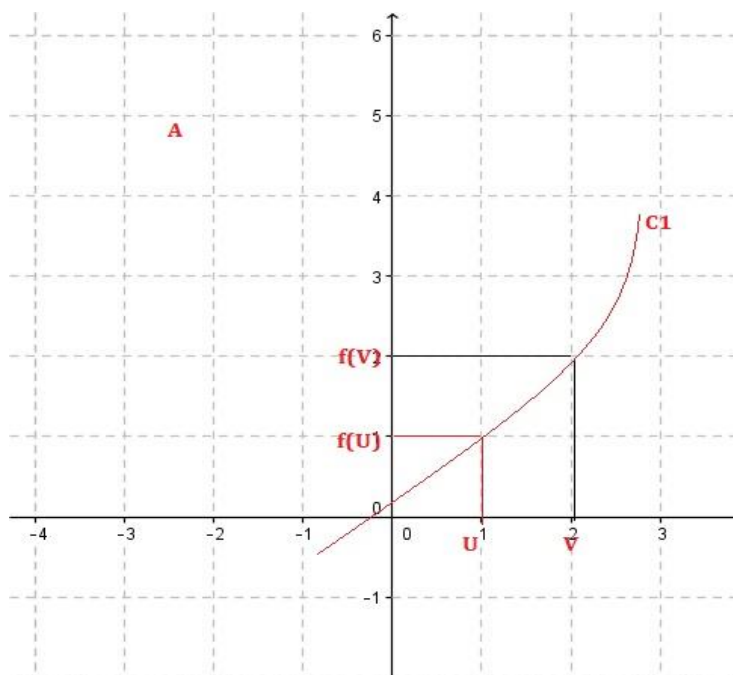
Il s'agit de la croissance, de la décroissance ou de la constance d'une fonction sur un intervalle.

Définition

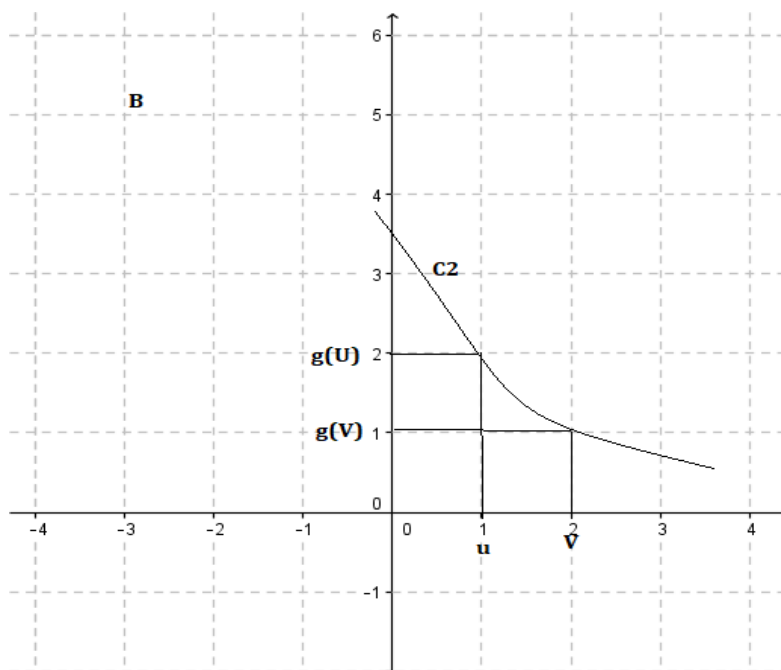
Soit f une fonction numérique définie sur intervalle K .

On dit que f est croissante sur K (respectivement strictement croissante sur K) lorsque quel que soit U et $V \in K$

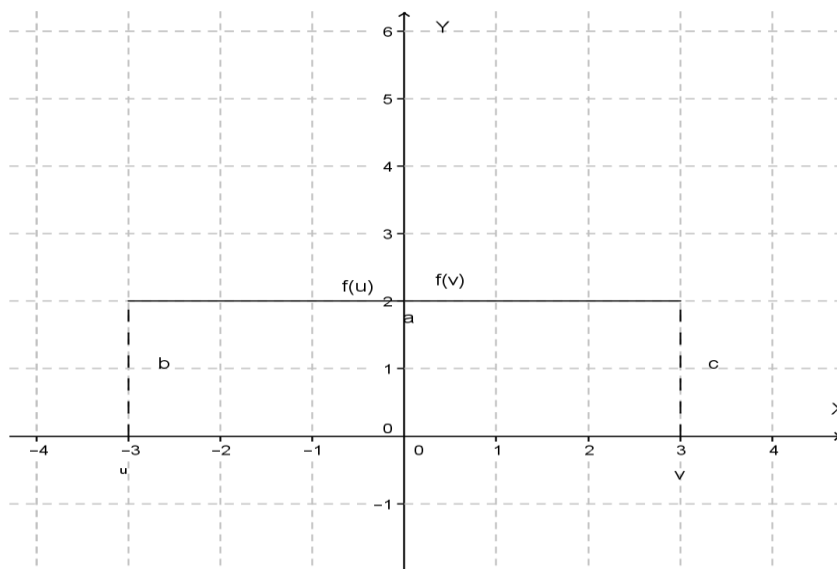
$U \leq V \Rightarrow f(u) \leq f(v)$ (Respectivement $U < V \Rightarrow f(u) < f(V)$)



On dit que g est décroissante sur K (respectivement strictement décroissante sur K) lorsque pour tout u et $v \in K$; $U \leq V \Rightarrow g(u) \geq g(v)$ (Respectivement $u < v \Rightarrow g(u) > g(v)$).



On dit que f est une fonction constante sur K lorsque ; pour tous éléments u et v de K , si $f(u) = f(v)$.



On dit que f est une fonction monotone sur K lorsqu'elle est :

- Soit croissante sur K
- Soit décroissante sur K

On dit que f est une fonction strictement monotone sur K lorsqu'elle est :

- Soit strictement croissante sur K
- Soit strictement décroissante sur K

Exercices

Exercice 1

S₁ : f est une fonction définie sur D et x un réel de D.

Complète : $f(x)$ est de x .

S₂ : $\mathcal{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère $(O ; \vec{i}; \vec{j})$. M est un point de $(\mathcal{C})$.

Complète : si x est l'abscisse de M alors l'ordonnée de M est

S₃ : - Dans quel cas une fonction affine $f: x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Dans quel cas une fonction affine $f: x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

S₄ : f est une fonction définie sur I ; U et V deux réels de I tel que $U < V$.

Complète avec l'un des signes suivants $<$; $\geq$; $>$ ou $\leq$

- Si f est strictement croissante sur I alors $f(U) \dots \dots f(V)$.
- Si f est strictement décroissante sur I alors $f(U) \dots \dots f(V)$.

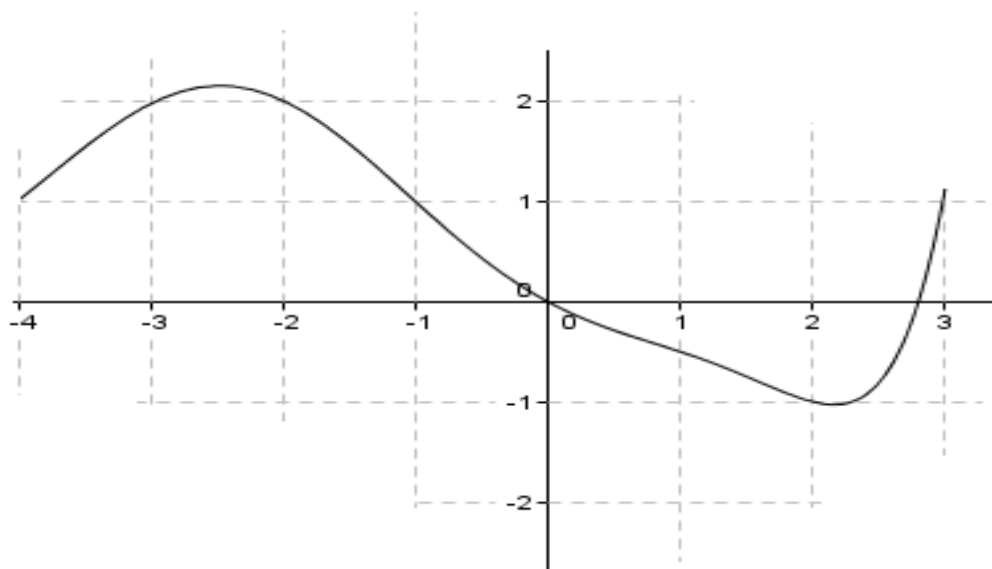
Exercice 2

Précise dans chaque cas l'ensemble E des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. Cet ensemble est appelé réellement ensemble de définition de f .

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{x-3}{2} + \frac{3}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ d) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
e) $f(x) = \sqrt{-2x+3}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ g) $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$

Exercice 3

Détermine l'ensemble de définition de cette fonction dont voici sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O , \vec{i}, \vec{j})$.

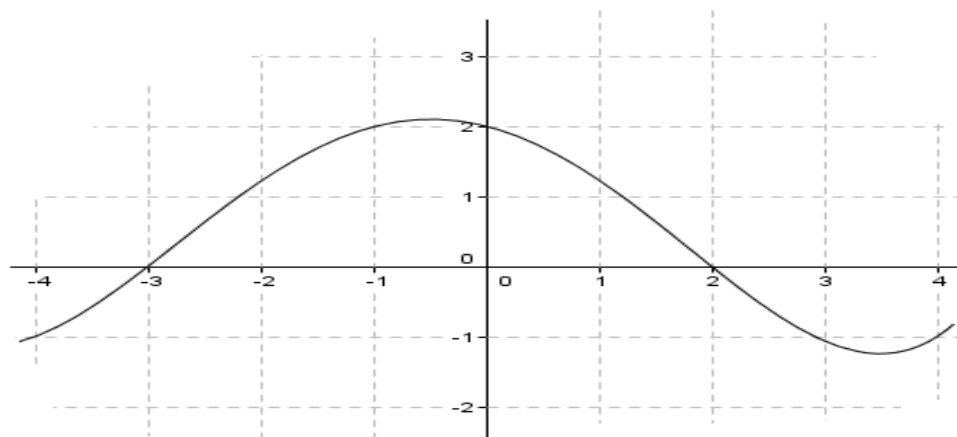


Exercice 4

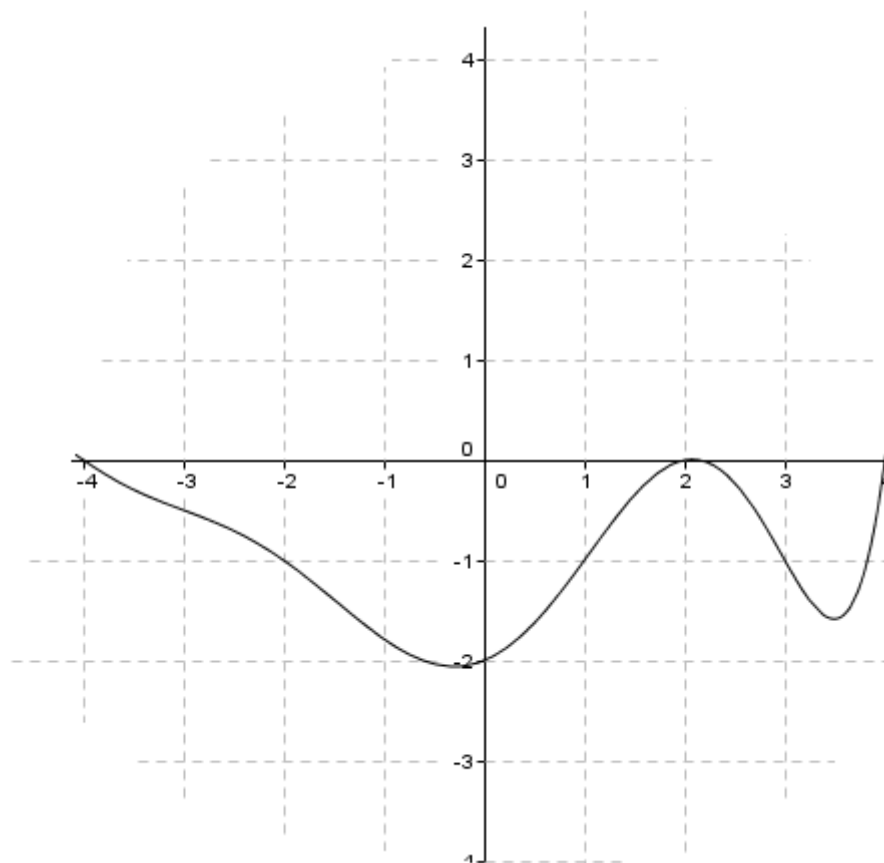
Pour chaque cas suivants, la courbe (C) est la représentation graphique d'une fonction f sur $[-4; 4]$.

Résous alors graphiquement les équations ou inéquations proposées.

a) $f(x) = 0$, b) $f(x) > 0$, c) $f(x) \leq 0$

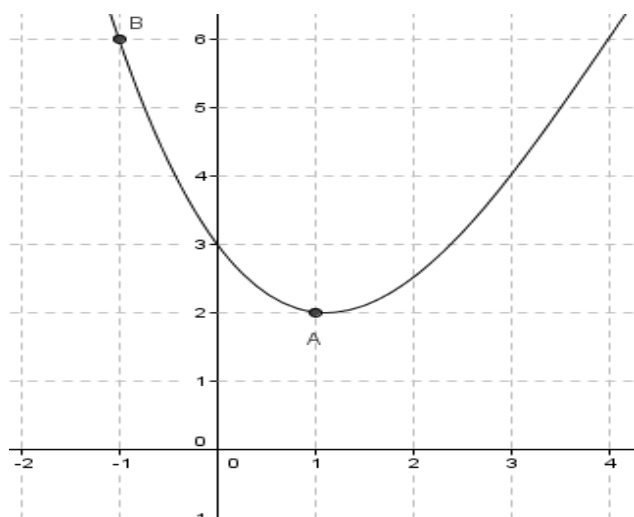


b) $f(x) = -1$, b) $f(x) > -1$, c) $f(x) \leq -1$



Exercice 5

On sait que la courbe ci-dessous représente une fonction $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$. On se propose de calculer les réels a , b et c en utilisant les informations fournies par le graphe.



- 1) a- Détermine l'expression de $f(x)$?
 b- Déduise-en la valeur de C ?
- 2) a- Complète :
 - Le point B est sur la courbe donc $f(\dots) = \dots$

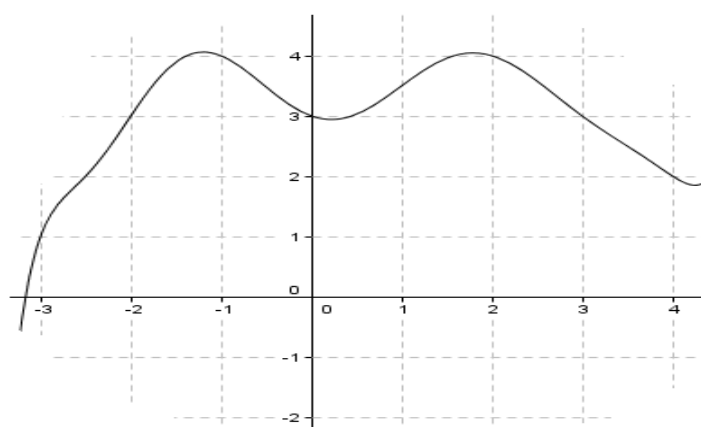
- Le point A est sur la courbe donc $f(\dots) = \dots$

b- Déduisez-en que a et b sont solutions d'un système de deux équations à deux inconnues.

c- Trouvez a et b.

Exercice 6

Dresse le tableau de variation de la fonction f dont la représentation graphique est la suivante.



Exercice 7

Une fonction f a pour tableau de variation :

x	-1	0	3	4
f	-1	4	-3	2

- 1) Trace une courbe $\mathcal{C}$ pouvant correspondre à ce tableau.
- 2) Quel est le maximum de f sur $[-1, 4]$?
- 3) Quel est le minimum de f sur $[-1, 4]$?

Exercice 8

- a) Démontre que la fonction $f : x \mapsto x^2 - 6x$ est strictement croissante sur $[3, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 3]$.
- b) Démontre que la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x$ est strictement décroissante sur $[-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.
- c) Démontre que la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 8x - 1$ est strictement croissante sur $] -\infty, 4]$ et strictement décroissante sur $[4, +\infty[$.
- d) Démontre que la fonction $f : x \mapsto -x^2 + x + 3$ est strictement croissante sur $] -\infty, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{4x^2-1}{2x-1}$ et $g : x \mapsto 2x - 1$.

- 1) Détermine les ensembles de définition respectifs de f et g .
- 2) Les fonctions f et g sont-elles égales ?
- 3) La fonction g est-elle un prolongement de la fonction f ?

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |2x + 1| + |1 - x|$.

- a) Ecris f sans le symbole de la valeur absolue.
- b) Etudie le sens de variations de f puis construis sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- c) Trouve graphiquement l'image directe par f de $[2 ; 5[$.
- d) Trouve graphiquement l'image réciproque par f de $[2 ; 5[$.

Corrections des exercices

Exercice 1

S_1 : $f(x)$ est appelé image par f de x .

S_2 : Si x est l'abscisse de M alors l'ordonnée de M est $f(x)$.

S_3 : la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est :

- ✓ Strictement croissante si $a > 0$.
- ✓ Strictement décroissante si $a < 0$.

S_4 : - Si $U < V$ et f est strictement croissante sur I alors $f(U) \leq f(V)$

- Si $U < V$ et f est strictement décroissante sur I alors $f(U) \geq f(V)$.

Exercice 2

Précisons l'ensemble de définition des fonctions suivantes

a) $f(x) = x^2 - 1$; b) $f(x) = \frac{x-3}{2} + \frac{3}{x-2}$; c) $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$; d) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ c) $D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ d) $D_f = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \sqrt{-2x+3}$; f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; g) $f(x) = \sqrt{x^2-x}$; h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$

e) $D_f = \left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$ f) $D_f =]-1; +\infty[$ g) $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

h) $D_f =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

Exercice 3

L'ensemble de définition de cette fonction est : $D_f = [-4; 3]$

Séquence 6 : géométrie plane

I. Caractérisation des vecteurs du plan

1. Définition

Un vecteur est un segment de droite orienté qui a pour caractéristique une direction, un sens et une longueur.

2. Représentant d'un vecteur, plan vectoriel

$\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$ si et seulement si :

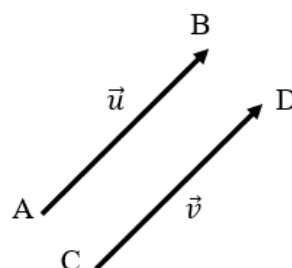
- La direction de $\vec{u}$ est celle de la droite (AB) ;
- Le sens du vecteur $\vec{u}$ va de A vers B ;
- La longueur du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB du segment $[AB]$.

On appelle plan vectoriel, l'ensemble des vecteurs du plan. On le note V .

3. Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs, $\vec{u}$ de représentant le bipoint (A, B) et $\vec{v}$ de représentant (C, D) , sont égaux si et seulement si :

- ◇ les droites (AB) et (CD) sont parallèles,
- ◇ $AB = CD$,
- ◇ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens.

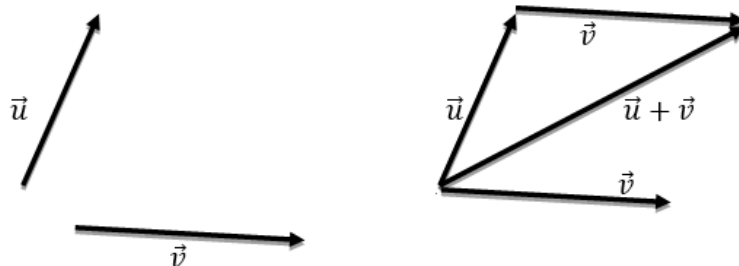


4. Opération sur les vecteurs

a. Addition de vecteurs

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de l'addition vectorielle)



- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité de l'addition vectorielle)

- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est le vecteur nul, soit A est un point du plan on a : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$)
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$ ($-\vec{u}$ est l'opposé du vecteur $\vec{u}$, ces deux vecteurs ont la même direction, la même longueur, mais sont de sens opposé).

b. Multiplication par un scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et a et b deux nombres réels non nuls, on a :

- ❖ $a\vec{u} = b\vec{u} \Leftrightarrow a = b \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$
- ❖ $a\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$
- ❖ $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- ❖ $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
- ❖ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- ❖ $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

c. Combinaison linéaire

Soient $\vec{u}(x; y)$, $\vec{v}(x'; y')$ et $\vec{w}(a; b)$ trois vecteurs du plan, α et β deux nombres réels. Si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w}$, on dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Dans ce cas les coordonnées $(a; b)$ de $\vec{w}$ sont telles que $a = \alpha x + \beta x'$ et $b = \alpha y + \beta y'$.

5. Déterminant de deux vecteurs

Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\det(\vec{u}; \vec{v})$ tel que $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

6. Colinéarité de deux vecteur

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Autrement dit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

II. Barycentre de deux à quatre points du plan

1. Point pondéré

Soit A un point et α un nombre réel. Le couple $(A; \alpha)$ est appelé point pondéré. α est appelé coefficient de pondération ou le poids du point A .

2. Barycentre de deux points pondérés

Définition : soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan ; α et β deux nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

On appelle barycentre de $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ le point unique $G(x_G; y_G)$ tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Autrement dit pour tout point M du plan $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$.

On note $G = \text{bar} \{(A; \alpha), (B; \beta)\}$.

Remarque : dans ce cas $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ et Le point G est sur la droite (AB) . Si α et β sont de même signe alors $G \in [AB]$; si α et β sont de signes contraires alors $G \notin [AB]$.

Les coordonnées de G sont données par
$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}.$$

Isobarycentre : on appelle isobarycentre des points A, B , le barycentre de A, B affecté du même coefficient non nul. Si $I = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \alpha)\}$ alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, dans ce cas I est le milieu du segment $[AB]$.

3. Barycentre de trois points pondérés

Définition : on appelle barycentre de trois points pondérés $(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)$, l'unique point G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

On note $G = \text{bar} \{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$.

Remarque : on a $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$.

Si $G(x_G; y_G)$ est le barycentre du système $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$ avec $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ et

$C(x_C; y_C)$ alors on a :
$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

Propriété : si G est barycentre de $(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)$, et si $\alpha + \beta \neq 0$ si on désigne par H le barycentre de $(A; \alpha), (B; \beta)$ alors G est le barycentre de $(H; \alpha + \beta)$ et $(C; \gamma)$.

Isobarycentre : si $I = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \alpha), (C; \alpha)\}$ alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; I est l'isobarycentre de A, B, C et c'est le centre de gravité du triangle ABC .

4. Barycentre de quatre points pondérés

Définition : soient $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$ des points et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels. On appelle barycentre des points pondérés $(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma), (D; \delta)$, l'unique point $G(x_G; y_G)$ tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0}$; avec $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$.

Remarque : on a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AD} \text{ et } \begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \end{cases}$$

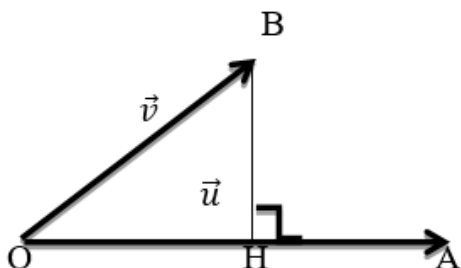
Propriété : le barycentre reste inchangé lorsque l'on multiplie les coefficients par un même nombre réel non nul. C'est-à-dire si G est barycentre de $(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)$... alors pour tout nombre réel $k \neq 0$ G est barycentre de $(A; k\alpha), (B; k\beta), (C; k\gamma)$...

Isobarycentre : si $I = \text{bar} \{(A; \alpha), (B; \alpha), (C; \alpha), (D; \alpha)\}$ alors I est l'isobarycentre des points A, B, C, D et $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

III. Caractérisation du produit scalaire de deux vecteurs du plan

1. Expression algébrique

Définition : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de représentants respectifs (O, A) et (O, B) . H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) .



On appelle produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OA}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OA}$ est l'expression algébrique du produit scalaire.

Remarque

- Si $H \in [OA]$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est positif ($\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$), on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = OH \times OA$
- Si $H \notin [OA]$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est négatif ($\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$), on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OH \times OA$
- Si $H \in [OA]$ et H coïncide avec O alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = OH \times OA = 0$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. Expression trigonométrique

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de représentant (O, A) et (O, B). Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$.

En effet dans la figure précédente $OH = OB \times \cos(\widehat{AOB})$; or $\vec{u} \cdot \vec{v} = OH \times OA$.

3. Expression analytique

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée (O, I, J). On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

4. Norme d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A,B). On appelle norme de $\vec{u}$, la distance $d(A, B) = \sqrt{\vec{u}^2}$. On la note $\|\vec{u}\|$.

Remarque : $\sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$; $\vec{u}^2$ est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ et $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

a. Expression analytique de la norme dans une base orthonormée

Dans V muni d'une base orthonormée, soit le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (à vérifier après avoir calculé $\vec{u} \cdot \vec{u}$)

b. Vecteurs unitaires colinéaires à un vecteur non nul

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{u}$.

Puisque $\vec{v} = k\vec{u}$

On a $\|k\vec{u}\| = 1 \Rightarrow |k| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}$

D'où $k = \frac{1}{\|\vec{u}\|}$ ou $k = -\frac{1}{\|\vec{u}\|}$

Enfin $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\vec{v}_2 = -\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ Sont les deux vecteurs normés colinéaires à $\vec{u}$.

5. Propriétés du produit scalaire et de la norme

Pour tout vecteur u, v et w pour tout réel k :

$$P_1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$P_2) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$$

$$P_3) (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$P_4) (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$P_5) \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$$

$$P_6) (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$P_7) (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de V et pour tout nombre réel k :

$$\|\vec{u}\| \geq 0 ; \quad \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

$$\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\| ; \quad \|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$$

On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ est normé, si $\|\vec{u}\| = 1$.

Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

La base $(\vec{u}, \vec{v})$ est dite orthonormée si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

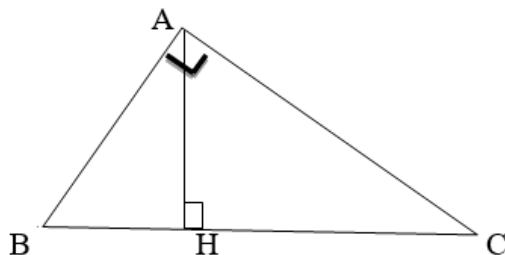
IV. Résolution des problèmes de calcul de distance

1) Relation métrique dans un triangle rectangle

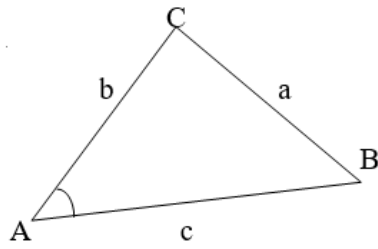
Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC). On a les relations suivantes :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 ; \quad AB^2 = BC \times AH ; \quad AC^2 = BC \times AH ; \quad \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} ; \quad AH^2 = BH \times HC ;$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} ;$$



2) Produit scalaire dans un triangle quelconque



Dans le triangle ABC ci – dessus désignons par $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $mes(\widehat{BAC}) = \hat{A}$; $mes(\widehat{ACB}) = \hat{C}$ et $mes(\widehat{CBA}) = \hat{B}$, alors on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times c \times \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times b \times \cos \hat{C}$$

Cette relation s'appelle **Relation d'AL KASHI**.

V. Droite dans le plan

1. Equation d'une droite

a. Alignement de points

Trois points A,B,C du plan sont alignés s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

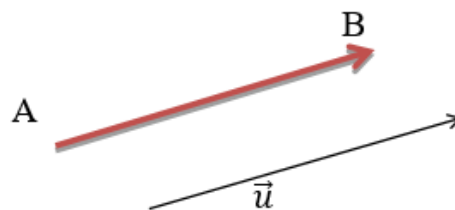
Remarque : si A, B, C sont alignés alors :

- Les points A, B et C appartiennent à une même droite.
- Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est égal à zéro ($\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=0$).

b. Vecteur directeur d'une droite

Définition : un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur non nul dont la direction est celle de la droite (D).

Sur la figure ci – dessous $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D



Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite D, et $\vec{v}$ un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ alors $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de D.

c. Equation cartésienne d'une droite

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et (D) une droite, soit a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. L'égalité $ax + by + c = 0$ est appelée une équation cartésienne de la droite (D). Les coordonnées (x, y) de tout point M appartenant à (D) vérifie l'équation $ax + by + c = 0$.

$\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D) ; $m = \frac{a}{b}$ est appelé coefficient directeur de (D).

L'équation réduite d'une droite (D) s'écrit sous la forme $y = ax + \beta$. Dans ce cas a est appelé coefficient directeur de (D) et β l'ordonnée à l'origine.

N. B : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de (D).

❖ Détermination d'une équation d'une droite passant par deux points distincts

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts de la droite (D)

- Si $x_A = x_B$, alors une équation de la droite est $x = x_A$
- Si $x_A \neq x_B$, alors on calcule le coefficient directeur a tel que : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
puis la valeur de b telle que : $y_A = ax_A + b$ ou $y_B = ax_B + b$.

$y = ax + b$ est une équation de (D).

❖ Détermination d'une équation d'une droite parallèle à une autre droite

Soit la droite (D) d'équation : $y = ax + b$. Pour déterminer l'équation de la droite (D') passant par $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et parallèle à (D) on cherche uniquement la valeur de b' telle que : $y_A = ax_A + b'$. Dans ce cas $y' = ax + b'$ est une équation de (D').

2. Droites parallèles – Droites perpendiculaires

a. Droites parallèles

Pour deux droites D et D' d'équations données de vecteurs directeurs respectives $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de coefficients directeurs respectifs m et m' alors on a :

- ✓ Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors on dit que D et D' sont parallèles.

- ✓ Si $m = m'$ alors on dit que D et D' sont parallèles.

b. Droites perpendiculaires

Pour deux droites (d) et (d') d'équations données de vecteurs directeurs respectives $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de coefficients directeurs respectifs m et m' alors on a :

- ✓ Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors on dit que les droites sont perpendiculaires.
- ✓ Si $m \times m' = -1$ alors on dit que les droites sont perpendiculaires.

3. Représentation paramétrique analytique d'une droite

Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit (Δ) la droite passant par le point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et dirigé par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et k un réel. On dit que le système $\begin{cases} x = ka + x_0 \\ y = kb + y_0 \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4. Intersection de deux droites

Soient (D) et (D') deux droites du plan.

- Si (D) et (D') sont parallèles et non confondues alors leur intersection est vide $((D) \cap (D') = \emptyset)$.
 - Si (D) et (D') sont parallèles et confondues alors leur intersection est (D) .
 - Si (D) et (D') ne sont pas parallèles, elles sont dites sécantes et leur intersection est un unique point.
- ❖ Détermination des coordonnées du point d'intersection de deux droites :

Soient (D) et (D') deux droites sécantes et d'équations respectives : $y = ax + b$ et $y' = a'x + b'$. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (D) et (D') , on résout le système formé par les deux équations : $\begin{cases} y = ax + b \\ y' = a'x + b' \end{cases}$. Le couple solution de ce système constitue les coordonnées du point d'intersection.

VI. Cercle dans le plan

1. Définition

Le plan P étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit $\Omega(a, b)$ un point du plan et r un réel strictement positif.

On appelle cercle (C) de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r , l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tel que $d(\Omega, M) = r$.

2. Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan, (C) le cercle de diamètre $[AB]$. Pour tout point $M \in (C)$ on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

3. Equation du cercle (C) de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}M \in (C) &\Leftrightarrow d(\Omega, M) = r \\&\Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \\&\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\&\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \\&\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0\end{aligned}$$

Posons : $A = -2a ; B = -2b ; c = a^2 + b^2 - r^2$.

Alors l'équation devient :

$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0$ qui est l'équation cartésienne du cercle
--

Exercices

Exercice 1

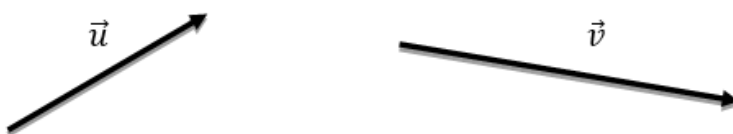
On donne les points $A\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Détermine le point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 2

1) Dans chacun des cas suivants, construis $\vec{u} + \vec{v}$:

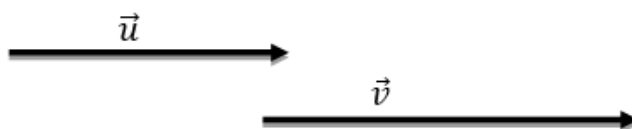
a)



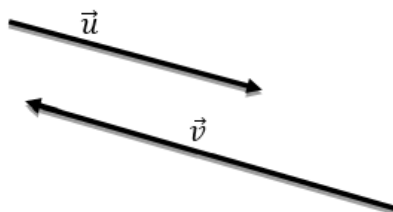
b)



c) Les deux vecteurs sont parallèles :



d) Les deux vecteurs sont parallèles et de sens contraires :



2) soit les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs du plans :



- Construis l'opposé $-\vec{v}$ du vecteur $\vec{v}$.
- Construis le représentant du vecteur $\vec{w}$ qui a pour origine l'extrémité du vecteur $\vec{v}$.
- Construis les vecteurs $3\vec{v}$ et $-2\vec{w}$.

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A. Placer les points M, N, P, Q tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Exercice 4

- Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 - Calculer les déterminants suivants : $\det(\vec{u}, \vec{v})$; $\det(\vec{u}, \vec{w})$; $\det(\vec{v}, \vec{w})$.
 - Calculer : $\det(\vec{u}, -\vec{v})$; $\det(\vec{v}, \vec{u})$; $\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w})$.
 - Soit $\vec{t}\begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$. Trouver x pour que $\vec{u}$ et $\vec{t}$ soit colinéaires.
- Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
 - Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?
 - Soit $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
- On donne les points suivants : $A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $C(2; -5)$ et $D(-6; 1)$
 - Placer chacun de ces points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$.
 - Calculer le déterminant des vecteurs $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB})$; $\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA})$; $\det((\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}), \overrightarrow{BC})$ et $\det(\overrightarrow{DB}, (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}))$.
 - Les points A, B et C sont – ils alignés ? D, A et C sont – ils alignés ?

Exercice 5

Soit $A(1; 5)$ et $B(-2; 1)$ deux points du plan muni d'un repère orthonormé.

- Construis le point G tel que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
- Soit M un point du plan. Exprime en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$ le vecteur $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.
- Simplifier les écritures suivantes :

Exercice 6

1) Simplifie les écritures suivantes :

a) $\vec{U} - 5\vec{V} + 2(2\vec{U} + 3\vec{W}) - 5(\vec{W} - \vec{V})$.

b) $4(\frac{3}{2}\vec{U} - \vec{V}) - 4(3\vec{U} - 2\vec{V}) + \frac{3}{4}\vec{U}$.

c) $\vec{U} + 2(\vec{V} + 3\vec{W}) - \sqrt{2}(2\vec{U} + 3\vec{V})$.

2) Soient $\vec{U} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{V} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{W} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathcal{V}$.

a- Déterminer les coordonnées de :

$$\vec{U} + \vec{V} \quad ; \quad \vec{U} - \vec{V} \quad ; \quad \vec{U} + \vec{V} + \vec{W} \quad ; \quad \frac{5}{3}\vec{U} + \vec{W} \quad ; \quad 3\vec{U} - 2\vec{V}$$

b- Construire un représentant des vecteurs dans un repère :

$$\vec{U} \quad ; \quad \vec{V} \quad ; \quad \vec{W} \quad ; \quad \vec{U} + \vec{V} \quad ; \quad \vec{U} - \vec{V} \quad ; \quad \vec{U} + \vec{V} + \vec{W} \quad ; \quad -\vec{U} - \vec{V} - \vec{W}$$

Exercice 7

Parmi les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ indiqués ci-dessous, dis ceux qui sont colinéaires puis précise s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

a) $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{V} = -\vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{U} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{V} = -\vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{V} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$

d) $\vec{U} = \frac{-1}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{V} = \frac{-2}{3}\vec{i} + 4\vec{j}$

e) $\vec{U} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{V} = 3\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$

f) $\vec{U} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\vec{U} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\vec{U} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux de $\mathcal{V}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ tel que :

$$\vec{U} = (2m + 1)\vec{i} + (m - 1)\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

1) a) trouver les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

c) Trouver le réel m pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires. Préciser leur sens.

2) On suppose que $m = 2$. Trouver les coordonnées de $\vec{U}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Montrer que $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de $\mathcal{V}$ quel'on notera $B' = (\vec{U}; \vec{V})$.

3) a) on donne $\vec{W} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, trouver les coordonnées de W dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$

Puis dans la base $B' = (\vec{U}; \vec{V})$.

b) on donne $\vec{W'} = 5\vec{U} + \vec{V}$, trouver les coordonnées de W' dans la base $B' = (\vec{U}; \vec{V})$ Puis dans la base $B = (\vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 9

On donne les normes suivantes $\|\vec{U}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{V}\| = 2$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$

1) calculer : $\vec{U} \cdot \vec{V}$

2) En déduire les valeurs de :

$$(\vec{U} + \vec{V})^2; (\vec{U} - \vec{V})^2; (2\vec{U} - 3\vec{V}); (\vec{U} + 2\vec{V}) \cdot (2\vec{U} - \vec{V}); \|2\vec{U} - 3\vec{V}\|;$$

$$\|\vec{U} - \vec{V}\|$$

Exercice 10

On donne les normes suivantes $\|\vec{U}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{V}\| = 5$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} = 7$.

On pose : $\vec{i} = 4\vec{U} - \vec{V}$ et $\vec{j} = -3\vec{U} + \vec{V}$.

Montrer que $(\vec{i}; \vec{j})$ est une base orthonormé du plan .

Exercice 11

1) Déterminer puis construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

1- $G_1 = \text{Bar} \{(A; -3); (B; -2); (C; 3)\}$

2- $G_2 = \text{Bar} \{(A; 2); (B; -3); (C; 4)\}$

3- $G_3 = \text{Bar} \{(A; -3); (B; -2); (C; 5)\}$

2) Déterminer si possible les coordonnées du barycentre G dans chacun des cas suivants :

1- $G_1 = \text{Bar} \{(A; 5); (B; 2)\}$ avec : A(1 ; 1) et B(-1 ; 2)

2- $G_2 = \text{Bar} \{(A; 3); (B; -8)\}$ avec : A(0 ; 3) et B(4 ; 5)

3- $G_3 = \text{Bar} \{(A; 1); (B; 5)\}$ avec : A($\frac{2}{3}$; 1) et B($-\frac{1}{3}$; 2)

4- $G_4 = \text{Bar} \{(A; -3); (B; -2); (C; 3)\}$ avec : A(-1 ; 0); B(1 ; 2) et C(2 ; 3)

5- $G_5 = \text{Bar} \{(A; 2); (B; -3); (C; 4)\}$ avec : A(-5 ; 3); B(-2 ; 2) et C(2 ; 6)

6- $G_6 = \text{Bar} \{(A; -3); (B; -2); (C; 5)\}$ avec : A(0 ; 0); B(1 ; 7) et C(-2 ; 3)

Exercices 12

Soit ABC un triangle de dimensions : $AB = 9 \text{ cm}$; $AC = 6 \text{ cm}$ et $BC = 12 \text{ cm}$.

Soit I le milieu du segment $[BC]$ et G le point défini par $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

(On ne demande pas de faire la figure pour le moment).

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GI}$.
- 2) En déduire que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Faire la figure en plaçant le point G.
- 3) Placer le point D défini par $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.
- 4) Justifier que (DG) est parallèle à (BI) et que $DG = 4 \text{ cm}$.

Exercices 13

Le plan P est muni d'un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$. On donne les points $A\left(-\frac{2}{1}\right)$; $B\left(\frac{5}{1}\right)$; $C\left(\frac{4}{3}\right)$.

- 1) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés.
- 2) G est le point du plan tel que $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
Montrer que G est le barycentre des points pondérés : (A, a) ; (B, b) ; (C, c) où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
- 3) On donne $a = 2$; $b = -1$ et $c = 2$.
 - a- Construire G ' barycentre des points pondérés : (A, 2) ; (B, -1) ; (C, 2).
 - b- Vérifier cette construction par le calcul des coordonnées de G' dans le repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.
- 4) Déterminer le centre de gravité du triangle ABC.
- 5) Que signifie I (isobarycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, 1)).
On fera une démonstration.

Exercice 14

Détermine une équation réduite de chacune des droites suivantes :

- 1) $(D_1) : 2x + y = 3$; 2) $(D_2) : 2y = -x + 3$; 3) $(D_3) : -y = -2x - 4$
- 4) $(D_4) : 2x + y - 5 = 0$; 5) (D_5) passe par $A\left(\frac{2}{3}\right)$ et de pente -2
- 6) (D_6) passe par $B\left(\frac{1}{0}\right)$ et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

Exercice 15

1) Détermine une équation de la droite (D) passant par les points A et B dans chacun des cas suivants :

a- $A\left(\begin{smallmatrix}-2\\3\end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\6\end{smallmatrix}\right)$; **b-** $A\left(\begin{smallmatrix}0\\-4\end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$; **c-** $A\left(\begin{smallmatrix}-2\\-2\end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$

c- $A\left(\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix}\frac{3}{2}\\-1\end{smallmatrix}\right)$; **e-** $A\left(\begin{smallmatrix}\frac{2}{3}\\-2\end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix}\frac{4}{3}\\1\end{smallmatrix}\right)$; **f-** $A\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix}5\\5\end{smallmatrix}\right)$.

2) Déterminer une équation de la droite (D') parallèle à la droite (D) et passant par le point A dans chacun des cas suivants :

a- (D) : $y = -x + 1$ et $A\left(\begin{smallmatrix}-2\\3\end{smallmatrix}\right)$; **b-** (D) : $y = 2x + \frac{1}{2}$ et $A\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

b- (D) : $y = -\frac{3}{2}x - 1$ et $A\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$; **d-** (D) : $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ et $A\left(\begin{smallmatrix}-2\\4\end{smallmatrix}\right)$.

d- (D) : $y = x$ et $A\left(\begin{smallmatrix}-\sqrt{3}\\3\end{smallmatrix}\right)$; **f-** (D) : $y = -x\sqrt{3} + 1$ et $A\left(\begin{smallmatrix}-2\\3\end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 16

Soit un triangle ABC tel que : $A\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)$; $B\left(\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}\right)$ et $C\left(\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right)$.

- 1) Déterminer une équation des médiatrices du triangle ABC.
- 2) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne les points $A\left(\begin{smallmatrix}9\\2\end{smallmatrix}\right)$; $B\left(\begin{smallmatrix}-3\\5\end{smallmatrix}\right)$ et $C\left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)$.

- 1) Donner l'équation réduite de la droite (AB). Quel est son coefficient directeur ?
- 2) Donner une équation de droite passant par C et de coefficient directeur $\frac{7}{2}$.
- 3) Montrer que ces deux droites sont sécantes et déterminer algébriquement puis graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercices 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne les points $A\left(\begin{smallmatrix}3\\-1\end{smallmatrix}\right)$; $B\left(\begin{smallmatrix}-1\\-3\end{smallmatrix}\right)$

- 1) Donner une équation cartésienne du cercle (C) et de diamètre $[AB]$.
- 2) Soit (D) la droite passant par $C\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{U}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$.
Donner une équation cartésienne puis paramétrique de (D).
- 3) Déterminer les points d'intersections de (C) et (D).

Exercices 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Donner une équation cartésienne :

- 1) De la droite (D_1) passant par $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{U}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.
- 2) De la représentation paramétrique :
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto (5t + 1 ; -t + 2)$
- 3) De la droite perpendiculaire à (D) : $2x - 3y + 4 = 0$ et passant par $K\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.
- 4) Du cercle de diamètre $[AB]$; avec $A\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- 5) Du cercle de centre $A\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ vérifiant les équations de cercles suivants :

- 1) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) (C) : $x^2 + y^2 + x - 1 = 0$
- 3) (C) : $x^2 + y^2 + 1 = 0$; 4) (C) : $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$
- 5) (C) : $-x^2 - y^2 + 3x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = 0$; 6) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Exercices 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne le cercle (C) et la droite (D) d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - 3y + 1 = 0.$$

- 1) Construire le cercle (C) et la droite (D) dans le même repère.
- 2) Construire les deux tangentes au cercle (C) parallèles à la droite (D).
- 3) Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur normal de chacune d'elles.
- 4) En déduire les équations de ces deux tangentes.

Exercice 22

On considère un parallélogramme ABCD et on appelle I le point d'intersection des segments $[AC]$ et $[BD]$. On pose : $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{AD}$.

- 1) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$.
- 2) Que représente le segment $[AI]$ dans le triangle ABD ?
Calculer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$.
- 3) Calculer : AB^2 ; AD^2 ; AC^2 et BD^2 en fonction de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$.
- 4) Montrer que $2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2$.
- 5) Déduisez-en que : $AB^2 - AD^2 = 2AI^2 - \frac{BD^2}{2}$.

Exercices 23

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AH}^2 = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- 2) Déduisez-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :
 $AH^2 = -\overrightarrow{HB} \times \overrightarrow{HC} = HB \times HC$.

Exercices 24

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

- 1) Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
- 2) Déduisez-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :
 $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BH} = BA^2$.

Séquence 7 : logique

I-Définitions

- La logique est la science qui nous permet de discerner le vrai du faux, autrement dit la science de la raison.
- Une proposition est une phrase (ou une affirmation) qui est soit vraie soit fausse mais pas les deux en même temps.

Exemples

- Tout nombre impair est premier ;
- Pour tout entier naturel n , $2n \geq 0$;
- $2^3 = 6$;
- Il pleut ;
- Il existe au moins un réel x tel que $\sqrt{3x+2} = 3$.
- Le principe de la logique est le principe du tiers exclu c'est-à-dire, qu'il n'y a pas de troisième valeur.

II-Connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions. D'après ce qui précède, les valeurs de vérité d'une proposition sont : soit vraie (V) ou soit fausse (F).

1) Le connecteur « non » (négation)

- a) **Définition** : la négation d'une proposition P est aussi une proposition qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie. On la note $\neg P$ qui se lit « non P ».

Table de vérité

P	$\neg P$
F	V
V	F

b) Exemples

Trouve la négation des propositions suivantes :

- P « tous les nombres sont impairs »
- Q « $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel »

2) Le connecteur « et » (conjonction)

- a) **Définition** : la conjonction de P et Q , notée $P \wedge Q$ est vraie si P et Q sont toutes vraies et fausse dans tous les autres cas.

Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

b) Exemple

Si P est la proposition « ce nombre est pair » et Q la proposition « ce nombre est premier » alors la proposition $P \wedge Q$ est vraie si le nombre est 2 et est fausse pour tout autre nombre.

3) Le connecteur « ou » (disjonction)

- a) **Définition** : la disjonction de P et Q est fausse si P et Q sont toutes fausses et vraie dans les autres cas. On la note $P \vee Q$ et se lit « P ou Q ».

Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

b) Exemple

Si P est la proposition « cette carte est un as » et Q la proposition « cette carte est cœur » alors la proposition $P \vee Q$ est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).

4) Le connecteur « si...alors » (implication)

- a) **Définition** : la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie si P est vraie et Q est fausse, elle est vraie dans les autres cas.

Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

b) Exemples

Détermine la valeur de vérité des propositions suivantes :

- Si $x \in \mathbb{Z}$ alors $\frac{2+x}{2-x} \in \mathbb{Z}$;
- Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$.

5) Le connecteur « est équivalent à » (si et seulement si)

- a) **Définition** : P et Q sont équivalentes si elles ont la même valeur de vérité et on écrit $P \Leftrightarrow Q$.

Table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

b) Exemple

- n est un nombre impair si et seulement si n^2 est impair.
- $\cos \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

III-Quantificateurs**1) Quantificateur existentiel**

Le quantificateur existentiel noté $\exists$, signifie que « il existe au moins un...tel que... ».

Exemples

- a) Montrer qu'il existe x tel que $1 - 2x < 0$.
- b) Prouver qu'il existe au moins t tel que $\sqrt{t}$ est un entier.

2) Quantificateur universel

Ce quantificateur, noté $\forall$, signifie que « pour tout... » ou « quel que soit... »

Exemples

- Pour tout z , $z + 2 \leq z + 7$.
- $\forall r \in \mathbb{N} ; \sqrt{2r + 1} \geq 1$.

IV-Notion d'exemple et de contre-exemple

1) Notion d'exemple

Il s'agit de prouver qu'une proposition est vraie ou qu'elle est fausse.

Soit Q « la somme de deux nombres impairs est toujours pair »

Exemple : $1 + 3 = 4$; $45 + 13 = 58$; $107 + 59 = 166$

Soit P « si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$ »

Exemple : soient $a = \frac{3}{5}$ et $b = \frac{7}{2}$; $a + b = \frac{3}{5} + \frac{7}{2} = \frac{6+35}{10} = \frac{41}{10} \in \mathbb{Q}$

2) Notion de contre-exemple

Pour montrer que la proposition « $\forall x P(x)$ » est fausse on doit déterminer au moins une valeur de x qui ne la vérifie pas. On dit qu'on a trouvé un contre-exemple.

Soit P « tout nombre premier est impair ». La proposition P est fausse car 2 est premier mais non impair.

V-Notion de déduction et de conjecture

1) Notion de déduction

Le principe de déduction signifie qu'à partir d'une formule générale nous pouvons en déduire un cas particulier.

Exemple : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (formule du binôme de Newton) ; vérifier cette propriété pour $n = 2$ puis pour $n = 3$.

2) Notion de conjecture

Une conjecture est une proposition supposée vraie sans aucune démonstration.

Exemple 1 : Tout nombre naturel pair supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Conjecture de Golbach

Exemple 2 : Il existe toujours un nombre premier entre n^2 et $(n + 1)^2$. Conjecture de Legendre

Exercices

Exercice 1

Dis si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

- 1) Tout nombre naturel est réel.
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- 3) La terre est ronde.
- 4) $(2 \times 5^2)^4 = 2 \times 5^8$.
- 5) $\exists t \in \mathbb{R}, 1 + t = \frac{1}{t} (t \neq 0)$.
- 6) Tout nombre impair est premier.

Exercice 2

Trouve la négation des propositions suivantes :

- P « les nombres réels sont aussi rationnels »
- Q « $\exists y, 2 + y = \frac{2y+3}{4}$ »
- R « $\forall x \in [4 ; 16], 2 \leq \sqrt{x} \leq 4$ »
- T « Je suis fâché(e) »

Exercice 3

On donne P « ce nombre est premier » et Q « ce nombre est impair ».

Trouve la valeur de vérité de $P \wedge Q$; $P \vee Q$; $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$ dans les cas suivants :

- a) Le nombre choisi est 5 ;
- b) Le nombre choisi est 2 ;
- c) Le nombre choisi est 9.

Exercice 4

Trouve cinq(05) exemples de la proposition suivante : T « si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$ »

Exercice 5

Soit Q « tout nombre rationnel est décimal »

Démontre que la proposition Q est fausse à l'aide de trois(03) contre-exemples.

Exercice 6

Dis si les énoncés suivants sont des propositions puis indique la valeur de vérité de ceux qui sont des propositions :

- a) M. TRAORE enseigne les mathématiques.
- b) C'est la maison la plus belle de Bamako.
- c) Ségou est une région du Mali.
- d) $3x = 45$.
- e) $5 + 4 = 8$.
- f) Ce fleuve traverse le Mali.
- g) Quelle heure est-il ?

Exercice 7

Ecris les phrases suivantes à l'aide des quantificateurs :

- 1) Tout nombre réel est inférieur à 4.
- 2) Le carré de tout nombre réel est positif.
- 3) Il existe un nombre naturel tel que vaut -100 .
- 4) L'opposé d'un entier relatif est aussi un entier relatif.

Corrections des exercices

Exercice 1

- 1) Vraie, en effet $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$;
- 2) Vraie, en effet le carré de tout nombre est positif ;
- 3) Vraie, cela est une vérité générale ;
- 4) Fausse, en effet $(a \times b)^n = a^n \times b^n$;
- 5) Vraie, $1 + t = \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;
- 6) Fausse, en effet 9 est impair mais non premier.

Exercice 2

- $\neg P$ « les nombres réels ne sont pas aussi premiers »
- $\neg Q$ « $\forall x, 2 + y \neq \frac{2y+3}{4}$ »
- $\neg R$ « $\exists x \in [4 ; 16], 2 > \sqrt{x} > 4$ »
- $\neg T$ « je ne suis pas fâché(e) »

Exercice 3

On donne P « ce nombre est premier » et Q « ce nombre est impair ».

- a) $P \wedge Q = V$; $P \vee Q = V$; $P \Rightarrow Q = V$ et $P \Leftrightarrow Q = V$
- b) $P \wedge Q = F$; $P \vee Q = V$; $P \Rightarrow Q = F$ et $P \Leftrightarrow Q = F$
- c) $P \wedge Q = F$; $P \vee Q = F$; $P \Rightarrow Q = V$ et $P \Leftrightarrow Q = F$

N.B : on peut se référer aux tables de vérité des différents connecteurs.

Exercice 4

- $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$;
- $-4 + \frac{3}{5} = \frac{-20+3}{5} = \frac{-17}{5} \in \mathbb{Q}$;
- $\frac{32}{7} + 6 = \frac{32+42}{7} = \frac{74}{7} \in \mathbb{Q}$;
- $-12 + 4 = -8 \in \mathbb{Q}$;
- $\frac{-2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{-8+15}{20} = \frac{7}{20} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 5

$\frac{2}{3}$; $\frac{-5}{11}$ et $\frac{140}{333}$ sont des nombres rationnels mais ce ne sont pas des décimaux. Donc la proposition Q est fausse.

Exercice 6

- a) Oui, elle est vraie aussi.
- b) Non (c'est un jugement).
- c) Oui, elle est vraie aussi.
- d) Non, en effet cette expression prend les deux valeurs de vérité selon les valeurs de x .
- e) Oui, elle est fausse aussi.
- f) Non, en effet cet énoncé n'est pas précis.
- g) Non, en effet les interrogatives ne sont pas des propositions.

Exercice 7

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 4$;
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$;
- 3) $\exists x \in \mathbb{N}, 2x = -100$;
- 4) $\forall t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow -t \in \mathbb{Z}$.

Séquence 8 : transformations et isométries du plan

Transformation

Une transformation T du plan est une application du plan dans lui-même qui à tout point M on associe un point M' . $T: M \mapsto M'$.

M' est l'unique image de M et inversement.

La translation, la rotation, la symétrie centrale, la symétrie orthogonale et l'homothétie sont tous des transformations.

Isométrie

Une isométrie est une transformation qui conserve les distances. Les translations, les rotations, les symétries centrales et les symétries orthogonales sont des isométries.

Propriétés

Une isométrie conserve : les distances, les aires, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques, le milieu, l'alignement, le milieu, le contact...

On parle de **déplacement** quand les angles orientés sont conservés. Il s'agit des translations, des rotations et des symétries centrales.

On parle d'**antidéplacement** lorsque les angles orientés sont transformés en leurs opposés. Il s'agit des symétries orthogonales.

• Homothétie ponctuelle

Une homothétie h de centre O et de rapport k du plan est une transformation tel que à chaque point M du plan on associe M' . on a $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$.

$M \neq O$ et O est le point invariant. Les point O , M et M' sont sur la même droite.

Si $k > 1$; $OM < OM'$ et si $0 < k < 1$; $OM > OM'$, alors l'homothétie n'est pas une isométrie.

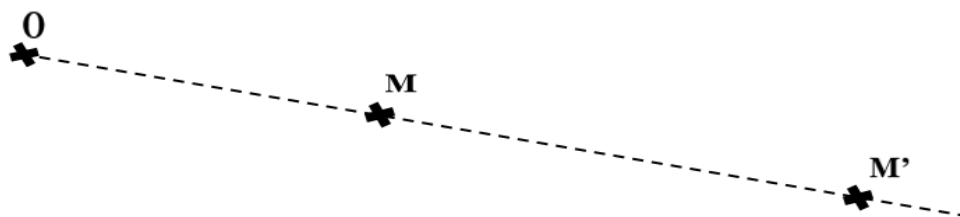
Elle ne conserve pas les distances et les aires, mais conserve les autres propriétés des isométries.

Les homothéties de rapport $k = 1$ sont des isométries. Alors M et M' sont confondus.

Les homothéties de rapport $k = -1$ sont des rotations d'angle 180° ou encore des symétries centrales.

Si l'on veut calculer le rapport d'une homothétie transformant A et B en A' et B' ;

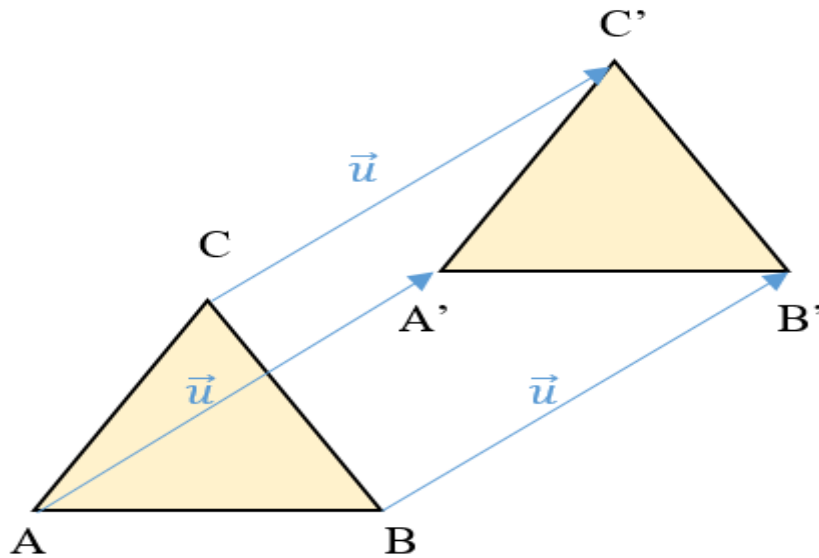
$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}.$$



• Isométries du plan

Translation : une translation t de vecteur $\vec{u}$ est une transformation qui donne l'image d'un point par le vecteur $\vec{u}$. On a $t: M \mapsto M'$ tel que $MM' = \vec{u}$.

L'image d'un triangle est un triangle



L'image d'un cercle est un cercle

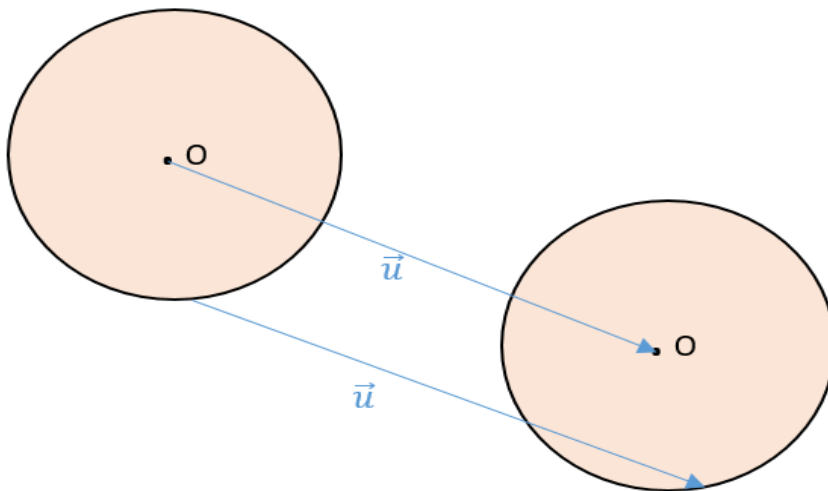
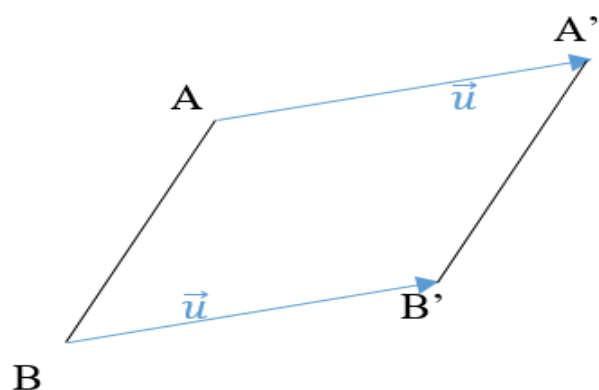


Image d'un segment est un segment

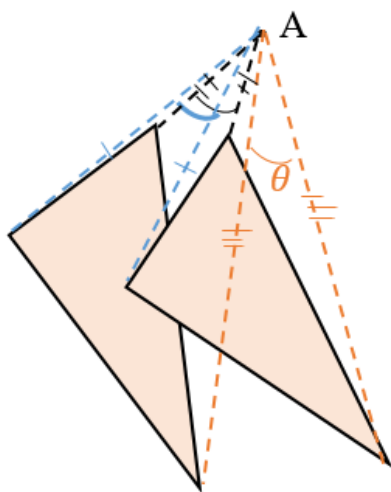


Si A' et B' sont les images respectives des points A et B par une translation alors le quadrilatère $AA'B'B$ est forme un parallélogramme. La translation n'a pas de point invariant. La translation d'une droite est une autre droite.

L'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u}(a; b)$ est donné par :
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Rotation : une rotation r de centre O et d'angle θ est une transformation qui donne l'image d'un point par un angle. $r : M \mapsto M'$ tel que $OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \theta$.

L'image d'un triangle est un triangle

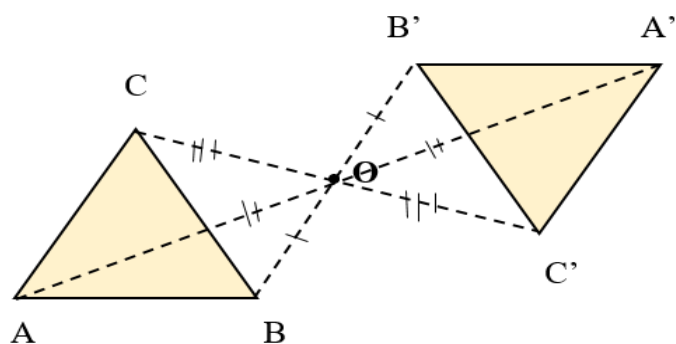


L'image d'un cercle, d'une droite et d'un segment par une rotation est respectivement un cercle, une droite et un segment. Le centre O est le point invariant par une rotation.

Soit la rotation R de centre $\omega(a; b)$ et d'angle θ et R' la rotation de centre O du repère et d'angle θ et encore t la translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$. Si R est la composée de R' et t

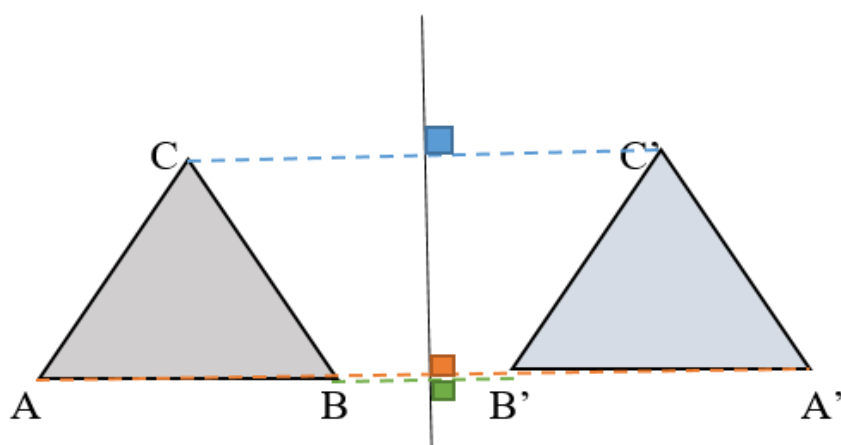
($R = R'ot$), son **expression analytique** est donné par :
$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b \end{cases}$$

Symétrie centrale : une symétrie S de centre O est une transformation qui définit un point par un point : $S : M \mapsto M'$ tel que $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$.



L'image d'un cercle, d'une droite et d'un segment par symétrie centrale est respectivement un cercle, une droite et un segment. Le centre O est le point invariant par une symétrie centrale.

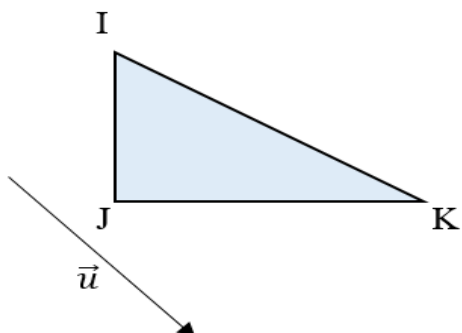
Symétrie orthogonale : une symétrie S de centre la droite d est une transformation qui définit un point par une droite $S : M \mapsto M'$ tel que d est la médiatrice du segment $[MM']$.



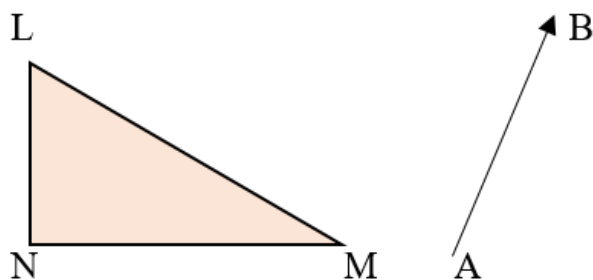
L'image d'un cercle, d'une droite et d'un segment par une symétrie orthogonale est respectivement un cercle, une droite et un segment. Le centre d constitue l'ensemble des points invariants par une symétrie orthogonale.

Exercices

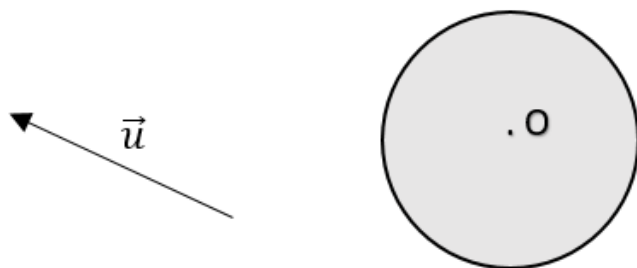
Exercice 1 : à l'aide de la règle et du compas, trouve l'image du triangle IJK par la translation de vecteur $\vec{u}$.



Exercice 2 : détermine l'image du triangle LMN par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à l'aide de la règle et de l'équerre.



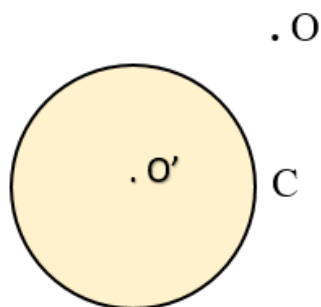
Exercice 3 : détermine l'image du cercle ci-dessous par la translation de vecteur $-\vec{u}$.



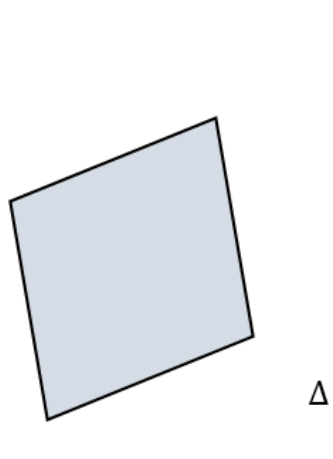
Exercice 4 : détermine l'image du rectangle ACDB par la symétrie de centre O.



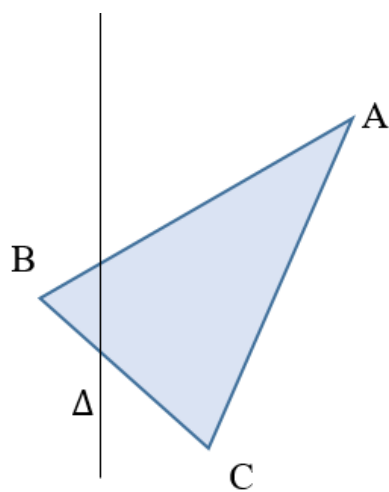
Exercice 5 : détermine l'image du cercle C par la symétrie de centre O à l'aide de la règle et du compas.



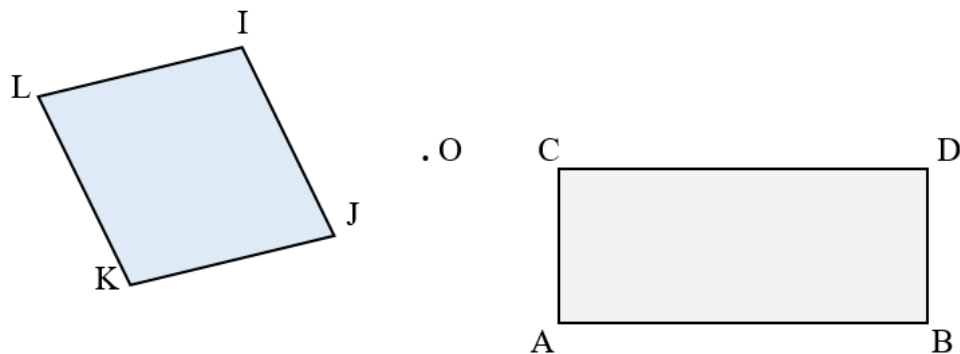
Exercice 6 : après avoir donné un nom au parallélogramme, trouve son image par la symétrie orthogonale d'axe Δ . Contrôle à l'aide d'un rapporteur et dire s'il s'agit d'une isométrie.



Exercice 7 : détermine un triangle dont ABC est son image.



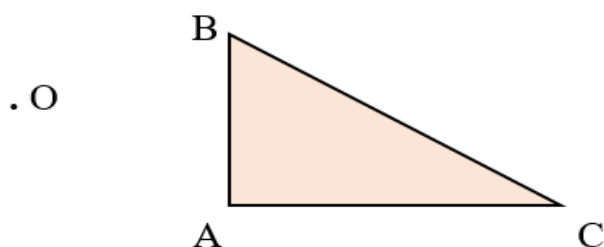
Exercice 8 : détermine l'image du quadrilatère ACBA par la rotation de centre O et d'angle 30° puis l'image du quadrilatère LIJK par la rotation de centre O et d'angle -45°



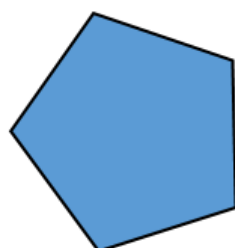
Exercice 9 : Hachir, Modibo et Tidiane veulent la même image du triangle ABC par rapport à O.

- Hachir estime qu'il faudra trouver l'image du triangle par la rotation de centre O et d'angle 180° .
- Modibo pense qu'il faudra trouver l'image du triangle par la symétrie de centre O.
- Tidiane quant à lui, croit qu'il faut plutôt trouver l'image du triangle par l'homothétie de centre O et de rapport à $k = -1$.

Est-ce qu'ils parlent de la même image ?

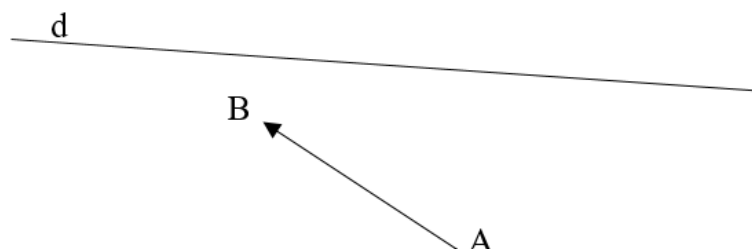


Exercice 10 : détermine les images de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$; $k = \frac{1}{2}$; $k = -1$. Dire à chaque fois si la figure s'agrandi, ou se diminue et s'inverse.



.O

Exercice 11 : détermine l'image d' de la droite d par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'image d'' de d par la symétrie de centre A et ensuite l'image d_1 de d par la symétrie axiale d'axe (AB) et enfin l'image d_2 de la droite d par la rotation de centre B .



Exercice 12 : trouve les coordonnées du vecteur de la translation qui transforme $A\left(\frac{1}{5}\right)$ en $B\left(\frac{2}{-3}\right)$.

Exercice 13 : soit f l'application qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ avec

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

f est-elle une isométrie ? un déplacement ? un antidéplacement ?

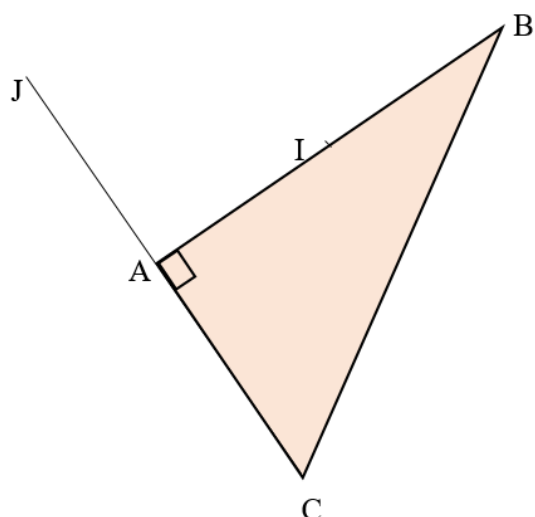
Exercice 14 : soit f l'application qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ avec

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = \sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

- Détermine l'image des points $A\left(\frac{-1}{0}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ par f .
- Détermine l'image réciproque des points $C\left(\frac{1}{0}\right)$, $D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ par f .
- Détermine les coordonnées des points invariants de f .

Exercice 15 : soit la figure ci-dessous tel que $AB=2AC$ et I milieu du segment $[AB]$ et J la symétrique de C par rapport à A . soit S la transformation tel que : $S(I) = C$ et $S(A) = J$.

- Détermine le rapport et l'angle de S .
- Soit C_1 le cercle de diamètre $[IC]$ et C_2 le cercle de diamètre $[AJ]$. Montre que le centre Ω de la transformation S appartient à $C_1 \cap C_2$.



Exercice 16 : Soit $ABCD$ un carré de centre O et de côté 9 cm . On note I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[BC]$, puis E et F les points d'intersection de la droite (AC) avec respectivement les droites (DI) et (DJ) . La perpendiculaire en E à la droite (AC) coupe (AB) en H ; la perpendiculaire en F à la droite (AC) coupe (BC) en G . On considère alors le quadrilatère $EFGH$.

- 1) *Construction* Tracer le carré $ABCD$ et les points I et J en vous aidant du quadrillage de la copie (un carreau de la copie correspond à une longueur de 5 mm). Compléter la figure par une construction à la règle et au compas. On laissera apparents les traits de construction.
- 2) *L'objectif de cette question est de prouver que $EFGH$ est un carré.*
 - a) Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABD . En déduire la valeur du rapport $\frac{AE}{AO}$ puis prouver que $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$.
 - b) Montrer que $AE = 3\sqrt{2}\text{ cm}$.
 - c) Quelle est la nature du triangle AEH ? Justifier la réponse. En déduire que $EH = 3\sqrt{2}\text{ cm}$.
 - d) On rappelle qu'une diagonale d'un carré est un axe de symétrie de ce carré. Indiquer, sans justification, les symétriques respectifs des points E et H par rapport à l'axe (DB) . En déduire les longueurs FG , FC puis la longueur EF .
 - e) Conclure sur la nature du quadrilatère $EFGH$. Justifier la réponse.

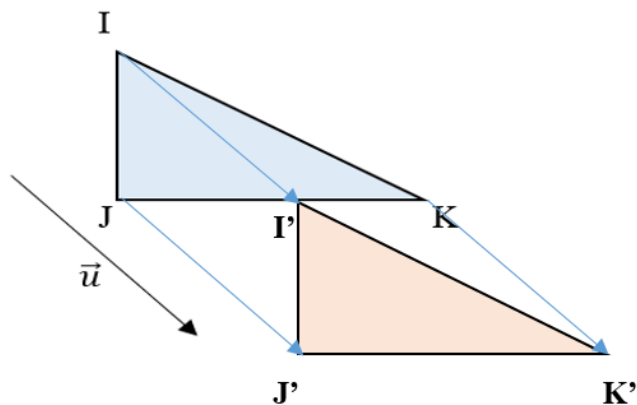
Exercice 17 : soit f l'application qui au point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ avec

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

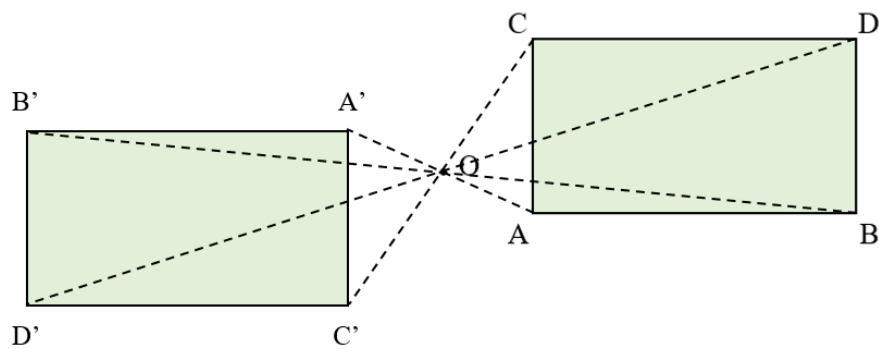
Montre que la fonction f est une translation dont on précisera les coordonnées du vecteur.
Détermine l'image des points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ par cette translation.

Corrections des exercices

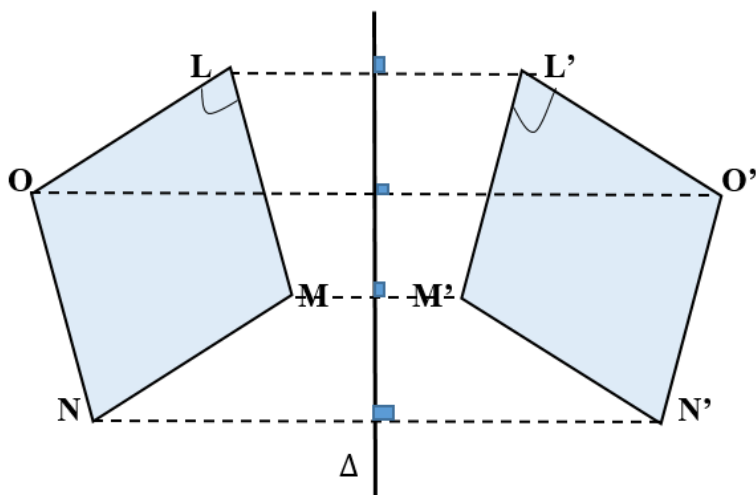
Exercice 1



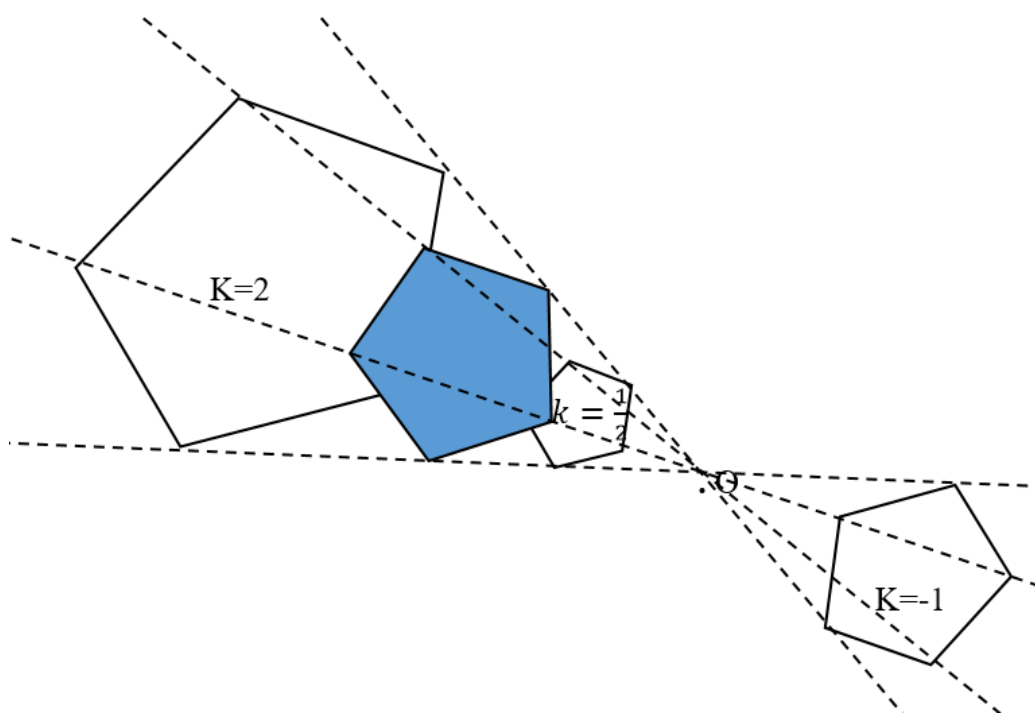
Exercice 4



Exercice 6



Exercice 10 : détermine les images de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$; $k = \frac{1}{2}$; $k = -1$. Dire à chaque fois si la figure s'agrandi, ou se démuni et s'inverse.



Si $k = 2$; la figure s'agrandi.

Si $k = \frac{1}{2}$; la figure se démuni.

Si $k = -1$; la figure s'inverse.

Exercice 12 : trouvons les coordonnées du vecteur de la translation qui transforme $A\left(\frac{1}{5}\right)$ en $B\left(\frac{2}{-3}\right)$.

L'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u}(a; b)$ est donné par : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 = 1 + a \\ -3 = 5 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \end{cases} \text{ alors } \vec{u}(1; -8).$$

Exercice 15 : soit la figure ci-dessous tel que $AB=2AC$ et I milieu du segment $[AB]$ et J la symétrique de C par rapport à A . soit S la transformation tel que : $S(I) = C$ et $S(A) = J$.

- Déterminons le rapport et l'angle de S .

Soit k le rapport de S , on a $k = \frac{CJ}{IA} = \frac{2AC}{AC} = 2$.

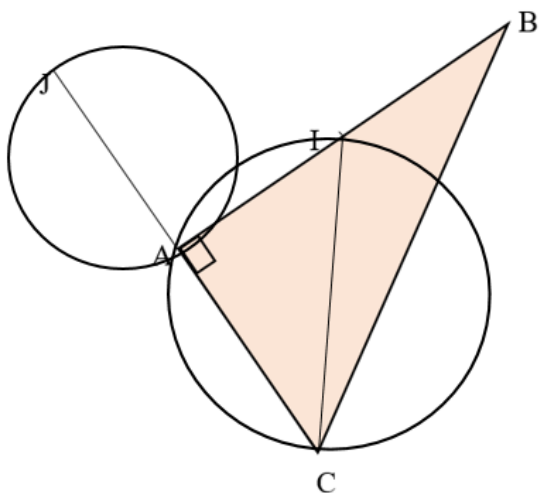
Soit α l'angle de S , on a $\alpha = \left(\widehat{IA; CJ}\right) = \frac{\pi}{2}$.

- Soit C_1 le cercle de diamètre $[IC]$ et C_2 le cercle de diamètre $[AJ]$. Montrons que le centre Ω de la transformation S appartient à $C_1 \cap C_2$.

On a $S(I) = C \Rightarrow \left(\widehat{\Omega I; \Omega C}\right) = \frac{\pi}{2}$; donc $\Omega \in C_1$.

On a $S(A) = J \Rightarrow \left(\widehat{\Omega A; \Omega J}\right) = \frac{\pi}{2}$; donc $\Omega \in C_2$.

Alors $\Omega \in C_1 \cap C_2$. Or $S(A) \neq A$ alors Ω est le second point d'intersection de C_1 et C_2 .



Exercice 17 : soit f l'application qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ avec

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Montrons que la fonction f est une translation dont on précisera les coordonnées du vecteur.

$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$ est l'expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{u}(2; 1)$.

Déterminons l'image des points $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ par cette translation.

$$\begin{cases} x' = 1 + 2 \\ y' = 0 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow A' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = 1 + 2 \\ y' = 3 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow B' \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Séquence 9 : géométrie dans l'espace

I) Règle de base de la géométrie dans l'espace

- Il existe une et une seule droite de l'espace passant par deux points distincts.
- Il existe un et un seul plan de l'espace passant par trois points non alignés.
- Si deux plans distincts ont un point en commun, alors leur intersection est une droite.
- Tous les résultats de géométrie plane (Thales, Pythagore, Théorèmes des milieux, etc...) sont applicables dans chaque plan de l'espace.

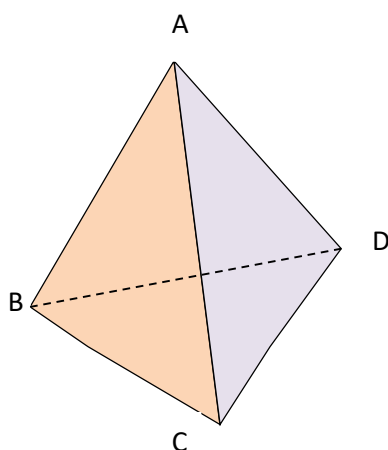
Vocabulaire

- Lorsque des points appartiennent à un même plan, on dit qu'ils sont coplanaires.
- Lorsque des droites sont contenues dans un même plan, on dit qu'elles sont coplanaires.

Remarque

- Deux points, trois points sont toujours coplanaires. L'utilisation de ce qualificatif n'a donc de sens qu'à partir de quatre points.

Problématique : ABCD un tétraèdre.



I milieu de $[AB]$.

J milieu de $[AC]$

K milieu de $[AD]$

M milieu de $[BD]$

N milieu de $[CD]$

L milieu de $[BC]$

1°) Détermine l'intersection des droites (ABC) et (IJK) .

2°) Démontre que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

3°) Démontre que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD) .

4°) Démontre que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.

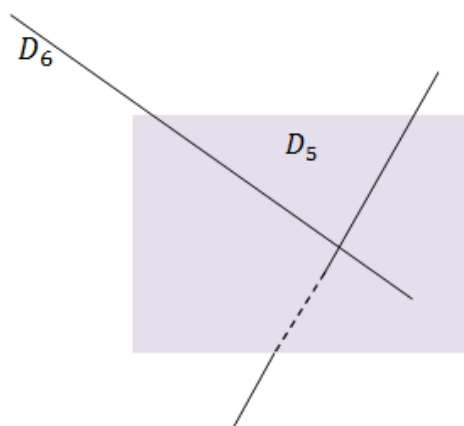
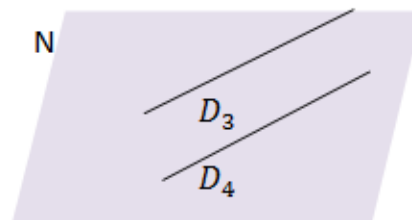
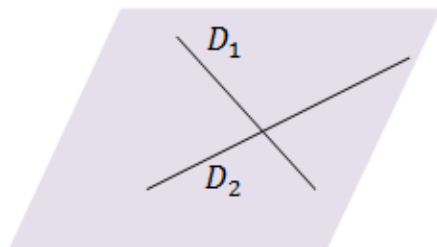
5°) Détermine les droites D_1 et D_2 d'intersection des plans (ACM) et (BCD) puis (ACM)

(IJK).

6°) Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont *parallèles*.

Solution de la question 1

II) Position relative de deux droites

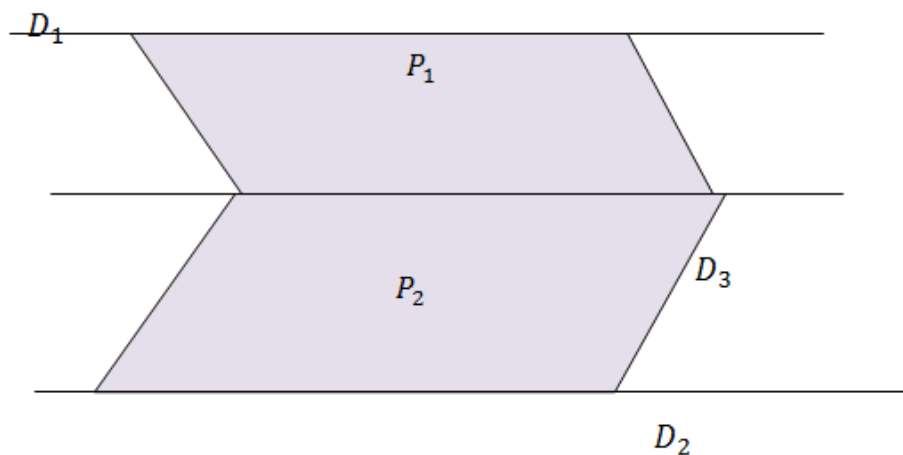


Propriété : deux droites de l'espace sont :

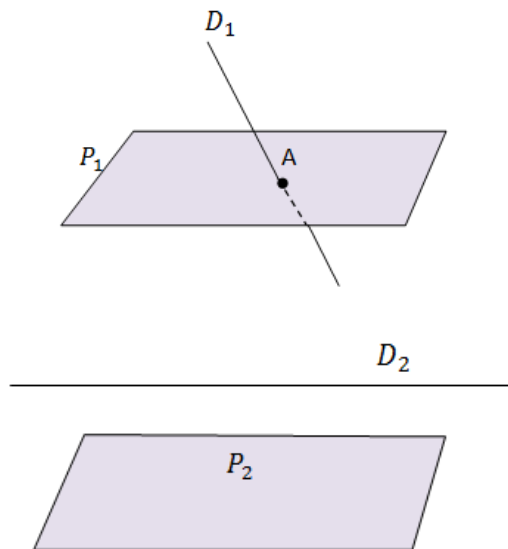
- Soit coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles)
- Soit non coplanaires.

Attention : dans l'espace deux droites non parallèles ne sont pas nécessairement sécantes.

Théorème : deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.



III) Position relative d'une droite et d'un plan



Propriété : Une droite et un

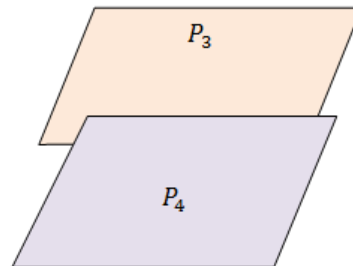
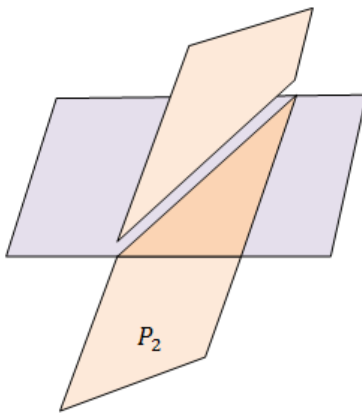
Plan de l'espace sont :

- Soit sécantes
- Soit parallèles

Théorème : si une droite D est parallèle à une droite Δ d'un plan P alors la droite D est parallèle au plan P .

Exemple : question 3.

IV) Position relative de deux plans

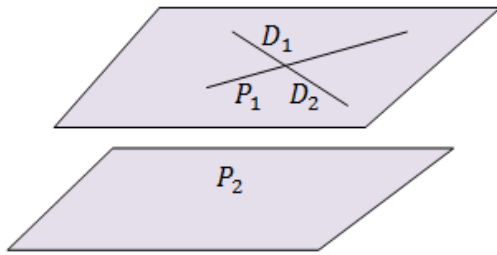


Propriété : deux plans de l'espace sont :

- Soit sécantes
- Soit parallèles

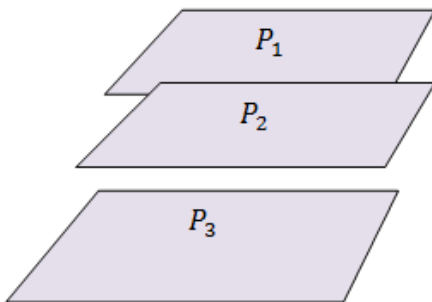
Théorème : si deux droites sécantes (d'un plan) sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Exemple : question 4

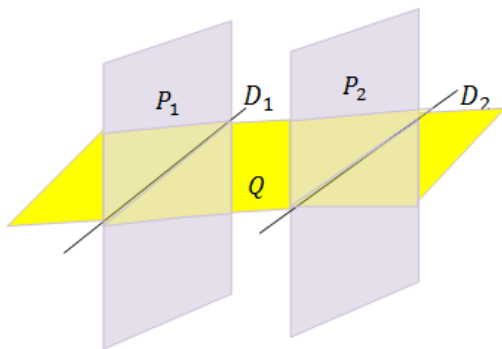


Théorème : deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

Exemple : question 5



Théorème 6 Un plan Q sécant à deux plans strictement parallèles P_1 et P_2 les coupe suivant deux droites parallèles (D_1 et D_2).



Démonstration du théorème :

D_1 et D_2 sont deux droites coplanaires (dans le plan Q) donc D_1 et D_2 sont soit parallèles, soit sécantes.

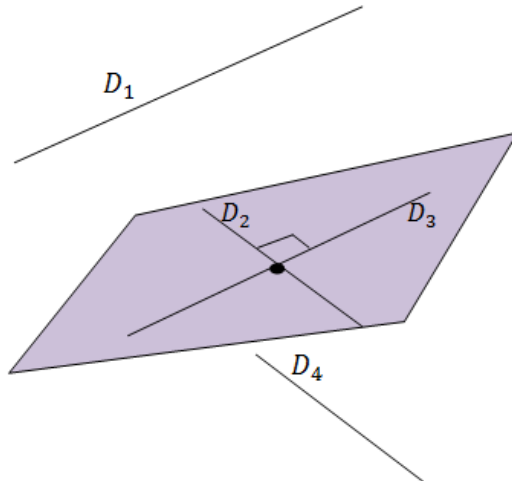
Si elles sont sécantes alors il existe un point M , tel que $M = D_1 \cap D_2$ et appartient à la fois à P_1 et P_2 . Ce qui est

puisque P_1 et P_2 sont parallèles.

Exemple : question 6.

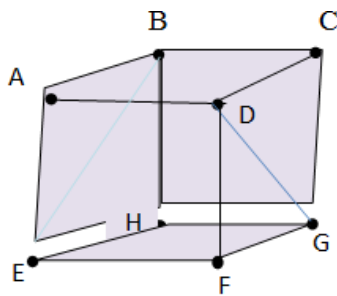
V) Orthogonalité de deux droites

Deux droites D_1 et D_2 sont orthogonales si et seulement si leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



Exemple : montre que, dans le cube ci-contre

Les droites (BE) et (DG) sont orthogonales.

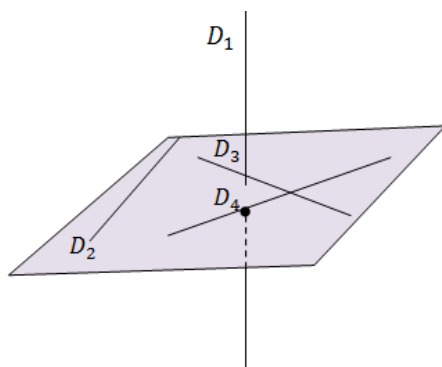


Deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles.

Exemple : (AE) orthogonale à (EF) et (AE) orthogonale à (HF) et pourtant (EF) et (HF) ne sont pas parallèles.

VI) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition : on dit qu'une droite D_1 est orthogonale à un plan P lorsque D_1 est orthogonale à toute droite du plan P .

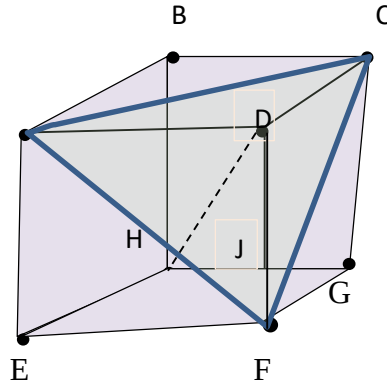


Théorème : (important)

Lorsqu'une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, elle est orthogonale à ce plan. (Ainsi deux droites suffisent!!!)

Exercice 1 : donne sur le cube, un exemple d'une droite D orthogonale à deux droites coplanaires mais qui n'est pas orthogonale au plan que ces deux droites définissent.

Exercice 2



- 1) En utilisant le triangle DHE montre que (AF) est orthogonale à (HD) .
- 2) De même, en utilisant le triangle DHG, montre que (FC) est orthogonale à (HD) .
- 3) En déduire que (HD) est orthogonale au plan (ACF) .

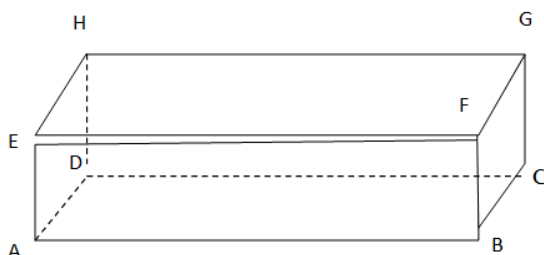
VII) Plans perpendiculaires

Deux plans P_1 et P_2 sont dits perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Exemples et remarques : les plans $(CDFG)$ et $(ABCD)$ sont perpendiculaires car par exemple la droite (DF) qui est contenue dans le premier est orthogonale au second.

Lorsque deux plans sont perpendiculaires, il existe dans chacun d'eux des droites non orthogonales à l'autre : par exemple la droite (FC) n'est pas orthogonale au plan $(ABCD)$.

Exercice 3



1°) Les droites (AB) et (HG) définissent-elles un plan? Si oui nomme ce plan.

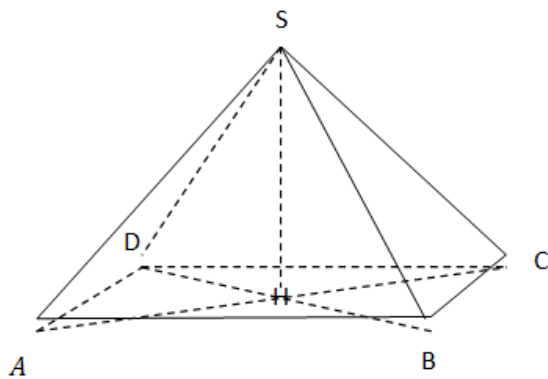
2°) Les droites (AB) et (CG) définissent-elles un plan? Si oui nomme ce plan.

3°) Cite trois droites parallèles à (FG).

4°) Cite trois droites sécantes à (FG).

5°) Cite trois droites non coplanaires à (FG).

Exercice 4



Sur la pyramide SABCD à base rectangulaire ci-dessus, H est le pied de la hauteur.

Donne les positions relatives des droites suivantes.

1°) (AB) et (CD) ; 2°) (SA) et (BD) ; 3°) (HA) et (SC) ; 4°) (BH) et (DB).