

Avants - Propos :

Conformément au nouveau programme de mathématiques, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé par un comité d'enseignants du secondaire qui répond au souci du ministère de l'éducation nationale pour la mise en œuvre de **l'approche par compétence (A.P.C)** dans les classes de **10^{ième} C (10^{ième} Commune)** au Mali et ayant pour **objectif** d'uniformiser le niveau des élèves venant des classes antérieures afin de les offrir les mêmes chances dans la poursuite de leurs études universitaires. Il permet en outre d'harmoniser la pédagogie des mathématiques et de mettre à la disposition des élèves l'acquisition d'une formation solide.

Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

■ Situation - Problème :

Une **activité ouverte** permettant d'aborder en grande partie les connaissances nouvelles.

■ Activités préparatoires :

Les **activités préparatoires**, approches simples des nouvelles notions à partir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

■ Le cours :

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** avec des **démonstrations**.

Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, court, en situation, pouvant servir de référence et d'aide à la démonstration.

■ Exercices et problèmes :

- **Les exercices** : Inédits et ordonnés suivant **la progression du cours**, ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation du cours.
- **Les problèmes** : Variés, ce sont des **problèmes de synthèse** ou des problèmes ouverts pour aller plus loin dans l'acquisition de vos connaissances sans aller au-delà du programme en vigueur.

Nous souhaitons donc que l'utilisation de ce manuel ne se substitue pas au travail des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace, utile aux élèves pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, nous tenons à remercier **les éditions SAMASSA** et tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs remarques, critiques, suggestions ou autres solutions plus élégantes que les nôtres, que nous publierons dans une future édition.

Les auteurs

SOMMAIRE

1

Trigonométrie.....1

- 1- **R**apports trigonométriques des angles aigus dans un triangle rectangle.
- 2- **R**elations entre les rapports trigonométriques d'un angle aigus.
- 3- **U**nité de mesure des angles.
- 4- **P**résentation des angles remarquables compris entre 0° et 180° .
- 5- **R**apports trigonométriques des angles supplémentaires et complémentaires.

2

Fonctions numériques.....23

- 1- **G**énéralité.
- 2- **E**nsemble de définition d'une fonction.
- 3- **D**ivers manières de déterminer une fonction.
- 4- **E**galité et coïncidence de deux fonctions.
- 5- **D**étermination algébrique et graphique des images directes et réciproques.
- 6- **V**ariation d'une fonction.
- 7- **F**onctions polynômes – Fonctions rationnelles.

3

Equations – Inéquations – Systèmes d'équations 63

- 1- **R**appels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$.
- 2- **R**appels et règles de calcul sur les quotients – les puissances et les radicaux.
- 3- **D**istance sur $\mathbb{R}$.
- 4- **I**ntervalles.
- 5- **R**ésolution graphique de certaines équations et inéquations.
- 6- **R**ésolution algébrique des équations – inéquations et systèmes d'équations.
- 7- **R**ésolution graphique dans $\mathbb{R}^2$ des équations et inéquations.
- 8- **R**ésolution graphique dans $\mathbb{R}^2$ des équations et inéquations.
- 9- **R**ésolution des systèmes dans $\mathbb{R}^2$ puis dans $\mathbb{R}^3$.
- 10- **M**ise en équations

4

Logiques.....23

- 1- **D**éfinition et présentation.
- 2- **V**ocabulaire et formalisation.
- 3- **C**alcul propositionnel.
- 4- **R**aisonnement logique.
- 5- **C**onnecteur logique.
- 6- **Q**uantificateurs.
- 7- **T**autologies.

5

Géométrie plane.....100

- 1- **V**ecteurs du plan.
- 2- **P**roduits scalaires.
- 3- **B**arycentre.
- 4- **D**roite dans le plan.

6

Transformations et isométries du plan.....147

- 1- **H**omothétie.
- 2- **I**sométries du plan.
 - Translation,
 - Symétrie centrale,
 - Symétrie orthogonale,
 - Rotations.

7

Géométrie dans l'espace...156

- 1- **P**résentation d'un solide dans l'espace.
- 2- **P**oints et droite dans le plan.
- 3- **F**igures géométriques dans l'espace.

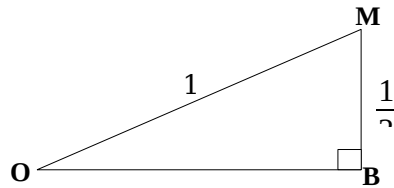
Trigonométrie

Evaluation diagnostique

Activités

Trouve les bonnes réponses pour chacune des affirmations suivantes :

- Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A.
 - 1) Le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ est :
 - a- $AB \times \text{hypoténuse}$; b- $AH \times AC$; c- $\frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$; d- $\frac{AC}{AB}$; e- $\frac{AB}{BC}$
 - 2) Le sinus de l'angle $\widehat{ACB}$ est :
 - a- Côté opposé $\times$ hypoténuse ; b- $AC \times BC$; c- $\frac{AB}{BC}$; d- $\frac{AH}{AC}$; e- $\frac{CH}{AB}$
- Soit OBM un triangle rectangle en B dont les dimensions sont données sur la figure.

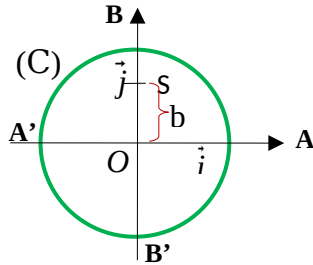


On a alors :

- a- $OB = \frac{2}{3}$; b- $\sin(\widehat{BMO}) = \frac{1}{3}$; c- $OB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; d- $\sin(\widehat{BOM}) = \frac{1}{3}$
- e- $\cos(\widehat{BOM}) = \frac{2}{3}$; f- $(\sin(\widehat{BOM}))^2 + (\cos(\widehat{BOM}))^2 = 1$.

Situation - Problème

On considère dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, un cercle (C) de centre O et de rayon 1.



Choisit un point S sur le diamètre $[BB']$.

- 1) Combien de points M du cercle (C) se projettent orthogonalement en S sur (OB) ?
- 2) Par symétrie, que peux-tu dire de leurs abscisses dans le repère $(O ; \vec{OA} ; \vec{OB})$?
- 3) Compare les angles géométriques $\widehat{AOM}$ correspondants.
- 4) On pose $OS = b$. Soit M le point du cercle (C) d'abscisse positive et d'ordonnée b . Soit C le projeté orthogonal de M sur (OA) .
 - a- Où se situe le point M si : $b = 1$? si $b = -1$? si $b = 0$?
 - b- Si $b = \frac{1}{2}$, détermine l'angle géométrique : $\widehat{AOM}$.
 - c- Détermine b pour que M appartienne à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AOB}$.
- 5) On appelle $(a ; b)$ les coordonnées d'un point M du cercle (C).
 - a- Etablie une relation entre a et b à l'aide du théorème de Pythagore.
 - b- Si $|b| = \frac{1}{3}$, détermine les valeurs possibles de a .
 - c- Place sur le cercle (C) les points M correspondants.

NB : le point S marqué sur la figure est une des positions possibles de S . Il va alors de soit que le réel b aussi est variable

Cours

I- RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES DES ANGLES AIGUS DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Activité 1:

Soit C un cercle de centre O et de rayon 1, L et M deux points du cercle.

- Faites une figure. Colorier l'un en bleu et l'autre en vert les deux arcs du cercle C ayant pour extrémité L et M.
- Indique par les mêmes couleurs les angles au centre correspondants.
- On suppose que l'angle en bleu vaut 90° , donne alors les longueurs des arcs bleus et verts correspondants puis donne la relation entre les deux.

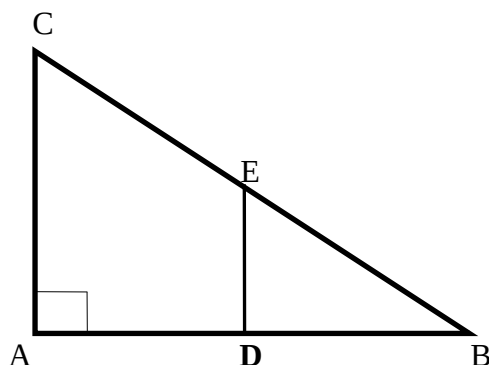
Activité 2:

On considère le vélo d'un cycliste dont chacune des deux roues a un rayon égal à R (en centimètre).

- On suppose ici qu'à chaque coup de pédale, chacune des deux roues effectue un tour complet.
 - Exprime en fonction de R la distance parcourue par le cycliste à chaque coup de pédale.
 - Calcule en fonction de R la distance parcourue par le cycliste avec trois coups de pédales.
 - Calcule les deux distances précédentes pour des roues de diamètre 60 cm.
- Reprendre la question 1), dans le cas où à chaque coup de pédales, chacune des roues effectue un demi-tour.
- On suppose qu'à chaque coup de pédale, le rayon d'une roue tourne d'un angle α (en degré).
Exprime en fonction R et α la distance parcourue par le cycliste à chaque coup de pédale.

Activité 3:

On considère les triangles ABC et DBE comme l'indique le schéma ci-dessous.



- Calcule et compare les rapports suivants :

a) $\frac{AC}{BC}$ et $\frac{DE}{BE}$; b) $\frac{AB}{BC}$ et $\frac{DB}{BE}$; c) $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{DE}{DB}$; d) $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{DB}{DE}$

2) Définir les rapports trigonométriques d'un angle α .

$$\text{Sin}\alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{Tang}\alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$$

$$\text{Cotang}\alpha = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{coté opposé}}$$

Ainsi le Cosinus, le Sinus, la tangente et la cotangente des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ peuvent être définies comme suite :

$$\text{Cos}\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Cos}\hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Sin}\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Sin}\hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tang}\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Tang}\hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{a}$$

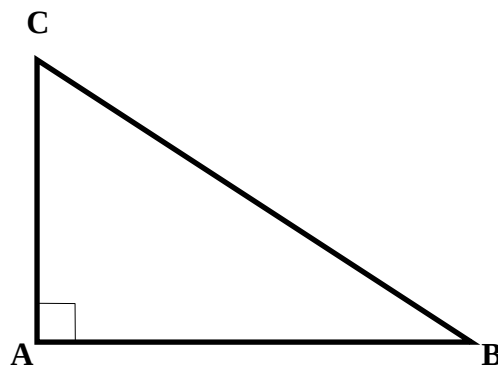
$$\text{Cotang}\hat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cotang}\hat{C} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{b}$$

II- RELATIONS ENTRE LES RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES D'UN ANGLE AIGU.

Activité :

On considère un triangle ABC rectangle en A comme l'indique la figure ci-dessous.



A partir de la définition des rapports trigonométriques, montrer que :

a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; b) $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$; c) $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; d) $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

1) Relation fondamentale de la trigonométrie

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la relation fondamentale de la trigonométrie est donnée par la formule suivante :
 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

NB : pour tout angle α , on a : $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Ainsi de la relation fondamentale de la trigonométrie, nous en déduisons les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \diamond \cos^2\alpha &= 1 - \sin^2\alpha & \text{et} & \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha. \\ \diamond \tan^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 & \text{et} & \quad \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 \end{aligned}$$

Evaluation

- 1) On donne $\cos\alpha = 0,423$. Calculer : $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$. (α est un angle aigu).
- 2) On donne $\tan\alpha = 1,428$. Calculer : $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. (α est un angle aigu).

III- UNITES DE MESURE DES ANGLES.

Les principales unités de mesures des angles sont : le **degré, le radian et le grade**.

Changement d'unités et formules de conversion :

Pour un angle donner, soit **d** sa mesure en degré, **r** sa mesure en radian et **g** sa mesure en grade, On a le rapport suivant : $\frac{d}{180^\circ} = \frac{r}{\pi \text{ rds}} = \frac{g}{200 \text{ g rd}}$.

Les sous-multiples du degré sont : la minute notée « ' » et la seconde notée « '' ».
Ainsi : $1^\circ = 60'$ et $1' = 60''$. Donc $1^\circ = 60 \times 60 = 3600''$

Evaluation

- 1) Calculer α sachant que : a) $\sin\alpha = 0,5253$; b) $\cos\alpha = 0,6214$; c) $\tan\alpha = 1,029$.
- 2) Exprimer en radian puis en grade les angles dont les mesures en degré sont données par : 0° ; 30° ; 120° .
- 3) Déterminer : a) $\sin 43^\circ 26'$; b) $\cos 32^\circ 25'$; c) $\tan 28^\circ 17'$.

IV- Détermination des rapports trigonométriques des angles remarquables

1) Détermination du Sinus et du Cosinus de 45°:

Activité 1 :

Construis un triangle ABC rectangle et isocèle en A de côté $AB = AC = \mathbf{a}$ et $BC = \mathbf{b}$.
Où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont tous des réels positifs donnés.

- a- Détermine en degré la mesure de chacun des angles $\widehat{ABC} = \hat{B}$ et de $\widehat{ACB} = \hat{C}$.
- b- Détermine la longueur de BC en fonction de $\mathbf{a}$.
- c- Calcule $\sin 45^\circ$ et $\cos 45^\circ$ puis en déduis les valeurs exactes de $\tan 45^\circ$ et $\cot 45^\circ$.

2) Détermination du Sinus et du Cosinus de 30° et de 60°:

Activité 2 :

Construis un triangle ABC équilatéral de base AB tel que $AB = AC = BC = \mathbf{a}$.
Soit H le pied de la hauteur issue de C, on pose $CH = \mathbf{b}$.

Ainsi, on considère le triangle rectangle AHC.

- 1) a- Détermine $\mathbf{b}$ en fonction de $\mathbf{a}$.
- b- Détermine en degré la mesure de chacun des angles aigus du triangle ABC.
- c- Déduis de ce qui précède, la valeur de chacun des angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{HCB}$, puis
- d- Calcule les valeurs exactes de : $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\tan 30^\circ$ et $\cot 30^\circ$.
- 2) De même Calcule les valeurs exactes de : $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 60^\circ$ et $\cot 60^\circ$.

Que constates – tu ?

Ainsi nous pouvons résumer les rapports trigonométriques des angles remarquables dans un tableau appelé : **tableau des rapports trigonométriques des angles remarquables.**

3) Rapports trigonométriques des angles remarquables.

Degrés	Radians	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente
0°	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

180	π	0	-1	0	∞
360°	2 π	0	1	0	∞

Evaluation

En utilisant le tableau des angles remarquables trigonométriques, déterminer l'angle α en puis radian en degré dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot \alpha = \sqrt{3} \end{cases}$ h) $\begin{cases} \cot \alpha = 1 \\ \tan \alpha = 1 \end{cases}$

4) Cercle trigonométrique.

Définition :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ de sens direct.

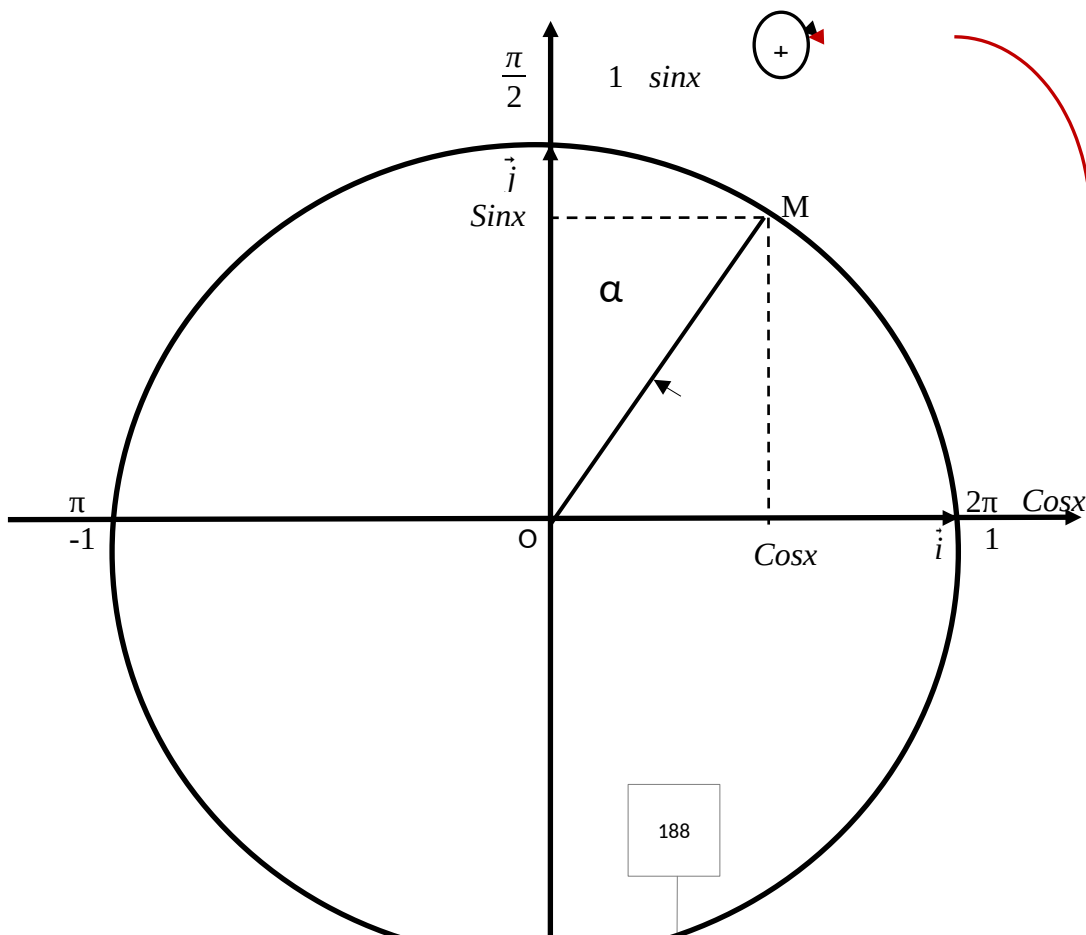
On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre **O** et de rayon $r=1 = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$.

Le sens positif du cercle trigonométrique est le sens contraire de parcourt des aiguilles d'une montre.

A tout point du plan correspond un point M du cercle dont les coordonnées dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ désignent respectivement le cosinus et le sinus de l'angle $(\vec{O}\vec{i} ; \vec{O}\vec{M}) = \alpha$.

A tout point du plan, il correspond un point M du cercle et un réel x désignant la mesure de l'angle $(\vec{O}\vec{i} ; \vec{O}\vec{M})$.

C'est pour quoi on voit souvent : $\cos x$; $\sin x$; $\tan x$ et $\cot x$.



$$\frac{3\pi}{2} - 1$$

Evaluation

En utilisant le cercle trigonométrique, détermine : le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente des nombres réels suivants :

a) 2π ; b) 3π ; c) $\frac{4\pi}{3}$; d) $\frac{3\pi}{2}$; e) -5π ; f) $\frac{5\pi}{6}$

V- RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES DES ANGLES SUPPLEMENTAIRES ET COMPLEMENTAIRES.

1) Angles supplémentaires :

Activité :

1) Calcule : **a)** $60^\circ + 120^\circ$; **b)** $30^\circ + 150^\circ$; **c)** $\frac{\pi}{3} \text{ rd} + \frac{2\pi}{3} \text{ rd}$; **d)** $\frac{\pi}{4} \text{ rd} + \frac{3\pi}{4} \text{ rd}$; **e)** $\frac{5\pi}{6} \text{ rd} +$

$\frac{\pi}{6} \text{ rd}$.

2) Place sur le cercle trigonométrique les points correspondants à 60° et 120° .

3) Trace à la règle et mesure à l'aide de l'écartement du compas le $\sin 60^\circ$ et $\sin 120^\circ$ puis le $\cos 60^\circ$ et $\cos 120^\circ$.

4) Compare les quantités $\sin 60^\circ$ et $\sin 120^\circ$ puis $\cos 60^\circ$ et $\cos 120^\circ$.

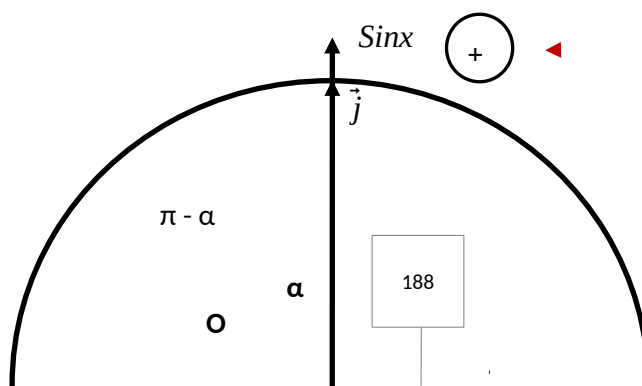
Définition :

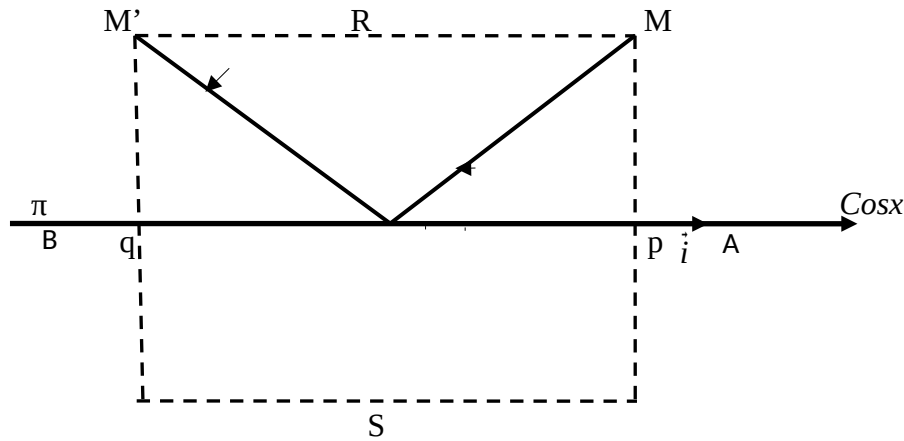
Deux angles sont supplémentaires si leur somme est égale à 180° ou $\pi \text{ rd}$ ou 200gr .

Exemple : (60° et 120°) ou ($\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$).

On peut aussi écrire (60° et $180^\circ - 60^\circ$) ou ($\frac{\pi}{3}$ et $\pi - \frac{\pi}{3}$).

Ainsi plaçons ces deux angles sur le cercle trigonométrique :





D'une manière générale, les angles (α et $180^\circ - \alpha$) sont supplémentaires.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé ($o ; \vec{i} ; \vec{j}$), trace le cercle de centre o et de rayon l'unité c'est-à-dire 1.

Soit M un point du cercle et α la mesure de l'angle ($\widehat{OA ; OM}$).

Le point M' tel que la mesure de l'angle ($\widehat{OA ; OM'}$) = $180^\circ - \alpha$ est le supplémentaire de α .

Considérons le triangle OPM .

$$\sin \alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1} = OP$$

Soit un point M du cercle et α l'angle associé. On appelle $\cos \alpha$, l'abscisse du point M et $\sin \alpha$ sont ordonnée. On note $M (\cos \alpha ; \sin \alpha)$.

De même $M' \left(\begin{matrix} \cos (180^\circ - \alpha) \\ \sin (180^\circ - \alpha) \end{matrix} \right)$

D'autre part $M'(\overline{OQ}; \overline{OR})$ avec $\overline{OR} = \overline{OS} = -\overline{op} \Rightarrow M'(\overline{OQ}; -\overline{OP})$.
Par suite $M'(-\cos \alpha ; \sin \alpha)$.

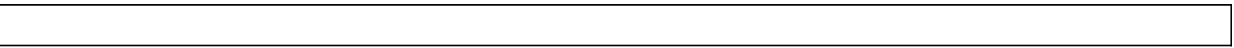
Conclusion :

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \text{ ou } \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \text{ ou } \sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{Tang} (180^\circ - \alpha) = -\text{Tang} \alpha \text{ ou } \text{Tang} (\pi - \alpha) = -\text{Tang} \alpha$$

$$\text{Cotang} (180^\circ - \alpha) = -\text{Cotang} \alpha \text{ ou } \text{Cotang} (\pi - \alpha) = -\text{Cotang} \alpha$$



2) Angles complémentaires :

Activité :

1) Calcule : **a)** $30^\circ + 60^\circ$; **b)** $25^\circ + 75^\circ$; **c)** $\frac{\pi}{4} \text{ rd} + \frac{\pi}{4} \text{ rd}$; **d)** $\frac{\pi}{2} \text{ rd} + (\pi \text{ rd} - \frac{\pi}{2} \text{ rd})$.

2) Place sur le cercle trigonométrique les points M et M' tel que $(\overrightarrow{O_i} ; \overrightarrow{OM}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{O_i} ; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

3) Mesure avec le compas le $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\cos(\alpha)$ puis compare les.

De même Mesure avec le compas le $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et $\sin(\alpha)$ puis compare les.

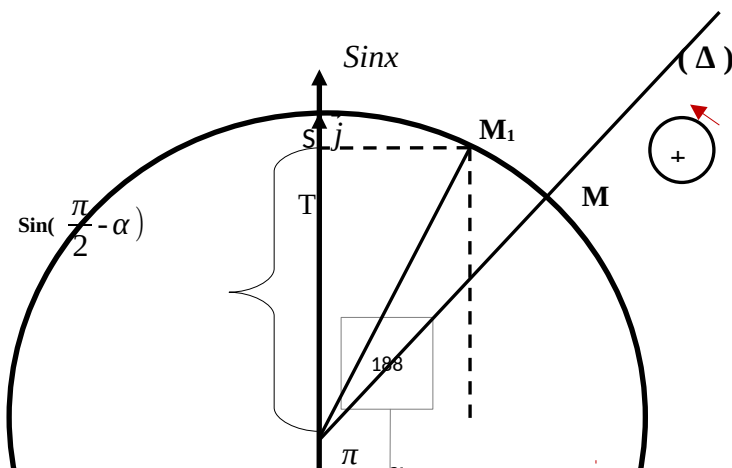
Que peux – tu conclure ?

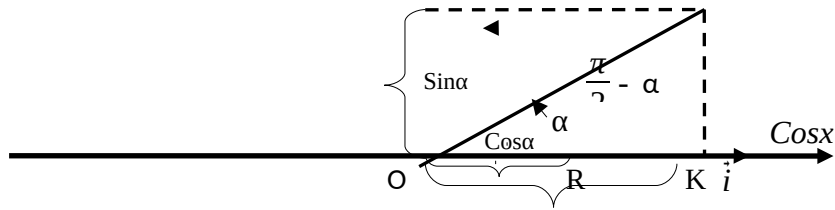
Définition :

Deux angles sont complémentaires si leur somme est égale à 90° ou $\frac{\pi}{2} \text{ rd}$ ou 100 gr .

Exemple : $(180^\circ \text{ et } -90^\circ)$ ou $(\pi \text{ et } -\frac{\pi}{2})$.

Ainsi plaçons ces deux angles sur le cercle trigonométrique :





$$\begin{cases} OK = OS \\ OR = OT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \end{cases}$$

3) Angles différents de π c'est-à-dire α et $\alpha + \pi$:

Activité :

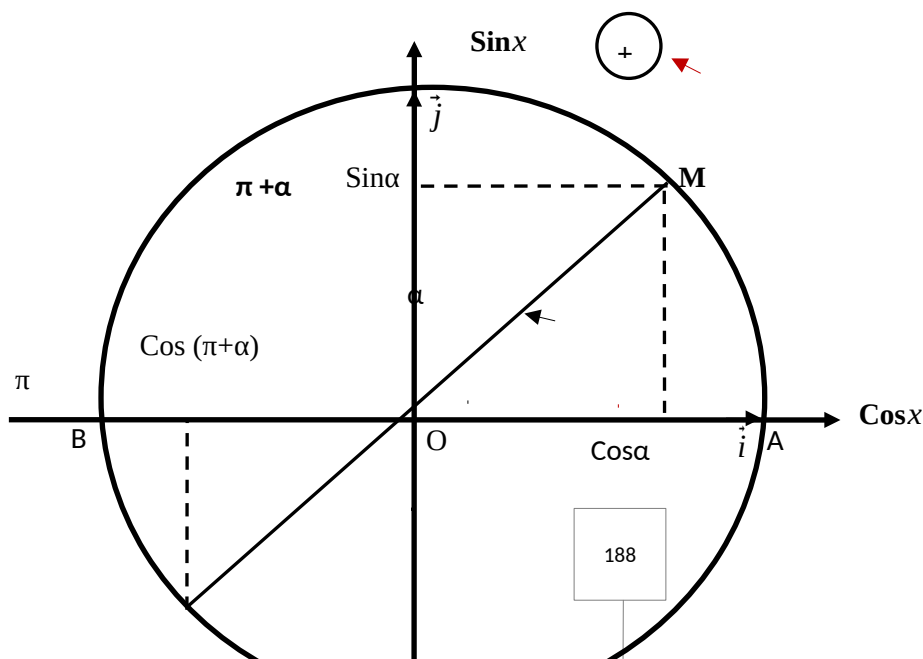
a) Place sur le cercle trigonométrique les points M et M' tel que $\widehat{(\vec{O}i ; \vec{OM})} = \alpha$ et $\widehat{(\vec{O}i ; \vec{OM}')} = \pi + \alpha$.

Tu constates que les points M et M' sont symétriques par rapport au point O.

b) Détermine : $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ puis $\cos (\pi + \alpha)$ et $\sin (\pi + \alpha)$.

c) Compare à l'aide de ton compas $\cos (\pi + \alpha)$ et $\cos \alpha$ puis $\sin (\pi + \alpha)$ et $\sin \alpha$.
Déduis de ce qui précède les expressions de $\tan (\pi + \alpha)$ et $\cot (\pi + \alpha)$ en fonction respectivement de $\tan (\alpha)$ et $\cot (\alpha)$.

Que peux-tu conclure ?



$$M' \text{ --- } \sin(\pi + \alpha)$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ou } \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \text{ ou } \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha \text{ ou } \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cotan(180^\circ + \alpha) = \cotan\alpha \text{ ou } \cotan(\pi + \alpha) = \cotan\alpha$$

4) Angles différents d'un droit ($\frac{\pi}{2}$) c'est-à-dire ($\frac{\pi}{2} + \alpha$) et α ou ($90^\circ + \alpha$) et α

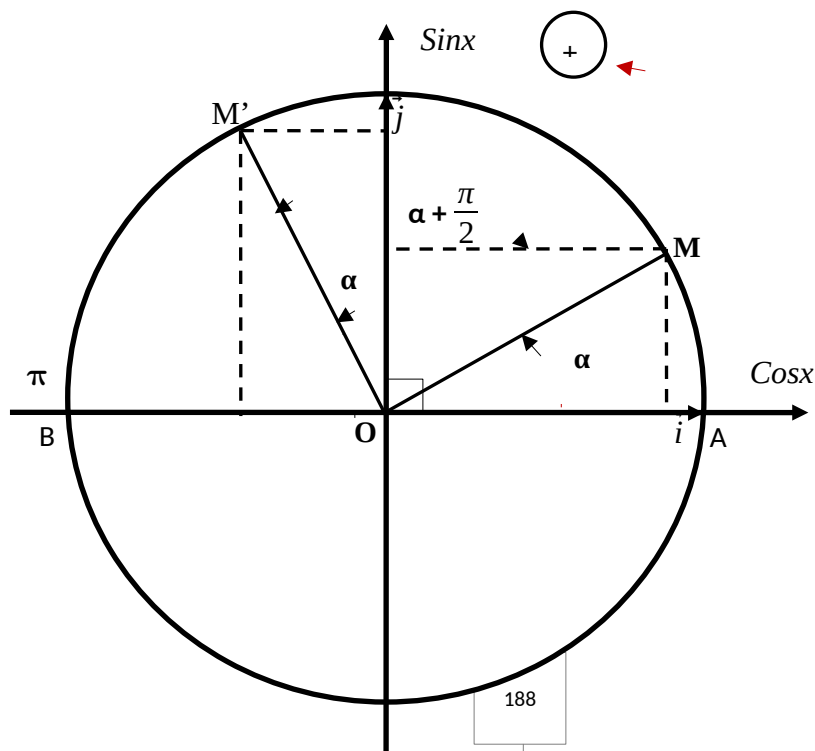
Activité :

a) Place sur le cercle trigonométrique les points M et M' tel que $(\vec{O}i ; \vec{OM}) = \alpha$ et $(\vec{O}i ; \vec{OM}') = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

b) Mesure avec le compas le $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$; $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$; $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

Compare $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ et $\sin(\alpha)$ puis $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

Que peux-tu conclure ?



$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha \quad \text{ou} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha \quad \text{ou} \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha \quad \text{ou} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha \quad \text{ou} \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

1) Angles opposés : α et $-\alpha$

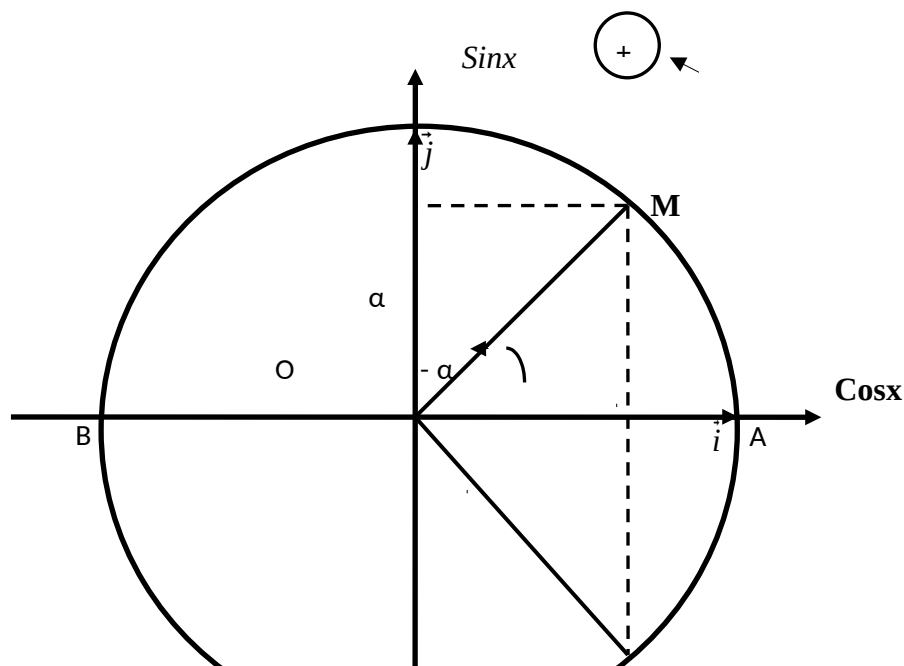
Activité :

a) Place sur le cercle trigonométrique les points M et M' tel que $(\vec{O}i ; \vec{OM}) = \alpha$ et $(\vec{O}i ; \vec{OM}') = -\alpha$.

b) Mesure avec le compas $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ puis $\sin(-\alpha)$ et $\cos(-\alpha)$.

Compare $\sin(\alpha)$ et $\sin(-\alpha)$ puis $\cos(\alpha)$ et $\cos(-\alpha)$.

Que peut – tu conclure ?





..... M'

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot\alpha(-\alpha) = -\cot\alpha$$

NB :

Pour tout nombre réel x on a :

- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ avec $(k \in \mathbb{Z})$.
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

EXERCICES

Exercices 1 :

1) Calculer $\cos x$, sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (avec $\frac{\pi}{2} < x < \pi$).

2) Calculer $\sin x$ et $\cos x$, sachant que : $\tan x = \sqrt{2}$ (avec $x \in [0 ; \pi]$)

3) Calculer $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\tan \frac{\pi}{5}$, sachant que : $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

4) Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$, sachant que : $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercices 2 :

Démontrer les égalités suivantes :

- 1) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cdot \cos x$
- 2) $(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = \sin^3 x - \cos^3 x$
- 3) $(\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = 4\sin x \cdot \cos x$
- 4) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = 1$
- 5) $\sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x + \cos^3 x + \cos x \cdot \sin^2 x - \sin x - \cos x = 0$
- 6) $\sin x \cdot \cos x \cdot \tan x + \cos^2 x = 1$

Exercices 3:

1) Simplifier les expressions suivantes :

- a- $A = \cos(\pi - x) + \sin(\pi + x) - \cos(2\pi - x) + \sin(3\pi + x)$.
- b- $B = \cos(-x) + \sin(-x) - \cos(2\pi - x) + \sin(3\pi + x)$.
- c- $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

2) Calculer les expressions suivantes :

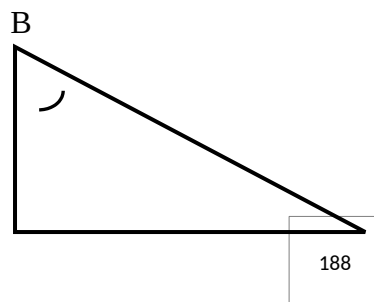
- a- $A = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right)$.
- b- $B = \cos(-2\pi) + \sin(-3\pi) - \cos\left(-\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi)$.
- c- $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \pi\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.
- d- $D = 3\sin\left[\pi \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - \tan\left[\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercices 4:

- 1) Soit ABC un triangle tel que $AB = x$; $AC = 4$ et $BC = x + 2$.
Déterminer x pour que ABC soit rectangle en A.
- 2) Soit ABC un triangle rectangle en A. On donne : $AB = x$; $AC = 4$ et $BC = x + 2$.
Déterminer x sachant que $\hat{C} = 30^\circ$.

Exercices 5:

Soit ABC un triangle rectangle en A et $\alpha = \widehat{ABC}$.





Exprimer en fonction de α les rapports suivants :

a) $\frac{BC}{AB}$; b) $\frac{AC}{AB}$; c) $\frac{AC}{BC}$

Exercices 6:

Un bâton est planté verticalement dans le sol, supposé horizontal. Il dépasse de 3m la surface du sol et projette une ombre de 4,20 m.

Quelle est la hauteur du soleil au dessus de l'horizon ?

NB : on désigne par **hauteur du soleil**, l'angle sous le quel le soleil est vu à partir de l'horizontale.

Exercices 7:

Soit ABC un triangle quelconque et H la projection orthogonale de A sur $[BC]$.

On donne $AB = 2\sqrt{3}$; $AH = 3$ et $CH = \sqrt{3}$.

- 1) Calculer $\cos \hat{B}$ et $\sin \hat{B}$. Quelle est la mesure de $\hat{B}$?
- 2) Calculer $\cos \hat{C}$ et $\sin \hat{C}$. Quelle est la mesure de $\hat{C}$?
- 3) Quelle est la valeur de l'angle $\hat{A}$?
- 4) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercices 8:

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 70^\circ$; $AB = 8$ et $AC = 10$.

Soit H le pied de la hauteur issue de C.

- 1) Calculer AH et HC. Déduisez-en BH.
- 2) A l'aide du théorème de Pythagore, calculer BC.

Exercices 9:

Soit ABC un triangle isocèle de base AB.

On donne $\widehat{ABC} = 45^\circ$ et $BA = 8$ cm.

- 1) Construire le triangle ABC.
- 2) H étant le pied de la hauteur issue de A, calculer les longueurs des cotés des triangles BHA et AHB.

Exercices 10:

Soit AHB un triangle rectangle en H. C est un point du segment $[HB]$.

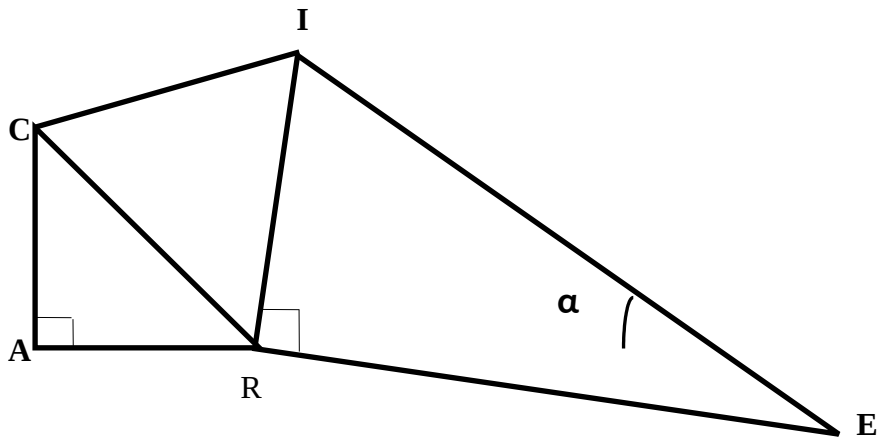
On donne : $AH = 8$ cm ; $\widehat{HAC} = 23^\circ$ et $\widehat{HAB} = 51^\circ$

- 1) Faire une figure représentant cette situation.
- 2) Calculer BC.

Exercices 11 :

A l'aide d'une tige d'acier, on réalise la structure suivante dans laquelle on a :

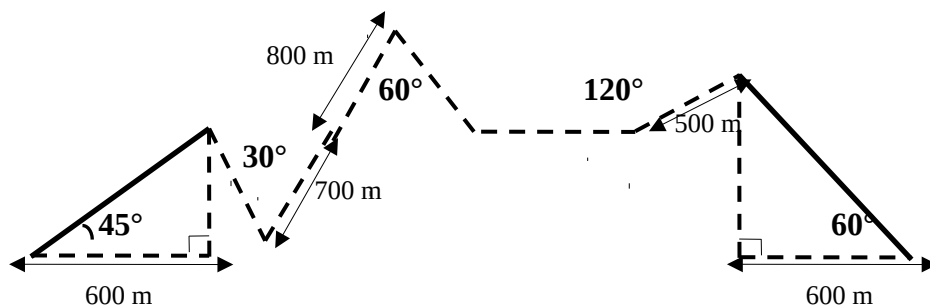
- ARC est isocèle rectangle en A
- IRE est rectangle en R avec $\alpha = \frac{\pi}{6}$
- CRI est équilatéral.
- IE = 10 cm



- 1) Calculer la longueur de la tige c'est-à-dire tous les côtés du montage permettant de réaliser la structure.
Considérons cette fois ci la portion ACR de base RC et soit K le pied de la hauteur issue de A.
- 2) Déterminer :
 - a) La hauteur AK.
 - b) Calculer la surface du triangle ARC.

Exercices 12 :

Le trajet Médine Koulouba a le profil suivant :



Fonctions numériques d'une variable réelle

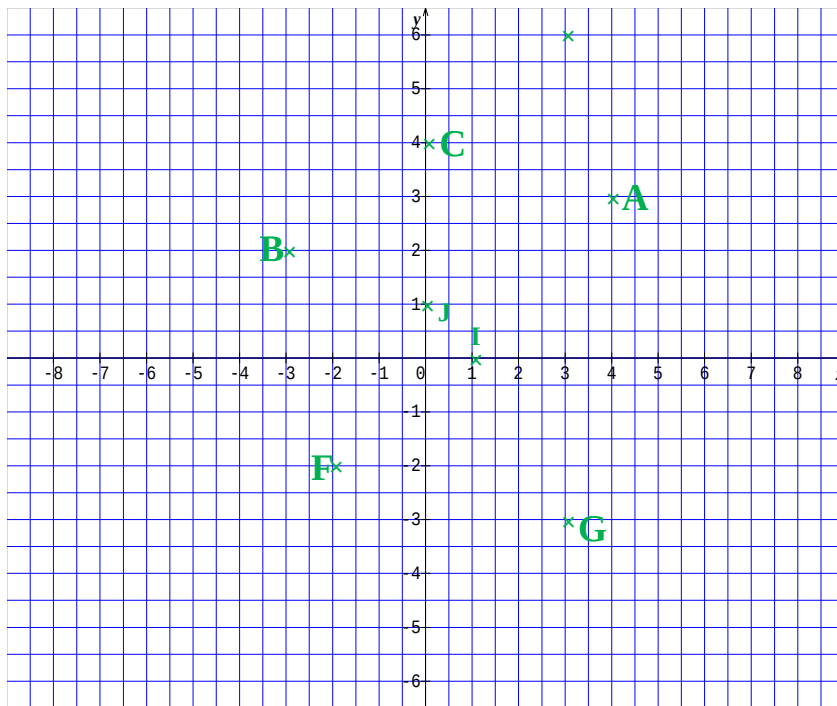
Evaluation diagnostique

Activités

Trouve les bonnes réponses pour chacune des questions suivantes :

On considère les points A ; B ; C ; D ; E et F dans le repère (O ; I J) comme l'indique la figure suivante :

E



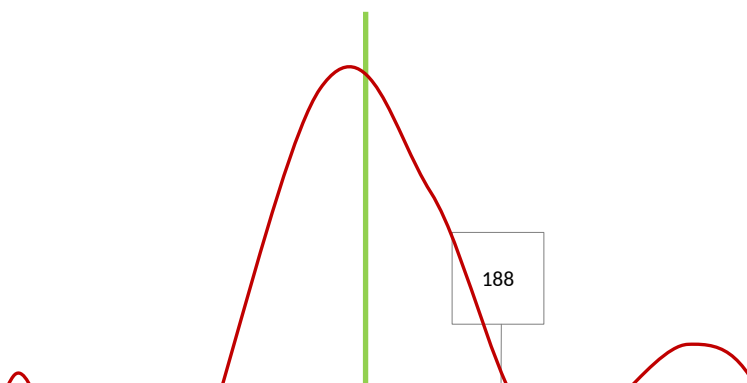
- a- A et B ont même abscisse.
- b- A et B ont même ordonnée.
- c- L'ordonnée de C est 0.
- d- L'abscisse de C est nulle.
- e- L'abscisse de A est positive.
- f- F et G sont ordonnée négative.
- g- L'ordonnée de est inférieure à l'ordonnée de E.

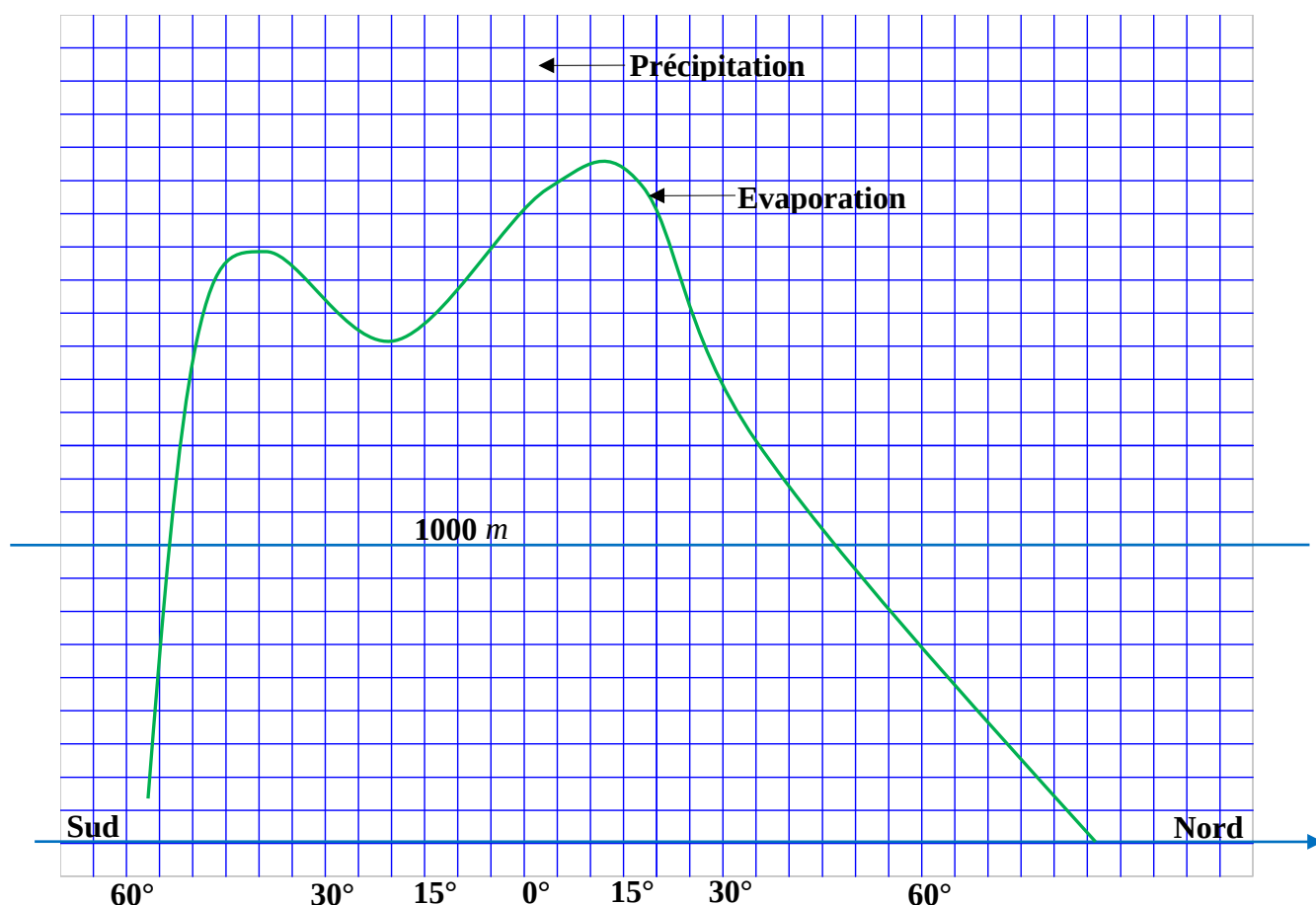
Situation - Problème

Etude bilan

Le graphique ci-dessous représente les précipitations moyennes et l'évaporation sur le globe terrestre suivant la latitude.

Construis du bilan météorologique (précipitation – évaporation) puis étudier ce bilan.





Sommaire

1- Généralité.....	19
2- Ensemble de définition d'une fonction.....	20
3- Divers manières de déterminer une fonction.....	21
4- Egalité et coïncidence de deux fonctions.....	24
5- Détermination algébrique et graphique des images directes et réciproques.....	27
6- Variation d'une fonction.....	34
7- Fonctions polynômes – Fonctions rationnelles.....	46

Cours

I- GENERALITE :

1) Définition :

On appelle fonction de **A** vers **B**, toute relation de **A** vers **B** qui à chaque élément de l'ensemble de départ **A** associe **0** ou **1** élément de l'ensemble d'arrivé **B**.

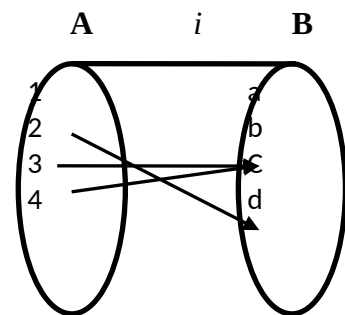
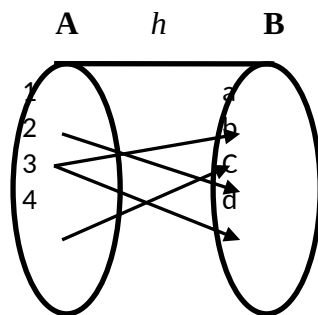
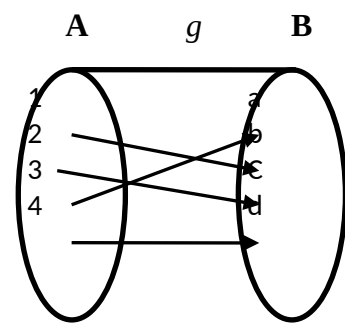
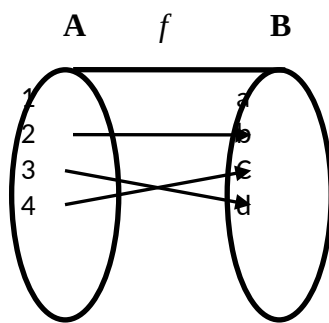
Notation :

- **A** : est appelé **ensemble de départ**.
 - **B** : est appelé **ensemble d'arrivé**.
 - x : est appelé **la variable**.
 - $f(x)$: est appelé **image de x par la fonction f** .
 - $f: A \rightarrow B$ (se lit : f de A vers B qui à tout x on associe $f(x)$).
- $$x \rightarrow f(x)$$

2) Reconnaitre une fonction à partir d'un diagramme :

Activité 1 :

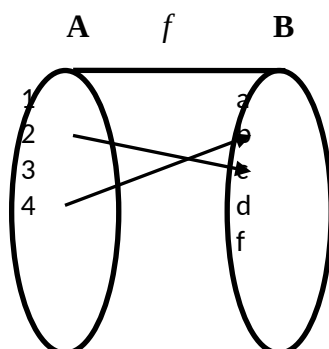
Parmi les diagrammes suivants détermine ceux qui représentent une fonction.



II- ENSEMBLE DE DEFINITION D'UNE FONCTION:

Activité :

Soit f la relation de A vers B définie par sa représentation ci-dessous.





- 1) Justifie que f est une fonction de A vers B .
- 2) Détermine les éléments de A qui ont une image dans B .

1) Définition :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction f , l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f . On note :

D_f tel que $D_f = \{x \in A ; \exists y \in B ; f(x) = y\}$

2) Ensemble de définition des fonctions (Polynômes – Rationnelles – Irrationnelles):

- Si f est une fonction polynôme à coefficient dans $\mathbb{R}$, alors $D_f = \mathbb{R}$.
Autrement dit toute fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$.
- Si f est une fonction rationnelle alors $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions polynômes. Ainsi $D_f = \{x \in \mathbb{R} ; v(x) \neq 0\}$.
- Si f est une fonction irrationnelle alors l'inconnue figure sous un ou plusieurs radicaux.
Exemple : Si $f(x) = \sqrt{u(x)} + v(x)$ où u et v sont des fonctions polynômes.
Alors $D_f = \{x \in \mathbb{R} ; u(x) \geq 0\}$.

Application :

Détermine l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1^\circ) f(x) = \frac{-x+1}{x+3} \quad 2^\circ) f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-4} \quad ; 3^\circ) f(x) = (x-2)^2$$

$$4^\circ) f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} \quad ; 5^\circ) f(x) = \frac{\sqrt{-x+2}}{-x^2+1} \quad ; 6^\circ) f(x) = \frac{x\sqrt{x-3}}{x^2+1} + 2$$

III- DIVERSES MANIERES DE DETERMINER UNE FONCTION:

Une fonction peut être déterminée de plusieurs manières par :

- { Son ensemble de départ **A** ;
Son ensemble d'arrivée **B** ;
D'un procédé permettant de savoir, pour chaque élément de **A** s'il a une image dans **B**.

- Par un programme de construction.

- Une formule explicite. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow f(x)$

- Par sa table de valeurs : $\{ (x; f(x)), x \in A; f(x) \in B \}$.

- Par sa représentation graphique : $C = \{ M(x; f(x)), x \in A; f(x) \in B \}$.

Activité 1 : (Utilisation d'une formule explicite)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{1-x}$

- Trouve l'image de : -2; -1; 2; 3; 4; 1 par f .
- Pour quelle valeur de x ; f n'est pas définie ?
- Trouve l'ensemble de définition D_f de f .

Activité 2 : (Utilisation d'une Table de valeurs)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par son tableau de variation suivant :

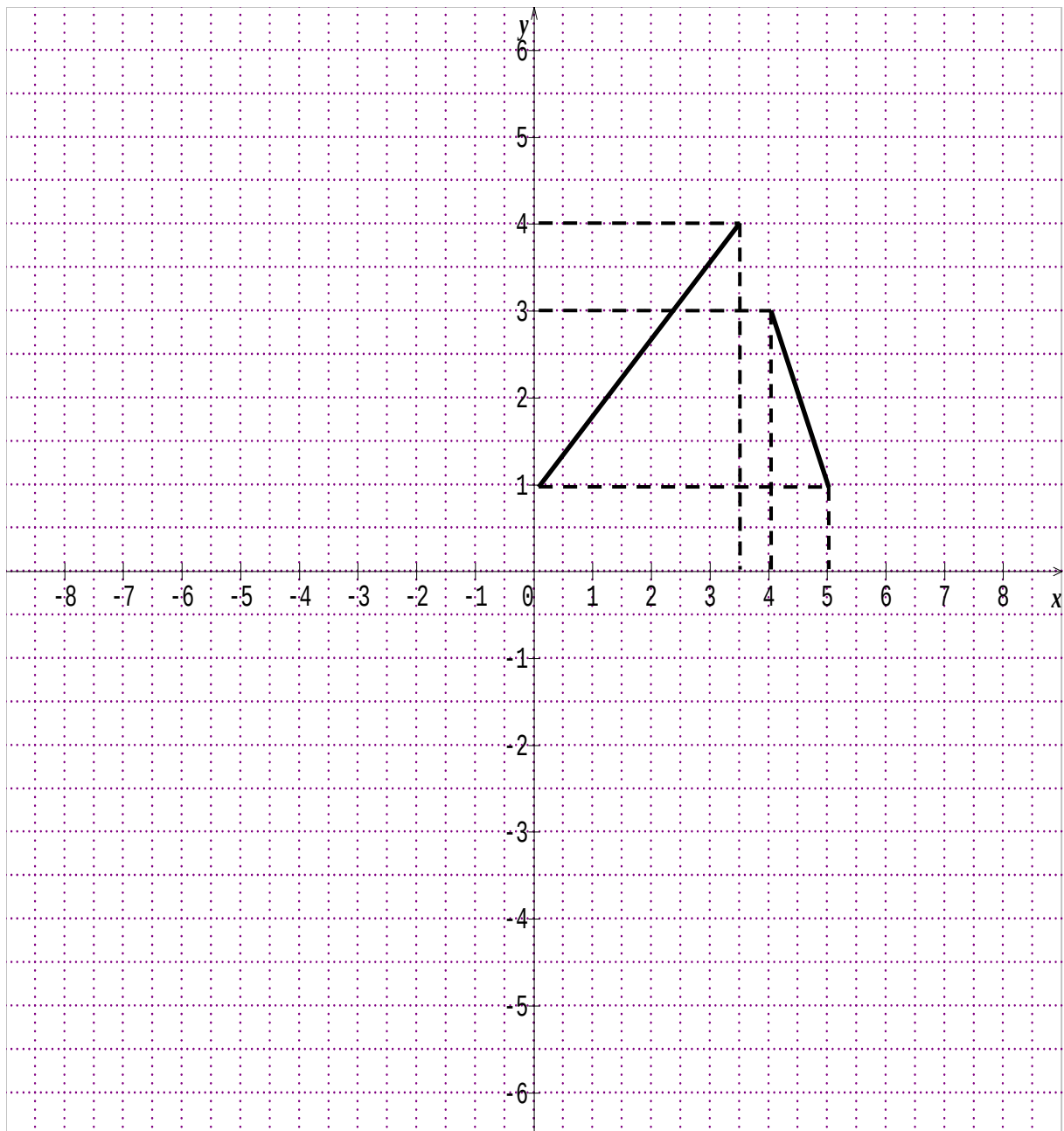
x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	1	3	6	8	7	4

- Trouve l'ensemble de définition D_f de f .
- Détermine $f(0)$; $f(4)$; $f(6)$.

Activité 3 : (Utilisation d'une Représentation graphique)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x)$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

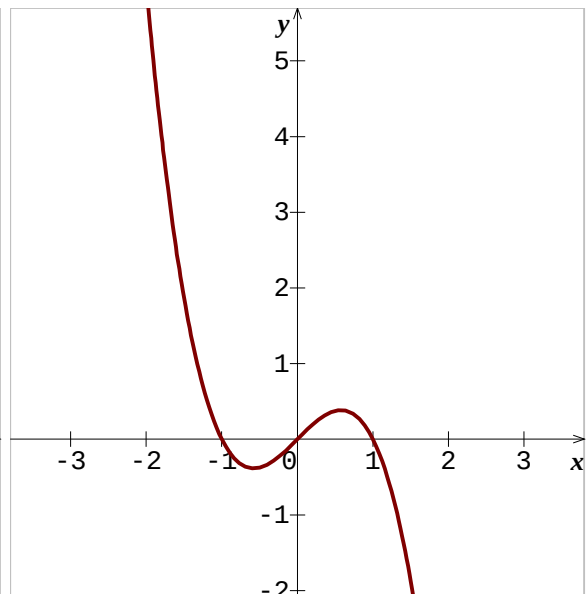
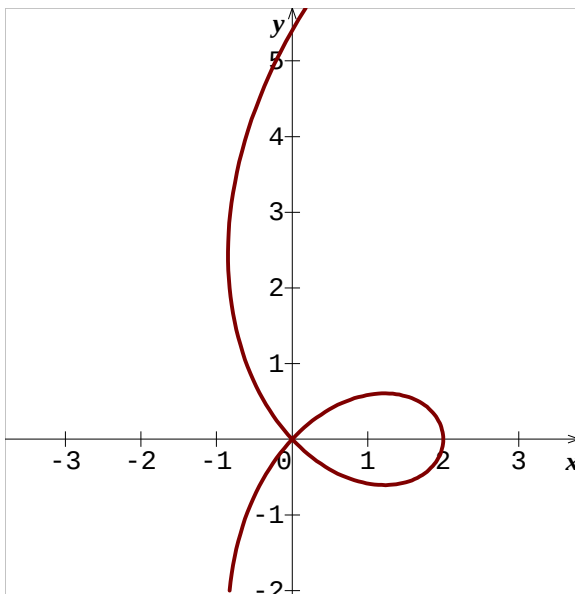
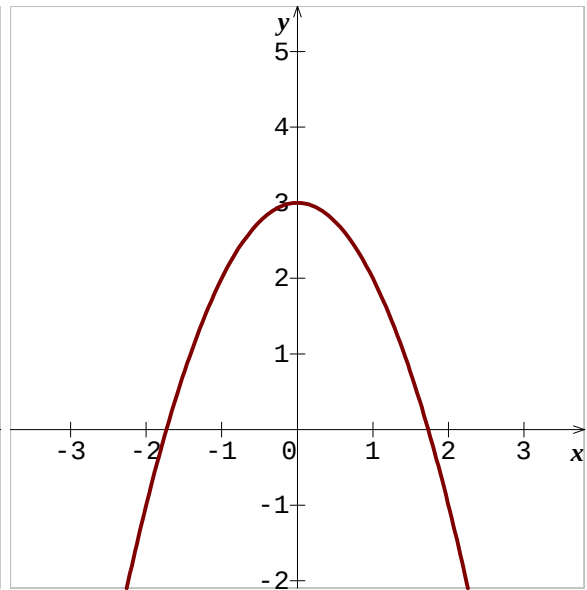
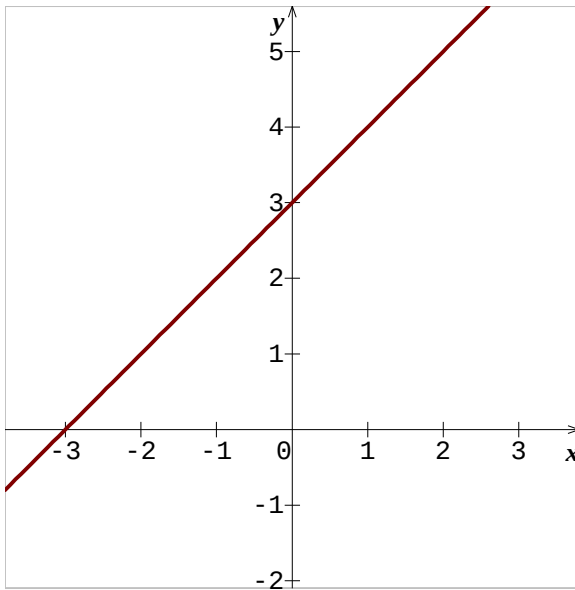


- a- Trouve l'image directe par f de chacun des nombres suivants : 0 ; 2 ; 3 ; 3,5 ; 4 et 5.
 b- Détermine l'ensemble de définition D_f de f .

NB : Par définition, la droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la représentation graphique d'une fonction en **1 ou 0 point**.

Evaluation

Identifie parmi les courbes suivantes, celles qui représentent une fonction.



IV- EGALITE – COINCIDENCE DE DEUX FONCTIONS SUR UN ENSEMBLE I ET RESTRICTION D'UNE FONCTION A UN SOUS-ENSEMBLE B DE D_f :

1) Egalité de deux fonctions :

Activité 1 :

Soient f et g deux fonctions définies par leurs diagrammes ci-dessous :



Détermine D_f et D_g puis $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$.

Activité 2 :

Soient h et k deux fonctions définies par leurs diagrammes ci-dessous



- 1) Détermine les domaines ou ensembles de définition de h et de k .
- 2) Détermine $h(1)$, $h(3)$ puis $k(1)$ et $k(3)$.
- 3) Compare : $h(1)$, $k(1)$ puis $h(3)$ et $k(3)$.

Définition :

Deux fonctions f et g ayant le même ensemble de départ A et le même ensemble d'arrivée B sont dit égales.

D'une manière pratique f et g sont égales si et seulement si : $D_f = D_g$ et pour tout x élément de D_f , $f(x) = g(x)$.

Exemple :

$$\text{Soit la fonction } f: \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad x \longmapsto x - 2$$

f et g sont égales car $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} ; x+2 \neq 0\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-2\} \text{ et } g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2}$$

$$= x - 2 \Rightarrow g(x) = f(x).$$

2) Coïncidence de deux fonctions :**Activité :**

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définie comme suite :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 1 - x \quad x \longmapsto \frac{1 - x^2}{1 + x}$$

- Donne l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g .
- Donne un avis quant à l'égalité de f et g .
- Trouve le plus grand sous ensemble A de $\mathbb{R}$ sur le quel on a : pour tout x élément de A : $f(x) = g(x)$.

Définition :

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle d'ensembles de définitions respectifs D_f et D_g . On dit que f et g coïncident sur un sous-ensemble A de $D_f \cap D_g$ si et seulement si pour tout x élément de A , $f(x) = g(x)$.

Exemple :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto |x - 2| \quad x \longmapsto -x + 2$$

On sait que par définition $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Ainsi on a : $x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$; $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ d'où le tableau du signe de $x - 2$ et de $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue est :

$$|x - 2| = -(x - 2) \text{ si } x \leq 2 \text{ c'est-à-dire } |x - 2| = -x + 2 \text{ si } x \leq 2$$

$$|x - 2| = (x - 2) \text{ si } x \geq 2 \text{ c'est-à-dire } |x - 2| = x - 2 \text{ si } x \geq 2$$

On constate que sur $]-\infty ; 2]$, $f(x) = -x + 2$ et sur $]2 ; +\infty[$, $g(x) = x - 2$

Donc sur $]-\infty ; 2]$, $f(x) = g(x)$.

D'où f et g coïncident sur $]-\infty ; 2]$.

3) Restriction d'une fonction à un sous-ensemble B de D_f :

Activité :

Soit la fonction f définie par : $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow |3-x|$

En vous inspirant de l'exemple précédent :

- a- Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- b- Ecris l'expression de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]3 ; +\infty[$.
- c- Ecris l'expression de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 2] \cup [4 ; 6]$.

On dit que la restriction de f à l'intervalle $]3 ; +\infty[$ est tel que $f(x) = x - 3$.
 De même on dit que la restriction de f à l'intervalle $]-2 ; 3] \cup [4 ; 6]$ est la fonction g telle

$$\text{que : } g(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \in]-2 ; 3] \\ x-3 & \text{si } x \in [4 ; 6] \end{cases}$$

Remarque :

Restreindre une fonction f à un sous-ensemble A de D_f signifie de limiter le nouveau domaine de f à A , autrement dit définir f en considérant A comme domaine de définition de f .

Notation :

La restriction de f à l'intervalle $A \subset D_f$ est notée :

- $f|_A$ **et se lit** « Restriction de f à A ».
- $f|_A(x)$ **et se lit** « f Restrained à A de x ».

V- DETERMINATION ALGEBRIQUE ET GRAPHIQUE DE L'IMAGE DIRECTE PUIS DE L'IMAGE RECIPROQUE D'UNE FONCTION

1) Image directe :

a- Méthode algébrique

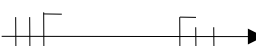
Etant donnée une fonction f de A vers B , l'ensemble des images des éléments de A par f est appelé ensemble image de A par f et est noté : $f(A)$.

NB : $f(A) \subset B$.

Soit a un réel appartenant à A , l'image de a par f est notée $f(a)$ et est appelée **image directe de a par f** .

En pratique, pour déterminer l'image directe d'un intervalle I par f , on cherche un **encadrement de $f(x)$** pour x élément de l'intervalle I .

Ainsi on retiendra ceci :

Notations	Interprétation littéraires	Désigne l'ensemble des nombres réels tel que	représentations graphiques
$]a, b[$	Intervalle ouvert : a, b	$a < x < b$	
$[a, b]$	Intervalle fermé : a, b	$a \leq x \leq b$	
$[a, b[$	Intervalle semi ouvert : a, b	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	Intervalle semi fermé : a, b	$a < x \leq b$	
$] \leftarrow, a]$	Intervalle semi ouvert extrémité : a	$x \leq a$	
$] \leftarrow, a[$	Intervalle ouvert d'extrémité : a	$x < a$	
$[a, \rightarrow[$	Intervalle semi ouvert d'origine : a	$x \geq a$	
$]a, \rightarrow[$	Intervalle ouvert d'origine : a	$x > a$	
$] \leftarrow, \rightarrow[$	Intervalle ouvert $-\infty ; +\infty$	$\mathbb{R}$	

NB:

- L'image directe d'un réel est un réel.
- L'image directe d'un ensemble est un ensemble.

- L'image directe d'un intervalle est un intervalle.

Activité 1 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
 $f(x) = -3x + 2$.

Détermine l'image directe par f de chacun des réels suivants : -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$.

Etant donné un sous-ensemble I de A , l'image directe par f de I , notée $f(I)$ est l'ensemble des images d'éléments de I tel que $f(I) = \{ y = f(x) ; x \in I \}$.

Activité 2 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
 $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$.

Détermine la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

- a- $f(1) = -2$; b) $f(-2) = 1$; c) $f : -2 \mapsto 1$
d- 1 est l'image de -2 par la fonction f .

Activité 3 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
 $f(x) = -2x + 3$.

On donne $A = \left[-1 ; \frac{1}{2} ; 2 \right]$; $B = \left[-\frac{1}{2} ; 0 ; 3 \right]$; $C = \{0\}$.

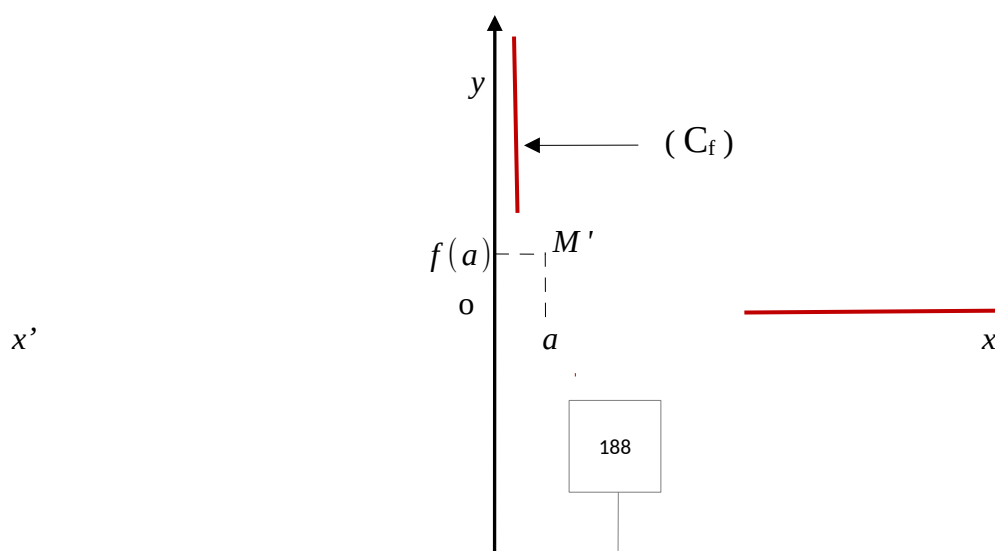
1) Détermine l'image directe par f de chacun des sous-ensembles : A ; B et C .

2) Détermine l'image directe par f de chacun des intervalles suivants :

$I = [-1 ; 1[$; $J = [0 ; 2]$; $K =]-\infty ; 3]$; $L = [2 ; +\infty[$.

b-Méthode graphique :

Etant donnée la courbe (C_f) représentant les variations d'une fonction f , Pour déterminer l'image directe d'un réel a , on trace la parallèle à l'axe $y'Oy$ passant par le point M d'abscisse $x = a$, cette droite rencontre la courbe (C_f) en un point $M'(a ; f(a))$. Pour avoir $f(a)$, on trace la parallèle à $x'Ox$ passant par M' . Celle-ci coupe $y'Oy$ en $f(a)$. Comme l'indique la figure ci-dessous.

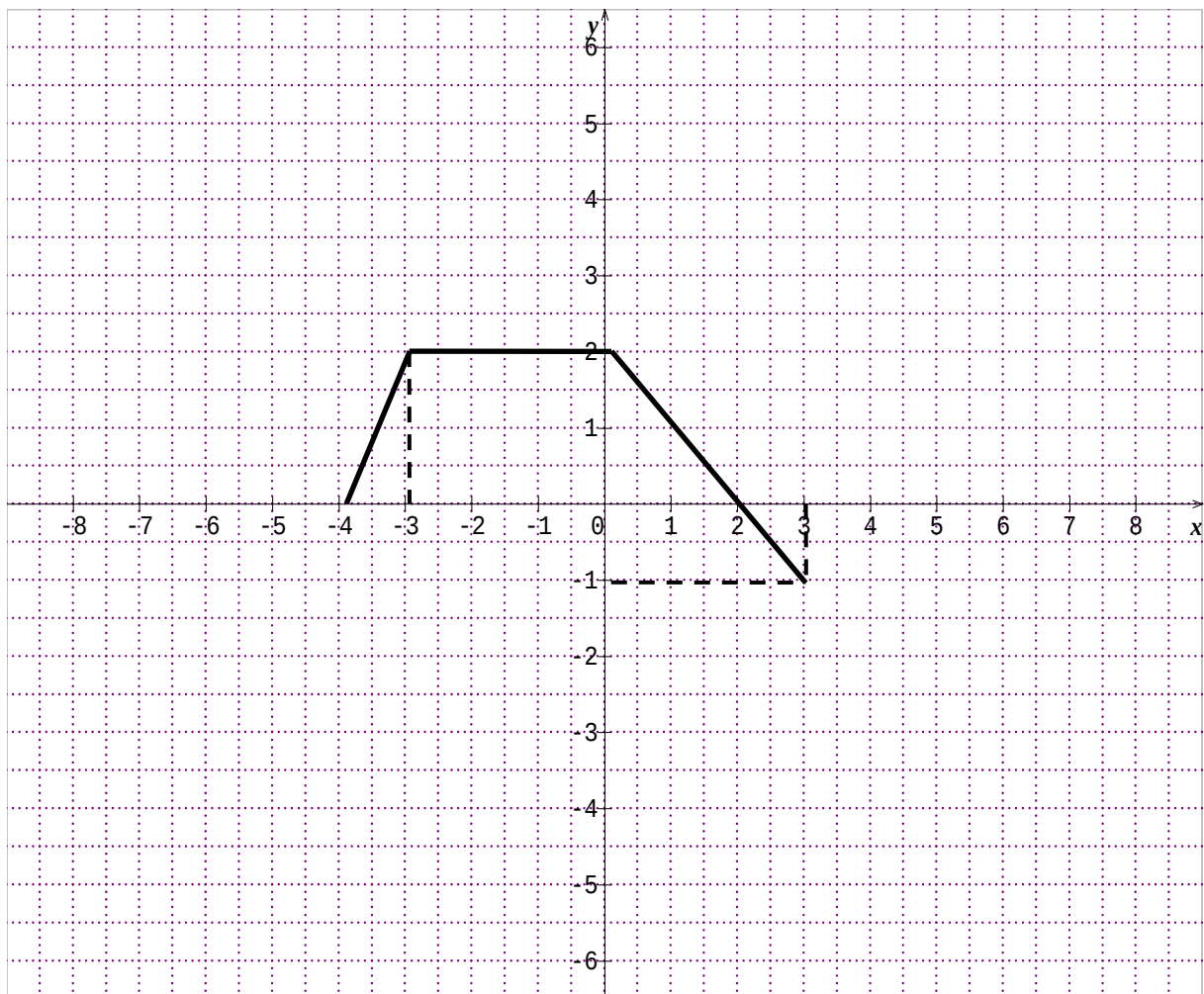


y'

Activité 4 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.



- a- Trouve l'image directe par f de chacun des réels suivants : - 4 ; - 3 ; 0 ; 2
- b- Trouve l'image directe par f de l'intervalle suivant : $]-4 ; 2]$
- c- Trouve l'image directe par f de l'ensemble suivant : $[-1 ; 1 ; 3]$

2) Image réciproque :

a) Méthode algébrique

Soit f une fonction définie de A vers B .

On appelle image réciproque d'un réel b ($b \in B$), les réels x obtenus en résolvant l'équation $f(x) = b$.

On note : $f^{-1}(b) = \{ x \in A ; f(x) = b \}$.

Soit : $\{ x_1 ; x_2 ; \dots \}$, l'ensemble solution de l'équation $f(x) = b$, on a :

$$f^{-1}(b) = \{ x_1 ; x_2 ; \dots \}.$$

Remarque :

Pour déterminer algébriquement l'image réciproque d'un intervalle I , on cherche un encadrement de la valeur de x ; car $f(x) \in I$ donne un encadrement de $f(x)$.

Exemple : On considère la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow f(x) = -x + 2$

Déterminons l'image réciproque par f des intervalles suivants : $[-2 ; 2]$; $]1 ; 3]$

Solution

$$\bullet \text{ On a : } f(x) \in [-2 ; 2] \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -x + 2 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$-4 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [0 ; 4].$$

D'où l'image réciproque par f de l'intervalle $[-2 ; 2]$ est $[0 ; 4]$ et se traduit par $f^{-1}([-2 ; 2]) = [0 ; 4]$.

$$\bullet \text{ De même on a : On a : } f(x) \in]1 ; 3] \Leftrightarrow 1 < f(x) \leq 3 \Leftrightarrow 1 < -x + 2 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow -1 < -x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1 \Leftrightarrow x \in [-1 ; 1[$$

D'où l'image réciproque par f de l'intervalle $]1 ; 3]$ est $[-1 ; 1[$ et se traduit par $f^{-1}(]1 ; 3]) = [-1 ; 1[$

Activité 1 :

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow f(x) = x - 6$

1) Détermine le réel x qui a pour image chacun des réels suivants : $-1 ; 0 ; 1 ; 2$.

2) Complète le tableau ci-dessous et construis la courbe (C_f) de f .

x	1	2	3	4
$f(x)$				

3) Détermine le réel x dans chacun des cas qui a pour image chacun des réels : $-1 ; 0 ; 1 ; 2$.

a- Par calcul algébrique.

b- En utilisant le graphique de f .

4) Détermine l'ensemble des réels x qui ont pour image chacun des intervalles suivants :

$$I = [-1 ; 1[\quad ; \quad J = [0 ; 2] \quad ; \quad K =]-\infty ; 3] \quad ; \quad L = [2 ; +\infty[.$$

Activité 2 :

$$\begin{aligned} \text{Soit la fonction } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = -3x + 1 \end{aligned}$$

a- Détermine l'image réciproque par f des réels suivants : $-1 ; 0 ; 1 ; 2$.

b- Détermine l'image réciproque par f des intervalles suivants :

$$[-3 ; 1[\quad ; \quad [0 ; 1] \quad ; \quad]-\infty ; 5] \quad ; \quad [3 ; +\infty[$$

D'une manière générale pour déterminer l'image réciproque, on résout un système d'équations simultanées à une inconnue.

b- Méthode graphique :

$$\begin{aligned} \text{Soit la fonction } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Pour déterminer l'image réciproque d'un réel b (**situé sur l'axe Oy**), on procède par projection suivant les étapes suivantes :

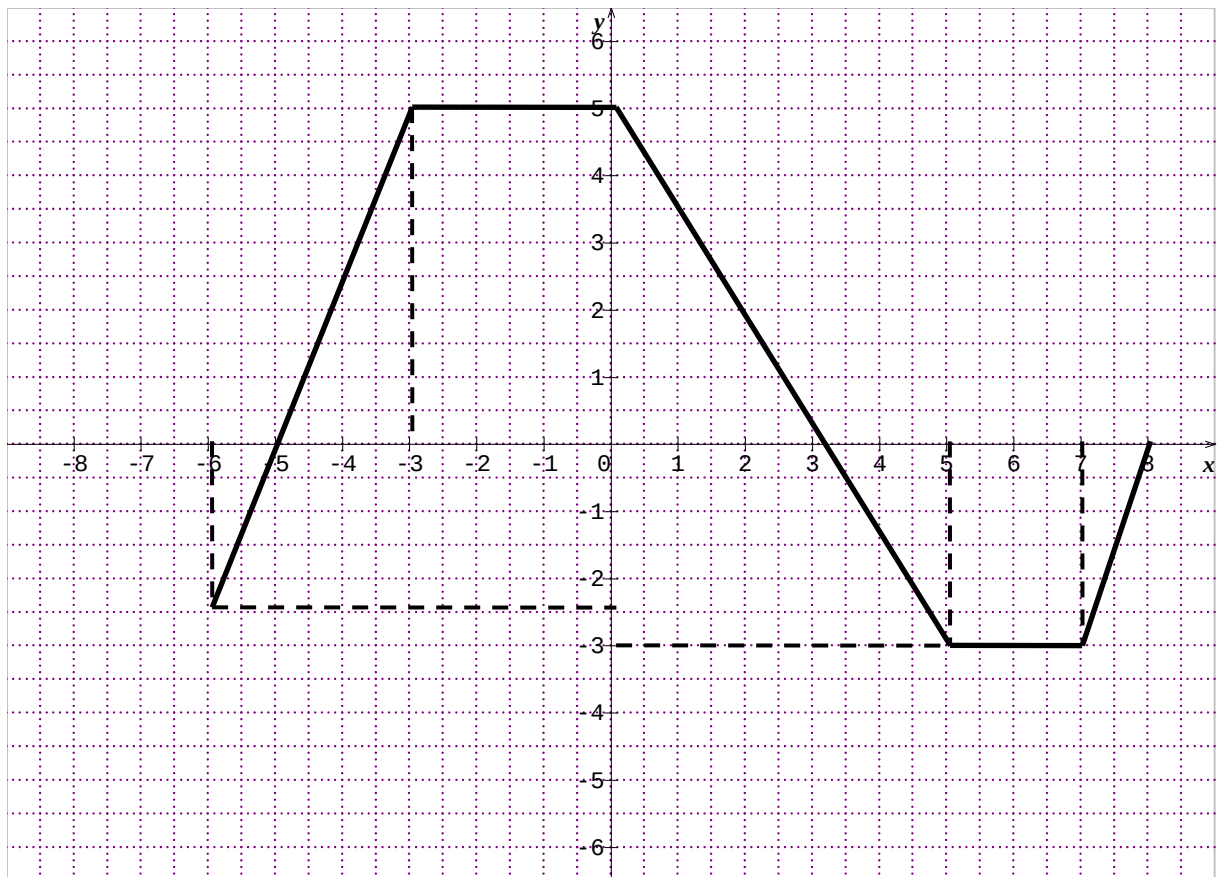
- On projette le réel b sur la courbe et parallèlement à l'axe des abscisses.
- Le point ainsi obtenu sur la courbe est à son tour projeté parallèlement à l'axe des ordonnées sur l'axe Ox .

Ainsi le réel a ainsi obtenu sur l'axe Ox est appelé : **image réciproque de b** .

Activité 3 :

$$\begin{aligned} \text{Soit la fonction } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

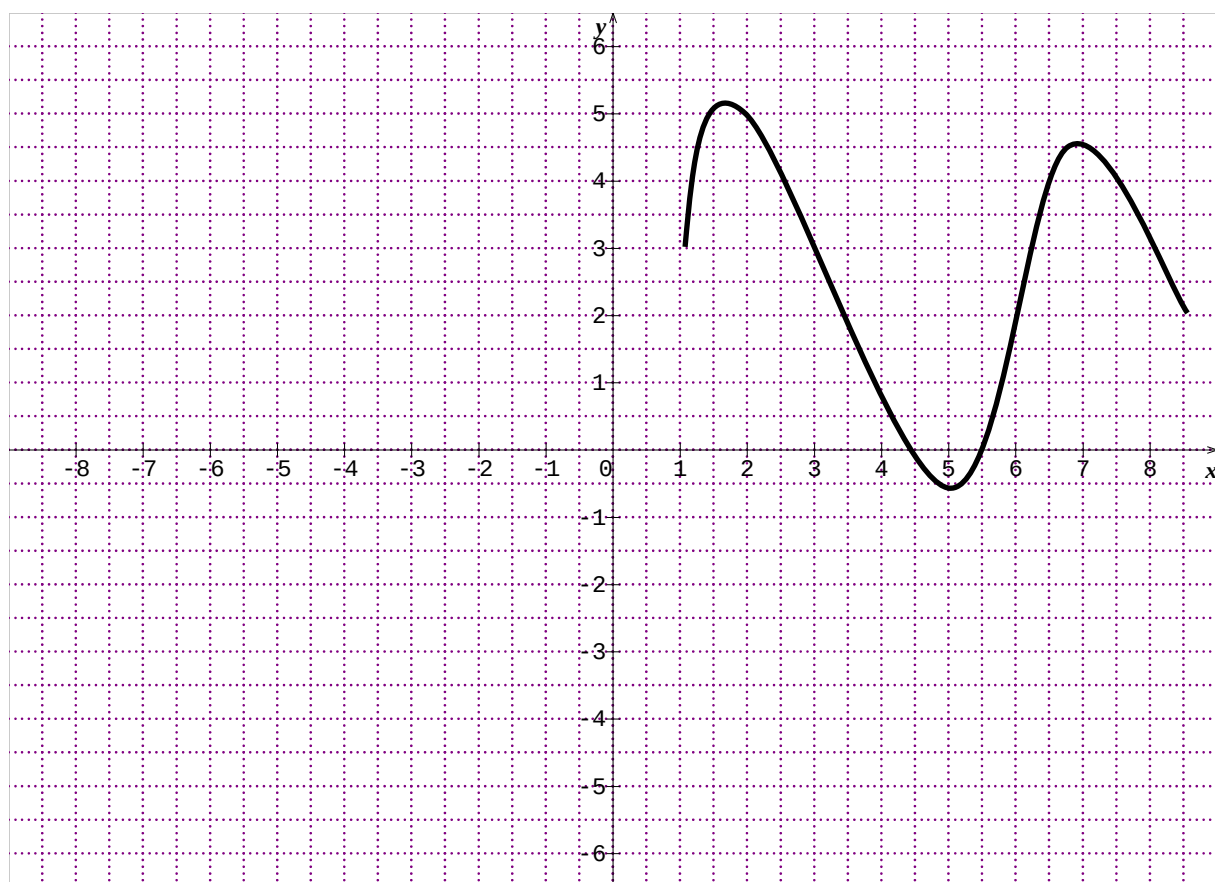
Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé



- a- Trouve l'image réciproque par f de chacun des réels suivants : -2 ; 0 ; 3
- b- Trouve l'image réciproque par f de l'intervalle suivant : $[0 ; 3]$
- c- Trouve l'image réciproque par f de chacun de l'ensemble suivant : $[-2,5 ; 3]$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8,5]$ et représenté par la courbe (C) ci dessous :

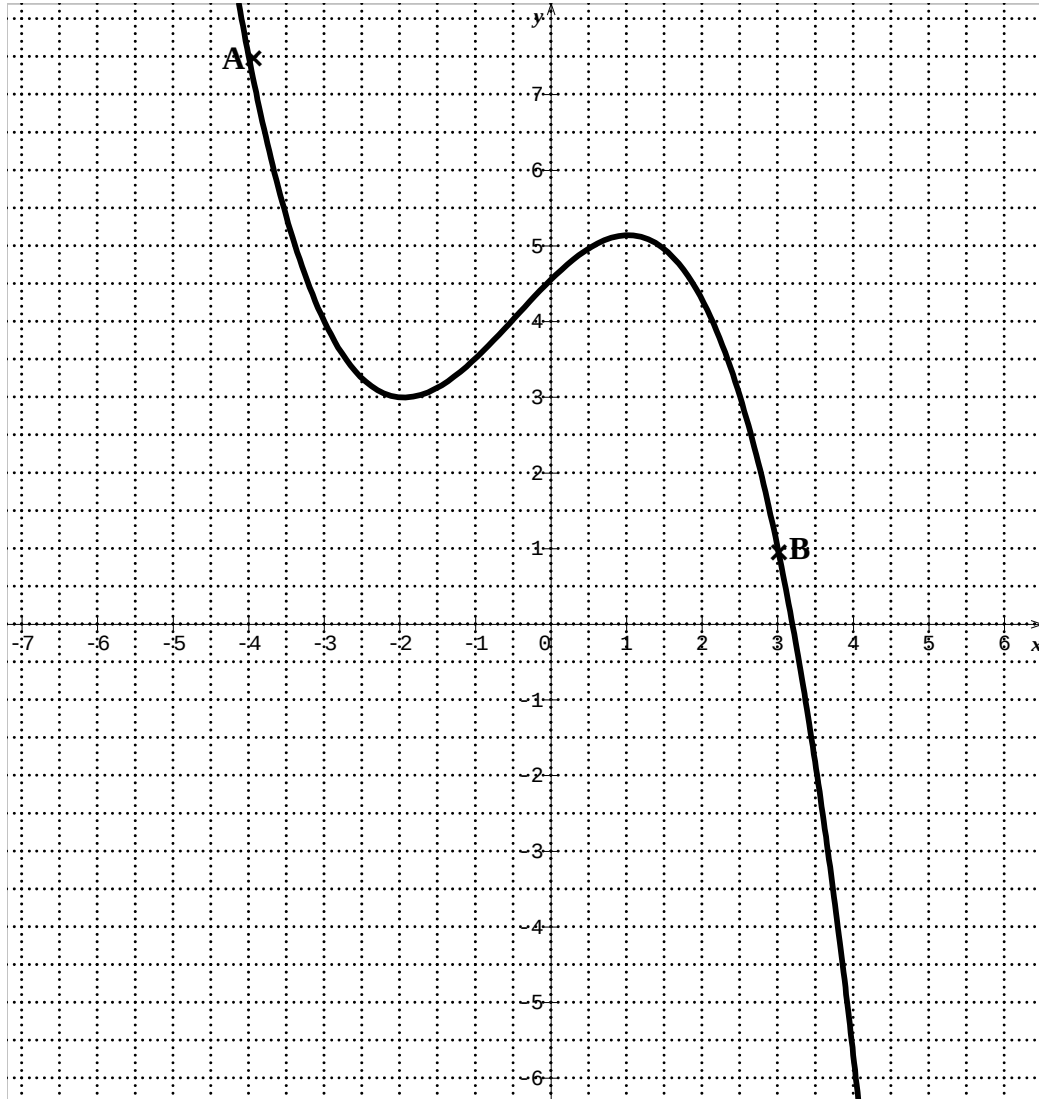


- L'équation $f(x) = 3$ a quatre solutions, $S = \{1 ; 3 ; 6,25 ; 8\}$;
- L'équation $f(x) = 2$ a trois solutions, $S = \{3 ; 6,5 ; 8\}$;
- L'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a deux solutions, $S = \{4 ; 5,25\}$;
- L'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ a une seule solution, $S = \{-\frac{1}{2}\}$.
- L'équation $f(x) = 6$ n'a pas de solution ; $S = \{\emptyset\}$.

VI- VARIATION D'UNE FONCTION:

Activité :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-4 ; 3]$ représentée par la courbe C_f suivante :



Indique si chaque proposition est vraie ou fausse :

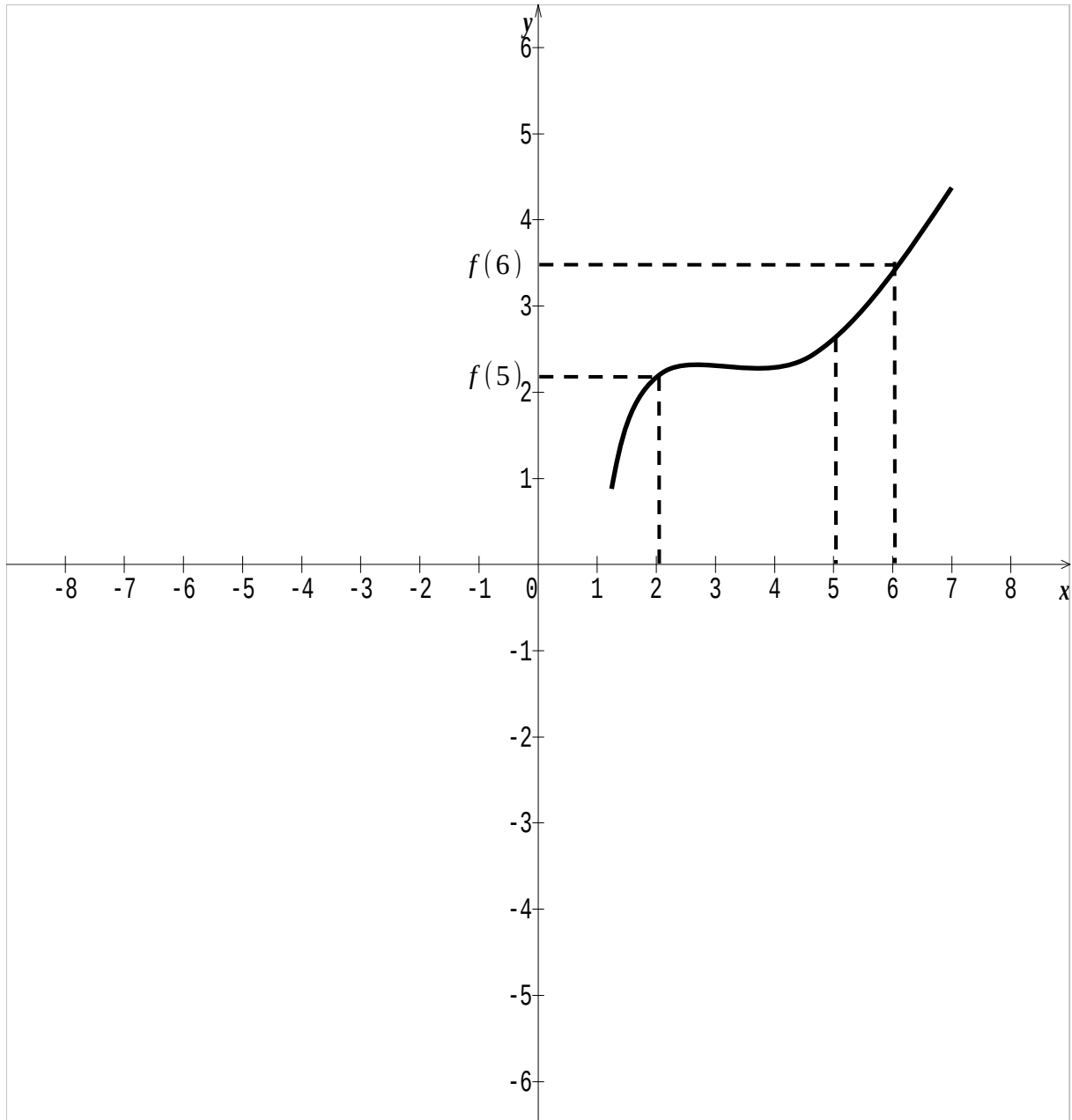
- a- L'image par f de $-3,5$ est positive ou nulle.
- b- Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-4 ; 3]$, $f(x) > 0$.
- c- L'image par f de 3 est strictement inférieure à 3.
- d- Il existe trois réels qui ont pour image 4 par la fonction f .
- e- $f(1,5) > f(2,5)$.
- f- Sur $[-4 ; 3]$, la plus petite image par f semble être égale à 3.
- g- Si un point M mobile se déplace sur la courbe C_f de A vers B alors l'abscisse de f augmente toujours.
- h- Si un point M mobile se déplace sur la courbe C_f de A vers B alors l'ordonnée de M diminue toujours.

1) Fonction croissante :

Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I lorsque, pour tous réels a et b appartenant à I , **si** $a \leq b$ **alors** $f(a) \leq f(b)$.

Remarque : une fonction croissante conserve l'ordre des inégalités.

Exemple : La fonction ayant pour courbe la figure ci-dessous est croissante sur $[5 ; 6]$



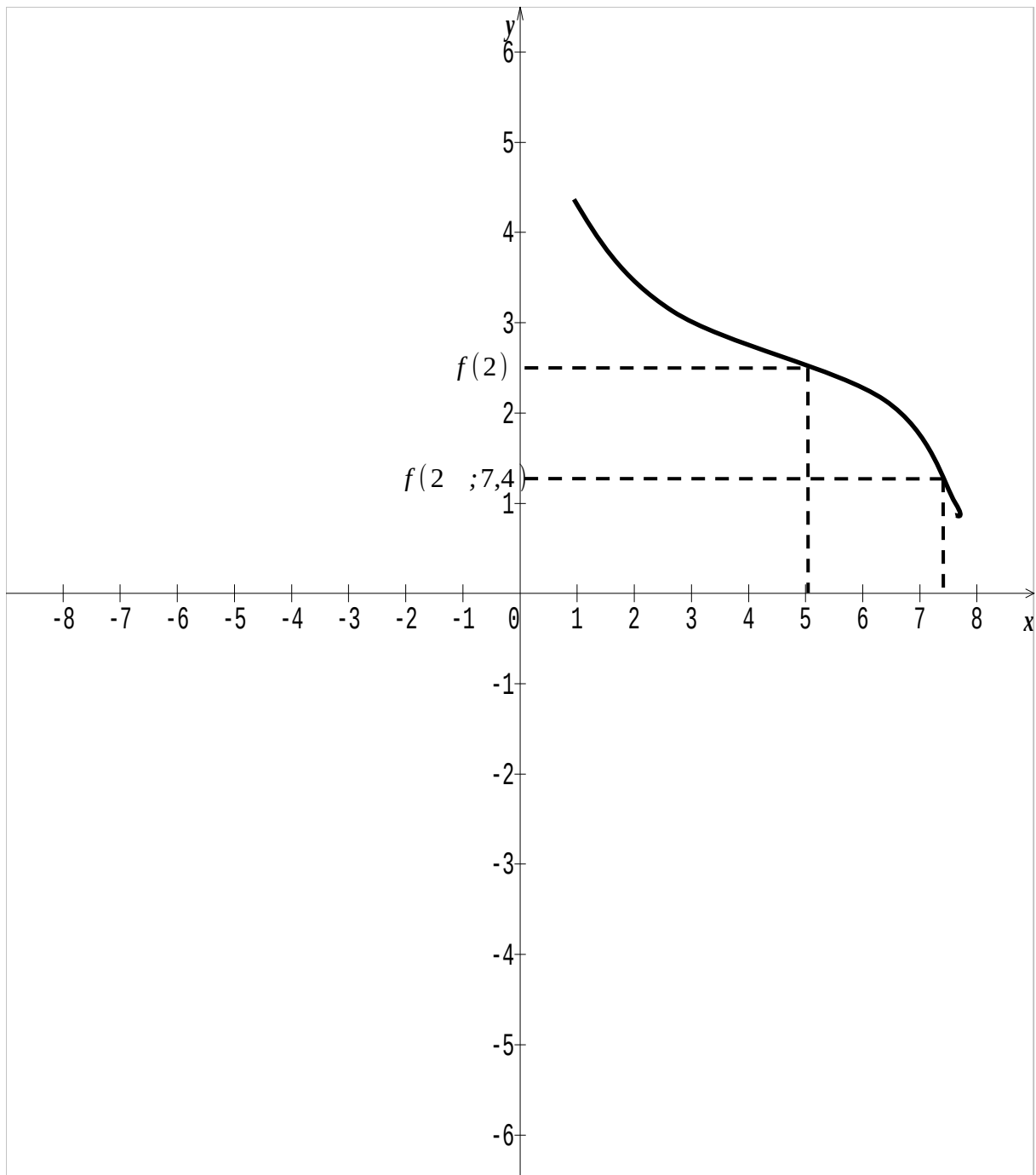
2) Fonction décroissante :

Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I lorsque, pour tous réels a et b appartenant à I , **si** $a \leq b$ **alors** $f(a) \geq f(b)$.

Remarque : une fonction décroissante change l'ordre des inégalités.

Exemple :

La fonction ayant pour courbe la figure ci-dessous est décroissante sur $[2 ; 7,4]$

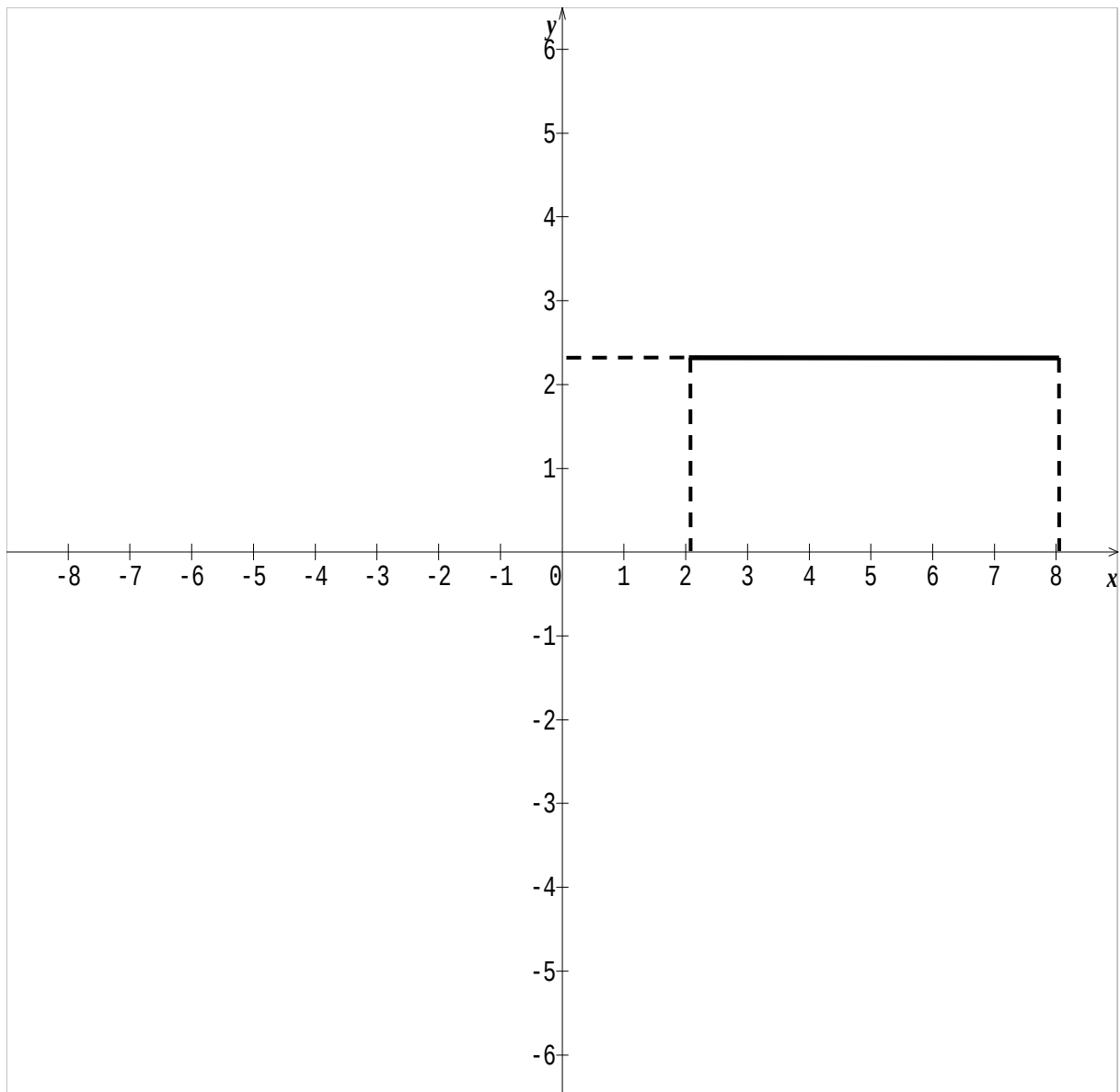


3) Fonction constante :

Une fonction f est **constante** sur un intervalle I lorsqu'il existe un réel k tel que pour tout réel x appartenant à I , $f(x) = k$.

Remarque : une fonction qui est à la fois croissante et décroissante sur I est nécessairement constante sur I .

Exemple : la fonction ayant pour courbe la figure ci-dessous est constante sur $[2 ; 8]$



4) Extremums :

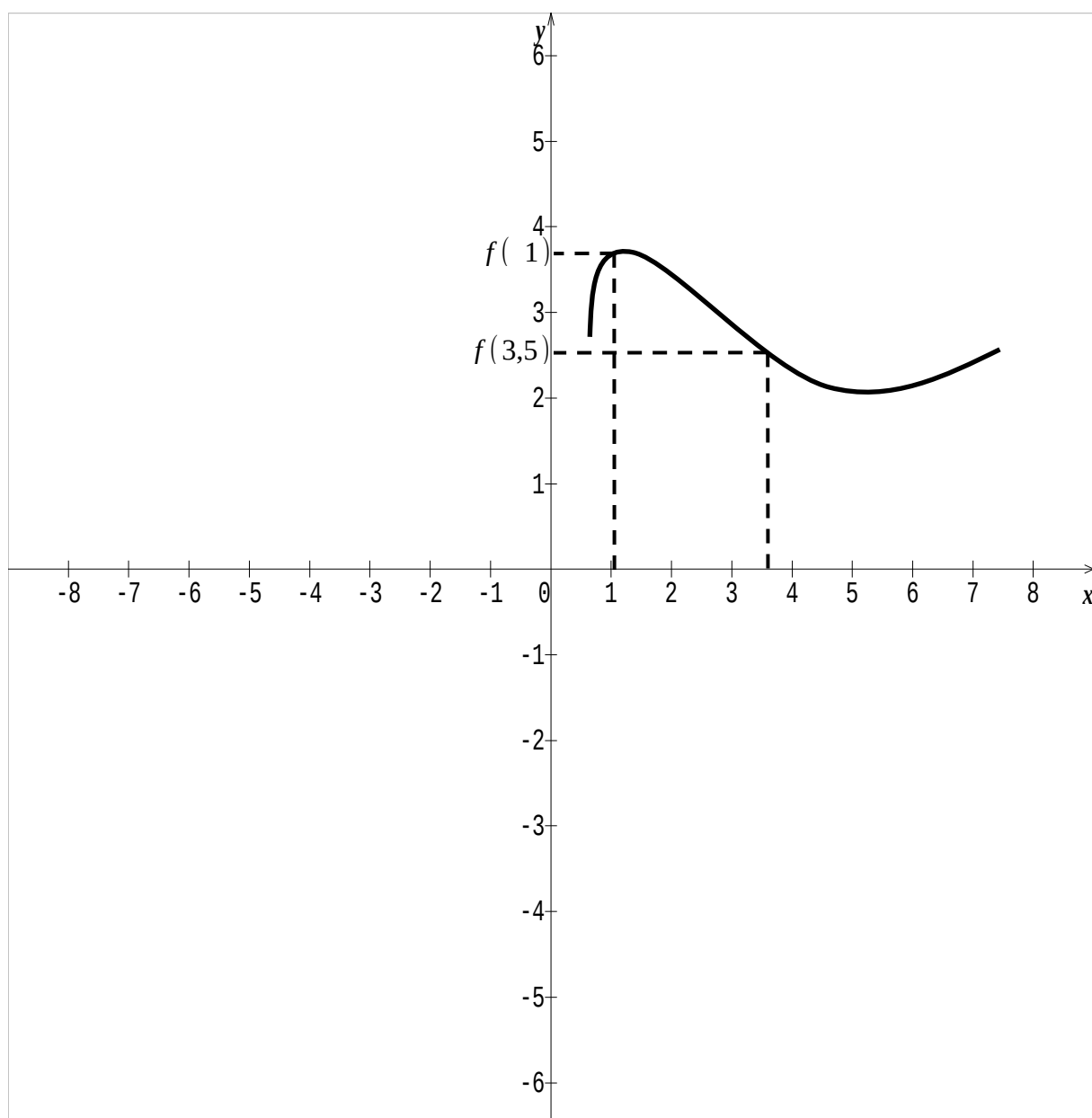
a- Maximum :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I .

Dire que la fonction f admet un **maximum sur I en a** signifie que, pour tout réel x appartenant à I , $f(x) \leq f(a)$.

Le **maximum de f** sur I est alors égal à $f(a)$.

Exemple : la fonction ayant pour courbe la figure ci-dessous admet un maximum sur $[-1 ; 3,5]$ et ce maximum est égal à $f(-1)$.



b- Minimum :

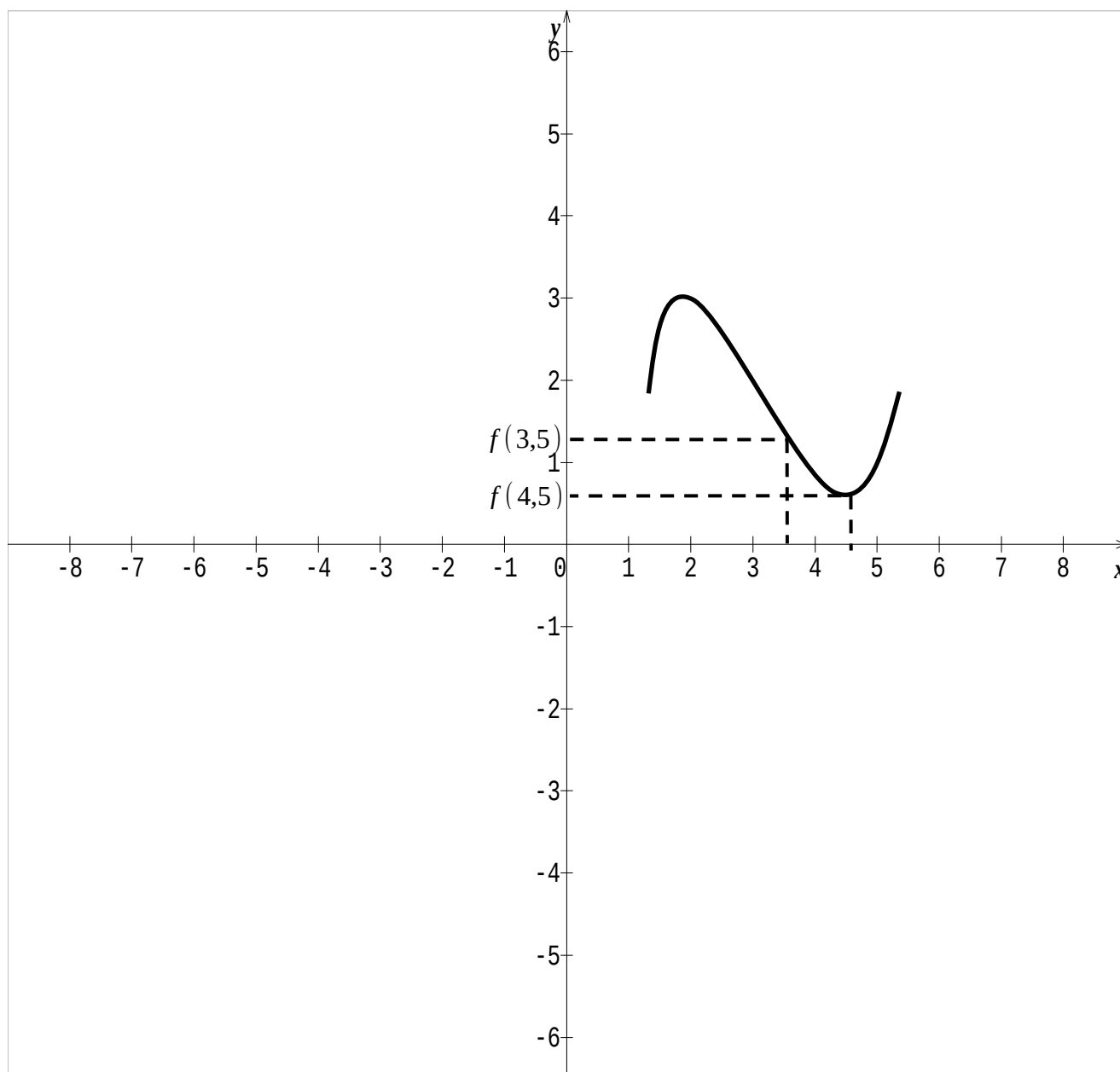
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I .

Dire que la fonction f admet un **minimum sur I en a** signifie que, pour tout réel x appartenant à I , $f(x) \geq f(a)$.

Le **minimum de f** sur I est alors égal à **$f(a)$** .

Remarque : lorsque le maximum (ou minimum) existe, celui-ci est unique ; cependant, il peut être atteint pour plusieurs valeurs de x .

Exemple : la fonction ayant pour courbe la figure ci-dessous admet un minimum sur $[3,5 ; 4,5]$ et ce maximum est égal à $f(4,5)$.



5) Tableau de variation :

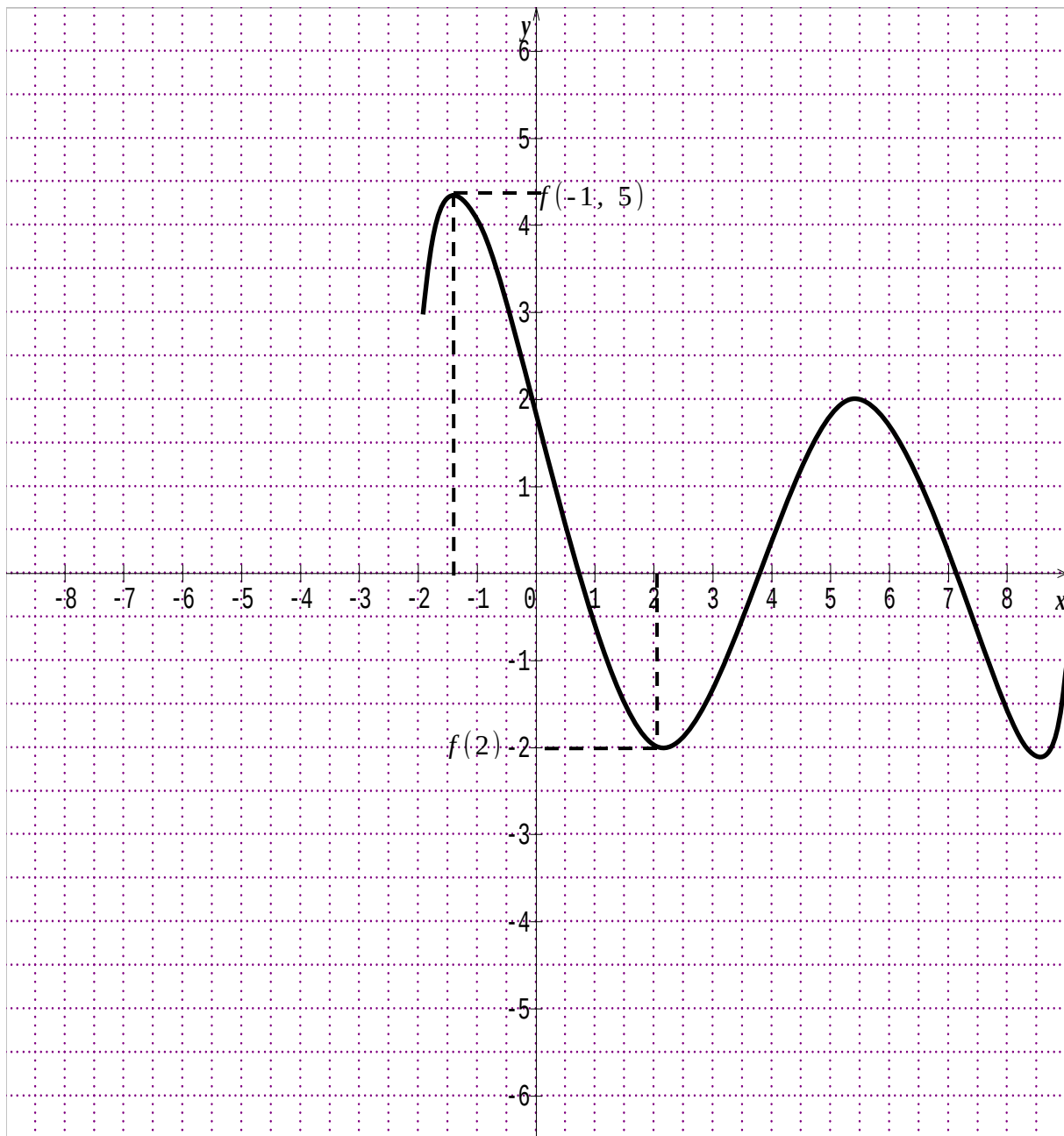
On appelle tableau de variation, tout tableau donnant les variations d'une fonction. On traduit cette situation par des flèches qui montent ou qui descendent.

Activité

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé



- a- Détermine le maximum de f sur $[-3 ; 0]$ puis sur $[4 ; 6]$
- b- Détermine le minimum de f sur $]1 ; 4[$.
- c- Donne les variations de f puis en déduire son tableau de variation.

6) Etude des cas simples :

- a- Cas de la fonction polynôme $f : x \rightarrow ax + b$

On considère la fonction polynôme $f : x \rightarrow ax + b$ où a est non nul.

Sens de variation

Cas où a est positif
 f est croissante sur $\mathbb{R}$

Cas où a est négatif
 f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation

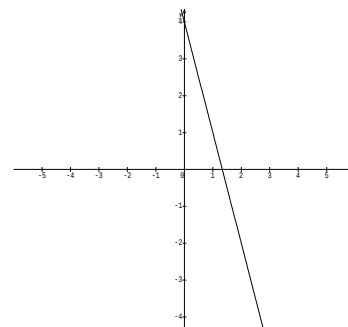
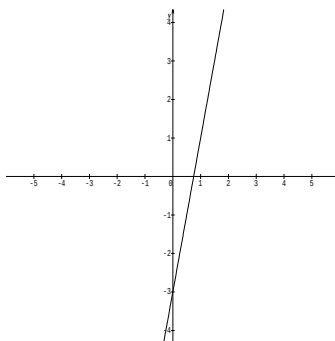
$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Représentation graphique



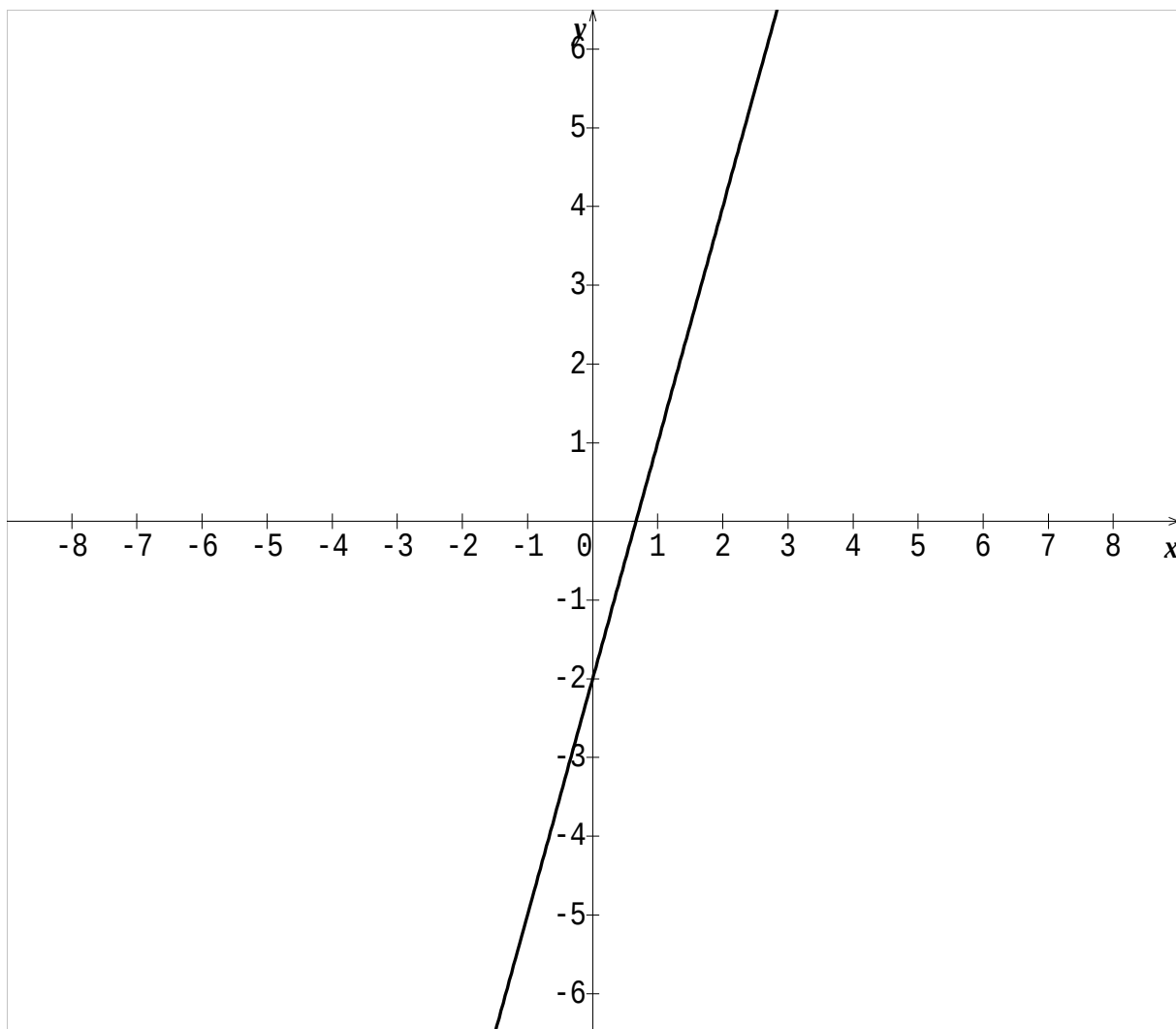
Signe de $ax + b$:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+$
∞			

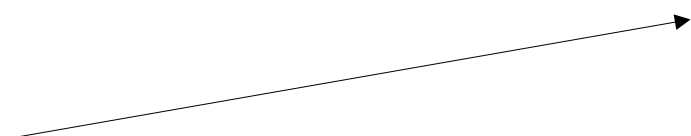
x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+$
∞			

Exemple 1 :

La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car 3 est positif.

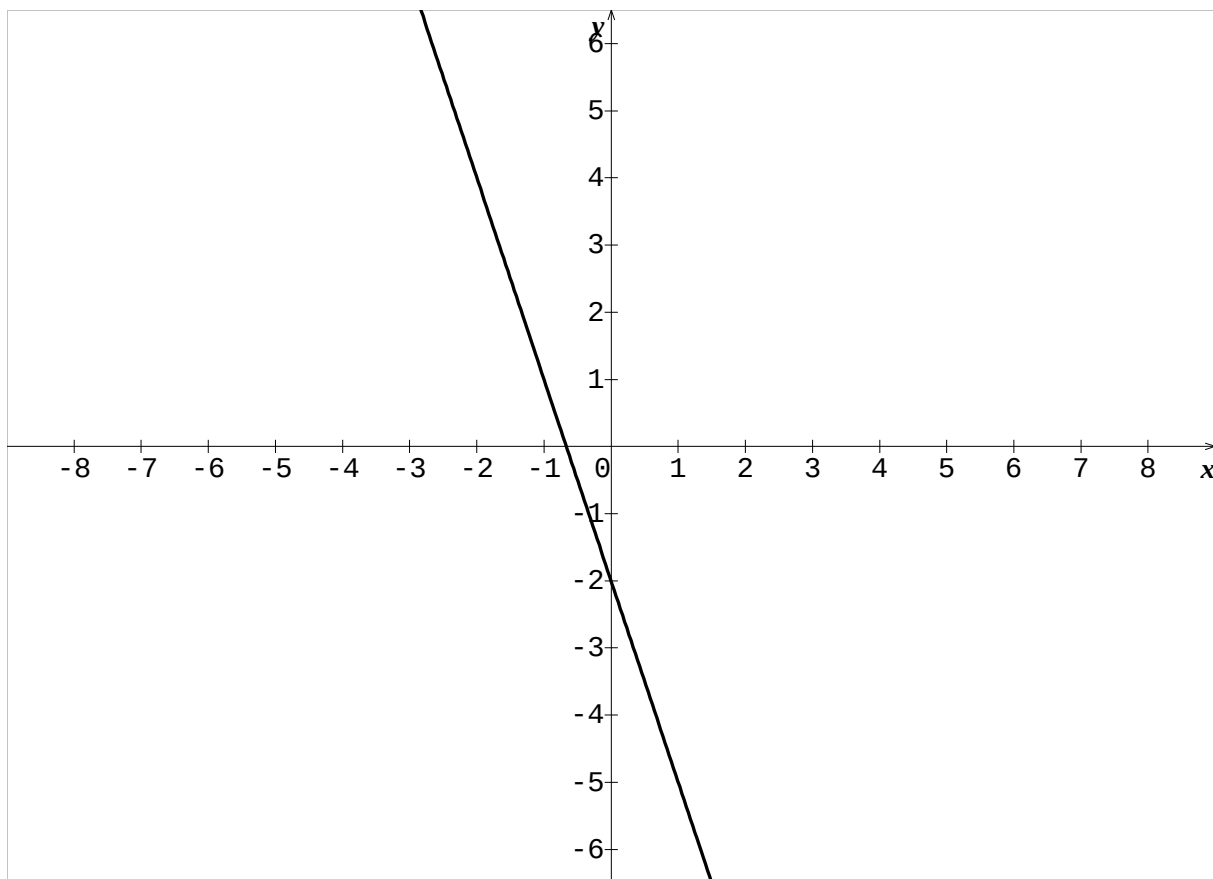


Et son tableau de signe est le suivant :

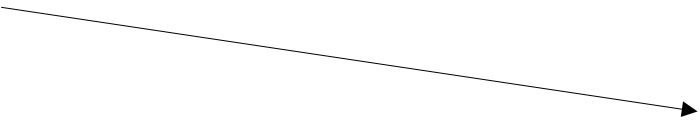
x	$-\infty$	$+$
∞		
Variation de f		
Signe de		

Exemple 2 :

La fonction $f : x \mapsto -3x - 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car 3 est positif.



Et son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de f		
Signe de		

b- Cas de la fonction polynôme $f : x \rightarrow x^2$

- Définition :

La fonction carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui, à chaque réel x , associe son carrée x^2 .

Exemple : l'image de 1 et de -1 par f est 1 ; l'image de $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ par f est 3.

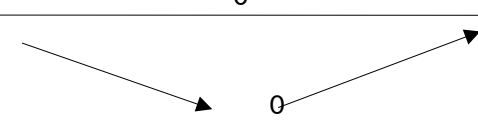
16 à deux antécédents par f qui sont 4 et -4 ; -7 n'admet aucun antécédent par f .

- **Tableau de variation :**

La fonction carrée est :

- Strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$
- Strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

NB : la fonction carrée admet un minimum en 0, de valeur 0.

- **Construction de la courbe représentative de $f: x \rightarrow x^2$**

Activité :

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction $f: x \rightarrow x^2$

a- Montre que $O(0 ; 0)$; $A(0,5 ; 0,25)$; $B(1 ; 1)$ et $C(2 ; 4)$ appartiennent à (C_f) puis place ces points dans le repère.

En déduis la « partie droite » de la courbe (C_f) .

b- Soit $M(x ; x^2)$ un point de (C_f) . Démontre que $M'(-x ; x^2)$ appartient également à la courbe (C_f) . Quel est le lien entre les deux points : M et M' ? Que peut-tu déduis concernant (C_f) ?

c- En déduis le tracé de la courbe (C_f) .

c- Cas de la fonction rationnelle $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

- **Définition :**

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ qui, à chaque réel non nul, associe son inverse $\frac{1}{x}$. On note $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

Exemple : l'image de 1 par f est 1 ; l'image de 3 par f est $\frac{1}{3}$.

7 a un antécédent par f qui est $\frac{1}{7}$, tandis que 0 n'admet aucun antécédent par f .

Remarques : il faut bien prendre garde que la fonction inverse n'est pas définie en 0 ; la fonction inverse n'est pas linéaire.

- **Tableau de variation :**

La fonction inverse est :

- Strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$
- Strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

NB : la double barre en 0 est là pour signifier que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

- **Construction de la courbe représentative de $f: x \mapsto \frac{1}{x}$**

Activité :

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$

a- Montre que $A(0,25 ; 4)$; $B(0,5 ; 2)$; $C(1 ; 1)$; $D(2 ; 0,5)$ et $E(4 ; 0,25)$ appartiennent à (C_f) puis place ces points dans le repère.

En déduis la « partie droite » de la courbe (C_f) .

b- En déduis le tracé de la courbe (C_f) en utilisant la symétrie de (C_f) .

d- cas de la fonction irrationnelle $f: x \mapsto \sqrt{x}$

- **Définition :**

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ qui, à chaque réel supérieur à 0 ou nul, associe sa racine. On note $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Exemple : l'image de **1** par f est **1** ; l'image de **3** par f est $\sqrt{3}$

4 à un antécédent par f qui est **16**, tandis que **-4** n'admet aucun antécédent par f .

Remarques : il faut bien prendre garde que la fonction racine carrée n'est pas définie en $\mathbb{R}_-$.

- **Tableau de variation :**

La fonction racine est Strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

- **Construction de la courbe représentative de $f : x \rightarrow \sqrt{x}$**

Activité :

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x}$

- Montre que $A(0 ; 0)$; $B(1 ; 1)$ appartiennent à (C_f) puis place ces points dans le repère.
- En déduis le tracé de la courbe (C_f) en utilisant la symétrie de (C_f) .

VII - FONCTIONS POLYNOMES – FONCTIONS RATIONNELLES:

1- Fonctions polynômes :

Activité1 :

Développe et ordonne suivant les puissances décroissantes de x l'expression

$$A(x) = (x+2)(2x-1)(x+3).$$

a- Définition :

On appelle fonction polynôme, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0. \text{ (avec } a_n \neq 0 \text{)}$$

- $a_n ; a_{n-1} ; a_2 ; a_1 ; a_0$ Sont des réels appelés coefficients du polynôme $f(x)$.
- n est le degré du polynôme et a_n est le coefficient dominant du polynôme.

Exemple 1:

$f(x) = -2x^4 + 2x^3 - x + 2$: est un polynôme de degré 2 ($n = 4$).

$$a_4 = -2 ; a_3 = 2 ; a_2 = 0 ; a_1 = -1 ; a_0 = 2.$$

Exemple 2:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= (x^2 + 1)(x - 1) - x^2. \\ &= x^3 - 2x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

$f(x)$ est un polynôme de degré 3 ($n = 3$).

$$a_3 = 1 ; a_2 = -2 ; a_1 = 1 ; a_0 = -1.$$

b- Egalité de deux polynômes :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- Les deux polynômes sont de même degré.
- Les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exemple :

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2.$$

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Déterminer les réels a ; b ; c et d pour que $f(x) = g(x)$

Solution :

Par identification on a :

$$a = 5 ; b = -3 ; c = 0 ; d = 2.$$

c- Zéro d'un polynôme :

Activité 2 :

Soit p un polynôme définie par : $p(x) = x^3 - 4x^2 + 8$.

a- Calcule : $p(-2)$; $p(-1)$; $p(0)$; $p(1)$; $p(2)$; $p(3)$; $p(4)$; $p(5)$.

b- En déduis les valeurs qui annulent p . Ces valeurs sont donc appelées les zéros de p .

α est un zéro ou racine du polynôme p si et seulement si $p(\alpha) = 0$

Condition pour que $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ soit un zéro d'un polynôme p du second degré

Activité 3:

Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow p(x) = ax^2 + bx + c \text{ (avec } a \neq 0)$$

Détermine la relation entre les réels a , b et c pour que :

a) $\alpha = 1$ soit un zéro de p .

b) $\alpha = -1$ soit un zéro de p .

Exemple 1 :

Soit p un polynôme définie par $p(x) = x^2 + 2x - 3$

Calcule $p(1)$ puis factorise $p(x)$ et en déduire la valeur du deuxième zéro de p .

Exemple 2 :

Soit p un polynôme définie par $p(x) = x^2 + 3x + 2$

Calcule $p(-1)$ puis factorise $p(x)$ et en déduire la valeur du deuxième zéro de p .

Ainsi pour un polynôme du second degré $p(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), on a :

$$\text{- Si : } a + b + c = 0 \text{ alors } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{- Si : } a + c = b \text{ alors } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-c}{a}$$

Application 1 :

Soit p un polynôme définie par : $p(x) = x^2 + 2x + 1$.

Ici : $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$

$$a + c = b \text{ alors : } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Application 2:

Soit p un polynôme définie par : $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Ici : $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$

$$a + b + c \text{ alors : } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

d- Factorisation d'un polynôme P:

Activité 4:

Soit p le polynôme définie par $p(x) = 2 - x + (4x - 8)(x^2 + 1)$.
Ecris $p(x)$ sous la forme d'un produit de facteur.

- Définition :

Un polynôme écrit sous forme de produit de facteur de degré supérieur ou égale à 1 est dit factorisé.

- Les identités remarquables :

Soient a et b deux nombres réels non nuls ; on a :

$$\text{➤ } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\text{➤ } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\text{➤ } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\text{➤ } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$\text{➤ } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$\text{➤ } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$\text{➤ } (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

$$\text{➤ } (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

NB :

En posant : $a + b = S$ (Somme) et $ab = P$ (Produit), on a :

$$a^2 + b^2 = (S)^2 - 2P \quad \text{et} \quad a^3 + b^3 = (S)^3 - 3PS$$

Exemple1 :

Factoriser le polynôme $p(x) = x^3 - 27$.

Exemple 2 :

Factoriser le polynôme $p(x) = 8x^3 + \frac{1}{27}$.

NB :

Pour le calcul de $(a + b)^n$ ou $(a - b)^n$ avec $(n \in \mathbb{N})$ on peut utiliser le triangle de **PASCAL** qui est la suivant :

Triangle de Pascal :

Puissance n	$(a+b)^n$						
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

Pour calculer $(a - b)^n$, on utilise les mêmes coefficients obtenus à partir du triangle de Pascal, mais chaque fois que b apparait avec une puissance impaire on met le signe $\leftarrow$

Exemple : $(a - b)^3$, les coefficients sont : 1, 3, 3 et 1.

$$(a - b)^3 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Application:

En utilisant le triangle de **PASCAL**, développez les expressions suivantes :

$$(x + 1)^3; (2x - 1)^4; (-x + 3)^5; \left(\frac{1}{3}x - 3\right)^3$$

- Factorisation par $(x - \alpha)$:

Théorème 1: Si α est un zéro du polynôme p , alors $p(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$.

Théorème 2: Si α est un zéro du polynôme p , alors il existe un polynôme q tel que $p(x) = (x - \alpha) q(x)$ où q est un polynôme de degré inférieur à celui de p .

NB: $q(x)$ est appelé **quotient** dans la division de $p(x)$ par $(x - \alpha)$.

- Détermination pratique du quotient q (division des polynômes):

Activité 5 :

Soit $p(x)$ un polynôme définie par $p(x) = -x^3 + 3x^2 + 16x + 12$.

a- Calcule $p(-2)$.

b- Factorise $p(x)$ en utilisant :

- La méthode par identification :
- La méthode de la division euclidienne :
- La méthode d'Höner :

Solution

a- Calculons $p(-2)$

$$P(-2) = -(-2)^3 + 3(-2)^2 + 16(-2) + 12 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \text{ est un zéro de } P$$

b- Factorisons $p(x)$.

Méthode par identification :

Si $\alpha = -2$ est un zéro de p . Alors p est factorisable par : $(-\alpha)$
 $\Rightarrow (x - (-2)) = (x + 2)$ est un facteur de p . Ainsi on peut écrire :

$p(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$. (En développant $p(x)$), on a :

$$p(x) = ax^3 + x^2(b + 2a) + x(c + 2b) + 2c. \text{ Or:}$$

$$p(x) = -x^3 + 3x^2 + 16x + 12.$$

$$p(x) = p(x)$$

$$\text{Par identification on a : } \begin{cases} a = -1 \\ b + 2a = 3 \\ c + 2b = 16 \\ 2c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{D'où } p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6).$$

Méthode de la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 3x^2 + 16x + 12 & x + 2 \\ -x^3 + 2x^2 & \\ \hline 0 \quad 5x^2 + 16x + 12 & -x^2 + 5x + 6 \\ -5x^2 - 10x + 12 & \\ \hline 0 \quad 6x + 12 & \\ -6x - 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{D'où } p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6).$$

Méthode d'Hörner :

$$\begin{array}{cccccc} & -1 & 3 & 16 & 12 & \\ & & 2 & -10 & -12 & \\ -2 & & 5 & 6 & 0 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \alpha & a & b & c & & \end{array}$$

$$\text{Or: } p(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6).$$

$$\text{D'où } p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6).$$

Théorème :

Soit f une fonction polynôme. Le réel α est un zéro de f d'ordre de multiplicité n si et seulement si dans la factorisation de f , il existe le **facteur** $(x - \alpha)^n$.

Exercice d'application

Soit la fonction polynôme p définie par :
 $P(x) = 2x^5 - 19x^4 + 69x^3 - 118x^2 + 92x - 24$
 Montrer que 2 est un zéro triple de p , puis en déduire les autres zéros de p .

e- Cas particulier de factorisation des polynômes du second degré :

Forme canonique d'un polynôme du second degré :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \text{ on pose } \Delta = b^2 - 4ac \\ \text{D'où } f(x) &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

D'où la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$f(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

$$\text{ou } f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = -a\alpha^2 + c$$

Exercice d'application

Ecrire sous forme canonique les polynômes suivants :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \quad ; \quad g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{5} \quad ; \quad h(x) = -5x^2 + 2x - 4$$

2- Fonctions rationnelles :

a- Définition :

On appelle fonction rationnelle, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{où } p(x) \text{ et } q(x) \text{ sont deux fonctions polynômes.} \\ x &\rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} && \text{avec } (q(x) \neq 0) \end{aligned}$$

b- **Etude des cas** : $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ et $x \rightarrow \frac{ax^2+bx+c}{ex+f}$

- **Etude de la fonction** : $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$

La fonction : $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ est une fonction **rationnelle** en générale mais aussi une fonction **homographique** en particulier.

Remarque : Toute fonction homographique peut s'écrire sous la forme $x \rightarrow \frac{\alpha}{cx+d} + \beta$ (où $\alpha ; \beta$ sont des réels), avec $cx + d \neq 0$.

Exemple : Soit fonction homographique f définie par $f(x) = \frac{3x-8}{5x+1}$.

Déterminer les réels α et β tels que $f(x) = \frac{\alpha}{5x+1} + \beta$

- **Ensemble de définition de la fonction** : $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$

Pour déterminer en quelle valeur de x une fonction homographique n'est pas définie, il suffit de savoir en quelle valeur de x le dénominateur s'annule.

Exemple :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a- $f(x) = \frac{1}{x+5}$; b- $g(x) = \frac{6x}{x-4}$; c- $h(x) = \frac{x-2}{3x+5}$

- **Courbe représentative :**

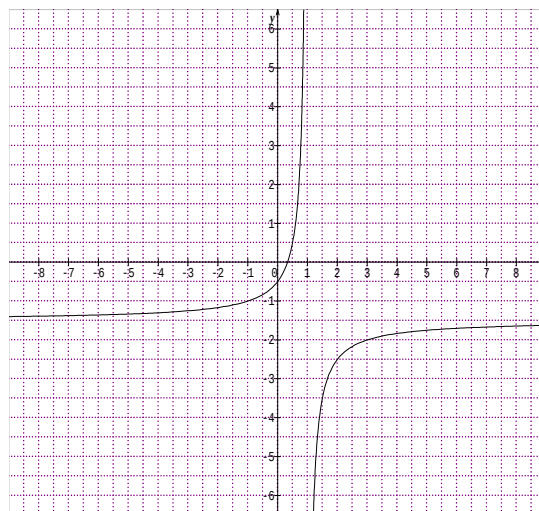
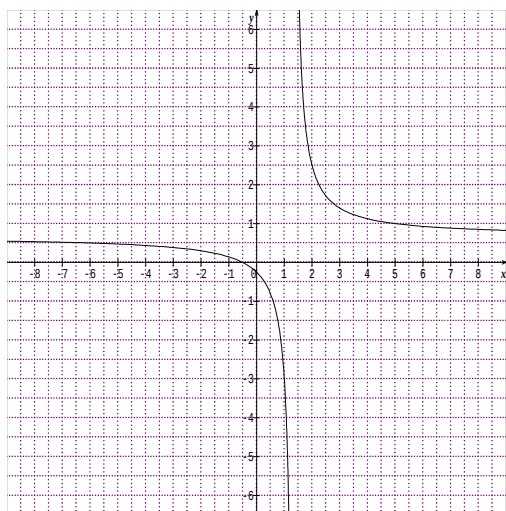
La courbe représentative d'une fonction homographique dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ est appelée **hyperbole**.

Exemple :

Soient $f: x \rightarrow \frac{2x+1}{3x-4}$

et

$g: x \rightarrow \frac{-3x+1}{2x-2}$



- **Etude de la fonction** : $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$

La fonction : $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$ est aussi un autre cas de fonction **rationnelle**.

Remarque : ce genre de fonction peut s'écrire sous la forme $x \rightarrow \alpha x + \beta + \frac{\lambda}{ex + f}$ (où α ; β et λ sont des réels), avec $ex + f \neq 0$.

Exemple : Soit fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Déterminer les réels α ; β et λ tels que $f(x) =$

$\alpha x + \beta + \frac{\lambda}{x + 1}$

- **Ensemble de définition de la fonction** : $x \rightarrow \frac{ax + c}{dx + e}$

Pour déterminer en quelle valeur de x une fonction homographique n'est pas définie, il suffit de savoir en quelle valeur de x le dénominateur s'annule.

Exemple :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$\text{b- } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{-x - 5} \quad ; \quad \text{b- } g(x) = \frac{-3x^2 + x + 1}{x + 1} \quad ; \quad \text{c- } h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{3x}$$

- Courbe représentative :

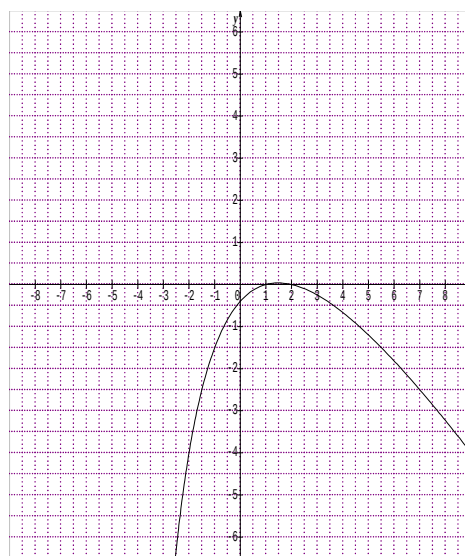
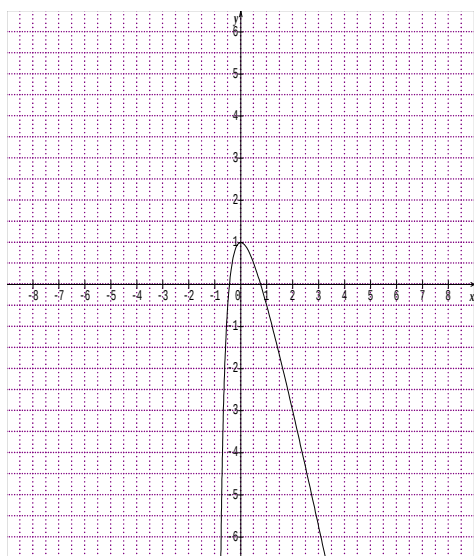
La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$ dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Exemple :

$$\text{Soient } f: x \rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{-x - 5}$$

et

$$g: x \rightarrow \frac{-3x^2 + x + 1}{x + 1}$$

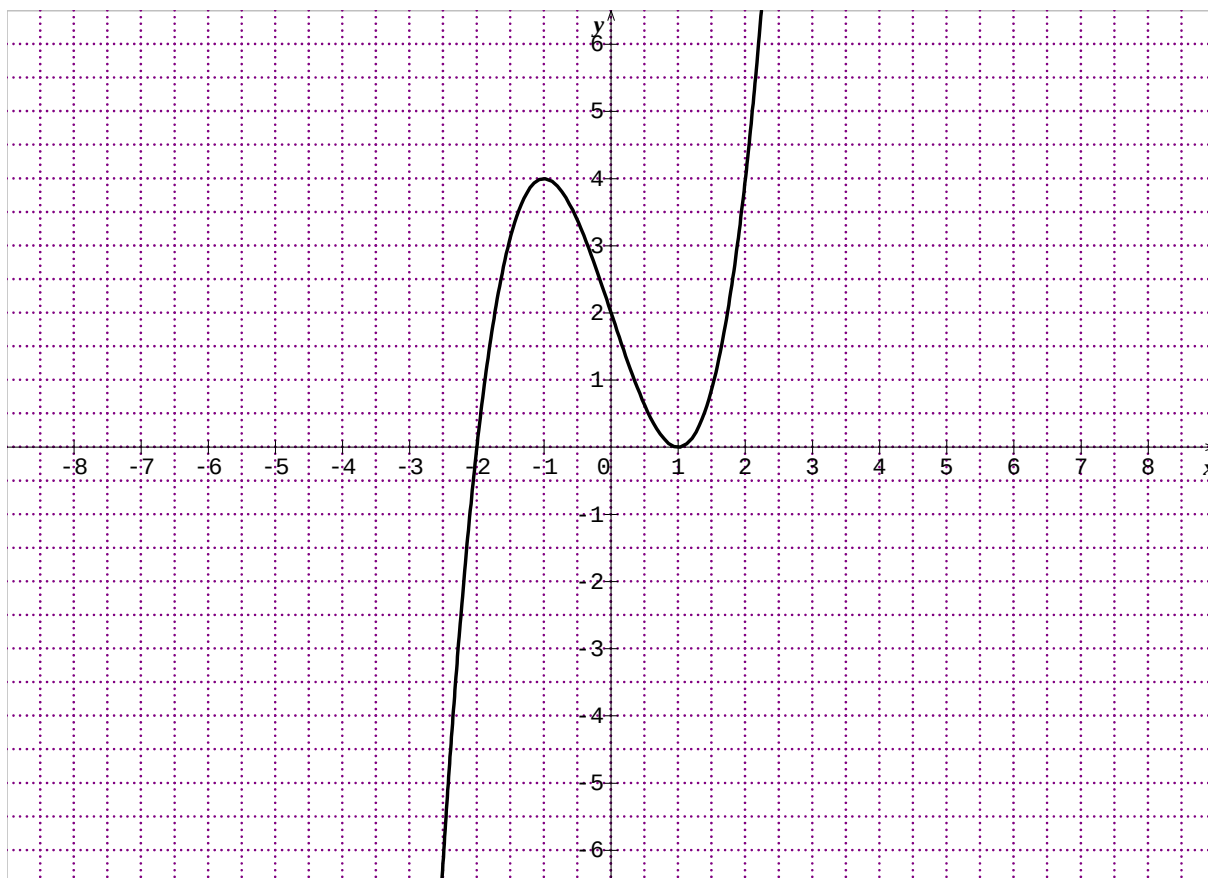


VIII – FONCTIONS – Equations – Inéquations

Définition : Soit f une fonction de domaine de définition D_f et k un nombre réel. Lorsque x a pour k par la fonction f , on dit que x est un antécédent de k par la fonction f .

1) Equation de la forme $f(x) = k$

Activité :



Détermine graphiquement tous les antécédents de chacun des nombres -6 ; 0 ; 2 et 4.

a- **Définition :** on appelle solution de l'équation $f(x) = k$, tout réel a de D_f vérifiant $f(a) = k$.

b- **Résolution :** résoudre l'équation $f(x) = k$, consiste à déterminer l'ensemble S de ses solutions.

NB : on peut résoudre $f(x) = k$ à l'aide d'une résolution algébrique ou à l'aide d'une résolution graphique (les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = k$).

2) Inéquations de la forme $f(x) > k$ (resp $f(x) < k$; $f(x) \geq k$; $f(x) \leq k$)

- a- **Définition** : On appelle solution de l'inéquation $f(x) > k$ (resp $f(x) < k$; $f(x) \geq k$; $f(x) \leq k$), tout réel a de D_f vérifiant $f(a) > k$ (resp $f(a) < k$; $f(a) \geq k$; $f(a) \leq k$)
- b- **Résolution** : résoudre l'inéquation $f(x) > k$ (resp $f(x) < k$; $f(x) \geq k$; $f(x) \leq k$), consiste à déterminer l'ensemble S de ses solutions

3) Signe d'une fonction

Déterminer le signe d'une fonction f sur un sous ensemble I de son ensemble de définition D_f , revient à déterminer le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à I .

NB : ce signe peut être déterminé de façon algébrique (résolution algébrique d'inéquation),
Ou de façon graphique

EXERCICES

Exercices 1 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1^\circ) f(x) = \frac{-x+1}{x+3} \quad 2^\circ) f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-4} \quad ; \quad 3^\circ) f(x) = (x-2)^2$$

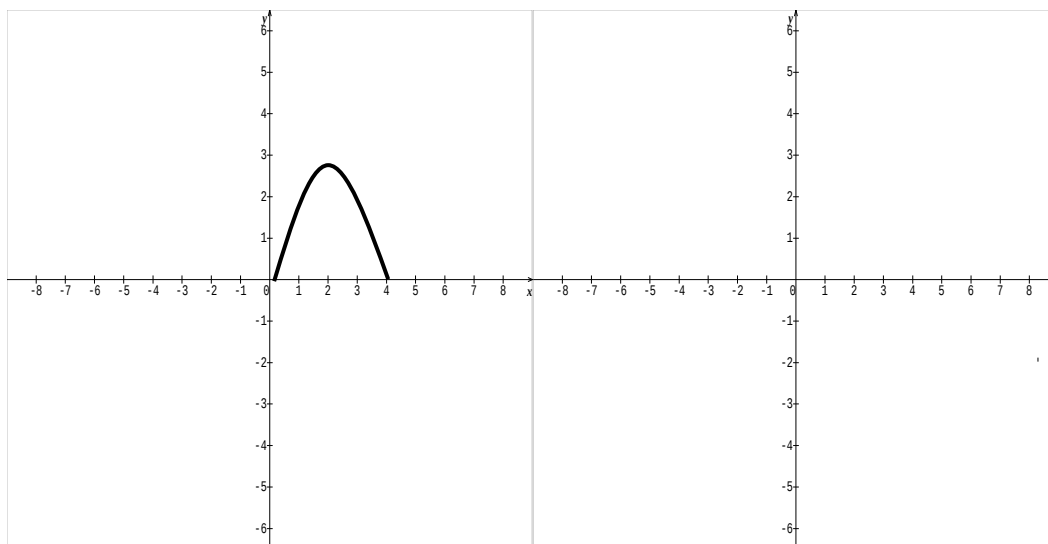
$$4^\circ) f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} \quad ; \quad 5^\circ) f(x) = \frac{\sqrt{-x+2}}{-x^2+1} \quad ; \quad 6^\circ) f(x) = \frac{x\sqrt{x-3}}{x^2+1}$$

$$7^\circ) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1; \quad 8^\circ) f(x) = \sqrt{-3x+3} \quad ; \quad 9^\circ) f(x) = \frac{1-5x}{3x-1}$$

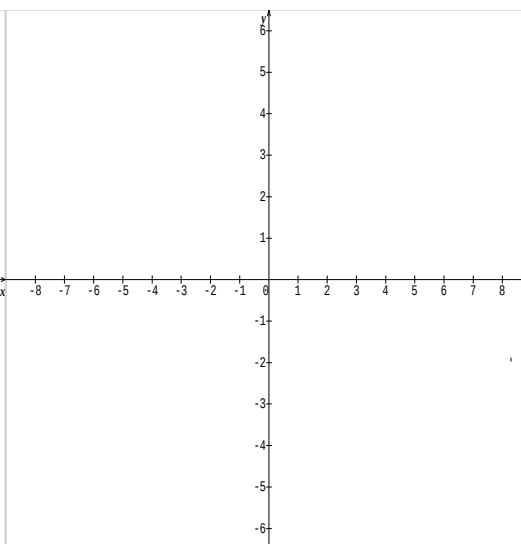
$$10^\circ) f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x+7}} \quad ; \quad 11^\circ) f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$$

Exercices 2 :

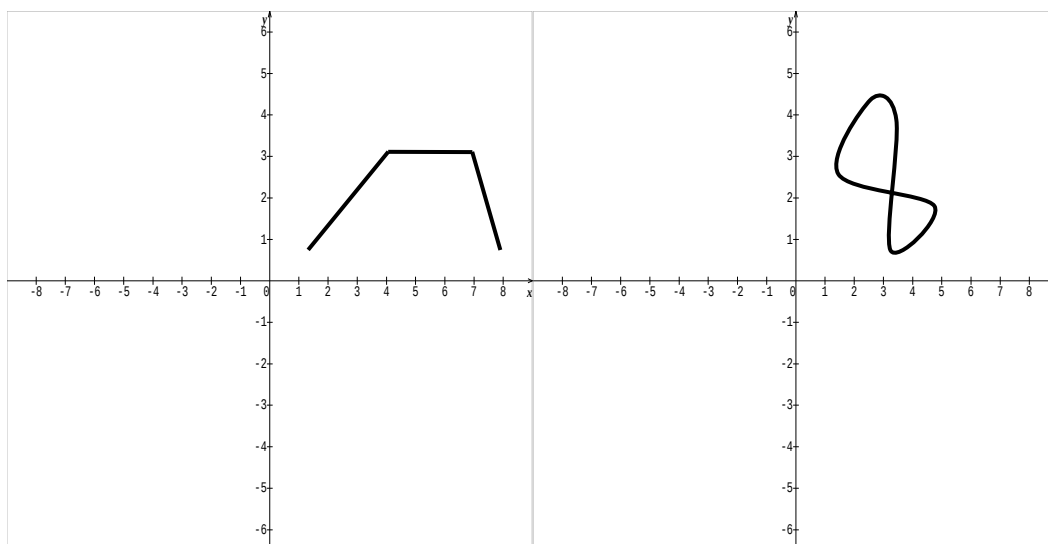
Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On donne les représentations graphiques suivantes :



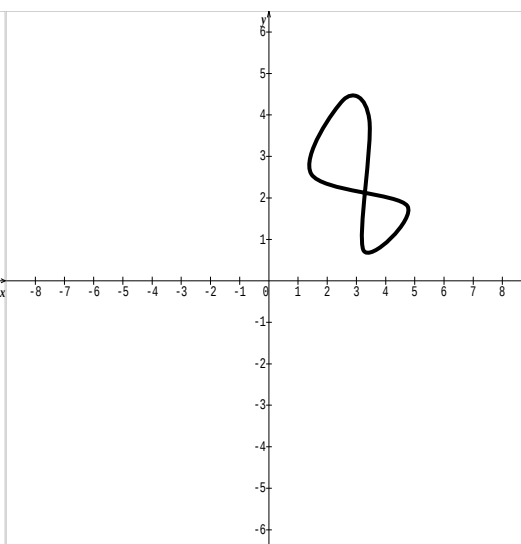
(fig 1)



(fig 2)



(fig 3)

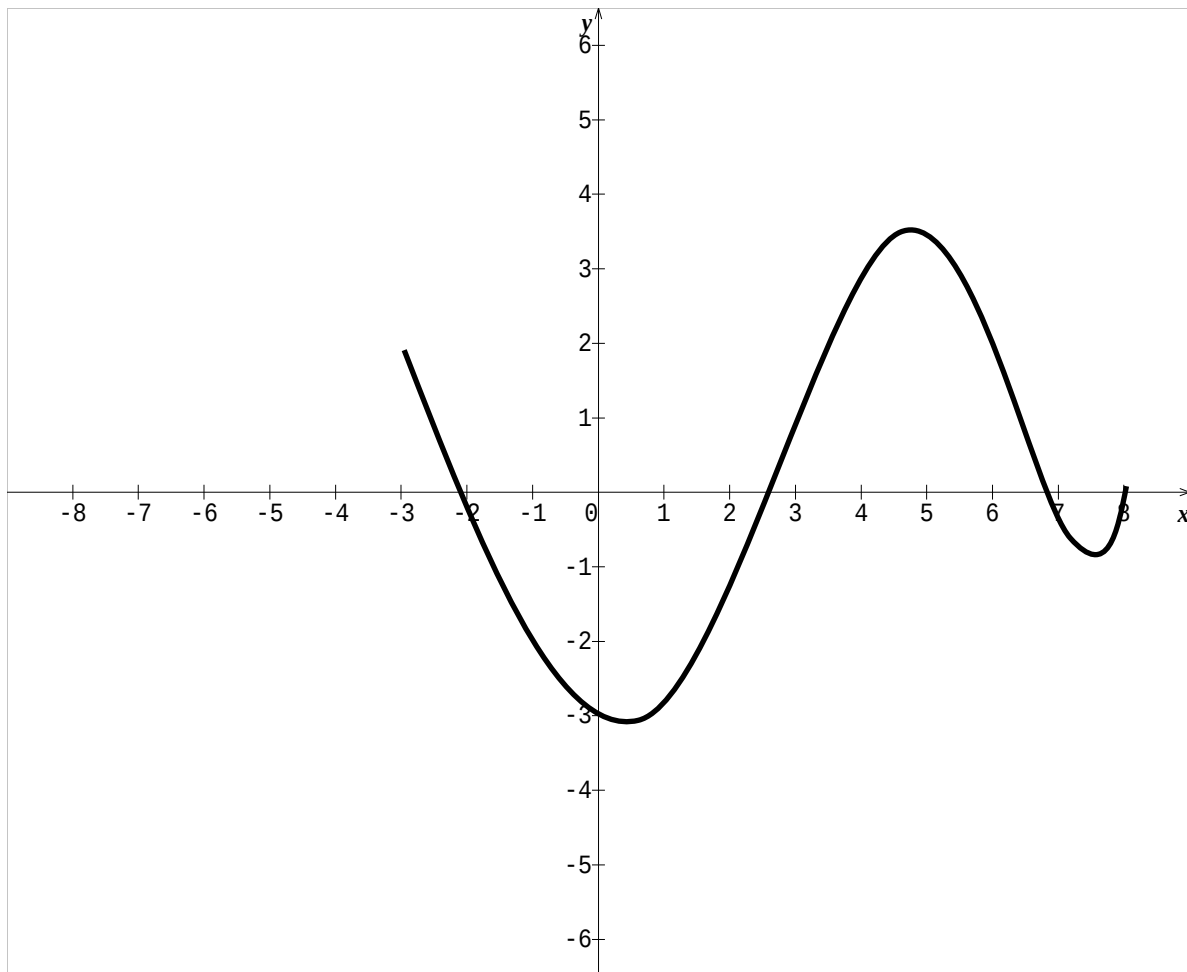


(fig 4)

- 1) Dire celles qui représentent une fonction.
- 2) Pour chacune des fonctions trouver, déterminer :
 - a- L'ensemble de définition.
 - b- L'ensemble image.
- 3) Pour la figure (fig1), trouver :
 - a- L'image directe par f de $[1 ; 2]$ puis de $[2 ; 3]$.
 - b- L'image réciproque par f de $\left[2 ; \frac{3}{2}\right]$ puis de $[1]$.
- 4) Pour la figure (fig3), trouver :
 - a- L'image directe par f de $[2 ; 4 ; 6 ; 8]$ puis de $[2 ; 7]$.
 - b- L'image réciproque par f de $\left[2 ; \frac{3}{2}\right]$ puis de $[3]$.

Exercices 3 :

La courbe suivante représente une fonction f définie sur $[-3 ; 8]$.



- 1) Décrire les variations de f .
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Déterminer l'image directe par f de : $\left\{ -3 ; -2 ; 0 ; \frac{9}{2} ; 8 \right\}$; $[-2 ; 5]$.
- 4) Déterminer l'image réciproque par f de : $[-3 ; -2 ; 0 ; 1]$; $[-3 ; 2]$.

Exercices 4 :

Parmi les fonctions numériques suivantes dire celles qui sont des polynômes puis préciser leurs degrés :

1) $p(x) = \frac{-1}{2}x + 2x^2(1 - 3x^2) - x^3$; 2) $p(x) = \frac{-2}{x} + 3x + 1$;

3) $p(x) = (-4 - x)^3$

4) $p(x) = \frac{3x^2 + 2x + 5}{x - 1}$; 5) $p(x) = \sqrt{x + 3}$; 6) $p(x) = -x^3 + 2|x| + 4$

Exercices 5:

Soient les polynômes f , g et h définies par :

$$f(x) = \frac{-1}{2}x + 2x^2(1 - 3x^2) - x^3 \quad ; \quad g(x) = (-4 - x)^3 \text{ et}$$

$$h(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 8x^2 + x - 1$$

Calculer :

a- $f(x) + g(x) - h(x)$.

b- $-f(x) - g(x) - h(x)$.

c- $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$.

d- $-f(x) - 3[g(x) - h(x)]$.

Exercices 6:

1) Factoriser les polynômes suivants:

a- $P(x) = x^2 - 49$; b- $p(x) = x^3 - 8$; c- $p(x) = 25x^2 - 20x + 25 - (6x - 15)$

d- $p(x) = (2x + 1)(x - 3) - (4x + 5)(3 - x)$; e- $p(x) = (x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2$

2) On donne le polynôme p et un nombre réel α .

Dans chacun des suivants :

a- Vérifier que $p(x)$ est factorisable par $x - \alpha$.

b- Déterminer le quotient de $p(x)$ par $x - \alpha$.

c- Factoriser si possible ce quotient.

d- Etudier le signe de $p(x)$.

• $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $\alpha = 2$.

• $h(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $\alpha = \frac{3}{2}$.

• $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et $\alpha = -3$.

• $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $\alpha = \sqrt{3}$.

Exercices 7:

Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

a- la forme canonique de $p(x)$.

b- Les racines éventuelles de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$.

1) $P(x) = x^2 + x - 1$.

2) $P(x) = -x^2 + x - 1$.

3) $P(x) = x^2 - 7x + 6$.

4) $P(x) = -5x^2 + x + 1$.

5) $P(x) = x^2 + 2x + 2$.

6) $P(x) = 4x^2 + 2x - 2$.

7) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$.

8) $P(x) = x^2 + x + 1$.

Exercices 8:

Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :
les réels a ; b ; c ; d etc.....

$$1) P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$2) q(x) = 2x^3 - 12x - 9$$

$$3) f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$$

$$4) g(x) = 2x^3 - 12x - 9$$

$$5) i(x) = x^2 + x - 1.$$

$$6) k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1.$$

$$7) l(x) = x^2 - 7x + 9.$$

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(x) = (2ax + 1)(-bx - 1)(x + c)$$

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$i(x) = (2x + a)(x - b)$$

$$k(x) = ax^2 + bx + c$$

$$l(x) = \left(-\frac{3a}{4}x - b\right)^2$$

Exercices 9 :

Parmi les fonctions numériques suivantes dire celles qui sont rationnelles puis en déduire leur ensemble de définition :

$$1) f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \quad ; \quad 2) g(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 7x + 9 \quad ; \quad 3) h(x) = (-x + 8)^3$$

$$4) p(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x + 5} \quad ; \quad 5) q(x) = \left(\frac{7x + 1}{-x - 1}\right)^3 \quad ; \quad 6) k(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{-x + 3}} \quad ;$$

$$7) i(x) = \frac{x + 2}{(2x + 1)(x^2 - 1)}$$

Exercices 10:

Dans chacun des cas suivants :

a- Déterminer l'ensemble de définition D_f .

b- Simplifier $f(x)$ sur D_f .

c- Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{(-x + 1)(x + 2)} \quad ; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3} \quad ; \quad 3) f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$$

Equations- Inéquations-

Evaluation diagnostique

Activités

Trouve les bonnes réponses pour chacune des affirmations suivantes :

1- Calcul littéral

■ Le développement de $(5x-1)^2$ est :

a) $10x^2-1$; b) $25x^2-1$; c) $25x^2-5x+1$; d) $25x^2-10x-1$; e) $25x^2-10x+1$.

■ Le développement de $-(2x-1)(x-3)$ est :

a) $-2x^2+3$; b) $2x^2-7x+3$; c) $-2x^2-7x+3$; d) $-2x^2-7x-3$;
e) $-2x^2+7x-3$.

■ L'expression est une différence de deux carrés :

a) x^2-4 ; b) $-x^2+1$; c) $-4x^2-9$; d) $(x-1)^2-4x$; e) $3-5x^2$.

■ L'expression $6x-\frac{1}{3}$ peut s'écrire :

a) $3\left(2x-\frac{1}{3}\right)$; b) $-\left(6x-\frac{1}{3}\right)$; c) $\frac{2}{3}(3x-2)$; d) $\frac{1}{3}(2x-1)$; e) $\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

e) $\frac{5}{3}\left(\frac{18}{5}x-\frac{1}{5}\right)$

2- Equations simples

■ L'équation $-\frac{4}{3}x-3=0$ a pour solution :

a) -4 ; b) -4 ; c) $\frac{15}{4}$; d) $-\frac{9}{4}$

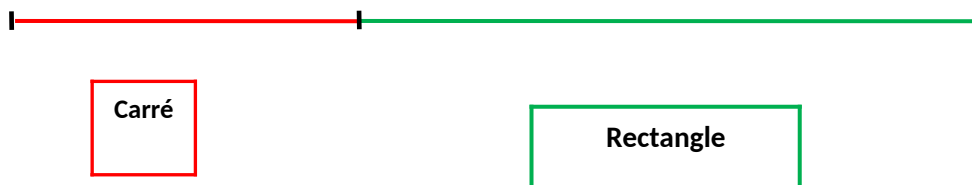
■ Le nombre donné vérifie l'équation : $-x(2x+5)=0$

- a) 1 ; b) -1 ; c) $-\frac{2}{5}$; d) 0

Situation - Problème

Un fil de fer à pour longueur 4,5 m.

On le coupe en deux morceaux : On plie le premier morceau en forme de carré et le second en forme de rectangle dont une dimension est 1 m.



Déterminer les longueurs possibles du premier morceau dans chacun des cas suivants :

- La seconde dimension du rectangle est égale au côté du carré.
- L'aire du rectangle est plus grande que l'aire du carré.
- L'aire du rectangle est le quadruple de l'aire du carré.

Sommaire

1. Rappels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$	61
2. Rappels et règles de calcul sur les quotients – les puissances et les radicaux.....	62
3. Distance sur $\mathbb{R}$	65
4. Intervalles.....	67
5. Résolution graphique de certaines équations et inéquations.....	70
6. Résolution algébrique des équations – inéquations et systèmes d'équations.....	72
7. Résolution graphique dans $\mathbb{R}^2$ des équations et inéquations.....	81
8. Résolution graphique dans $\mathbb{R}^2$ des équations et inéquations.....	84
9. Résolution des systèmes dans $\mathbb{R}^2$ puis dans $\mathbb{R}^3$	87
10. Mise en équations.....	91

Cours

I- Rappels et compléments des propriétés dans IR

1) Ensemble des entiers naturels

0, 1, 2.... etc sont des nombres entiers naturels

$\mathbb{N}$: {0, 1, 2, 3, 4.....} est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4.....\}$ est l'ensemble des entiers naturels privé de zéro.

2) L'ensemble des entiers relatifs

-2, 3, 0, -10 sont des entiers relatifs. L'ensemble des entiers relatifs sera noté par $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{..... 4 ; -3 ; -2 ; 0, 1, 2, 3, 4,.....\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}_+$ L'ensemble des entiers relatifs positifs

L'ensemble des entiers relatifs négatifs

$\mathbb{Z}_+^*$ L'ensemble des entiers relatifs positifs privés de zéro

$\mathbb{Z}_-^*$ L'ensemble des entiers relatifs négatifs privés de zéro

3) L'ensemble des nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs

-1 ; 3,5 ; $\frac{7}{3}$ sont des nombres rationnels.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{P}{Q}, P \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z}^* \right\} \Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$, π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels et est noté par $\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres décimaux est noté par $\mathbb{D}$.

$$\mathbb{D} = \{ x/x, \in \frac{P}{10^n} P \in \mathbb{Z}^* \text{ et } n \in \mathbb{N} \}$$

Exemple : $x = -2,741 \Rightarrow -2,741 = \frac{-2741}{10^3} ; P = -2741 ; n = 3$

Remarque :

$$x = -2,741 = \frac{-2,741}{10^3} \quad n = 3$$

On dit que x est un nombre décimal **d'ordre 3**.

II- RAPPELS ET REGLES DE CALCUL SUR LES QUOTIENTS – PUISSANCES ET RADICAUX

1) Calcule sur les quotients

Soit $a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^*$ le réel $q = \frac{a}{b}$ est appelé quotient de a par b.

Règles de calcul

$$\frac{a}{-1} = -a$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} ; (bd \neq 0)$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} ; (bd \neq 0)$$

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b}$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} (a \neq 0)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} (bc \neq 0)$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{ab} (ab \neq 0)$$

2) Les puissances entières

Soit $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $a^n = a \times a \times a \dots \times a \times a$ } n fois

$$a^0 = 1 ; a^{-1} = \frac{1}{a} ; a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Règle de calcul

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Remarque :

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ c'est : la **racine n^{ème}** de a ; c'est le réel élevé à la **puissance n** qui donne a.

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

3) Les radicaux

Règles de calcul

Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

$$\text{En particulier } \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Remarque :

Si a est positif $\sqrt{a^2} = a$

Si a est négatif $\sqrt{a^2} = -a$

Si $a \geq 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

4) Comparaison de deux nombres

Pour comparer deux nombres, x et y nous disposons des règles suivantes :

- **Si** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $x - y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y$
- **Si** $z > 0$ alors $x \geq y \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$
- **Si** $z < 0$ alors $x \geq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$
- **Si** $x \geq 0$ et $y \geq 0$ $x \geq y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$

- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ $x \geq y \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{y}$
- Si $x > 0$ et $y > 0$ $x \geq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

Exercice d'application

- a- Calculer les nombres suivants en mettant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\mathbf{A} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} ; \mathbf{B} = \frac{4}{\frac{5}{2} + \frac{1}{3}} ; \mathbf{C} = \frac{\frac{-2}{3} - 4}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3}} \quad \mathbf{D} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{5}}{-3 + \frac{3}{10}} \times \frac{\frac{7}{2} - \frac{3}{5}}{\frac{1}{-3} + \frac{3}{10}} ;$$

$$\mathbf{E} = \frac{\frac{1}{4} - 3}{\frac{5}{2} + \frac{1}{3}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{5}}{5 - \frac{1}{2}}$$

- b-

Calculer les nombres réels suivants à l'aide d'une puissance entière de nombres premiers :

$$\mathbf{A} = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} ; \mathbf{B} = \left(\frac{(8^6 \times 5^4 \times 7^8)^{\frac{1}{2}}}{3^3 \times 4^5 \times 4^6} \right)^3 ; \mathbf{C} = \frac{((5)^3 \times (-2^{-1})^2)^4}{8}$$

- c- Soit a un nombre entier naturel.

Déterminer l'entier a satisfaisant aux conditions indiquées :

$$2^{4+a} = 64 ; \quad 3^{12} = 9^{3a} ; \quad 7^{4-a} = 1 ; \quad 5^a \times 25 = 125 ; \quad (7^a)^3 = 1 ;$$

$$\frac{13^{a-4}}{13} = 169$$

- d- Mettre sous forme $a\sqrt{b}$ les expressions suivantes :

$$\mathbf{A} = 7\sqrt{20} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{5} ; \mathbf{B} = 2\sqrt{54} - \sqrt{6} + \sqrt{24} + 3\sqrt{96}$$

- e- Rendre rationnelle le dénominateur des fractions suivantes :

$$\frac{3}{\sqrt{7}} ; \frac{5}{\sqrt{3}+1} ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} ; \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+2} ; \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}+5} ; \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{7}} ; \frac{5-3\sqrt{2}}{3\sqrt{7}-\frac{5}{2}}$$

f- On pose : $\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} ; \quad \mathbf{y} = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

Vérifier que : $4x - y = 0$

- g- Comparer les nombres réels suivants :

$$\frac{23}{99} \text{ et } \frac{231}{990} \quad ; \quad \frac{99}{23} \text{ et } \frac{990}{231} \quad ; \quad \frac{23}{99} \text{ et } \frac{239}{999}$$

III- Distance sur IR

Activité :

Dans chacun des cas suivants compare les réels x et $-x$:

a) $x = -2$ b) $x = \sqrt{2}$ c) $x = 3$ d) $x = 1 - \sqrt{2}$

1) Valeur absolue :

a- **Définition** : La valeur absolue d'un nombre réel x est notée: $|x|$. Elle est définie comme suite : $|x| = \max\{x; -x\}$ d'où :

- Si x est positif, la valeur absolue de x **est** : x
- Si x est négatif, la valeur absolue de x **est** : $-x$

Ex : Calculer la valeur absolue des réels suivants : $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $(\sqrt{2}-1)$; $(1-\pi)$

b- propriétés de la valeur absolue :

Pour tout nombre réel x, y , on a :

- **P₁** : $|x| \geq 0$
- **P₂** : $|x| = 0$ équivaut $x = 0$
- **P₃** : $|-x| = |x|$. exemple : $|-2| = |2|$
- **P₄** : $|xy| = |x| \cdot |y|$
- **P₅** : $\sqrt{x^2} = |x|$. exemple : $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$
- **P₆** : $|x^n| = |x|^n$. exemple : $|(-3)^3| = |-3|^3 = 3^3$
- **P₇** : $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (avec $y \neq 0$)
- **P₈** : $|x+y| \leq |x| + |y|$
exemple : $|3+(-4)| \Leftrightarrow |3-4| = |-1| = 1$
 $\Leftrightarrow |3| + |-4| = 3+4 = 7 \quad (1 < 7) \text{ vraie}$

- $P_9 : |x| = |y|$ équivaut à : $x = -y$ ou $x = y$
- $P_{10} : |x| \leq |y|$ équivaut à : $-y \leq x \leq y$

Exercice d'application :

- a) Démontrer que pour tous réels a , b et x , $|ax + b| = |a| \cdot \left| x + \frac{b}{a} \right|$.
- b) En déduire de ce qui précède $|ax + b| \leq r \Leftrightarrow \left| x + \frac{b}{a} \right| \leq \frac{r}{|a|}$

2) Distance sur $\mathbb{R}$

a- Distance entre deux points :

Activité :

Soit (D) une droite graduée et x, y deux nombres réels.

Soient A et B deux points de la droite d'abscisse respective x et y .

- Calcule $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$
- Détermine AB et BA

b- Définition :

x, y étant deux nombres réels quelconques on appelle distance de x à y , le nombre réel positif ou nul noté $d(x, y)$ tel que $d(x, y) = |x - y|$.

Cas particulier :

La distance du point O (origine du repère) à M est :

$$d(o, x) = |o - x| = |-x| = |x| \Rightarrow d(o, x) = |x|$$

La valeur absolue d'un nombre réel x est la distance entre l'origine et le point M d'abscisse x .

Exemple :

- 1) Quelle est la distance de 4,7 à 2,3 ?
- 2) Evaluer la distance $d(3 ; 4,25)$

Solution

- 1) $d(4,7 ; 2,3) = |4,7 - 2,3| = |2,4| = 2,4$
- 2) $d(3 ; 4,25) = |3 - 4,25| = |-1,25| = 1,25$

c- Propriétés

Soient x , y et z trois nombres réels quelconques.

$$d(x, y) \geq 0$$

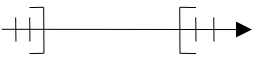
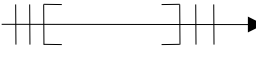
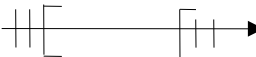
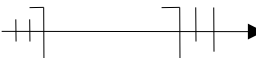
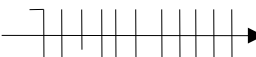
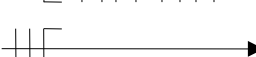
$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

IV- LES INTERVALLES :

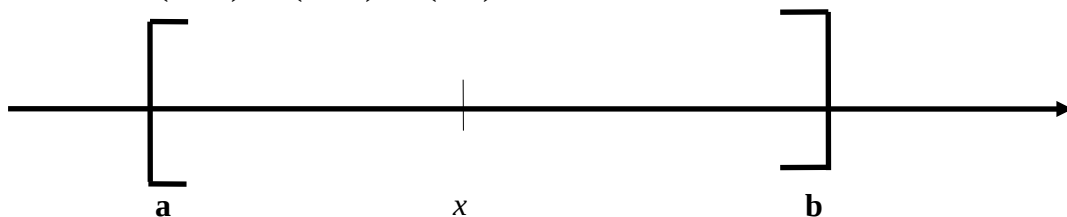
Soient a et b deux nombres réels tel que $a < b$

Notations	Interprétation littéraires	Désigne l'ensemble des nombres réels tel que	représentations graphiques
$]a, b[$	Intervalle ouvert : a, b	$a < x < b$	
$[a, b]$	Intervalle fermé : a, b	$a \leq x \leq b$	
$[a, b[$	Intervalle semi ouvert : a, b	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	Intervalle semi fermé : a, b	$a < x \leq b$	
$] \leftarrow, a]$	Intervalle semi ouvert extrémité : a	$x \leq a$	
$] \leftarrow, a[$	Intervalle ouvert d'extrémité : a	$x < a$	
$[a, \rightarrow[$	Intervalle semi ouvert d'origine : a	$x \geq a$	
$]a, \rightarrow[$	Intervalle ouvert d'origine : a	$x > a$	
$] \leftarrow, \rightarrow[$	Intervalle ouvert $-\infty ; +\infty$	$\mathbb{R}$	

1) Caractérisation d'un intervalle fermé à l'aide de la distance :

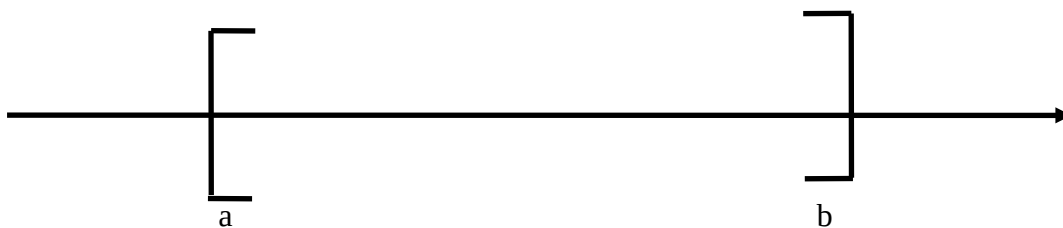
Théorème : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et x un nombre réel quelconque.

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)$$



2) Intervalle fermé - Intervalle ouvert : centre et rayon

a- **Définition** : soit $[a, b]$ un intervalle fermé tel que $a < b$



$$d(a, b) = b - a$$

➤ $b - a$ est appelé l'**amplitude** de $[a, b]$

➤ $c = \frac{a+b}{2}$ est appelé **centre** de $[a, b]$.

$$d(a, c) = |a - c| = \left| a - \frac{a+b}{2} \right| = \left| \frac{2a - a - b}{2} \right| = \left| \frac{a - b}{2} \right| = \frac{b - a}{2}$$

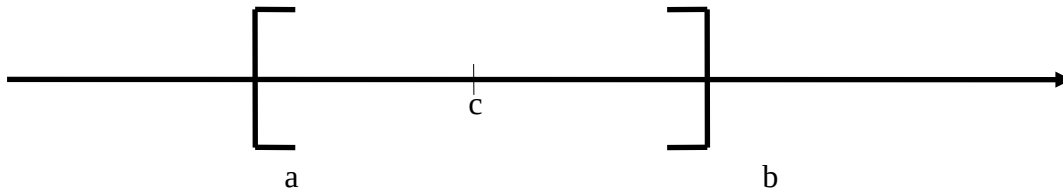
$$d(c, b) = |c - b| = \left| \frac{a+b}{2} - b \right| = \left| \frac{a + b - 2b}{2} \right| = \left| \frac{a - b}{2} \right| = \frac{b - a}{2}$$

➤ $r = \frac{b-a}{2}$ est appelé **rayon de l'intervalle fermé** $[a, b]$

b- Notation :

L'intervalle fermé $[a, b]$ de centre c et d rayon sera noté : $\bar{I}(C, r)$

Ainsi, on a : $[a, b] = \bar{I}(C, r)$. Avec : $a = C - r$ et $b = C + r$



$\bar{I}(C, r)$ est l'ensemble des nombres réels x tel que $d(x, c) \leq r$

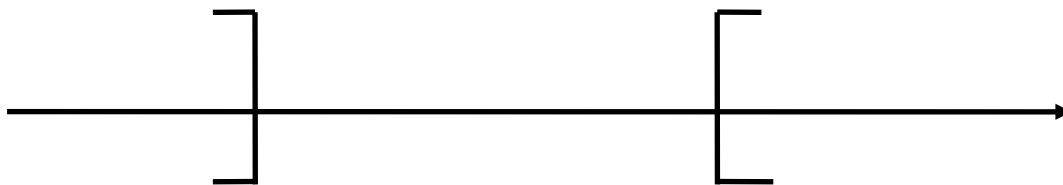
Théorème : Soit C un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

Pour tout nombre réel x :

$x \in \bar{I}(C, r)$ équivaut à $d(c, x) \leq r$

- Nous définissons de même le centre C et le rayon r d'un intervalle ouvert $]a, b[$

Notation : L'intervalle ouvert de centre c et de rayon r sera noté $I(C, r)$



NB : $a = c - r$ et $b = c + r$

Exercice d'application

1) A l'aide d'une représentation graphique de l'ensemble $\mathbb{R}$ déterminer le centre et le rayon des intervalles suivants :

$] -1, 3[$; $[7; \frac{15}{2}]$; $] -2; 2[$; $[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

2) A l'aide d'une représentation graphique de l'ensemble $\mathbb{R}$ déterminer le centre et le rayon des intervalles suivants :

$I(2, \frac{1}{4})$; $\bar{I}(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $I(\sqrt{2}, 10^{-2})$; $\bar{I}(5/4; 1/4)$

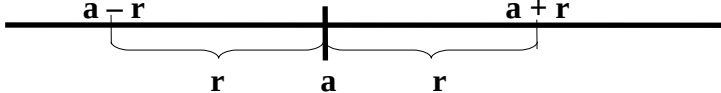
V- RESOLUTION GRAPHIQUE DE CERTAINES EQUATIONS ET INEQUATIONS

Soit a un nombre réel et r un nombre réel positif.

1) Résolution graphique de l'équation $|x - a| = r$:

Résoudre l'équation $|x - a| = r$ revient à chercher l'ensemble des nombres réels x tel que $d(x, a) = r$

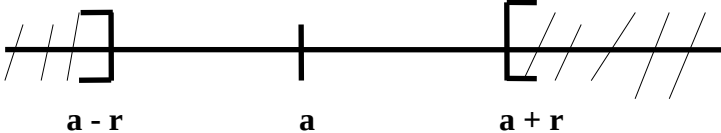
L'ensemble solution de l'équation : $|x - a| = r$ est :

$$S = \{a - r ; a + r\} =$$


2) Résolution graphique de l'inéquation $|x - a| < r$

Résoudre l'inéquation $|x - a| < r$ revient à chercher l'ensemble des nombres réels x tel que $d(x, a) < r$

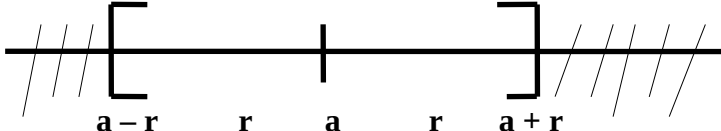
L'ensemble solution de l'inéquation : $|x - a| < r$ est :

$$S =]a - r ; a + r[=$$


3) Résolution graphique de l'inéquation $|x - a| \leq r$

Résoudre l'inéquation $|x - a| \leq r$ revient à chercher l'ensemble des nombres réels x tel que $d(x, a) \leq r$

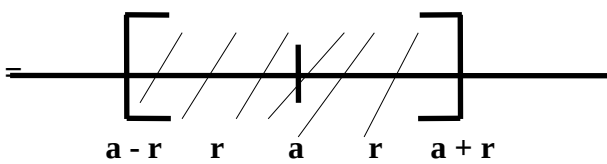
L'ensemble solution de l'inéquation : $|x - a| \leq r$ est :

$$S = [a - r ; a + r] =$$


4) Résolution graphique de l'inéquation $|x - a| > r$

Résoudre l'inéquation $|x - a| > r$ revient à chercher l'ensemble des nombres réels x tel que $d(x, a) > r$

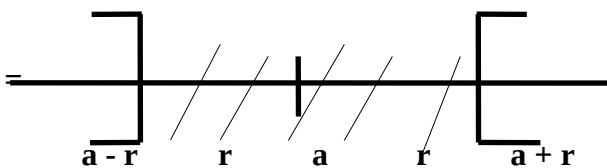
L'ensemble solution de l'inéquation : $|x-a| > r$ est :

$$S =]-\infty ; a-r[\cup]a+r ; +\infty[$$


5) Résolution graphique de l'inéquation $|x-a| \geq r$

Résoudre l'inéquation $|x-a| \geq r$ revient à chercher l'ensemble des nombres réels x tel que $d(x, a) \geq r$

L'ensemble solution de l'inéquation : $|x-a| \geq r$ est :

$$S =]-\infty ; a-r] \cup [a+r ; +\infty[$$


Exercices d'applications :

Résoudre graphiquement puis algébriquement

- 1) $x \in \mathbb{R} ; |x-4|=5$
- 2) $x \in \mathbb{R} ; |2x-4|=2$
- 3) $x \in \mathbb{R} ; |-3x+\frac{1}{4}|=3$
- 4) $x \in \mathbb{R} ; |2x-3|<1$
- 5) $x \in \mathbb{R} ; |3x+1|\geq 5$
- 6) $x \in \mathbb{R} ; |x-1|>5$
- 7) $x \in \mathbb{R} ; |\frac{1}{2}x+1|\geq -2$

VI- RESOLUTION ALGEBRIQUE DES EQUATIONS – INEQUATIONS – ET SYSTEMES D'EQUATIONS

A- EQUATIONS

1) Equations du premier degré :

Activité :

Ali a aujourd'hui 38 ans et son fils a 13 ans.

Dans combien d'années Ali aura-t-il le double de l'âge de son fils ?

a- Définition :

On appelle équation du premier degré toute équation pouvant se ramener sous la forme :

$$ax + b = 0 \quad \text{avec } (a \neq 0).$$

b- Résolution :

Pour résoudre de telles équations, on détermine la valeur de l'inconnue x tel que :

$$x = \frac{-b}{a} \quad \text{et sa solution est telle que } \boxed{s = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}}$$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$-2x + 1 = 0 \quad ; \quad 5 + 3x = -5 \quad ; \quad \frac{x+2}{-x+3} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{x+2}{-5} = \frac{-3x+4}{2}$$

2) Equations du second degré :

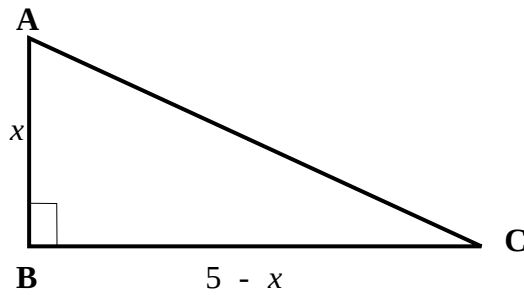
Activité1 :

Détermine les dimensions d'un champ rectangulaire dont l'aire vaut 1200m^2 et dont la longueur dépasse de 10 m la largeur.

Activité 2 :

On dispose d'un triangle ABC rectangle en B dont les longueurs en centimètre sont :

$$AB = x \quad \text{et} \quad BC = 5 - x \quad (\text{avec: } 0 < x < 5)$$



- Détermine tous les réels x tels que $AC^2 = \frac{29}{2}$.
- Pour quelles valeurs de x a-t-on l'égalité $AC^2 = \frac{25}{2}$.

$AC^2 = \frac{29}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 25 = \frac{29}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 21 = 0$ est une équation du second degré en x .

De même $2x^2 - 10x + 25 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0$ est aussi une équation du second degré en x .

a- Définition :

On appelle équation du second degré toute équation pouvant se ramener sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } (a \neq 0).$$

b- Résolution :

Rappelons que la forme canonique d'un polynôme du second degré est donnée par :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{avec } (\neq 0).$$

$$\text{Alors résoudre l'équation } ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Ainsi résolvons cette équation en discutant suivant les valeurs de Δ :

- Si $\Delta < 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 < 0$ est absurde et par conséquent l'équation n'admet pas de solution. D'où $S = \emptyset$.

- Si $\Delta = 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$ par conséquent l'équation admet une solution double D'où $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$

- Si $\Delta > 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Leftrightarrow$
 $x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$ ou $x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ par conséquent l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 D'où $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

Pour résoudre de telles équations, on calcule le discriminant associé Δ tel que :
 $\Delta = b^2 - 4ac$. Ainsi la solution est obtenue en discutant suivant les valeurs de Δ .

➤ Si $\Delta < 0$, on pas de solution

➤ Si $\Delta = 0$, on a une solution double : x_1 et x_2 telle que :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \quad \square$$

➤ Si $\Delta > 0$, on a deux solutions distinctes : x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \square$$

Exercice d'application

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $x^2 - x - 6 = 0$; b) $-3x^2 + x - 1 = 0$; c) $x^2 + 4x + 4 = 0$

Remarque :

- Si x_1 est **solution** d'une équation alors x_1 est appelée **racine** de l'équation.
- Si b est **pair** c'est-à-dire ($b = 2b'$) alors on résout l'équation avec le discriminant réduit Δ' tel que $\Delta' = b'^2 - ac$.

Si $\Delta' < 0$, on pas de solution

Si $\Delta' = 0$, on a une solution double : x_1 et x_2 telle que : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

Si $\Delta' \geq 0$, on a deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$

Si l'équation du second degré a deux racines distinctes, x_1 et x_2 alors $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

et $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Racine évidente d'une équation du second degré

- Si $a + b + c = 0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$

- Si $a + c = b$ alors $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $7x^2 + 9x + 2 = 0$; b) $-3x^2 + x + 4 = 0$; c) $x^2 + 4x + 4 = 0$

B- INEQUATIONS

1) Inéquations du premier degré :

a- Définition :

On appelle inéquation du premier degré toutes inéquations pouvant se ramener sous la forme:

$ax + b < 0$; $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$ ou $ax + b \geq 0$ avec $(a \neq 0)$.

b- Résolution :

Pour résoudre de telles inéquations, on étudie le signe du binôme : $ax + b$ dans un tableau appelé **tableau de signe** après avoir déterminé la valeur de x .

Puis on prend l'ensemble solution des x satisfaisant à l'inégalité proposée comme ensemble solution de l'inéquation.

x	$\frac{-b}{a}$
Signe de $-a$	Signe de a

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant l'étude du signe du binôme :

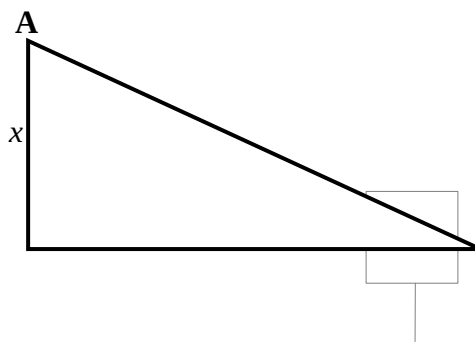
a) $-2x + 1 \leq 0$; b) $5 + 3x \geq -5$; c) $\frac{x+2}{-x+3} < \frac{1}{2}$; d) $\frac{x+2}{-5} > \frac{-3x+4}{2}$

e) $(2x-1)(3x+2) > 0$; f) $\frac{4-3x}{(x+2)(4-2x)} < 0$; g) $\frac{(5x+5)(4x+2)}{(x-2)(4-x)} \geq 0$

2) Inéquations du second degré à une inconnue :**a- Etude du signe du trinôme $ax^2 + bx + c$** **Activité 1:**

On dispose d'un triangle ABC rectangle en B dont les longueurs en centimètre sont :

$AB = x$ et $BC = 5 - x$ (avec : $0 < x < 5$)



$$\begin{array}{c} \text{B} \qquad \qquad \qquad \text{C} \\ 5 - x \end{array}$$

1) Exprime AC^2 en fonction de x puis établis que : $AC^2 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$.

L'expression $2x^2 - 10x + 50$ est appelée un trinôme du second degré en x .

2) Détermine tous les réels x tels que $AC^2 \geq \frac{29}{2}$.

3) Détermine tous les réels x pour que l'on ait $AC^2 \geq \frac{25}{2}$.

Règle :

Pour étudier le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **1^{er} cas : Si $\Delta < 0$,** le trinôme n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et est du signe de **a**. D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

- **2^{ème} cas : Si $\Delta = 0$,** le trinôme a une solution double x_1 et x_2 avec ($x_1 = x_2$) et est du signe de **a** pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$. D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- **3^{ème} cas : Si $\Delta > 0$,** le trinôme a deux solutions distinctes x_1 et x_2 avec ($x_1 < x_2$) et est du signe de **a** pour les valeurs extérieures aux racines x_1 et x_2 puis du signe contraire de **a** entre les racines x_1 et x_2 . D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de -a	0
				signe de a

b- Définition :

On appelle inéquation du premier degré toutes inéquations de la forme :

$ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec ($a \neq 0$).

c- Résolution :

Pour résoudre une inéquation du second degré, on étudie le signe du trinôme:

$ax^2 + bx + c$. L'ensemble solution de l'inéquation proposée est la partie du tableau satisfaisant à l'inégalité donnée.

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$x^2 - x - 6 \leq 0; \quad -3x^2 + x - 1 \geq 0; \quad x^2 + 4x + 4 < 0;$$

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{-x^2 + 4x - 3} > 0$$

C- EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES**1- Equations irrationnelles :****a- Définition :**

On appelle équations irrationnelles toute équation dans laquelle l'inconnue figure sous un radical ou plusieurs radicaux.

b- résolution :

Pour résoudre de telles équations, on cherche le domaine de validité D_v tel que :

$$D_v = \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b \geq 0 \text{ et } cx + d \geq 0\}.$$

Ainsi on résout l'équation en élevant les deux membres de l'égalité au carrée.

c- Méthode pratique :

Si $\sqrt{ax+b} = cx + d$, alors on a la forme $\sqrt{A(x)} = B(x)$ et l'ensemble solution est tel que :

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 & (S_1) \\ A(x) = (B(x))^2 & (S_2) \end{cases}$$

Alors on a : $S = S_1 \cap S_2$

Si $\sqrt{ax+b} = \sqrt{cx+d}$, alors on a la forme $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$ et l'ensemble solution est tel

que :
$$\begin{cases} A(x) \geq 0 & (S_1) \\ B(x) \geq 0 & (S_2) \\ A(x) = B(x) & (S_3) \end{cases}$$

Alors on a : $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

Exercice d'application

Résoudre dans IR les équations irrationnelles suivantes :

a- $\sqrt{x+4} = x + 1$; **b-** $2x - \sqrt{x} - 1 = 0$; **c-** $\sqrt{1-2x} = \sqrt{4x-8}$

2- Inéquations irrationnelles :

a- Définition :

On appelle inéquations irrationnelles toute inéquation dans la quelle l'inconnue figure sous un radical ou plusieurs radicaux.

b- résolution :

Pour résoudre de telles inéquations, on cherche le domaine de validité D_v tel que :

$$D_v = \left\{ \frac{x}{x} \in IR ; ax+b \geq 0 \text{ et } cx+d \geq 0 \right\}.$$

Ainsi on résout l'inéquation en élevant les deux membres de l'égalité au carrée.

c- Méthode pratique :

Si $\sqrt{ax+b} \geq cx+d$, alors on a la forme $\sqrt{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} B(x) \leq 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \quad (S_1) \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq (B(x))^2 \end{cases} \quad (S_2)$$

Alors on a : $S = S_1 \cup S_2$

Si $\sqrt{ax+b} \leq \sqrt{cx+d}$, alors on a la forme $\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)}$ et l'ensemble solution est tel

$$\text{que : } \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (S_1) \\ (S_2) \\ (S_3) \end{matrix}$$

Alors on a : $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

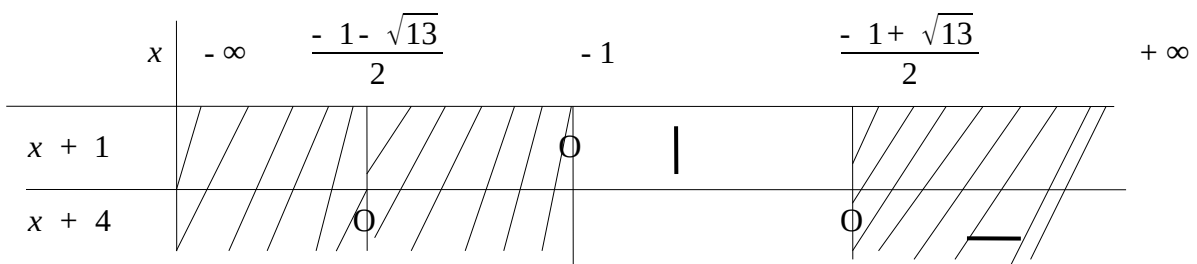
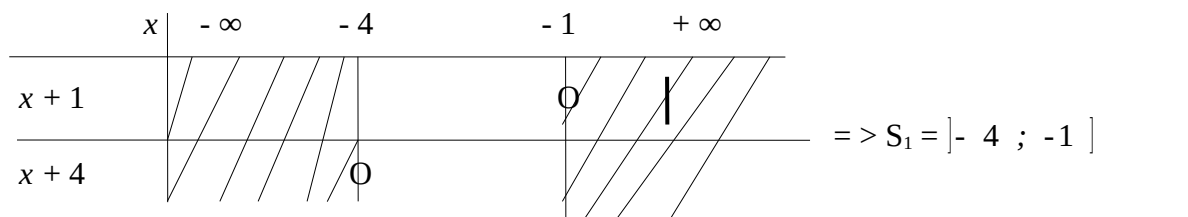
Exemple :

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation irrationnelle $\sqrt{x+4} \geq x+1$

Solution

$$\sqrt{x+4} \geq x+1 \Leftrightarrow \sqrt{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \leq 0 \\ A(x) > 0 \end{cases} (S_1) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq (B(x))^2 \end{cases} (S_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+4 \geq (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2+x-3 \leq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow S_2 = \left] -1 ; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right]$$

$$\text{D'où } S = S_1 \cup S_2 = \left] -4 ; -1 \right] \cup \left] -1 ; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right] = \left] -4 ; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right]$$

Exercices d'applications

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations irrationnelles suivantes :

a- $2x - \sqrt{x} - 1 < 0$; **b-** $\sqrt{1-2x} > \sqrt{4x-8}$

VII- RESOLUTION GRAPHIQUE DANS $\mathbb{R}^2$ DES EQUATIONS ET INEQUATIONS

1) Résolution graphique des équations du type : $ax + by + c = 0$

Méthode pratique :

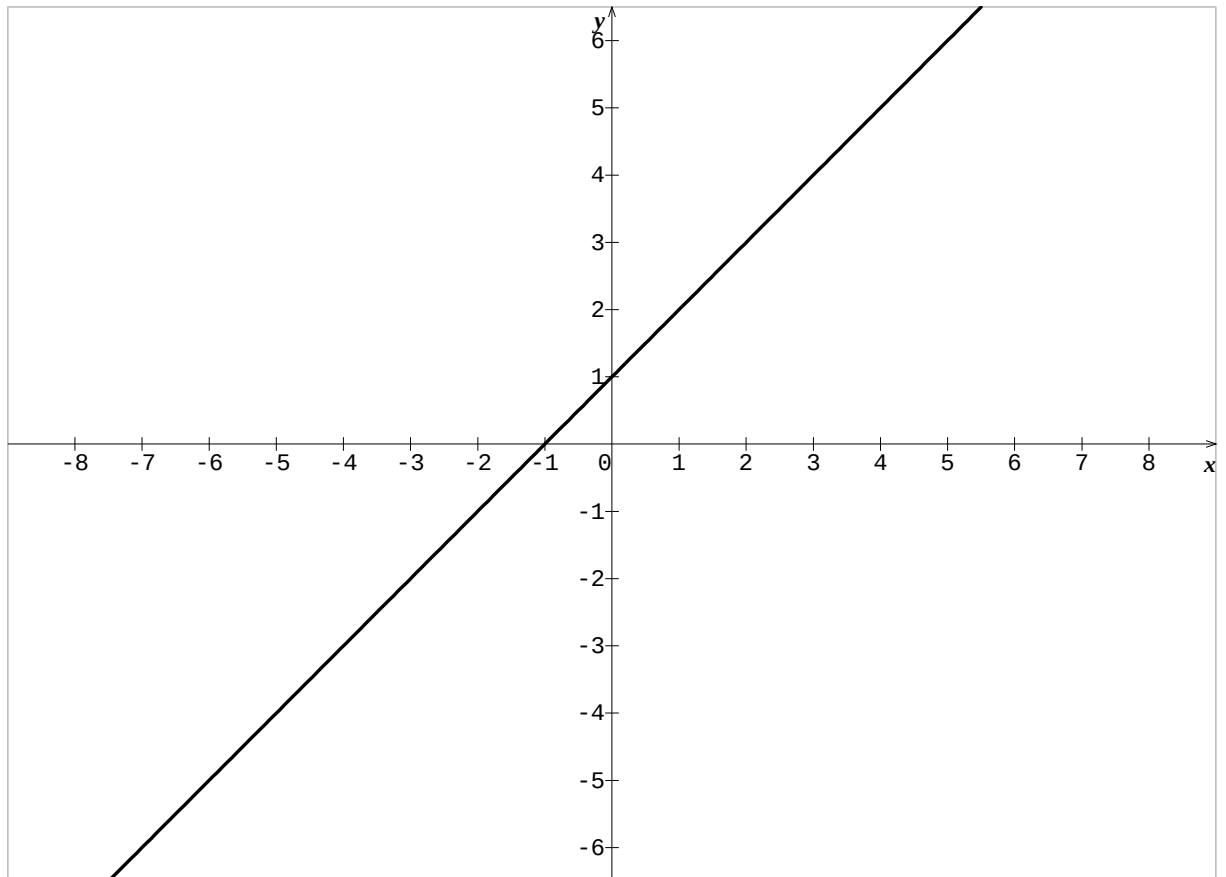
Résoudre graphiquement une équation du type : $ax + by + c = 0$, revient à tracer la droite d'équation : $ax + by + c = 0$. Pour tracer cette droite, **deux** points suffisent. Il faut donc

calculer l'image par f de deux valeurs distinctes x_1 et x_2 puis tracer la droite passant par les points de coordonnées : $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$.

Exemple :

$$-x + y - 1 = 0$$

x	0	-1
y	1	0



Exercices d'application :

Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $y = -2x + 3$; b) $-3x + 2y - 1 = 0$; c) $-5x + y = 0$

2) Résolution graphique des inéquations du type :

$$ax + by + c < 0; \quad ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c \geq 0 \text{ ou } ax + by + c > 0$$

Méthode :

Résoudre graphiquement une inéquation du type :

$$ax + by + c < 0; \quad ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c \geq 0 \text{ ou } ax + by + c > 0 \text{ revient}$$

à tracer la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Elle partage le plan en deux demi-plans

Ainsi à l'aide d'un point A de coordonnées connues, l'ensemble solution est l'ensemble des couples de coordonnées de points du demi-plan vérifiant l'inéquation proposée en hachurant le demi-plan dont les coordonnées ne vérifient pas l'inéquation donnée.

NB :

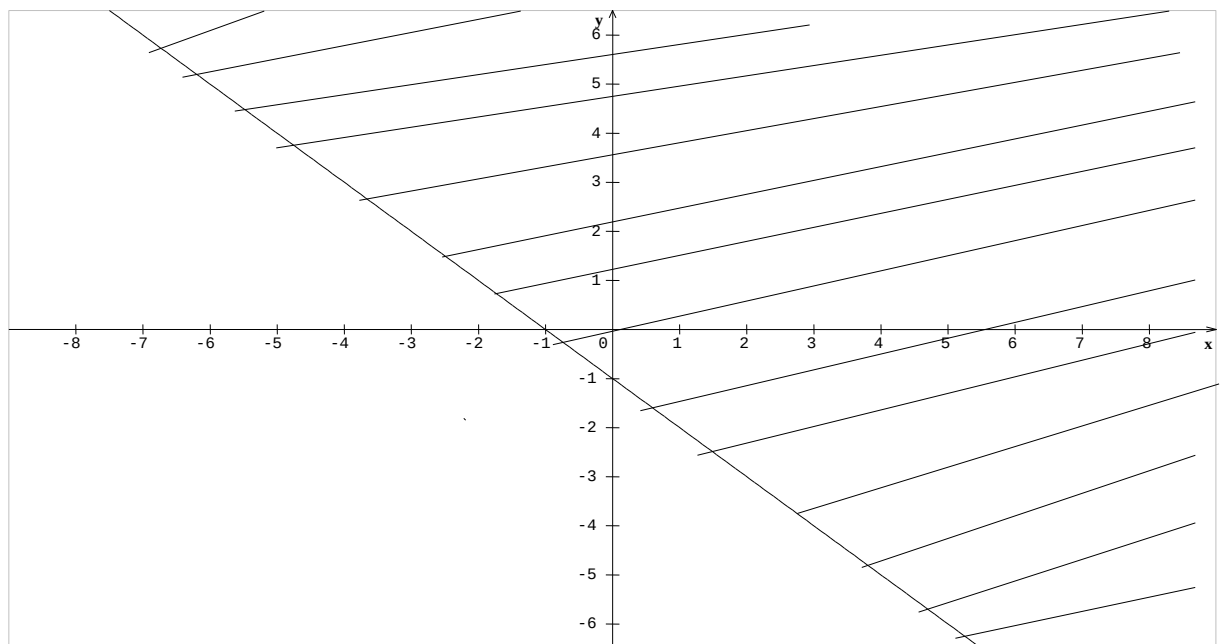
Si les coordonnées du point A vérifient l'inégalité, alors on hachure le demi-plan ne contenant pas le point A .

Si les coordonnées de ce point ne vérifient pas l'inégalité, alors on hachure le demi-plan contenant l'origine $O(0 ; 0)$ du repère.

Exemple :

$$x + y + 1 < 0$$

x	0	-1
y	-1	0



Exercices d'application :

Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $y \geq -2x + 3$; b) $-3x + 2y - 1 \leq 0$; c) $-x + y - 1 > 0$

VIII-RESOLUTION GRAPHIQUE DANS $\mathbb{R}^2$ DES SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

1- Résolution graphique des systèmes d'équations :

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues,

tout système de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Méthode pratique :

Pour résoudre graphiquement un système de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$;

On trace les deux droites $(D_1) : ax + by = c$ et $(D_2) : a'x + b'y = c'$ dans le même repère puis l'on détermine les coordonnées de leur point d'intersection qui correspond à l'ensemble solution S .

2- Résolution graphique des systèmes d'inéquations :

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues,

tout système de la forme $\begin{cases} ax+by \leq c \\ a'x+b'y \leq c' \end{cases}$, ou $\begin{cases} ax+by \geq c \\ a'x+b'y \geq c' \end{cases}$

Méthode pratique :

Pour résoudre graphiquement un système de la forme $\begin{cases} ax+by \leq c \\ a'x+b'y \leq c' \end{cases}$, ou $\begin{cases} ax+by \geq c \\ a'x+b'y \geq c' \end{cases}$

On trace les deux droites $(D_1) : ax + by = c$ et $(D_2) : a'x + b'y = c'$ dans le même repère puis l'on représente l'ensemble solution de chaque inéquation dans le même repère. Ainsi l'ensemble solution S est la partie non hachurée du plan.

Exemple:

Résoudre graphiquement le système d'inéquation suivant

$$\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

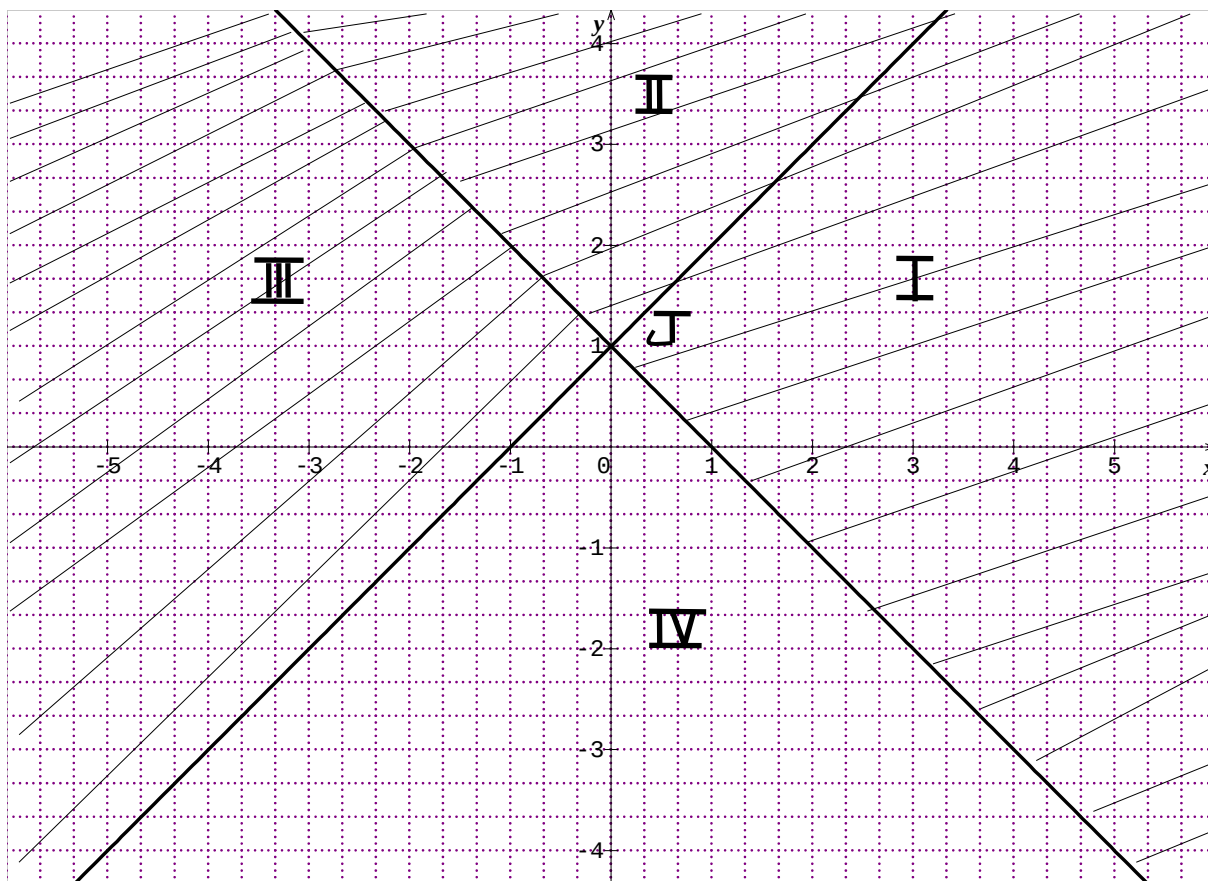
Posons $(D) : x - y = -1$ et $(D') : x + y = 1$

Pour la droite (D) , on a :

x	0	-1
y	1	0

Pour la droite (D') , on a :

x	0	1
y	1	0



Prenons le point $A(2 ; 1) \in \text{I}$ voyons si les coordonnées de A vérifient le système :

$$\begin{cases} 2-1 \geq -1 & (\text{Vrai}) \\ 2+1 \leq 1 & (\text{Faux}) \end{cases} \quad \text{D'où } A \notin S.$$

Prenons le point $B(0 ; 4) \in \text{II}$ voyons si les coordonnées de B vérifient le système :

$$\begin{cases} 0-4 \geq -1 & (\text{Faux}) \\ 0+4 \leq 1 & (\text{Faux}) \end{cases} \quad \text{D'où } B \notin S.$$

Prenons le point $C(-2 ; 1) \in \text{III}$ voyons si les coordonnées de C vérifient le système :

$$\begin{cases} -2-1 \geq -1 & (\text{Faux}) \\ -2+1 \leq 1 & (\text{Vrai}) \end{cases} \quad \text{D'où } C \notin S.$$

Prenons le point $O(0 ; 0) \in \text{IV}$ voyons si les coordonnées de O vérifient le système :

$$\begin{cases} 0-0 \geq -1 & (\text{Vrai}) \\ 0+0 \leq 1 & (\text{Vrai}) \end{cases} \quad \text{D'où } O \in S.$$

D'où l'ensemble solution du système est $S = \text{IV}$

Exercice d'application

Résoudre graphiquement les systèmes d'équations et inéquations suivants :

$$\mathbf{a-} \begin{cases} 4x - 5y = 5 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases} ; \mathbf{b-} \begin{cases} 6x - y \leq 3 \\ -6x - 7y \geq -2 \end{cases} ; \mathbf{c-} \begin{cases} 4x - 5y = 5 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

IX- RESOLUTION DE SYSTEMES DANS $\mathbb{R}^2$ PUIS DANS $\mathbb{R}^3$

1- Résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$:

a- Définition :

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, tout système

$$\text{de la forme : } \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Où : a, b, c, a', b', c' sont tous des réels.

b- Résolution :

Pour résoudre de tels systèmes, nous disposons des méthodes suivantes :

➤ Méthode d'addition :

Qui consiste à déterminer les valeurs de x et y par addition des équations (1) et (2) après avoir multiplié respectivement les équations (1) et (2) par des réels de signe opposé pour éliminer x ou y .

➤ Méthode de substitution :

Qui consiste à déterminer la valeur d'une des inconnues dans une des équations puis de la remplacer par sa valeur dans l'autre. On obtient ainsi une équation du premier degré à une inconnue que l'on sait résoudre.

➤ Méthode de comparaison :

Qui consiste à déterminer la valeur d'une des inconnues dans les deux équations (par exemple x) puis on fait $x = x$. On obtient ainsi une équation du premier degré en y que l'on résout.

➤ Méthode des déterminants :

Qui consiste à déterminer les valeurs de x et y en utilisant :

$$\text{Soit à résoudre dans } \mathbb{R}^2 \text{ le système : } \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

$$\bullet \text{ On pose : } D_p = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = (a \times b') - (a' \times b)$$

D_p est appelé le déterminant principal du système

1^{er} Cas : Si $D_p \neq 0$, le système admet une solution unique $(x; y)$.

On cherche les déterminants secondaires **D_x et D_y**

- Le déterminant $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = (c \times b') - (c' \times b)$

- Le déterminant $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = (a \times c') - (a' \times c)$

$$\text{Ainsi } x = \frac{D_x}{D_p} \text{ et } y = \frac{D_y}{D_p} \text{ d'où } s = \left\{ \frac{D_x}{D_p} ; \frac{D_y}{D_p} \right\}$$

2^{ème} Cas : Si $D_p = 0$, on revient au système.

NB :

- D_p est appelé déterminant **principal**
- D_x est appelé déterminant **associé à x**
- D_y est appelé déterminant **associé à y**

Remarque : la méthode du déterminant n'est applicable que lorsque le système est sous la

forme : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Exemple : Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant :

$$\begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

Solution

1^{er} cas : $D_p \neq 0$

On a $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ ou $m \neq 1$

Le système admet donc une solution unique :

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m-1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -m + 1$$

$$\text{Ainsi } x = \frac{D_x}{D_p} = \frac{2m+1}{m+1} \text{ et } y = \frac{D_y}{D_p} = \frac{-1}{m+1} \text{ d'où } \boxed{\mathbf{s}} = \left(\frac{2m+1}{m+1} ; \frac{-1}{m+1} \right)$$

2^{ème} cas : $D_p = 0$

On a $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$

- Si $m = 1$, le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

Alors on pose : $y = h$, on a : $x = 1 - h$ et on a : $S = \{(1 - h ; h) ; h \in \mathbb{R}\}$

- Si $m = -1$, le système devient :

$$\begin{cases} -x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vee 3 \neq 1$$

Alors les deux équations du système sont incompatibles et $S = \{\emptyset\}$

Exercice d'application

En utilisant les trois méthodes données si déçus, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$$\text{a- } \begin{cases} 3x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases} \quad \text{b- } \begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 3x+\frac{1}{2}y+3=0 \end{cases} \quad \text{c- } \begin{cases} x+y+5=0 \\ 3x+4y-7=0 \end{cases}$$

2- Résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

a- Définition :

On appelle système de trois équations du premier degré à trois inconnues,

$$\text{tout système de la forme : } \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

où $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ sont tous des réels

b- Résolution :

Pour résoudre de telles systèmes, on utilise la méthode du **PIVOT DE GAUSS** ou encore appelé méthode **triangulaire**.

Cette méthode consiste à trouver une écriture triangulaire du système.

Pour cela on élimine **une** inconnue dans l'équation (2) ; **deux** inconnues dans l'équation (3)

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\text{a- } \begin{cases} x+y+z=1 \\ -4x-3y+2z=4 \\ -3x-y+z=0 \end{cases} \quad \text{b- } \begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y-z=3 \\ x-9y+5z=-7 \end{cases} \quad \text{c- } \begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x+y+2z=-2 \\ x+y+3z=-6 \end{cases}$$

3- Programmation linéaire:

L'étude des problèmes pratiques de résolution des systèmes linéaires des inéquations du premier degré à deux inconnues x et y , nous conduisent souvent à étudier si l'ensemble S solution du système d'inéquation à deux inconnues admet un maximum (ou un minimum) de la forme $\alpha x + \beta y$ (avec α et β) des réels données.

Remarque : les inéquations ou les équations d'un système sont appelés des contraintes de Programmation linéaire.

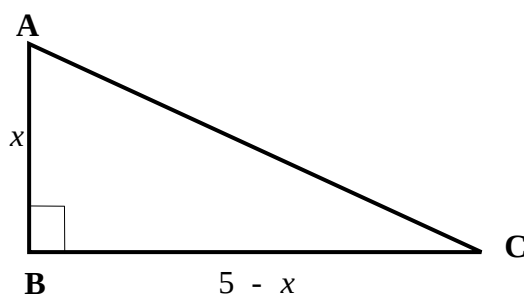
X- MISE EN EQUATIONS DE PROBLEMES PRATIQUES

La mise en équation est un système très pratique en Mathématique qui permet de mettre en évidence l'importance des équations dans la vie courante telle que les calculs d'aire des surfaces.

Exercice d'application

On dispose d'un triangle ABC rectangle en B dont les longueurs en centimètre sont :

$$AB = x \quad \text{et} \quad BC = 5 - x \quad (\text{avec: } 0 < x < 5)$$



- a- Exprimer AC^2 en fonction de x puis établir que : $AC^2 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$
- b- Déterminer tous les réels x tels que $AC^2 = \frac{29}{2}$.
- c- Déterminer tous les réels x tels que $AC^2 \geq \frac{29}{2}$.
- d- Pour quelles valeurs de x a-t-on l'égalité $AC^2 = \frac{25}{2}$.

EXERCICES

Exercices 1 :

1) Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a- $|x-2| = 3$; **b-** $|x+1| = \frac{3}{5}$; **c-** $|3x-6| = 3$; **d-** $\left|4x + \frac{1}{2}\right| = 8$

e- $\left|x - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2}$; **f-** $|x-2| = -3$; **g-** $|x| = 1$

2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a- $|x-5| \geq 3$; **b-** $|x+4| \leq \frac{1}{2}$; **c-** $|3x-9| > 6$; **d-** $|4x+1| < 8$

e- $|x-7| \geq \frac{-1}{2}$; **f-** $|x+9| \leq -3$; **g-** $2 \leq |x-3| \leq 4$

Exercices 2 :

1) Résoudre dans IR les équations suivantes :

a- $3x + 1 = -x + 4$; **b-** $\frac{1}{x+2} = \frac{-3}{-x+5}$; **c-** $x+1 + \frac{x+4}{4} = \frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3}$

d- $\frac{x+3}{4} - \frac{x-10}{6} = \frac{x+1}{12} + 1$; **e-** $-3(x+1) = \frac{1}{2}(-3-x)$

2) Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

$$\text{a- } -x + 1 \leq -x + 4 ; \text{ b- } \frac{-3}{x-1} > \frac{3}{-x+2} ; \text{ c- } x-1 + \frac{-3x+4}{3} < -\frac{x-2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$\text{d- } \frac{2x+3}{4} - \frac{x-5}{2} \geq \frac{5x+1}{4} - x ; \quad \text{e- } -3(x+1) \leq \frac{1}{2}(-3-x)$$

Exercices 3 :

1) Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$\text{a- } 3x^2 + 5x - 8 = 0 ; \quad \text{b- } 2 - x = 4 - x^2 ; \quad \text{c- } -x^2 + x + 6 = 0 ; \quad \text{d- } 4x^2 + 1 = 0$$

$$\text{e- } x^2 + x + 1 = 0 ; \quad \text{f- } x^2 - 4x + 4 = 0 ; \quad \text{g- } x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$$

2) Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

$$\text{a- } x^2 - 16x + 2(x-4) \leq 0 ; \text{ b- } 2 - x \geq 4 - x^2 ; \text{ c- } -x^2 + x + 6 < 0 ; \text{ d- } 4x^2 + 1 > 0$$

$$\text{e- } x^2 + x + 1 < 0 ; \text{ f- } x^2 - 4x + 4 \geq 0 ; \text{ g- } \frac{5x^2 + 3x - 2}{-3x^2 - 7x + 10} \geq 0 ; (x-1)^2 \leq 0$$

Exercices 4 :

1) résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$$\text{a) } x + y + 1 < 0 ; \quad \text{b) } y \geq -2x + 3 ; \quad \text{c) } -3x + 2y - 1 \leq 0 ; \quad \text{d) } -x + y - 1 > 0$$

$$\text{a) } \frac{-1}{2}x + y - 1 \leq 0 \quad \text{f) } y \geq -x + 2 ; \quad \text{g) } x + \frac{3}{4}y + 2 \leq 0 ; \quad \text{h) } -x + y > 0$$

2) résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivantes :

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 5y = 5 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 6x - 2y = 3 \\ -2x + \frac{2}{3}y = -1 \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} x - 5y = 5 \\ -\frac{2}{3}x + y = -1 \end{cases} ; \quad \text{f) } \begin{cases} 4x - y = \frac{-5}{3} \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

3) résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivantes :

$$\text{a) } \begin{cases} 6x - y \leq 3 \\ -6x - 7y > -2 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \leq 1 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + 2y \geq -3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - y < 3 \\ -x + y < -2 \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} 5x - 10y \geq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases} ; \quad \text{f) } \begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$$

Exercices 5 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants en utilisant la méthode du déterminant :

a) $\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ 6x - 2y = -3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 10x + 4y = 1 \\ -5x + 20y - 4 = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x - y = 21 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x - 5y = 5 \\ -\frac{2}{3}x + y = -1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 4x - y = -\frac{5}{3} \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$

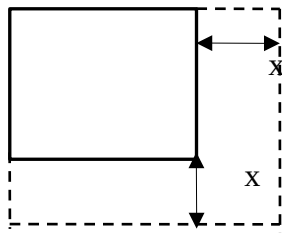
2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants en utilisant la méthode du Pivot de Gauss :

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -4x - 3y + 2z = 4 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ x + y + 3z = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ -x + 3y + 4z = -7 \\ 2x - y + 2z = -6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - y + 2z = -6 \\ x + 2y - z = 8 \\ -x + 3y + 4z = -7 \end{cases}$

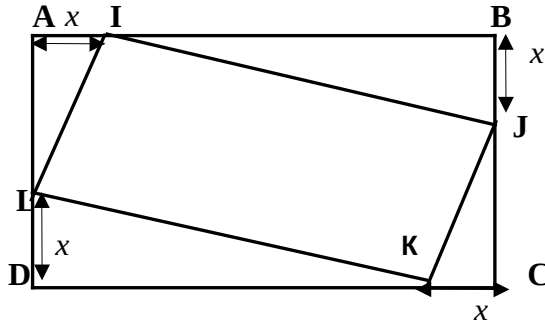
Exercices 6 :

- 1) Calculer les côtés d'un rectangle, sachant que si l'on augmente la largeur de 3 m et si l'on diminue d'autant la longueur, l'aire ne change pas ; mais si en augmentant la largeur de 5 m, on diminue la longueur de 3 m, l'aire augmente de 16 m^2 .
- 2) Trois moutons et une chèvre coûtent 57 euros. cinq moutons et trois chèvres coûtent 107 euros.
Quel est le prix d'un mouton et d'une chèvre ?
- 3) Dans une feuille carrée de 10 cm de côté, on enlève sur deux côtés une bande de largeur x cm.



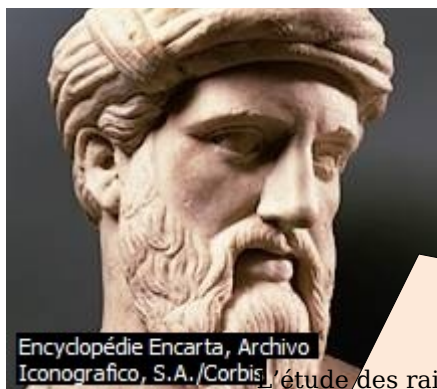
Quel est l'ensemble des valeurs possibles de x ?

- 4) Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 1200 m^2 , sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 10 m.
- 5) On considère un rectangle ABCD tel que $AB = CD = 5 \text{ cm}$ et $BC = DA = 3 \text{ cm}$.
On place sur le contour de ce rectangle quatre points I, J, et K tels que :
 $AI = BJ = CK = DL = x \text{ cm}$ (avec $x \in [0 ; 3]$).



- Exprimer les longueurs : BI, CJ, DK et LA en fonction de x .
- Montrer que la somme des aires des triangles AIL, LDK, KJC, et JIB est égale à $f(x) = -2x^2 + 8x$.
- Déterminer les variations de la fonction f .
Calculer $f(1)$ et $f(3)$ puis en déduire la valeur de l'extremum de f . en quelle valeur de x ce dernier est-il atteint ?

Logique



Encyclopédie Encarta, Archivo
Iconografico, S.A./Corbis



Pyramide de kefren (Egypte)

l'étude des raisonnements, des concepts et des valeurs de vérité des propositions mathématiques s'avère indispensable sans aucune part de procédure logique.

Exemple : le théorème de Pythagore n'est applicable que lorsque le triangle est rectangle.
Dans cette démarche, la mathématique exploite les connecteurs et les quantificateurs logiques.

Sommaire

1-	Définition et présentation.....	96
2-	Vocabulaire et formalisation.....	96
3-	Calcul propositionnel.....	97
4-	Raisonnement logique.....	97
5-	Connecteur logique.....	98
6-	Quantificateurs.....	101
7-	Tautologies.....	102

DEFINITION ET PRESENTATION

On appelle logique mathématique, toutes sciences qui étudie les raisonnements, les concepts et les valeurs de vérité des propositions. Cette science, qui est à la base de la formalisation des différents concepts mathématiques, ne s'intéresse pas au contenu des objets étudiés mais à leur structure formelle. On sait maintenant que certains problèmes mathématiques ne peuvent être résolus par de simples méthodes de calcul. La logique mathématique s'avère alors indispensable.

II- VOCABULAIRE ET FORMALISATION

On formalise un domaine mathématique en définissant un cadre, des objets spécifiques, une série de symboles, une liste d'axiomes, et un ensemble de règles permettant de construire des formules et des raisonnements déductifs.

Ainsi, dans le cas de l'arithmétique, le cadre est l'ensemble des entiers, ces derniers étant les objets étudiés. Parmi les symboles utilisés, on emploie les symboles « + » et « × ». Un des axiomes régissant l'ensemble des entiers s'énonce ainsi : pour tout entier x , $x + 0 = x$. Ainsi on distingue quelques éléments de logiques qui sont :

- **Une assertion** : une assertion est une affirmation confirmée sans exception évoquée.

Exemple : « chaque jour, le soleil se lève à l'Est et se couche à l'Ouest ».

- **Une proposition** : une proposition est une affirmation à laquelle on peut attribuer une valeur de vrai ou faux (V ou F).

Exemple : « tout nombre premier est impair sauf 2 est équivalent à tout nombre impair est premier » . Ainsi cette affirmation reste vraie pour : 3 ; 5 ; 7 mais devient fausse avec : 9 et bien d'autres. D'où cette proposition n'est pas vraie.

- **Un théorème**: un théorème est une proposition soumise à au moins une contrainte et qui reste vraie dès que cette contrainte ou ces contraintes sont réalisées.

Exemple : « le théorème de Pythagore est applicable dans la seule contrainte que $\triangle$ soit rectangle ».

Tout théorème se démontre en soumettant son hypothèse à la logique mathématique pour atteindre sa conclusion. Dans cette démarche, la mathématique exploite **les connecteurs et quantificateurs logiques**.

III- CALCUL PROPOSITIONNEL

On associe au calcul propositionnel un système formel constitué de variables appelées propositions, et de deux connecteurs « $\rightarrow$ » et « **non** ». Le symbole « $\rightarrow$ » signifie « **si..., alors...** », tandis que « **non** » est la négation d'une proposition. À l'aide de ces symboles, on peut écrire les trois formules élémentaires : **P**, **non P**, et **P $\rightarrow$ Q**, où P et Q sont deux propositions. Considérons, par exemple, que la proposition P correspond à l'affirmation « **il fait jour** ». Alors **non P** est égal à la proposition « **il fait nuit** ». Appelons Q la

proposition « **il fait nuit** ». « **S'il fait jour, alors il ne fait pas nuit** » se traduit donc par $P \rightarrow \text{non } Q$.

On appelle formule une combinaison de ces trois formules élémentaires. Le système formel du calcul propositionnel est également constitué d'une suite d'axiomes, qui permettent de dire si une formule est un théorème, c'est-à-dire une combinaison plus ou moins complexe d'axiomes. Un théorème est donc par définition toujours vrai. On introduit aussi dans le calcul propositionnel des connecteurs comme « **et** » et « **ou** ».

IV- RAISONNEMENT LOGIQUE :

En mathématique il y a trois (3) processus fondamentaux :

Construire des objets mathématiques, former des relations entre ces objets et démontrer que certaine de ces relations sont vraies (théorème).

Les objets mathématiques sont des nombres, des fonctions, des courbes, des vecteurs, etc.....Il est donc naturel de percevoir ces objets dans un concept bien précis par des symboles d'écritures sur les quels on raisonne comme sur les objets du monde physique. On forme alors des **propositions** (assertions) sur des objets.

Une proposition est un **énoncé** dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vraie (**V**) ou s'il est faux (**F**). **V** et **F** sont les seules valeurs de vérité possible d'une proposition et toute proposition à une seule valeur de vérité.

Démontrer une proposition c'est donné sa valeur de vérité.

V- CONNECTEURS LOGIQUES :

1- Définition :

P ; Q ; R ; S désignent des propositions.

Un connecteur est un opérateur logique portant sur une ou plusieurs propositions afin de construire une nouvelle proposition dite : **proposition composée**.

Ainsi les différents connecteurs sont :

$\neg$: non $\vee$: ou $\wedge$: et $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$
 Négation Disjonction Conjonction Implication Equivalence

Connecteur « et » : il lit au moins deux antités logiques pour donner une proposition qui est vraie lorsque chacune des antités logiques est vraie et fausse dans tous les

2- Tables de vérité :

Soit P et Q sont deux propositions.

Négation :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Disjonction :

La proposition $P \vee Q$ n'est fausse que si P et Q sont simultanément fausses.

Exemple :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjonction :

La proposition $P \wedge Q$ n'est vraie que si P et Q le sont simultanément.

Exemple :

P	Q	$P \wedge Q$

V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implication :

La proposition $P \Rightarrow Q$ n'est fausse que si le départ est **V** et l'arrivée **F**.

Exemple :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque :

- La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit : Si **P**, alors **Q** ou **P** entraîne **Q** ou **P** implique **Q**.
- La proposition $P \Rightarrow Q$ est synonyme de $\neg P \vee Q$

Exemple :

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	F

F	V	V	V
F	F	V	V

Equivalence:

La proposition $P \Leftrightarrow Q$ signifie $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Exemple :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

VI- LES QUANTIFICATEURS :

Définitions :

- **D₁** : soit E un ensemble appelé référentiel dont les éléments x, y, z, t , etc....sont des variables. on appelle **prédicat** un énoncé de la forme **$p(x, y, z, t, \dots)$** tel que l'attribution d'une valeur de E à chaque variable conduit à une proposition.

Exemple :

Déterminer un couple d'entier naturel $(x; y)$ tel que :
 $p(x, y) = x^2 + 3y - 7$ soit divisible par 5.

Solution

$p(0, -1) = (0)^2 + 3(-1) - 7 = -10$ qui est divisible par 5 (**est une proposition vraie**)

$p(1, 1) = (1)^2 + 3(1) - 7 = -3$ qui n'est pas divisible par 5
(est une proposition fausse)

- **D₂** : soit E un référentiel, $x \in E$ et $p(x)$ un prédicat .

Au prédicat $p(x)$ on associe les assertions suivantes :

- $(\forall x \in E), p(x)$ qui se lit : **quel que soit** $x \in E$. **$p(x)$ ou pour tout** $x \in E, p(x)$.
 Cela signifie que l'assertion $p(a)$ est vraie pour tout $a \in E$.
 Souvent on écrit $\forall x, p(x)$.
- $(\exists x \in E) p(x)$ qui se lit : **il existe au moins 1** $x \in E$ tel que $p(x)$.
 Cela signifie que il existe au moins un $a \in E$, **tel que** $p(a)$ soit vraie.
 Alors : $\forall$ et $\exists$ sont des quantificateurs.

NB : $\forall$: est appelé **quantificateur universel** et $\exists$: est appelé **quantificateur existentiel**.

Remarque :

$$\neg [\forall x, p(x)] \Leftrightarrow \exists x, \neg p(x).$$

$$\neg [\exists x, p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \neg p(x).$$

$$\exists x (p(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x, p(x)) \vee (\exists x, Q(x)).$$

$$\forall x (p(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x, p(x)) \wedge (\forall x, Q(x)).$$

Exemple :

Soit, $p(x, y) = 2x + y + 1$ (avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$) est divisible par 2.

$p(x, y)$ est elle une proposition ?

Donner la valeur de vérité de :

a) $\forall y \in \mathbb{N}, \exists$

$x, p(x, y)$; b) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y, p(x, y)$; c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y, p(x, y)$

VII- Tautologies :**1) Définition :**

Ce sont des propositions dont la valeur de vérité est vraie (V) indépendamment des valeurs de vérité des propositions : P ; Q..... Figurant dans les formulations.

2) Principales tautologies

- a) $P \vee (\neg P)$: Principe du tiers exclu.
- b) $\neg (P \wedge \neg P)$: Principe de contradiction.
- c) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$: transitivité de l'implication.

EXERCICES

1) En utilisant la table de vérité, montrer les équivalences tautologiques suivantes :

- a) $P \Leftrightarrow Q$
- b) $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$
- c) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
- d) $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\neg Q \Rightarrow \neg P]$
- e) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- f) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- g) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- h) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

2) En utilisant la table de vérité, donner l'évaluation des propositions suivantes :

- a) $P \Rightarrow Q$
- b) $[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P] \Rightarrow P$
- c) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
- d) $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [Q \Rightarrow (R \Rightarrow P)]$

3) Calculer la négation des propositions suivantes :

- a) $\exists x ; A(x).$
- b) $\forall x ; A(x).$

Géométrie Plane

Evaluation diagnostique

Activités

Trouve les bonnes réponses pour chacune des affirmations suivantes :

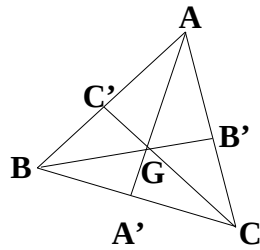
1- Parallélogramme

■ ABCD est un parallélogramme lorsque :

- a) $(AB) // (BC)$ et $(AC) // (BD)$; b) $(AB) // (DC)$ et $(AD) // (BC)$
- c) Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
- d) $AB = CD$ et $AD = BC$.
- e) Les diagonales sont de mêmes longueurs.
- f) $\vec{AB} = \vec{DC}$.
- g) $\vec{AB} = \vec{CD}$.

2- Triangle

■ Dans un triangle ABC, si G est le centre de gravité alors on a :

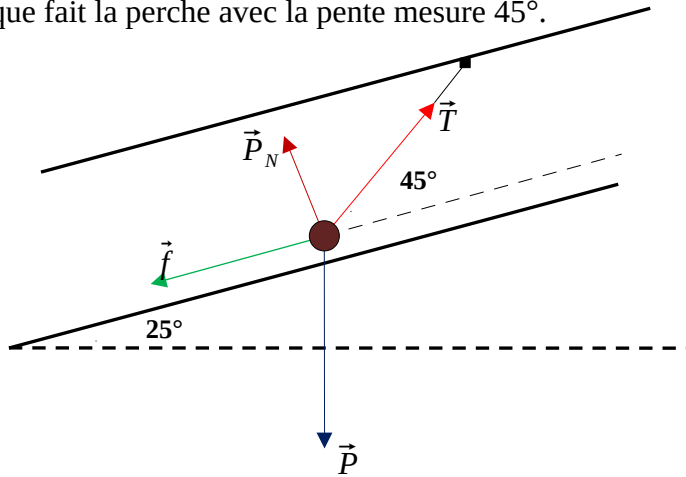


- a) $GA' = 2GA$; b) $GA = GB = GC$; c) (BB') médiatrice de $[AC]$
- d) A' milieu de $[BC]$; e) $BG = \frac{2}{3}BB'$; f) $CC' = \frac{2}{3}CG$

Situation - Problème

Un skieur représenté par un point matériel est **en équilibre** sur un télésiège et remonte une pente à 25° .

L'angle que fait la perche avec la pente mesure 45° .



Le skieur est soumis à quatre forces :

- Son poids $\vec{P}$ d'intensité 800 N.
- La composante de sa réaction normale $\vec{R}_N$
- Sa force $\vec{f}$ de frottement d'intensité 100 N.
- Sa tension $\vec{T}$ de frottement d'intensité 100 N.

- a- Faire une figure en prenant 1 cm pour 1 N.
- b- Déterminer l'intensité de la traction et celle de la composante normale de la réaction (valeur exacte et valeur arrondie à 10 N).
- c- Si l'angle entre la perche et la pente passe à 50° , si les intensités des forces $\vec{T}$ et $\vec{R}_N$ augmentent-elles ? (faire une figure).

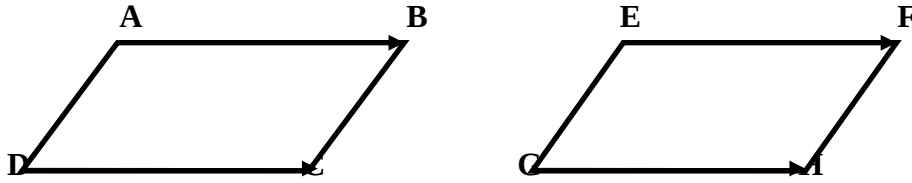
Sommaire

5-	Vecteurs du plan.....	105
6-	Produits scalaires.....	117
7-	Barycentre.....	128
8-	Droite dans le plan.....	136

Cours

I- VECTEURS DU PLAN :

1- Vecteurs égaux :



Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Alors on peut écrire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

Soient quatre (04) points **A , B , C , D**.

Si **ABCD** est un parallélogramme alors on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

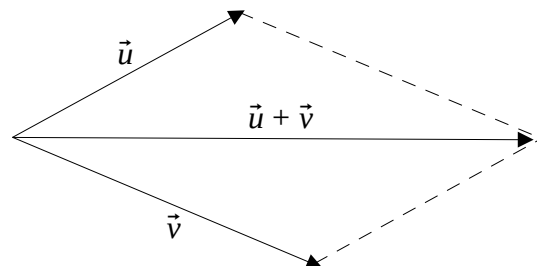
Si on pose $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont appelés représentants du vecteur $\vec{U}$.

2- Opérations dans: $\mathcal{V}$

Étant l'ensemble des vecteurs du plan, on a :

a- Addition :

Un vecteur est un représentant d'une classe d'équivalence de bipoints équipollents :



Quel que soient **A ; B** et **C** on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{Qui est appelé la relation de CHASLES})$$

Activité1 :

En utilisant la relation de CHASLES, complète les égalités suivantes :

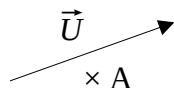
a- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \dots\dots\dots$

b- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$

c- $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$

Activité 2 :

Soit P le plan ; v le plan vectoriel ; $\vec{U}$ un vecteur de v et A un point donné du plan P comme l'indique la figure suivante :



- a- Construis le point B tel que : $\vec{AB} = \vec{U}$.
- b- Peut-tu trouver un point B' tel que $\vec{AB'} = \vec{U}$. avec $B \neq B'$
- c- Que représente le vecteur $\vec{BA}$ pour $\vec{AB}$?
- d- Calcule $\vec{AB} + \vec{BA}$.

Activité 3 :

Soient $\vec{U}$; $\vec{V}$; $\vec{W}$ trois vecteurs de v . Construis un représentant de chacun des vecteurs :

- a- $\vec{U} + \vec{V}$ et $\vec{V} + \vec{U}$.
- b- $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W}$ et $\vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$.

Propriétés :

- $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$ (l'addition des vecteurs est commutative)
- $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$ (l'addition des vecteurs est associative)
- $\vec{U} + \vec{0} = \vec{U}$ (le vecteur nul $\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition des vecteurs)

b- Soustraction :

Activité 4 :

Soient $\vec{U} + \vec{V}$ deux vecteurs de v , A un point de P , B et D deux points tels que :
 $\vec{U} = \vec{AB}$; $\vec{V} = \vec{AD}$.

Représente $\vec{U} + \vec{V}$ et $\vec{U} - \vec{V}$

c- Multiplication d'un vecteur par un scalaire:

Activité 5 :

Dans le plan, place deux points A et B . Trace le vecteur $\vec{U} = \vec{AB}$. Construis un représentant de chacun des vecteurs $\vec{v} = 2\vec{u}$; $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.

Soient $\vec{U}$ un vecteur de v , A, B deux points de P tel que $\vec{U} = \vec{AB}$.

- a- Place les points C, D et E sur la droite (AB) de repère $(A ; \vec{AB})$.
On donne $C(3)$; $D(-1)$ et $E(-2,5)$.

b- Calcule : $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$.

Propriétés :

- $1 \vec{U} = \vec{U}$
- $(a + b) \vec{U} = a \vec{U} + b \vec{U}$
- $a(\vec{U} + \vec{V}) = a \vec{U} + a \vec{V}$
- $k\vec{U} = \vec{0}$ alors $k = 0$ ou $\vec{U} = \vec{0}$

Exercices d'applications :

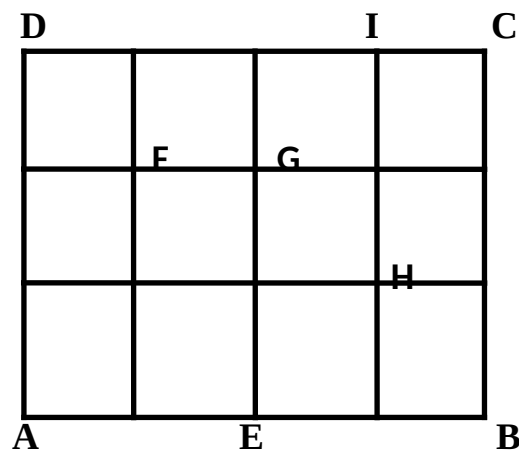
Simplifier les écritures suivantes :

$$A = -3(\vec{U} + 5\vec{V}) + 4\left(\frac{1}{4}\vec{U} - 2\vec{V}\right) \text{ et } B = -3\left(\frac{3}{2}\vec{U} - \vec{V}\right) + 5(-\vec{U} - 2\vec{V})$$

3- Vecteurs colinéaires :

Activité 6 :

On considère la figure suivante :



- 1- En utilisant les points de la figure, donne :
 - a- Deux vecteurs opposés.
 - b- Deux vecteurs qui ont la même direction, le même sens et la même longueur.
 - c- Deux vecteurs qui n'ont pas la même direction, mais la même longueur.
- 2- Complète par un nombre réel les pointillés des égalités suivantes :

- a- $\overrightarrow{DI} = \dots\dots \overrightarrow{GF}$ b- $\overrightarrow{DF} = \dots\dots \overrightarrow{GB}$
- 3- Complète les pointillés par des vecteurs dont l'origine et l'extrémité sont des points de la figure.
- a- $\overrightarrow{AE} + \dots\dots = \overrightarrow{AG}$ b- $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DF} = \dots\dots$ c- $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GA} = \dots\dots$

Définition :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction et s'il existe un réel k tel que :
 $\vec{V} = k \vec{U}$.

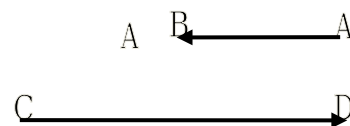
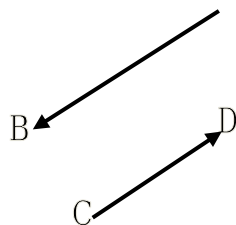
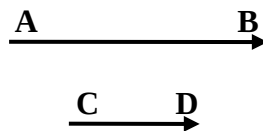
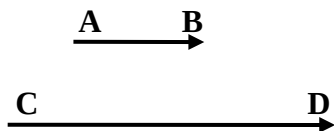
- Si $k > 0$ alors $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont de même sens.
- Si $k < 0$ alors $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont de sens contraires.

Remarque :

- Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.
- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires revient à dire que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont de directions différentes.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de v , on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si les trois (03) points A, B, C sont alignés.

Activité 7 :

- 1) En utilisant les carreaux de ton cahier, reproduis les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

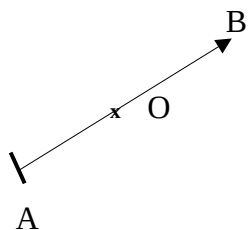


2) écris la relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Activité 8 :

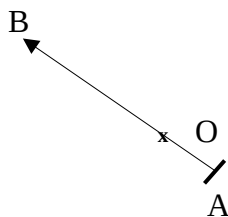
Construis à partir du point O un représentant du vecteur $\vec{w} = k \overrightarrow{AB}$

(en utilisant la règle et le compas).



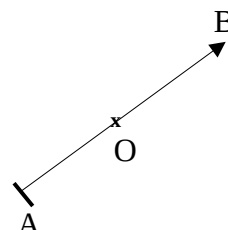
$$k = \frac{1}{2}$$

a)



$$k = 2$$

b)



$$k = -1$$

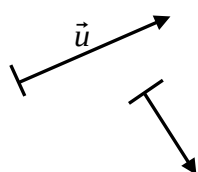
c)

4- Combinaisons linéaires :

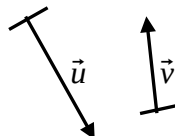
Activité 9 :

En se basant sur la construction d'un représentant du produit d'un vecteur par un réel et de la construction d'un représentant de la somme de deux vecteurs, construis un représentant de $\vec{W}$ dans chacun des cas suivants :

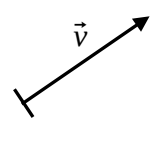
a) $\vec{W} = 2\vec{u} - \vec{v}$



b) $\vec{W} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$



c) $\vec{W} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$





Activité 10 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de v .

Construis Un représentant de $\vec{W}$ tel que : $\vec{W} = 3\vec{U} - 2\vec{V}$.

Définition :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de v ; soient α et β deux nombres réels.

Le vecteur $\vec{W}$ tel que $\vec{W} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{V}$ est appelé **combinaison linéaire** de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

5- Base de v et coordonnées un vecteur :

a- Définition :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de v .

Le couple $B = (\vec{U} ; \vec{V})$ est **une base** de v si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ **ne sont pas colinéaires**.

b- Propriétés :

Soit $B = (\vec{U} ; \vec{V})$ une base de v . Tout vecteur de v peut s'écrire de manière unique comme **combinaison linéaire** de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Soit $\vec{W}$ un vecteur dev. On a : $\vec{W} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{V}$.

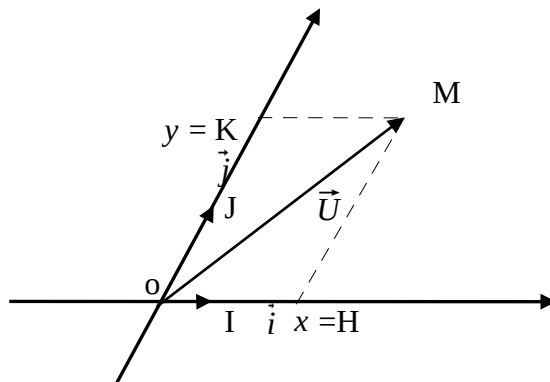
c- Coordonnées d'un vecteur:

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de v , et $\vec{U}$ un vecteur de v , O, I, J, M des points tels que :

$\vec{OI} = \vec{i}$; $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OM} = \vec{U}$

H est le projeté de M sur la droite (OI) parallèlement à (OJ)

K le projeté de M de M sur la droite (OJ) parallèlement à (OI)



$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{OH} + \vec{OK} , & \mathbf{OH} &= x \\ \vec{U} &= x\vec{i} + y\vec{j} & \mathbf{OK} &= y \end{aligned}$$

Le couple $(x ; y)$ est appelé **coordonnées du vecteur $\vec{U}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$** et on écrit :

$$\vec{U} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{Ou} \quad \vec{U}(x ; y) .$$

Le triplet $(\vec{0} ; \vec{i} ; \vec{j})$ est appelé **repère du plan**.

Un repère est dit **orthogonal** si les deux vecteurs de la base sont orthogonaux.

d- Calculs vectoriels et coordonnés :

Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, si $\vec{U}(x ; y)$ et $\vec{V}(x' ; y')$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$ alors on peut écrire :

$\vec{U} = x \vec{i} + y \vec{j}$ et $\vec{V} = x' \vec{i} + y' \vec{j}$. Ainsi on a les propriétés suivantes :

Propriété 1 : (addition)

$$\vec{U} + \vec{V} = (x \vec{i} + y \vec{j}) + (x' \vec{i} + y' \vec{j}) = (x + x') \vec{i} + (y + y') \vec{j}$$

Alors on : $(\vec{U} + \vec{V}) (x + x' ; y + y')$

• **Propriété 2 : (égalité)**

$$\vec{U} = \vec{V} \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

• **Propriété 3 : (vecteur nul)**

$$\vec{U} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$$

• **Propriété 4 : (multiplication d'un vecteur par un réel k)**

$$k\vec{U} = k(x \vec{i} + y \vec{j}) = kx \vec{i} + ky \vec{j} = (kx ; ky)$$

• **Propriété 5 : (calcul des coordonnées d'un vecteur)**

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan .

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

• **Propriété 6 : (utilisation du calcul vectoriel pour montrer l'alignement de 3 points.)**

Pour montrer que trois points sont alignés, on cherche à prouver que deux vecteurs (ayant un point en commun) sont colinéaires. Pour cela, on exprime ces deux vecteurs en fonction des points de la figure de base, en utilisant les relations vectorielles de l'énoncé et la relation de CHASLES.

• **Propriété 7 : (utilisation du calcul vectoriel pour montrer 2 droites sont parallèles.)**

Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Pour cela, on exprime ces deux vecteurs en fonction des points de la figure de base, en utilisant les relations vectorielles de l'énoncé et la relation de CHASLES.

6- Traduction analytique de la colinéarité :

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de v . Soient $\vec{U} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de v .

On appelle déterminant de $(\vec{U}; \vec{V})$ relativement à la base $(\vec{i}; \vec{j})$, le nombre réel noté :

$$\det(\vec{U}; \vec{V}) \text{ tel que } \det(\vec{U}; \vec{V}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = (xy') - (yx')$$

Théorème :

Etant donné une base $(\vec{i}; \vec{j})$ de v On dit que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ **sont colinéaires** si :

$$\det(\vec{U}; \vec{V}) = 0$$

Remarque :

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ **ne sont pas colinéaires** si $\det(\vec{U}; \vec{V}) \neq 0$

EXERCICES

Exercice1 :

1) Simplifier les écritures suivantes :

a- $7\vec{U} - 4\vec{V} + 3(\vec{U} + 3\vec{W}) - 5(2\vec{W} - \vec{V})$.

b- $4(2\vec{U} - \vec{V}) - 4(3\vec{U} - \vec{V}) + 3\vec{U}$.

c- $\vec{U} + 2(\vec{V} + 3\vec{W}) - 5(2\vec{U} + 3\vec{V})$.

d- $-\vec{U} - 3(5\vec{V} - \vec{U}) + 4(\vec{W} + 2\vec{V})$.

2) Soient $\vec{U}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{W}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathcal{V}$.

a- Déterminer les coordonnées de :

$$\vec{U} + \vec{V} \quad ; \quad \vec{U} - \vec{V} \quad ; \quad \vec{U} + \vec{V} + \vec{W} \quad ; \quad \frac{5}{3}\vec{U} + \vec{W} \quad ; \quad 3\vec{U} - 2\vec{V}$$

b- Construire un représentant des vecteurs :

$$\vec{U} \quad ; \quad \vec{V} \quad ; \quad \vec{W} \quad ; \quad \vec{U} + \vec{V} \quad ; \quad \vec{U} - \vec{V} \quad ; \quad \vec{U} + \vec{V} + \vec{W} \quad ; \quad -\vec{U} - \vec{V} - \vec{W}$$

Exercice2 :

Parmi les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ indiqués ci-dessous, dire ceux qui sont colinéaires puis préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

- | | | |
|---|----|---|
| a- $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{j}$ | et | $\vec{V} = -\vec{i} + \vec{j}$ |
| b- $\vec{U} = \frac{5}{3}\vec{i} + 2\vec{j}$ | et | $\vec{V} = \frac{5}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$ |
| c- $\vec{U} = \vec{i} - \vec{j}$ | et | $\vec{V} = -\vec{i} + \vec{j}$ |
| d- $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{j}$ | et | $\vec{V} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$ |
| e- $\vec{U} = \frac{-1}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$ | et | $\vec{V} = \frac{-2}{3}\vec{i} + 4\vec{j}$ |
| f- $\vec{U} = -\vec{i}$ | et | $\vec{V} = -\vec{i} + \vec{j}$ |
| g- $\vec{U} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$ | et | $\vec{V} = 3\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ |
| h- $\vec{U} = (\sqrt{3} - 2)\vec{i} + \vec{j}$ | et | $\vec{V} = \vec{i} + (\sqrt{3} + 2)\vec{j}$ |
| i- $\vec{U} = -\vec{j}$ | et | $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j}$ |
| j- $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{j}$ | et | $\vec{V} = -\vec{i} + \vec{j}$ |
| k- $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{j}$ | et | $\vec{V} = -\vec{i} + \vec{j}$ |
| l- $\vec{U}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ | et | $\vec{V}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| m- $\vec{U}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | et | $\vec{V}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ |

n- $\vec{U} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

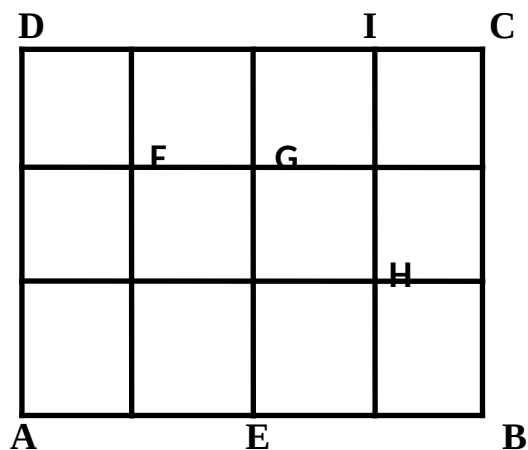
o- $\vec{U} \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

p- $\vec{U} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

q- $\vec{U} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice3 :

On considère la figure suivante :



1) En utilisant les points de la figure, donner :

a- Deux vecteurs opposés.

b- Deux vecteurs qui ont la même direction, le même sens et la même longueur.

c- Deux vecteurs qui n'ont pas la même direction, mais la même longueur.

2) Compléter par un nombre réel les pointillés des égalités suivantes :

a- $\vec{DI} = \dots\dots \vec{GF}$ b- $\vec{DF} = \dots\dots \vec{GB}$

3) Compléter les pointillés par des vecteurs dont l'origine et l'extrémité sont des points de la figure.

$$\text{a- } \overrightarrow{AE} + \dots\dots\dots = \overrightarrow{AG} \quad \text{b- } \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DF} = \dots\dots\dots \quad \text{c- } \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{GA} = \dots\dots\dots$$

Exercice4 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux de v tel que : $\vec{U} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{V} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

- a- Donner les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
- b- Montrer que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.

Exercice5 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux de v dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ tel que :
 $\vec{U} = (2m+1)\vec{i} + (m-1)\vec{j}$ et $\vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

- 1) a- trouver les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
 b – Trouver le réel m pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires. Préciser leur sens.
- 2) On suppose que $m = 2$. Trouver les coordonnées de $\vec{U}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
 Montrer que $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de v que l'on notera $B' = (\vec{U}; \vec{V})$.
- 3) a- on donne $\vec{W} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, trouver les coordonnées de W dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$
 Puis dans la base $B' = (\vec{U}; \vec{V})$.
- 4) b- on donne $\vec{W}' = 5\vec{U} + \vec{V}$, trouver les coordonnées de W' dans la base $B' = (\vec{U}; \vec{V})$ Puis dans la base $B = (\vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 6 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux de v dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ tel que :
 $\vec{U} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{V} = m\vec{i} - (m+2)\vec{j}$.

- 1) a- trouver les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
 b – Trouver le réel m pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires. Préciser leur sens.
- 2) On suppose que $m = -3$.
 a- Trouver les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
 b-Montrer que $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de v .
- 3) Trouver les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{U}; \vec{V})$.
- 4) a- Construire les représentants (A, B) et (A, C) respectivement des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ où A, B, C sont trois points quelconques du plan P .
 b-Construire sur la même figure les représentants d'origine A des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{a} = -\vec{U} + 2\vec{V}$
 c-Donner les coordonnées du vecteur $\vec{a}$ dans la base $(\vec{U}; \vec{V})$ puis dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Exercice7 :

On considère deux droites (D) et (D') sécante en O.

I est un point de O distincte de O et J un point de (D') distincte de O.

- 1) montrer que les couples $(\vec{OI} ; \vec{OJ})$ est une base de $\mathcal{V}$.
- 2) Construire les points A ; B et C tels que :
 - a- $\vec{OA} = 2\vec{OI} + \vec{OJ}$.
 - b- $\vec{OB} = \vec{OI} - 3\vec{OJ}$.
 - c- $\vec{OC} = -\frac{1}{2}\vec{OI} - 2\vec{OJ}$.
- 3) Donner les coordonnées des vecteurs : $\vec{OA}$; $\vec{OB}$; $\vec{OC}$ dans la base $(\vec{OI} ; \vec{OJ})$.
- 4) On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dont les couples de coordonnées dans la base $(\vec{OI} ; \vec{OJ})$ sont respectivement $(2 ; 3)$ et $(-5 ; \frac{1}{2})$.
 - a- Montrer que $(\vec{U} ; \vec{V})$ est une base de $\mathcal{V}$.
 - b- Un vecteur $\vec{W}$ a pour coordonnées $(-3 ; 2)$ dans la base $(\vec{OI} ; \vec{OJ})$.
Déterminer les coordonnées de $\vec{W}$ dans la base $(\vec{U} ; \vec{V})$.

Exercice8 :

Simplifier les expressions suivantes en utilisant la relation de CHASLES :

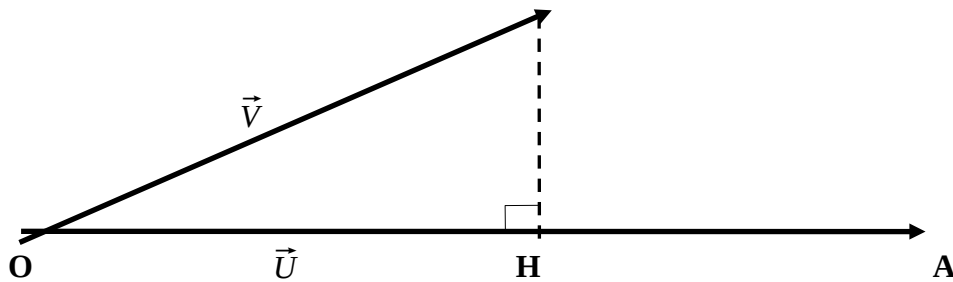
- a-** $\vec{AB} + \vec{BC}$; **b-** $\vec{AB} + \vec{BA}$; **c-** $\vec{AC} + \vec{CD}$; **d-** $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$
- e-** $\vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CB}$; **f-** $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{AB}$; **g-** $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} - \vec{BA}$
- h-** $\vec{AC} + 2\vec{CB} + \vec{BA}$; **i-** $2\vec{AB} - \vec{BC} - \vec{CA}$; **j-** $\vec{AB} - \vec{CD} - \vec{AC} + \vec{BA}$.

II- PRODUITS SCALAIRES

1- Expression algébrique du produit scalaire

a- Définition :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls. Soient : O ; A et B trois points du plan tels que $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$.



On appelle produit scalaire de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ le nombre réel noté : $\vec{U} \cdot \vec{V}$.

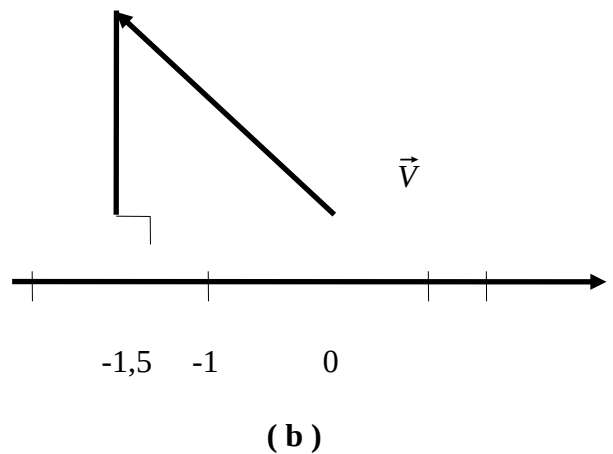
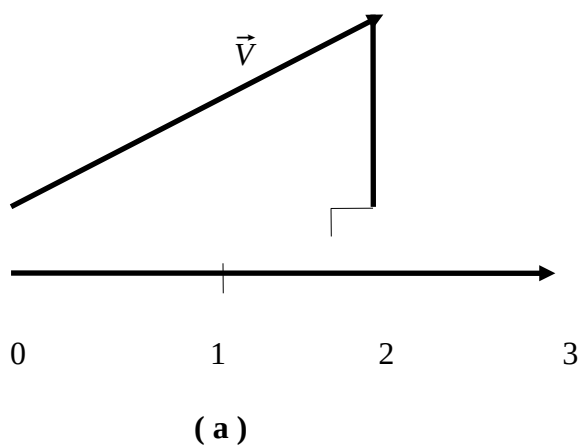
Le produit scalaire est donc défini par $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{OA} \cdot \overline{OH}$ Où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

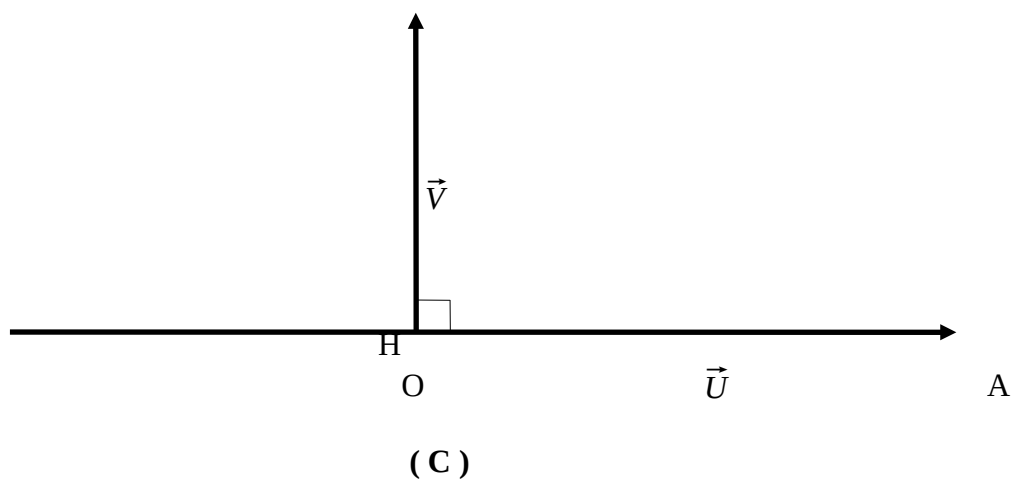
On écrit $\vec{U} \cdot \vec{V}$ Et on lit : $\vec{U}$ scalaire $\vec{V}$ ou produit scalaire de $\vec{U}$ par $\vec{V}$.

Conclusion : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{OA} \cdot \overline{OH}$

Exemple :

Calculer $\vec{U} \cdot \vec{V}$ dans chacun des cas suivants :





Remarque

- Si $H \in [OA)$, $\vec{OH}$ et $\vec{OA}$ sont de même sens.
 $\vec{OA} \times \vec{OH} = OA \times OH$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} > 0$.
- Si $H \notin [OA)$, $\vec{OH}$ et $\vec{OA}$ sont de sens contraires.
 $\vec{OA} \times \vec{OH} = -OA \times OH$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} < 0$.
- Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont perpendiculaires alors $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

Exercice d'application

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$.

Calculer : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$; $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$

2- Expression trigonométrique du produit scalaire :

On sait que si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs du plan $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{OA} \times \vec{OH}$.

On a $\cos \alpha = \frac{OH}{OB} \Rightarrow OH = OB \cos \alpha$.

Donc $\vec{U} \cdot \vec{V} = OA \times OB \times \cos \alpha$.

Mais on sait que $OA = \|\vec{U}\|$ et $OB = \|\vec{V}\|$.

D'où : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \cos \alpha$ est l'expression trigonométrique du produit scalaire.

Conclusion :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \cos \alpha \text{ qui est l'expression trigonométrique}$$

Exercice d'application

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs tel que $\|\vec{U}\| = 2$ et $\|\vec{V}\| = 1$.

Calculer $\vec{U} \cdot \vec{V}$ dans chacun des cas suivants :

a- Si $\alpha = 0$; **b-** Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$; **c-** Si $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; **d-** Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$

a- Propriétés :

Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ trois vecteurs et k un réel.

$$- \vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

$$- (\vec{U} + \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W}$$

$$- \vec{U} \cdot (k\vec{V}) = k(\vec{U} \cdot \vec{V})$$

3- Carré scalaire :

a- Définition :

$\vec{U} \cdot \vec{U}$ est appelé carré scalaire de $\vec{U}$ et on le note $\vec{U}^2$.

$$\vec{U}^2 = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{U}\| \cos \alpha$$

$$= \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{U}\| \cos 0$$

$$= \|\vec{U}\|^2$$

Pour tout vecteur $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$

$$\vec{U}^2 \geq 0 ; \vec{U}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{U} = \vec{0}$$

b- Produits scalaires

remarquables

-
- $(\vec{U} + \vec{V})^2 = (\vec{U})^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V} + (\vec{V})^2$
- $\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V} + \|\vec{V}\|^2$
- $(\vec{U} - \vec{V})^2 = (\vec{U})^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V} + (\vec{V})^2$
- $\|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V} + \|\vec{V}\|^2$
- $(\vec{U} - \vec{V})(\vec{U} + \vec{V}) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2$
- $\|\vec{U} + \vec{V}\| \|\vec{U} - \vec{V}\| = \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2$

Exercice d'application

On donne : $\|\vec{U}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{V}\| = 3$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} = 6$.

Calculer : $(\vec{U} + \vec{V})^2$ et $(\vec{U} - \vec{V})^2$

4- Expression analytique du produit scalaire :

Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base de V .

Dire que $(\vec{i} ; \vec{j})$ est une base de orthonormé équivaut à : $\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$

$\|\vec{i}\| = 1$ alors $\vec{i}$ est un vecteur **unitaire** ou **normé**.

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ signifie que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **orthogonaux**.

a- Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormé :

Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ est une base de orthonormé.

Soient $\vec{U} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{V} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$.

$$\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\begin{aligned}
&= xx' \vec{i}^2 + xy' \vec{i} \cdot \vec{j} + yx' \vec{i} \cdot \vec{j} + yy' \vec{j}^2 \\
&= xx' \|\vec{i}\|^2 + (xx' + yx') \vec{i} \cdot \vec{j} + yy' \|\vec{j}\|^2
\end{aligned}$$

Alors $\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy'$

NB :

Si $\vec{U}$ est perpendiculaire à $\vec{V}$ alors $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ c'est-à-dire $xx' + yy' = 0$

Soit un vecteur $\vec{U} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée. Le carré scalaire de $\vec{U}$ est donc

$\vec{U}^2 = x^2 + y^2$ qui est le carré scalaire de $\vec{U}$

b- Normes et distances :

- **Norme :**

Soit un vecteur $\vec{U} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Si $\vec{U}^2 = x^2 + y^2$ alors $\|\vec{U}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- **Distance entre deux points A et B:**

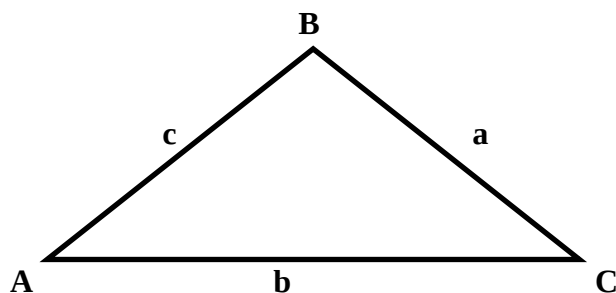
Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

On appelle distance de A à B est le réel noté AB ou d(A ; B) tel que :

$$AB = d(A ; B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

5- Application du produit scalaire :

Soit A ; B ; C un triangle quelconque :



a- Expressions du produit scalaire :

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2 = >$$

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \|\vec{AB}\|^2 = >$$

$$BC^2 = AC^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + AB^2 = >$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} \text{ ou } \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \text{ et}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \frac{BC^2 + BA^2 - CA^2}{2} \text{ ou } \vec{BC} \cdot \vec{BA} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2} \text{ ou } \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}$$

Expressions du cosinus d'un angle :

$$\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2 = >$$

$$BC^2 = AC^2 - 2\vec{AC} \cdot AB \cos \hat{A} + AB^2 = >$$

$$\cos \hat{A} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 AB \cdot AC} \text{ ou } \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 c \cdot b}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB \cdot BC} \text{ ou } \cos \hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 c \cdot a}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 AC \cdot BC} \text{ ou } \cos \hat{C} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2 b \cdot a}$$

En particulier

Si ABC est un triangle rectangle en B et que $\hat{A} = 90^\circ$ alors on a :

$$BC^2 = AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 90^\circ + AB^2 = AC^2 + AB^2 \text{ (Théorème de PYTHAGORE)}$$

Exercices d'application

Exercice1 :

On donne les normes suivantes $\|\vec{U}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{V}\| = 2$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$

a- calculer : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

b- En déduire les valeurs de :

$$(\vec{U} + \vec{V})^2 ; (\vec{U} - \vec{V})^2 ; (2\vec{U} - 3\vec{V}) ; (\vec{U} + 2\vec{V}) \cdot (2\vec{U} - \vec{V}) ; \|2\vec{U} - 3\vec{V}\| ; \|\vec{U} - \vec{V}\|$$

Exercice2 :

On donne les normes suivantes $\|\vec{U}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{V}\| = 5$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} = 7$.

On pose : $\vec{i} = 4\vec{U} - \vec{V}$ et $\vec{j} = -3\vec{U} + \vec{V}$.

Montrer que $(\vec{i} ; \vec{j})$ est une base orthonormée du plan .

EXERCICES

Exercices 1 :

1) Calculer $\vec{U} \cdot \vec{V}$ dans chacun des cas suivants :

a- $\vec{U} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{U} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b- $\vec{U} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{U} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

c- $\vec{U} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{U} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix}$.

2) on donne $\|\vec{U}\| = 4$; $\|\vec{V}\| = 5$

Calculer : $\|\vec{U} + \vec{V}\|$; $\|\vec{U} - \vec{V}\|$ et $\left\| 2\vec{U} - \frac{1}{2}\vec{V} \right\|$ si :

a- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux.

b- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ont même sens et sont de même direction.

c- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ n'ont pas même sens mais ont la même direction.

Exercices 2 :

1) Soient A , B , C trois points non alignés tel que : $AB = 4$; $AC = 3$ et

l'angle $(\vec{AB} ; \vec{AC}) = \frac{2\pi}{3}$.

a- Placer les points A ; B ; C dans le plan.

b- Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\|2\vec{AB} - \vec{AC}\|$.

c- Déterminer BC^2 puis en déduire la norme de $\|\vec{BC}\|$

2) Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs d'angle Θ et de produit P.

Calculer le produit P dans chacun des cas suivants :

a- $\|\vec{U}\| = 2$; $\|\vec{V}\| = 3$ et $\Theta = \frac{\pi}{4} \text{ rds}$; b- $\|\vec{U}\| = \frac{5}{3}$; $\|\vec{V}\| = \frac{4}{5}$ et $\Theta = 120^\circ$

c- $\|\vec{U}\| = 5$; $\|\vec{V}\| = \frac{3}{10}$ et $\Theta = \frac{5\pi}{6} \text{ rds}$

3) Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs d'angle Θ et de produit P.

Calculer l'angle Θ en radians et en degrés dans chacun des cas suivants :

a- $\|\vec{U}\| = 7$; $\|\vec{V}\| = 8$ et $P = 25$; b- $\|\vec{U}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{V}\| = 6$ et $P = -18$

c- $\|\vec{U}\| = 3\sqrt{2}$; $\|\vec{V}\| = 2\sqrt{3}$ et $P = -9\sqrt{2}$

Exercices 3 :

1) on donne $\|\vec{U}\| = 2$; $\|\vec{V}\| = 3$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} = -4$

Calculer les expressions suivantes :

$$(\vec{U} + \vec{V})^2 ; (\vec{U} - \vec{V})^2 ; (\vec{U} + \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) \text{ et } (2\vec{U} - 3\vec{V}) \cdot (\vec{U} + 2\vec{V})$$

2) déterminer le réel x de tel sorte que :

$$\text{a- } (x\vec{U} - \vec{V}) \cdot \vec{V} = 0 ; \text{ b- } (2\vec{U} - \vec{V}) \cdot (x\vec{U} + \vec{V}) = 25$$

$$c- (x \vec{U} + \vec{V})^2 = 25 \quad ; \quad d- (x \vec{U} + 8 \vec{V}) \cdot \vec{V} = 5$$

3) Déterminer les réels x et y de tel sorte que :

$$(x \vec{U} - y \vec{V}) \cdot \vec{U} = -2 \quad \text{et} \quad (x \vec{U} - y \vec{V}) \cdot \vec{V} = 5$$

Exercices 4 :

Le plan P est muni d'une base orthonormée $(\vec{i} ; \vec{j})$.

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 4 et 5.

1) Déterminer le réel x pour que :

$$a- (x \vec{U} + \vec{V}) \cdot (\vec{U} + \vec{V}) = 13 \quad ; \quad b- (x \vec{U} + \vec{V})^2 = 34 \quad ; \quad c- (x \vec{U} - \vec{V}) \cdot (x \vec{U} + \vec{V}) = 23 .$$

2) Démontrer que deux vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{H}$ du plan sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|\vec{U} + \vec{V}\| = \|\vec{U} - \vec{V}\|.$$

Exercices 5 :

On considère un parallélogramme ABCD et on appelle I le point d'intersection des segments $[AC]$ et $[BD]$. On pose : $\vec{U} = \vec{AB}$ et $\vec{V} = \vec{AD}$.

1) Exprimer $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ en fonction de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$.

2) Que représente le segment $[AI]$ dans le triangle ABD ?

Calculer $\vec{AI}$ en fonction de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$.

3) Calculer : AB^2 ; AD^2 ; AC^2 et BD^2 en fonction de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$.

4) Montrer que $2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2$.

5) Déduisez-en que : $AB^2 - AD^2 = 2AI^2 - \frac{BD^2}{2}$.

Exercices 6 :

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

1) Montrer que $\vec{AH}^2 = \vec{CH} \cdot \vec{HB} - \vec{AC} \cdot \vec{AB}$.

- 2) Déduisez-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :

$$AH^2 = - \overline{HB} \times \overline{HC} = HB \times HC.$$

Exercices 7 :

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

- 1) Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
- 2) Déduisez-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :
 $\overline{BC} \times \overline{BH} = BA^2$.

Exercices 8 :

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

- 1) Démontrer que pour tout M du plan : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
 (Cette égalité s'appelle la relation d'Euler).
- 2) Les hauteurs issues de B et C se coupent en un point H.
 Vérifier que : $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
- 3) Déduisez-en que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et donc que H est aussi sur la troisième hauteur.

Indication : utiliser l'égalité du 1) avec un point M que vous choisirez judicieusement.

- 4) On donne dans le repère $(0 ; \vec{i} ; \vec{j})$ les points $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- a- Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque du plan.

Calculer : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

b- Déterminer puis construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$.

III- BARYCENTRE DE POINTS PONDERES :

1) Système de points pondérés :

on appelle système de point pondérés tout ensemble du type :

$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ où chaque couple (A_i, α_i) est appelé point pondéré avec A_i un point et α_i un réel. Chaque α_i est appelé coefficient de pondération.

2) Barycentre de 2 à 3 points pondérés

Activité 1 :

1) Place deux points A et B distincts du plan.

2) Soit G un point du plan tel que $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; En introduisant le point A dans cette relation, exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Activité 2 :

1) Place trois points A, B et C distincts du plan.

2) Soit G un point du plan tel que $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$; En introduisant le point A dans cette relation, exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition :

On appelle barycentre du système $\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta)\}$ l'unique point (s'il existe) G tel que $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$

En fixant A on a : $\alpha \vec{GA} + \beta (\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} = -\frac{\beta \vec{AB}}{\alpha + \beta}$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$$

Ainsi les points A, B, et leur barycentre G sont alignés, G a pour abscisse $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ dans la graduation d'origine A et de point unitaire B.

3) Construction du barycentre de 2 et 3 points pondérés :**a- Construction du barycentre de 2 points :****Activité1 :**

Construis le point G définie dans les deux activités précédentes.

Activité2 :

Détermine puis construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

- 2) $G_1 = \text{Bar} \{(A ; 5) ; (B ; 2)\}$
- 3) $G_2 = \text{Bar} \{(A ; 3) ; (B ; -8)\}$
- 4) $G_3 = \text{Bar} \{(A ; 1) ; (B ; 5)\}$

b- Construction du barycentre de 3 points :**Activité 3 :**

Détermine puis construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

- 1- $G_1 = \text{Bar} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)\}$
- 2- $G_2 = \text{Bar} \{(A ; 2) ; (B ; -3) ; (C ; 4)\}$
- 3- $G_3 = \text{Bar} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 5)\}$

4- Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :

Dans l'espace affine, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ considérons le système

$\{(A_1, \alpha_1) ; (A_2, \alpha_2) ; (A_3, \alpha_3)\}$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$ alors $\exists ! G \in \mathcal{E}$ tel que :

$$\vec{OG} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \vec{OA_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \vec{OA_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \vec{OA_3}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} x_G - x_0 \\ y_G - y_0 \\ z_G - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} \alpha_2 + \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix} \alpha_3$$

Or

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} \alpha_2 + \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix} \alpha_3$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} \alpha_2 + \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix} \alpha_3$$

$$D'où \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{\alpha_1 \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

Exercice d'application :

Déterminer si possible les coordonnées du barycentre G dans chacun des cas suivants :

- 1- $G_1 = \text{Bar} \{(A ; 5) ; (B ; 2)\}$ avec : $A(1 ; 1)$ et $B(-1 ; 2)$
- 2- $G_2 = \text{Bar} \{(A ; 3) ; (B ; -8)\}$ avec : $A(0 ; 3)$ et $B(4 ; 5)$
- 3- $G_3 = \text{Bar} \{(A ; 1) ; (B ; 5)\}$ avec : $A(\frac{2}{3} ; 1)$ et $B(-\frac{1}{3} ; 2)$
- 4- $G_4 = \text{Bar} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)\}$ avec : $A(-1 ; 0)$; $B(1 ; 2)$ et $C(2 ; 3)$
- 5- $G_5 = \text{Bar} \{(A ; 2) ; (B ; -3) ; (C ; 4)\}$ avec : $A(-5 ; 3)$; $B(-2 ; 2)$ et $C(2 ; 6)$
- 6- $G_6 = \text{Bar} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 5)\}$ avec : $A(0 ; 0)$; $B(1 ; 7)$ et $C(-2 ; 3)$

5- Propriétés du barycentre :

- Le barycentre G d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés.

Exemple:

$$G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$$

$$G = \text{Bar} \{(B, \beta); (A, \alpha); (C, \gamma)\}$$

$$G = \text{Bar} \{(C, \gamma); (B, \beta); (A, \alpha)\}$$

- Le barycentre G d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par un constant non nul.

Exemple:

$$\text{On a } G = \{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$$

$$\forall k \in \mathbb{R}^*; G = (A, \frac{\alpha}{k}); (B, \frac{\beta}{k}); (C, \frac{\gamma}{k})$$

- Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel G' à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

Exemple : $G = \{(A, \alpha); (G', \beta + \gamma + \delta \neq 0)\}$

Remarque :

Le barycentre G d'un système du type $\{(A_1; \alpha); (A_2, \alpha); (A_3, \alpha); \dots (A_n; \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$ est appelé isobarycentre.

6- Ensemble des barycentres d'un système

a) Ensemble de deux points :

On se rappelle que pour le système $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ $\alpha + \beta \neq 0$ on a : en fixant A on a :

$$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow G \in (AB)$$

Considérons les systèmes $\{(A, \alpha_i); (B, \beta)\}$ $1 \leq i \leq n$

Si $\alpha_1 + \beta_1 \neq 0 \Rightarrow \exists ! G \in \phi$ tel que en fixant A on a : $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G \in (AB)$

Si $\alpha_2 + \beta_2 \neq 0 \Leftrightarrow \exists ! G_2 \in \phi$ tel que en fixant A on a : $\overrightarrow{AG_2} = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_2 \in (AB)$

$\vdots$

Si $\alpha_n + \beta_n \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_n \in \phi$ tel que en fixant A on a : $\overrightarrow{AG_n} = \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_n \in (AB)$

D'où l'ensemble des barycentres des points A et B est engendré par le vecteur $(\overrightarrow{AB})$ donc cet ensemble est la droite affine passant par les deux points A et B.

b) Ensemble de trois points :

$$\overrightarrow{AG_n} = \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_n \in (AB)$$

On a

Rappel : pour $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et en fixant A $\exists !$

$$G \in \phi / \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G \in \text{au plan A, B, C}$$

Considérons les systèmes $\{(A, \alpha_i) ; (B, \beta_i) ; (C, \gamma_i)\} \quad 1 \leq i \leq n$

Si $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_i \in \phi / \text{en fixant A}$

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_1 \in \text{au plan A, B, C}$$

Si $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_2 \in \phi / \text{en fixant A}$

$$\overrightarrow{AG_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_2 \in \text{au plan A, B, C}$$

Si $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_n \in \phi / \text{en fixant A on a :}$

$$\overrightarrow{AG_n} = \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_n \in \text{Au plan A, B, C}$$

D'où l'ensemble des barycentres des points A, B et C est engendré par le plan vectoriel de

base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ donc cet ensemble est la droite affine passant par les 3 points A, B, C'est-à-dire le plan ABC.

7- Lignes de niveaux

a- Ligne de niveau de l'application :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ M & \longrightarrow & MA^2 + MB^2 \end{array}$$

Activité1 :

Soient A et B deux points distincts du plan et I étant le milieu du segment $[AB]$, M un point quelconque du plan tel que : $f(M) = MA^2 + MB^2$

1) Exprime $f(M)$ en fonction de MI et AB.

2) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

(Tu discuteras suivant les valeurs de k où k est un réel non nul).

b- Ligne de niveau de l'application :

$$f : M \longrightarrow MA^2 - MB^2$$

Activité2 :

Soient A et B deux points du plan.

On considère la fonction f définie par $f(M) = MA^2 - MB^2$.

- 1) Exprime $f(M)$ en fonction de MA et AB .
- 2) k étant un réel donné, détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

EXERCICES

Exercices 1 :

- 1) Déterminer puis construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :
 - 1- $G_1 = \text{Bar} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)\}$
 - 2- $G_2 = \text{Bar} \{(A ; 2) ; (B ; -3) ; (C ; 4)\}$
 - 3- $G_3 = \text{Bar} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 5)\}$
- 2) Déterminer si possible les coordonnées du barycentre G dans chacun des cas suivants :
 - 1- $G_1 = \text{Bar} \{(A ; 5) ; (B ; 2)\}$ avec : $A(1 ; 1)$ et $B(-1 ; 2)$
 - 2- $G_2 = \text{Bar} \{(A ; 3) ; (B ; -8)\}$ avec : $A(0 ; 3)$ et $B(4 ; 5)$
 - 3- $G_3 = \text{Bar} \{(A ; 1) ; (B ; 5)\}$ avec : $A(\frac{2}{3} ; 1)$ et $B(-\frac{1}{3} ; 2)$
 - 4- $G_4 = \text{Bar} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)\}$ avec : $A(-1 ; 0)$; $B(1 ; 2)$ et $C(2 ; 3)$
 - 5- $G_5 = \text{Bar} \{(A ; 2) ; (B ; -3) ; (C ; 4)\}$ avec : $A(-5 ; 3)$; $B(-2 ; 2)$ et $C(2 ; 6)$
 - 6- $G_6 = \text{Bar} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 5)\}$ avec : $A(0 ; 0)$; $B(1 ; 7)$ et $C(-2 ; 3)$

Exercices 2 :

Soit ABC un triangle de dimensions : $AB = 9$ cm ; $AC = 6$ cm et $BC = 12$ cm.
 Soit I le milieu du segment $[BC]$ et G le point défini par $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.
 (On ne demande pas de faire la figure pour le moment).

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GI}$.
- 2) En déduire que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Faire la figure en plaçant le point G .
- 3) Placer le point D défini par $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.
- 4) Justifier que (DG) est parallèle à (BI) et que $DG = 4$ cm.

Exercices 3 :

Le plan P est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On donne les points $A\left(-\frac{2}{1}\right); B\left(\frac{5}{1}\right); C\left(\frac{4}{3}\right)$.

- 1) Montrer que les points $A; B$ et C ne sont pas alignés.
- 2) G est le point du plan tel que $3\vec{GA} - \vec{AB} + 2\vec{BC} = \vec{0}$.
Montrer que G est le barycentre des points pondérés : $(A, a); (B, b); (C, c)$
où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
- 3) On donne $a = 2; b = -1$ et $c = 2$.
a- Construire G' barycentre des points pondérés : $(A, 2); (B, -1); (C, 2)$.
b- Vérifier cette construction par le calcul des coordonnées de G' dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 4) Déterminer le centre de gravité du triangle ABC .
- 5) Que signifie I (isobarycentre des points pondérés $(A, 1); (B, 1)$).
On fera une démonstration.

Exercices 4 :

Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A, B, C dont le côté mesure a .

- 1) Construire le barycentre G du système $\{(A, 4); (B, 1); (C, -1)\}$.
- 2) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = \frac{63a^2}{4}$

Exercices 5 :

Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

- 1) Construire le triangle ABC puis calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- 2) Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A, 2); (B, 3); (C, 3)\}$. Construire G puis calculer GA .
- 3) Soit $f : P \rightarrow \mathbb{R}$
 $M \mapsto 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} + \vec{MA} \cdot \vec{MB}$
a) Exprimer $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG
b) Calculer $f(G)$.
- 4) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

Exercices 6:

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives : $A(3, 1); B(-2, 3); C(1, 0)$

Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des points $2; 1; -1$

- 1) Trouver les coordonnées G
- 2) Trouver suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M tel que :

$$2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$$

3) Construire les points M du plan tel que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 8$

Exercices 7 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les 4 points A ; B ; C ; D tel

$(O, \vec{i}, \vec{j})$

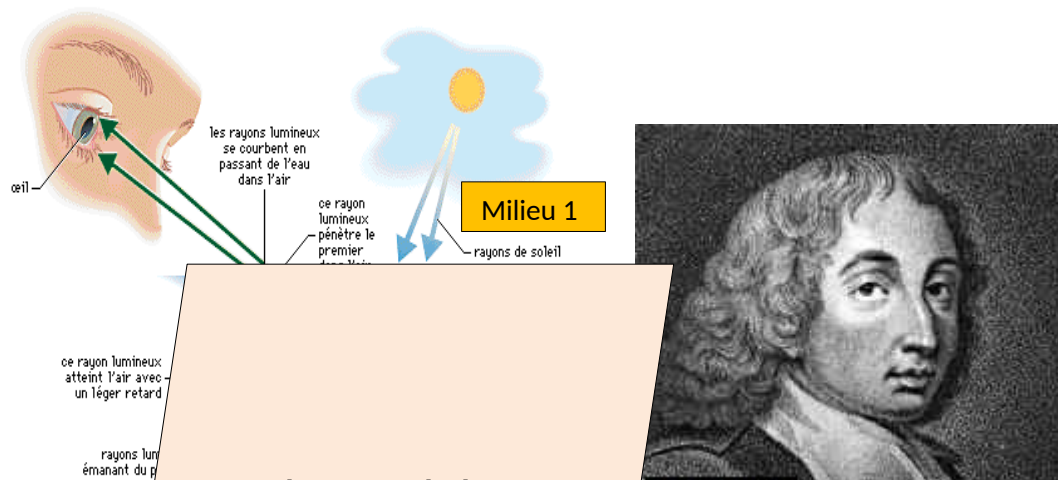
que A

- 1) Déterminer les coordonnées x et y de D sachant que : $\|\vec{DA}\| = \|\vec{DB}\| = \|\vec{DC}\|$
- 2) Déterminer les réels m et n tels que D soit barycentre des points (A, 1) ; (B, m) ; (C, n)
- 3) Trouver l'ensemble (E) des points M du plan tel que :

$$4\|\vec{MA}\|^2 + 3\|\vec{MB}\|^2 + 5\|\vec{MC}\|^2 = k$$

- 4) Déterminer le réel k tel que A soit élément de (E) que l'on représentera.

IV- DROITES DANS LE PLAN



pris naissance par Blaise Pascal qui dit :

« Pouvons nous reconnaître une droite quant on la verra dans la nature ».

Exemple : en observant un poisson dans l'eau, nous avons l'impression que les rayons de soleil pénétrant dans l'eau et se réfléchissant sur un poisson se courbe lorsqu'il repasse dans l'air. C'est pourquoi le poisson apparaît plus proche de la surface suivant une ligne droite alors qu'il ne l'est en réalité.

Pascal, Blaise (1623-1662), mathématicien, physicien, théologien, mystique, philosophe, moraliste et polémiste français du XVII^e siècle

1- Rappels :

a- Coordonnées d'un point :

Activité :

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J) , On considère un point A qui n'est situé ni sur (OI) ni sur (OJ) . La parallèle à (OI) passant par A coupe (OJ) en Q et la parallèle à (OJ) passant par A coupe (OI) en P .

Si A appartient à (OI) , on pose $P = A$ et $Q = O$.

Si A appartient à (OJ) , on pose $P = O$ et $Q = A$.

Place ces points dans le repère.

Définition :

L'**abscisse** x_A du point A est l'abscisse du point P sur (OI) .

L'**ordonnée** y_A du point A est l'abscisse du point Q sur (OJ) .

Le couple $(x_A ; y_A)$ s'appelle **les coordonnées** du point A dans le repère (O, i, j) .

Exemples : déterminer les coordonnées des points B ; C ; D .

b- Distance entre deux points :

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans le repère (O, i, j) .

On appelle distance de A à B, le réel positif ou nul noté : **AB ou d(A ; B)** tel que :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarque:

- Il faut que le repère soit orthonormé car cette propriété repose sur le théorème de PYTHAGORE.
- $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, donc l'ordre dans le quel on fait la différence des abscisses (et des ordonnées) de A et B importe peu.

c- Coordonnées du milieu d'un segment :

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans le repère (O, i, j) et I le milieu du segment $[A ; B]$. I est le milieu du segment $[A ; B]$ si et seulement si :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Remarque:

L'abscisse du point I est la moyenne arithmétique des abscisses des points A et B (tout comme l'ordonnée).

Exercices d'application

Dans chacun des cas suivants : calculer la longueur puis le milieu du segment $[A ; B]$.

$$\mathbf{a-} A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{b-} A\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{c-} A\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- Equations de droites – parallélisme et perpendicularité:

a- Equation d'une droite :

On appelle équation de droite toute égalité liant l'abscisse et l'ordonnée d'un point **A** qui appartient à cette droite.

Ainsi Toute droite admet une équation de la forme : **$y = ax + b$ (dite équation réduite).**

Exemples: (D) : $y = 3x - 2$; (D') : $y = \frac{1}{3}x - 7$

NB : Pour la droite (D'), dire que $y = \frac{1}{3}x - 7$ équivaut à dire que :

$-x + 3y + 21 = 0$ (sous la forme : **$ax + by + c = 0$**).

$ax + by + c = 0$ (dite équation cartésienne).

$x = c$

Remarque :

- Une droite admet une infinité d'équations.
- Toute droite non parallèle à l'axe (OI) et l'axe (OJ) a pour équation **$y = ax + b$ ou $ax + by + c = 0$** .
- Toute droite parallèle (OJ) a pour équation **$x = c$** .
- Les coefficients (**a et b**) sont des réels uniques.

b- Coefficient directeur d'une droite :

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme : $y = ax + b$. le nombre **a** s'appelle le **coefficient directeur** de cette droite.

NB :

- La droite d'équation $y = ax + b$ est **parallèle** à la droite d'équation $y = ax$.
- Si $ax + by + c = 0$ est **l'équation cartésienne** d'une droite, alors son vecteur directeur $\vec{U}$ a pour coordonnées $\vec{U}(-b ; a)$.

c- Interprétation graphique du coefficient directeur d'une droite :

Dans un repère (O ; I ; J) donné, la valeur de **a** permet de suivre l'inclinaison de la droite d'équation $y = ax + b$, ou ce qui revient au même, la droite d'équation $y = ax$ par rapport à l'axe des abscisses.

d- Droites parallèles - droites sécantes – droites perpendiculaires :

Soit (D) et (D') deux droites d'équation respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

- (D) est **parallèle** à (D') si et seulement si **$a = a'$** .
- (D) et (D') sont **sécantes** si et seulement si **$a \neq a'$** .
- (D) et (D') sont **perpendiculaires** si et seulement si **$aa' = -1$** .

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, indiquer les droites qui sont parallèles, sécantes ou perpendiculaires :

$$(D_1) : y = 4x + 7 ; (D_2) : y = -3x + 9 ; (D_3) : y = -2x ; (D_4) : x = -2 .$$

$$(D_5) : y = -x + 9 ; (D_6) : y = x - 9 ; (D_7) : y = -2x - 1 ; (D_8) : y = x + 1$$

$$(D_9) : y = -x + 9 ; (D_{10}) : y = -x - 9 ; (D_{11}) : y = -\frac{1}{4}x + 1 ; (D_{12}) : x = -3$$

e- Comment tracer une droite dans le repère :

Soit la droite **(D)** d'équation : $y = ax + b$.

Méthode1:

Pour tracer deux droites, **deux points** suffisent. Il faut donc calculer l'image par f de deux valeurs distinctes x_1 et x_2 puis tracer la droite passant par les points de coordonnées $(x_1 ; f(x_1))$ et $(x_2 ; f(x_2))$.

Méthode2:

On utilise l'ordonnée à l'origine **b** et le coefficient directeur **a** de la droite **(D)** d'équation : $y = ax + b$.

Pour cela, on place le point de coordonnées $(0 ; b)$ sur l'axe des ordonnées puis on construit un deuxième point de **(D)** en utilisant le fait que lorsque x varie de h alors $f(x)$ varie de ah .

NB :

Pour les droites de la forme $x = c$, on trace la droite passant par deux points d'abscisse $x = c$ et d'ordonnées quelconques différentes.

Exemple :

Tracer la représentation graphique de la droite **(D)** : $y = -x + 1$.

Remarque :

- Si deux droites sont parallèles à l'axe des ordonnées, alors elles sont parallèles.
- Si deux droites sont telles que l'une est parallèle à l'axe des ordonnées et pas l'autre, alors elles sont sécantes.
- Si deux droites sont sécantes, pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on résout le système formé à partir des équations de ces deux droites.

Exercice d'application :

Parmi les équations suivantes, indiquer celles qui sont des équations de droite. Lorsque c'est le cas, tracer la droite d'équation $y = ax + b$ correspondant et donner le coefficient directeur, lorsqu'il existe.

$$a) y = -2x + 7 \quad b) x = -\pi \quad c) y = \sqrt{x^2}$$

$$d) -5x + 2y + 7 = 0 \quad e) y = \frac{3}{x-5} \quad f) \frac{x-1}{3y} = \frac{2}{3}$$

f) Détermination d'une équation d'une droite passant par deux points distincts

Méthode :

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts.

- Si $x_A = x_B$, alors une équation de la droite est $x = x_A$.
- Si $x_A \neq x_B$, alors on calcule le coefficient directeur **a** tel que : $\mathbf{a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
puis la valeur de **b** telle que : $y_A = \mathbf{a} x_A + \mathbf{b}$ ou $y_B = \mathbf{a} x_B + \mathbf{b}$

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (**D**) passant par les points A et B puis tracer la.

a- $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b-** $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c-** $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

g- Détermination d'une équation d'une droite parallèle à une autre droite :

Méthode :

Soit la droite (**D**) d'équation : $y = ax + b$. Pour déterminer l'équation de la droite (**D'**) d'équation $y' = ax + b'$ passant par $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et parallèle à (**D**),

On cherche uniquement la valeur de b' telle que : $y_A = \mathbf{a} x_A + \mathbf{b}'$.

Exercice d'application

Donner une équation de la droite parallèle à la droite d'équation :

$Y = -5x + \frac{2}{3}$ et passant par le point A(1 ; 4).

h- Détermination des coordonnées du point d'intersection de deux droites :

Méthode :

Soient (**D**) et (**D'**) deux droites sécantes et d'équations respectives :

$y = ax + b$ et $y' = a'x + b'$.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droite (**D**) et (**D'**), on résout le système formé par les deux équations :

$y = ax + b$ et $y' = a'x + b'$ telle que :
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y' = a'x + b' \end{cases}$$

i- Représentation paramétrique d'une droite D :

- Droite passant par un point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$D(A ; \vec{u}) = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P ; \overrightarrow{AM} = k \vec{u} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ka + x_0 \\ y = kb + y_0 \end{cases}$$

Ce système est un système d'équations paramétrique ou encore une représentation paramétrique de D.

- Droite passant par deux points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ notée $D(A ; B)$

Il suffira de savoir que $D(A ; B) = D(A ; \overrightarrow{AB})$ et poser que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(A ; B) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k(x_B - x_A) + x_A \\ y = k(y_B - y_A) + y_A \end{cases}$$

Réciproquement dans le plan rapport à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, tout système de la forme

$$\begin{cases} x = \lambda a + x_0 \\ y = \lambda b + y_0 \end{cases} \text{ est une représentation paramétrique d'une droite } D \text{ passant par le}$$

point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- Représentation ou équation cartésienne de $D(A ; \vec{u})$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(A ; \vec{u}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0 \text{ or } A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors on a : } \det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_0 \\ y - y_A & y_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow y_0(x - x_A) - x_0(y - y_A) = 0 \text{ d'où } D(A ; \vec{u}) : y_0(x - x_A) - x_0(y - y_A) = 0$$

Exercice d'application

Dans chacun des cas Suivants, démontrer que les deux droites **(D)** et **(D')** sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur points d'intersection.

a- **(D)** : $y = 3x + 1$ et **(D')** : $y = -5x + 3$

b- (D) : $3y = 2x + \frac{1}{2}$ et (D') : $4x = 2y + 9$

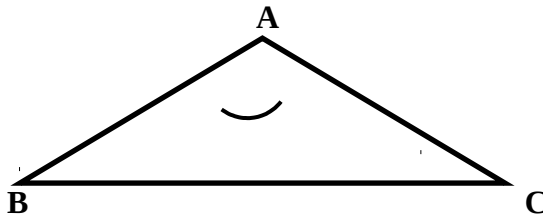
3- Figures géométriques dans le plan :

a- Triangles :

- Angles et triangles

Activité :

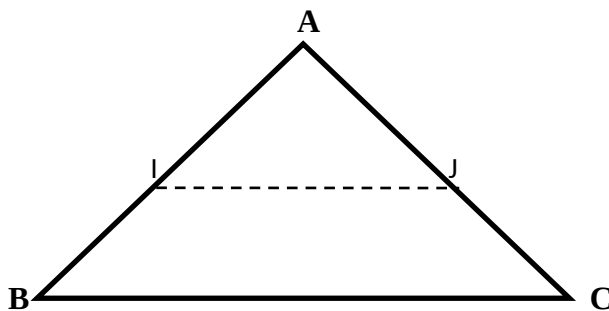
- 1) Construis un triangle ABC.
- 2) A l'aide de ton rapporteur mesure en degré les trois angles de ton triangle.
- 3) Vérifie que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.
 - La **somme des angles** d'un triangle est égale à **180°**



- Droite des milieux dans un triangle

Activité :

- 1) Construis un triangle ABC, I et J étant les milieux respectifs des cotés AB et AC.
- 2 Trace la droite (IJ).
- 3) Comment sont les droites (IJ) et (BC) ?
- 4) Mesure et compare les longueurs des segments [IJ] et [BC].



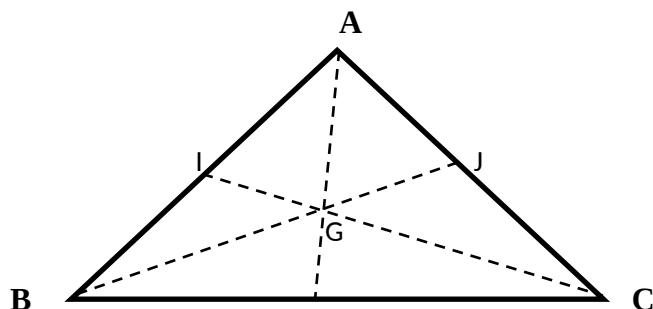
- Si $\begin{cases} I \text{ est le milieu de } [AB] \\ \text{et} \\ J \text{ est le milieu de } [AC] \end{cases}$, alors (IJ) est parallèle à (BC).
- Si I est le milieu de [AB], alors la parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en J, milieu de [AC].

- $IJ = \frac{1}{2} BC$

- Les médianes d'un triangle

Activité :

- 1) Construis un triangle ABC.
 - 2) Trace la droite joignant un sommet au milieu du côté opposé.
 - 3) Comment sont ces droites ?
- Chacune de ces droites est appelée une médiane du triangle ABC.

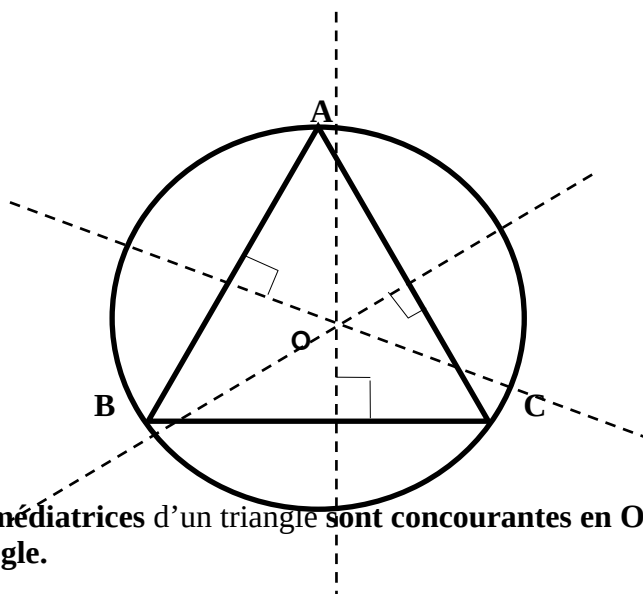


- Chaque **médiane** relie un **sommet** au **milieu du côté** opposé.
- Les médianes **sont concourantes en G**, **centre de gravité** du triangle, situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

- Les médiatrices d'un triangle

Activité :

- 1) Construis un triangle ABC.
 - 2) Trace la droite perpendiculaire à chacun des côtés du triangle ABC en son milieu.
 - 3) Comment sont ces droites ?
- Chacune de ces droites est appelée une médiatrice du triangle ABC.

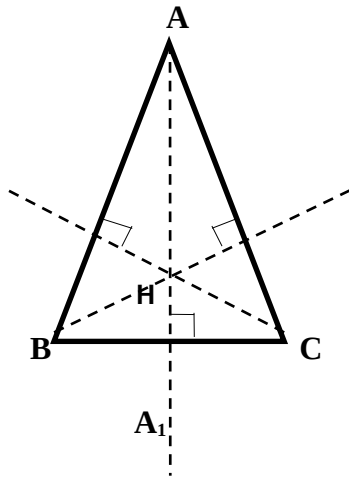


- Les **médiatrices** d'un triangle **sont concourantes en O**, centre du **cercle circonscrit** au triangle.

- Les hauteurs d'un triangle

Activité :

- 1) Construis un triangle ABC.
 - 2) Trace la perpendiculaire au support de chacun des cotés et passant par le sommet opposé.
 - 3) Comment sont ces droites ?
- Chacune de ces droites est appelée une hauteur du triangle ABC.

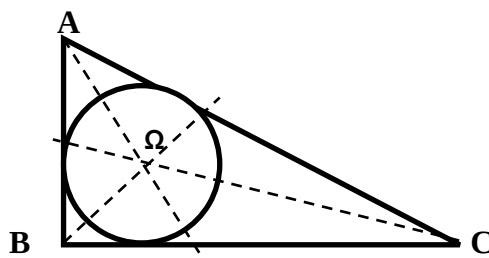


- Chaque **hauteur** passe par un sommet et est **perpendiculaire** au support du coté opposé.
- Les **hauteurs** d'un triangle sont **concourantes** en H, appelé **orthocentre**.
- L'aire du triangle est : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BC \times AA_1}{2}$

- Les bissectrices d'un triangle

Activité :

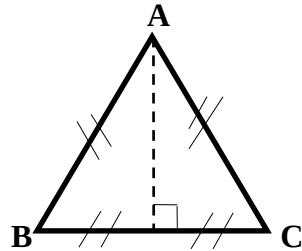
- 1) Construis un triangle ABC.
 - 2) Trace la bissectrice de chacun des angles intérieurs du triangle.
 - 3) Comment sont ces droites ?
- Chacune de ces droites est appelée une bissectrice du triangle ABC.



- Les **bissectrices intérieures** sont concourantes en un point Ω , centre du **cercle inscrit** dans le triangle.

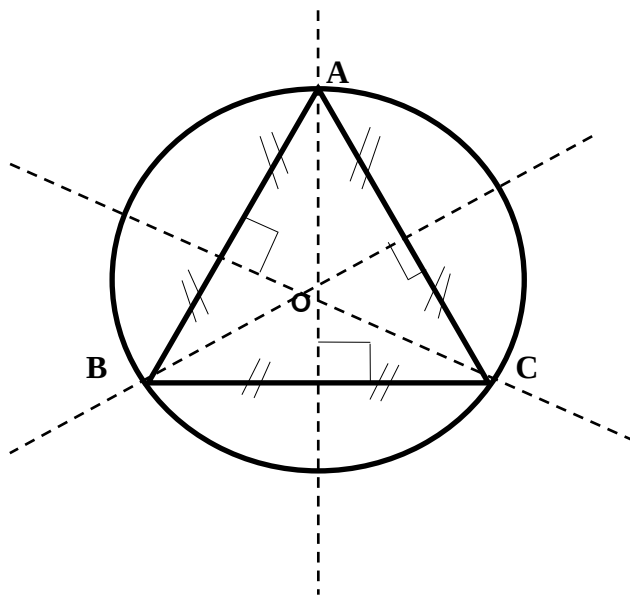
- Triangles particuliers

■ Triangle isocèle en A



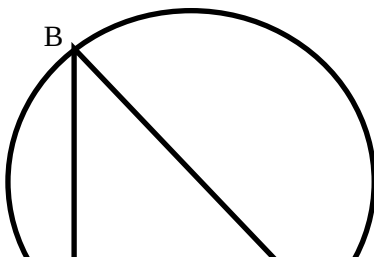
- $AB = AC$.
- $\hat{B} = \hat{C}$.
- la **médiane** issue du sommet principal est en même temps, **hauteur**, **médiatrice** et **bissectrice**.

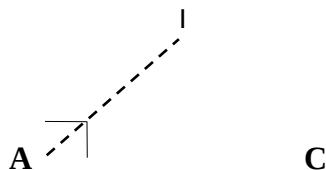
■ Triangle équilatéral



- $AB = BC = AC = a$
- $\hat{B} = \hat{C} = \hat{A} = 60^\circ$
- les **médianes** sont en même temps, **hauteur**, **médiatrice** et **bissectrice**.
- La mesure des hauteurs est : $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

■ Triangle rectangle :

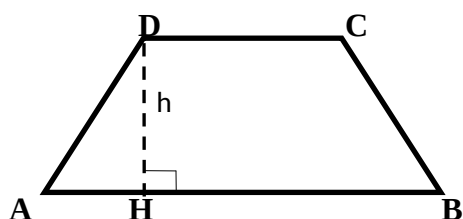




- $\hat{A} = 90^\circ$ et $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$
- L'hypoténuse est le **diamètre** d'un cercle qui passe par le sommet de l'angle **droit**.

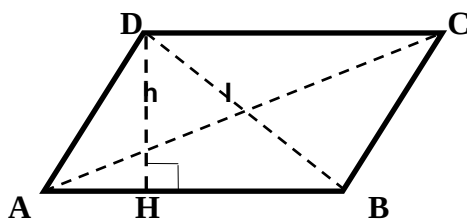
b- Quadrilatères :

- Trapeze :



- (AB) est parallèle à (DC)
- $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ et $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
- L'aire est : $\frac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{CD + AB}{2} \times h$

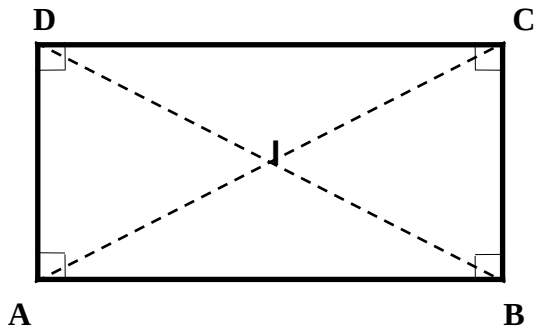
- Parallélogramme



- (AB) est parallèle à (DC) et (AD) est parallèle à (BC).
- $AB = DC$ et $AD = BC$.
- [AC] et [DB] ont même milieu.
- $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ et $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$.
- $\hat{A} = \hat{C}$ et $\hat{B} = \hat{D}$.
- L'aire est : $AB \times h$

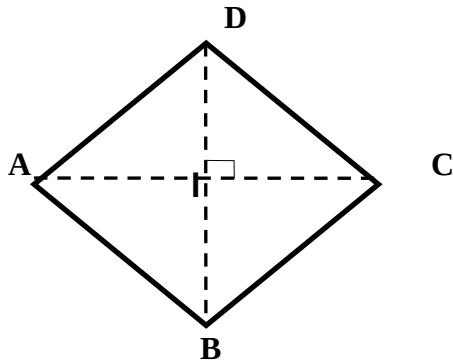
c- Parallélogrammes particuliers

- Rectangle :



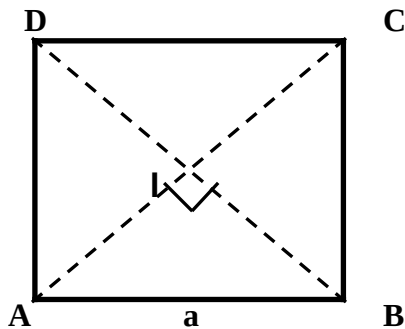
- $[AC]$ et $[DB]$ ont même milieu et même longueur.
- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$.
- L'aire est : $AB \times BC$.

- Losange :



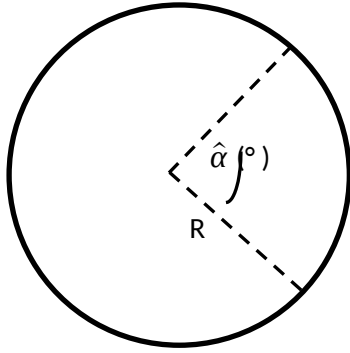
- $AB = BC = CD = AD$.
- $[AC]$ et $[DB]$ ont même milieu et sont perpendiculaires.
- L'aire est : $\frac{AC \times DB}{2}$

- Carré :

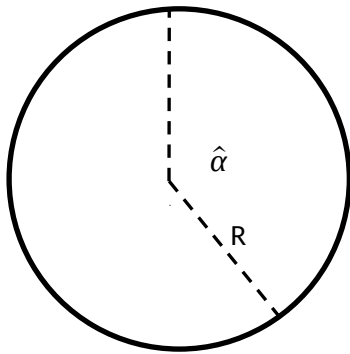


- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$.
- $AB = BC = CD = AD = a$.
- $[AC]$ et $[DB]$ ont même milieu, même longueur ($a\sqrt{2}$) et sont perpendiculaires.
- L'Aire est : a^2 .

- Cercle et disque :



- Périmètre du cercle : $2\pi R$
- Longueur de l'arc : $\frac{\alpha}{360} \times 2\pi R$.



- Aire du disque : πR^2
- Aire du secteur circulaire : $\frac{\alpha}{360} \times \pi R^2$.

4- Cercle dans le plan :

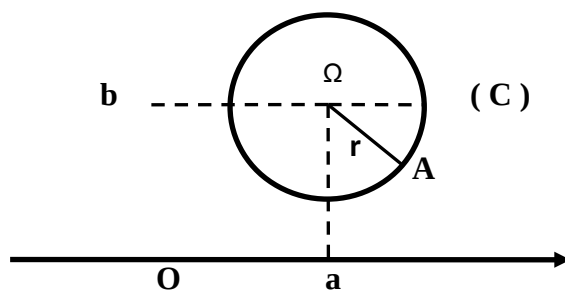
a- Définition :

Le plan $\mathbf{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit $\Omega(a ; b)$ un point du plan et r un réel strictement positif.

On appelle cercle (C) de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r , l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tel que $d(\Omega ; M) = r$.





b- Equation du cercle (C) de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r , :

Soit $M(x ; y)$ un point du plan.

$$M \in (C) \Leftrightarrow d(\Omega ; M) = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r = 0$$

Posons : $A = -2a$; $B = -2b$ et $c = a^2 + b^2 - r$.

Alors l'équation devient :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0 \quad \text{qui est l'équation cartésienne du cercle}$$

Exercices d'applications

1) Soit (C) un cercle de centre $\Omega(1 ; 2)$ et de rayon $r = 4$.

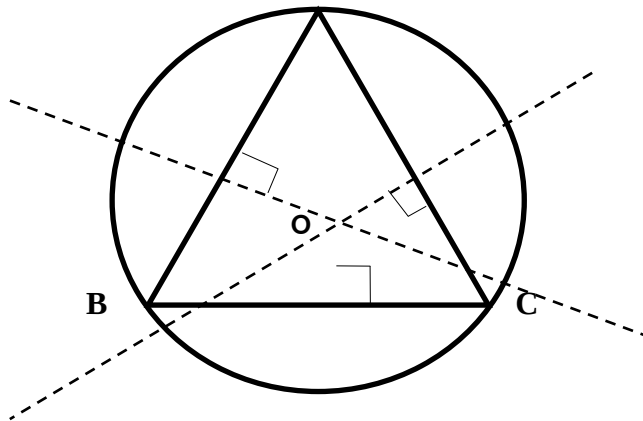
Déterminer une équation de (C) puis tracer (C).

2) Soit (C) un cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$

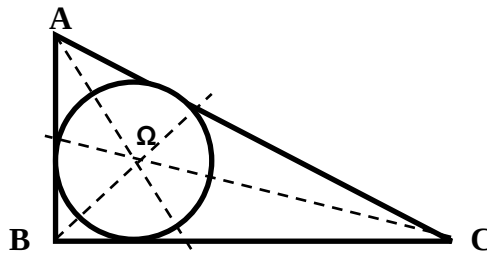
Déterminer le centre et le rayon de (C) puis tracer (C).

c- Propriétés :

- Si (C) est une équation du cercle de diamètre AB avec A et B deux points distincts du plan, alors on a : $M \in (C) \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
- Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en O. (centre du cercle circonscrit au triangle).

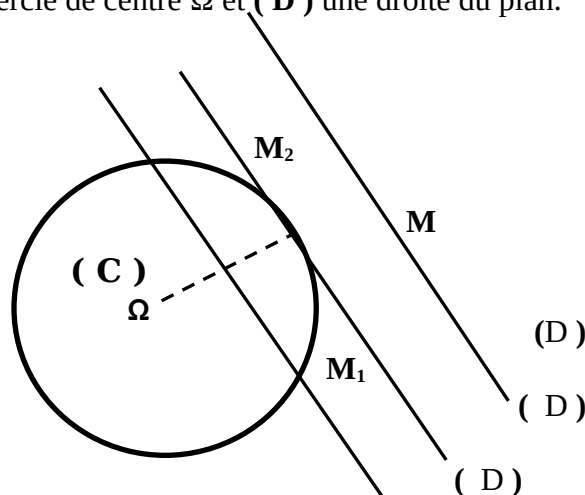


- Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en O.
(centre du cercle inscrit dans le triangle).



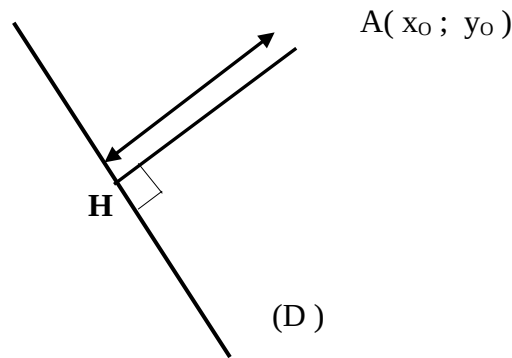
d- Position relative d'une droite et d'un cercle :

Soit (C) un cercle de centre Ω et (D) une droite du plan.



- Si $(C) \cap (D) = \emptyset$, alors $d((C) ; (D)) > r$.
- Si $(C) \cap (D) = \{M\}$, alors $d((C) ; (D)) = r$ et (D) est tangente à (C) .
- Si $(C) \cap (D) = \{M_1 ; M_2\}$, alors $d((C) ; (D)) < r$.

le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère la droite (D) d'équation :
 $ax + by + c = 0$ et un point $A(x_0 ; y_0)$.



$$d((C) ; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e- **Reconnaissance de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (en utilisant la forme canonique)**

Soit (C) un cercle d'équation : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, pour trouver le centre et le rayon en utilisant la forme canonique qui se présente sous la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 - 2\left(-\frac{a}{2}\right)x \right] + \left[y^2 - 2\left(-\frac{b}{2}\right)y \right] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] + \left[\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}\right) = 0$$

$$< = > \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}\right)$$

$$< = > \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

Alors l'ensemble des points M cherché est le **cercle de centre** $\Omega\left(\frac{-a}{2} ; \frac{-b}{2}\right)$ et de **rayon**

$$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

EXERCICES

Exercices 1 :

Déterminer une équation réduite de chacune des droites suivantes :

1) $(D_1) : 2x + y = 3$; 2) $(D_2) : 2y = -x + 3$; 3) $(D_3) : -y = -2x - 4$

4) $(D_4) : 2x + y - 5 = 0$; 5) (D_5) passe par $A\left(\frac{2}{3}\right)$ et de pente -2

6) (D_6) passe par $B\left(\frac{1}{0}\right)$ et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$

Exercices 2 :

1) Déterminer une équation de la droite (D) passant par les points A et B dans chacun des cas suivants :

a- $A\left(\frac{-2}{3}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}\right)$; b- $A\left(\frac{0}{-4}\right)$ et $B\left(\frac{1}{1}\right)$; c- $A\left(\frac{-2}{-2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{0}\right)$

d- $A\left(\frac{0}{3}\right)$ et $B\left(\frac{\frac{3}{2}}{-1}\right)$; e- $A\left(\frac{\frac{2}{3}}{-2}\right)$ et $B\left(\frac{\frac{4}{3}}{1}\right)$; f- $A\left(\frac{-1}{-1}\right)$ et $B\left(\frac{5}{5}\right)$.

2) Déterminer une équation de la droite (D') parallèle à la droite (D) et passant par le point A dans chacun des cas suivants :

a- $(D) : y = -x + 1$ et $A\left(\frac{-2}{3}\right)$; b- $(D) : y = 2x + \frac{1}{2}$ et $A\left(\frac{0}{1}\right)$.

c- $(D) : y = -\frac{3}{2}x - 1$ et $A\left(\frac{-1}{-1}\right)$; d- $(D) : y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ et $A\left(\frac{-2}{4}\right)$.

e- $(D) : y = x$ et $A\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$; f- $(D) : y = -x\sqrt{3} + 1$ et $A\left(\frac{-2}{3}\right)$.

Exercices 3 :

Soit un triangle ABC tel que : $A\left(\frac{1}{-2}\right)$; $B\left(\frac{5}{2}\right)$ et $C\left(\frac{-3}{1}\right)$.

1) Déterminer une équation des médiatrices du triangle ABC.

- 2) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercices 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne les points $A\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Donner l'équation réduite de la droite (AB) . Quel est son coefficient directeur ?
- 2) Donner une équation de droite passant par C et de coefficient directeur $\frac{7}{2}$.
- 3) Montrer que ces deux droites sont sécantes et déterminer algébriquement puis graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercices 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne les points $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

- 1) Donner une équation cartésienne du cercle (C) et de diamètre $[AB]$.
- 2) Soit (D) la droite passant par $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne puis paramétrique de (D) .

- 3) Déterminer les points d'intersections de (C) et (D) .

Exercices 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Donner une équation cartésienne :

- 1) De la droite (D_1) passant par $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) De la représentation paramétrique :

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (5t + 1 ; -t + 2) \end{array}$$

3) De la droite perpendiculaire à (D) : $2x - 3y + 4 = 0$ et passant par $K\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

4) Du cercle de diamètre $[AB]$; avec $A\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5) Du cercle de centre $A\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercices 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ vérifiant les équations de cercles suivants :

1) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) (C) : $x^2 + y^2 + x - 1 = 0$

3) (C) : $x^2 + y^2 + 1 = 0$; 4) (C) : $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

5) (C) : $-x^2 - y^2 + 3x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = 0$; 6) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Exercices 8 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne le cercle (C) et la droite (D) d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - 3y + 1 = 0.$$

- 1) Construire le cercle (C) et la droite (D) dans le même repère.
- 2) Construire les deux tangentes au cercle (C) parallèles à la droite (D).
- 3) Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur normal de chacune d'elles.
- 4) En déduire les équations de ces deux tangentes.

Transformation et Isométrie du Plan

Evaluation diagnostique

Activités

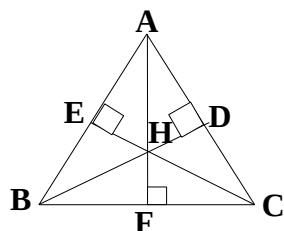
Trouve les bonnes réponses pour chacune des affirmations suivantes :

Activité 1 :

Dans un triangle

- Le point donné est l'orthocentre du triangle donné :

a) H et ABC ; b) A et HBC ; c) D et AHC ; d) C et AHB ; e) H et EFD



Activité 2

Dans un triangle AMB rectangle en M, I est le milieu de $[AB]$ et $[MH]$ la hauteur issue de M. On a :

- a) I est à égale distance de A, B et M ;
- b) $AB^2 = MA^2 + MB^2$;
- c) $\widehat{MIB} = 2\widehat{MAB}$;
- d) La médiatrice de $[MB]$ passe par I ;
- e) $MH = \frac{(MA \times MB)}{AB}$

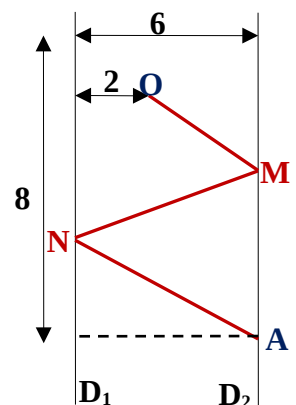
Situation - Problème

Une bande est constituée de deux droites parallèles D_1 et D_2 distantes de 6 cm.

A l'intérieur de cette bande est situé le point O à 2 cm de D_1 .

Le point A est situé sur D_2 comme l'indique la figure.

- 1) Calcule la longueur du trajet : $OM + MN + NA$ si MNA est un triangle équilatéral.
- 2) Calcule la longueur du trajet si les angles $\widehat{OMN}$ et $\widehat{MNA}$ sont égaux.
- 3) Détermine le trajet le plus court parmi tous trajets possibles.



Sommaire

1- Homothétie.....158

2- Isométries du plan.....159

- Translation,
- Symétrie centrale,
- Symétrie orthogonale,
- Rotations.

Cours

I- HOMOTHÉTIE:

Activité :

Soit O un point du plan et k un réel. A partir d'un point quelconque M du plan, construis le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

1- Définition :

Soit O un point du plan et k un réel non nul ; on appelle **homothétie** de centre O et de **rapport k non nul**, l'application h du plan p dans p, qui à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

2- Notation :

Si h désigne l'homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$, pour tout point M du plan, $h(M) = M'$ signifie que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Remarque :

- $h(O) = O$, le point O est le seul point invariant par f.
- Si A' est l'image d'un point A dans une homothétie de centre O et de rapport $k \neq 1$, les trois points O, A et A' sont alignés.

3- Théorème :

Si A' et B' sont les images respectives de deux points A et B par une homothétie de rapport k, alors on a :

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}.$$

4- Propriétés :

- l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- l'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite parallèle, de même sens si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$.
- L'image d'un segment par une homothétie est un segment.
- L'image d'un secteur angulaire par une homothétie est un secteur angulaire de même mesure.

- L'homothétie conserve l'alignement, le parallélisme, l'orientation, la nature, des figures et multiplie les distances par $|k|$ donc : (ne conserve pas la distance).

Exercice d'application

- 1) Soit un segment $[AB]$ non nul, et $[A'B']$ l'image du segment $[AB]$ par une homothétie de centre O et de rapport $k = 2$.
 - a- Construire les segments $[AB]$ et $[A'B']$.
 - b- Calculer $\frac{A'B'}{AB}$ pour $k = -2$
- 2) Soit un triangle ABC quelconque et O un point situé en dehors de ce triangle.

Construire les images respectives A' ; B' ; C' des points A ; B ; C par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$

II- ISOMETRIES DU PLAN:

1- Translation :

Activité :

Soit $\vec{U}$ un vecteur du plan. A partir d'un point quelconque M du plan, construis le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$.

a- Définition :

On appelle translation de vecteur $\vec{U}$, l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$.

b- Notation :

- La translation de vecteur $\vec{U}$ est notée $t_{\vec{U}}$.
- $M' = t_{\vec{U}}(M)$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$.
- M' est l'image de M par la translation $t_{\vec{U}}$.
- M est l'antécédent de M' par cette translation.
- Si le bipoint (A ; B) est un représentant du vecteur $\vec{U}$, alors la translation $t_{\vec{U}}$ peut être noté $t_{\overrightarrow{AB}}$.
- $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

c- Théorème :

Tout point M du plan a un et un seul antécédent, ainsi on dit que $t_{\vec{U}}$ est une bijection du plan sur le plan.

d- Propriétés :

- l'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.
- l'image d'une demi-droite par une translation est une demi-droite parallèle.
- L'image d'un segment $[AB]$ est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- La translation conserve l'alignement, le parallélisme, la distance, la valeur et l'orientation du plan, la nature des figures et les angles.

Exercice d'application

- 1) Tracer une droite (Δ) . Marquer sur cette droite et dans cet ordre les points A ; B ; C ; D et un point O tels que O est le milieu de $[AB]$ et $[BC]$.

Compléter les pointillés suivants :

- a- $t_{\overrightarrow{BD}}(A) = \dots\dots\dots$
- b- $t_{\overrightarrow{DO}}(O) = \dots\dots\dots$
- c- $t_{\overrightarrow{CA}}(D) = \dots\dots\dots$
- d- $t_{\overrightarrow{OA}}(D) = \dots\dots\dots$

- 2) Soit un triangle ABC.

Construire l'image de la droite (BC) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

- 3) Construire un cercle (C) de centre O et marque un point A sur ce cercle .

Construire l'image (C') de (C) par la translation de vecteur $\vec{U}$ sachant que $\vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

2- Symétrie centrale :

Activité :

- 1) Soit O un point du plan. A partir d'un point quelconque M, construis le point M' tel que O soit le milieu du segment $[MM']$.

- 2) Vérifie que pour tout point M de P, on a $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

a- Définition :

On appelle symétrie centrale de centre O, l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

b- Notation :

- La symétrie de centre O est notée S_O .

- $M' = S_O(M)$ signifie que $\overrightarrow{OM'} = - \overrightarrow{OM}$.
- M' est l'image de M par la symétrie de centre O .

c- Remarque :

Le point O a pour image lui-même, on dit qu'il est invariant par S_O .

d- Propriétés :

- l'image d'une demi-droite $[OA)$ par une symétrie centrale est une demi-droite $[O'A')$ parallèle et de centre contraire. (O' et A' étant les images respectives de O et de A).
- l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.
- L'image d'un segment $[AB]$ par une symétrie centrale est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- L'image d'un cercle de centre I par une symétrie centrale de centre O est un cercle de centre $I' = S_O(I)$ et de même rayon.
- La symétrie centrale conserve les angles.

Exercice d'application

- 1) Construire un triangle ABC ($AB = AC$). Construire le symétrique D de A par rapport au milieu O du segment $[BC]$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
- 2) On considère les points $A(3; 0)$; $B(2; -3)$; $D(0; 1)$; $F(-1; 0)$ dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
 - a- Placer les points A ; B ; D ; F dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
 - b- Déterminer les coordonnées de E symétrique de A dans la symétrie de centre D puis montrer que les points E ; F et B sont alignés.

3- Symétrie orthogonale :

Activité :

Construis deux droites (D) et (D') perpendiculaires en H .

Place un point A et A' sur la droite (D') tel que la distance de A à H soit égale à la distance de A' à H .

a- Définition :

On appelle symétrie orthogonale par rapport à une droite (Δ) , l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

- Si $M \in \Delta$, M' est confondu avec M .
- Si $M \notin \Delta$, alors on projette orthogonalement M en H sur Δ et on prolonge MH d'une longueur HM' .

La droite Δ est appelée axe de symétrie orthogonale. Elle est **l'ensemble des points invariants par la symétrie orthogonale**.

b- Notation :

- La symétrie orthogonale d'axe Δ est notée S_Δ .
- $M' = S_\Delta(M)$ signifie que M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe Δ .

c- Propriétés :

- l'image d'une droite par une symétrie orthogonale est une droite.
- l'image d'une demi-droite par une symétrie orthogonale est une demi-droite.
- L'image d'un segment $[AB]$ par une symétrie orthogonale est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- La symétrie orthogonale conserve les angles et les figures géométriques.

Exercice d'application

- 1) Tracer une droite Δ et un triangle ABC. Construire le symétrique de ce triangle par rapport à Δ .
- 2) Tracer une droite Δ et placer sur cette droite deux points A et A' tels que :
 $AB = A'B$ et $AC = A'C$.

4- Rotation :

a- Définition :

On appelle rotation de centre Ω et d'angle Θ , l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $r(\Omega ; \theta)(M) = M'$

b- Notation :

- La rotation de centre Ω et d'angle Θ est noté $r(\Omega ; \theta)$.
- $r(\Omega ; \theta)(M) = M'$ signifie que M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle Θ .

c- Propriétés :

- l'image d'une droite par une rotation est une droite.
- l'image d'une demi-droite par une rotation est une demi-droite.
- L'image d'un segment $[AB]$ par une rotation est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- La rotation conserve l'alignement, la nature des figures, l'orientation des angles et la distance.

Exercice d'application

Soient : A(1 ; 0) ; B(2 ; 1) deux points du plan

Tracer l'image A'B' de AB par une rotation de centre $\Omega(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$ et d'angle $\Theta = \frac{-\pi}{2}$

EXERCICES

Exercices 1 :

Soit ABC un triangle quelconque et O un point n'appartenant pas au triangle.

- 1) Construire le triangle ABC puis les images A' ; B' ; C' des points A ; B ; C par l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{1}{2}$.
- 2) Expliquer pourquoi l'image du triangle ABC est le triangle A'B'C'.

Exercices 2 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on donne les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer les distances : $d(A, B)$; $d(A, C)$; $d(B, C)$. En déduire la nature du triangle ABC.
- 2) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.
 - a- Calculer les coordonnées de son centre Ω puis son rayon R.
 - b- Montrer que le point $D \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à ce cercle.
- 3) Calculer les coordonnées du point E, image de A dans l'homothétie de centre B et de rapport $k = \frac{1}{2}$.
- 4) Trouver une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercices 3 :

Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité.

- 1) Faire la Construction puis placer le point G.
- 2) Construire l'image de ce triangle par l'homothétie de centre G et de rapport $k = -\frac{1}{2}$.
- 3) Quel est le centre de gravité du nouveau triangle ? Justifier votre réponse.

Exercices 4 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points A, B, C et D tel que : $\vec{OA} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{OB} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$; $\vec{OC} = 12\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{OD} = 9\vec{i} + 7\vec{j}$.

- 1) Montrer que le point C est l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $k = 2$.
- 2) Calculer les distances AB ; AD et BD puis en déduire la nature du triangle ABD ?

Exercices 5 :

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$.

- 1) Construire le triangle ABC et le point I.
- 2) Construire le point D symétrique de A par rapport à I.
- 3) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.
- 4) Compléter les pointillés suivants :
 - a- $t_{\vec{AB}}(C) = \dots\dots\dots$
 - b- $t_{\vec{AI}}(I) = \dots\dots\dots$

Exercices 6 :

- 1) Tracer une droite (Δ) puis marquer sur cette droite et dans cet ordre les points A, B, C, D et un point O tels que O soit milieu des segments : $[AD]$ et $[BC]$.
- 2) Compléter les Compléter les pointillés suivants :

a- $t_{\vec{BD}}(A) = \dots\dots\dots$

b- $t_{\vec{DO}}(O) = \dots\dots\dots$

c- $t_{\vec{CA}}(D) = \dots\dots\dots$

d- $t_{\vec{OA}}(D) = \dots\dots\dots$

Exercices 7 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points :

$$A\left(\begin{array}{c} 7 \\ 1 \end{array}\right); B\left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array}\right) \text{ et } C\left(\begin{array}{c} -1 \\ 7 \end{array}\right).$$

- 1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la progression de l'énoncé.
- 2) Calculer les distances: AB ; BC et CA puis démontrer que le triangle ABC est rectangle.
- 3) Soit un point M milieu du segment $[AC]$ et D le symétrique de B par rapport à M .
 - a- Déterminer les coordonnées du point M et celles de D .
 - b- Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
- 4) Soit P l'image de O par la translation du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Déterminer les coordonnées du point P .
- 5) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC .
 - a- Justifier que les points D et O appartiennent au cercle (C) .
 - b- Démontrer que la droite (OP) est tangente au cercle (C) .
 - c- Trouver une équation de la droite (OP) .

Exercices 8 :

- 1) Tracer une droite (Δ) et un triangle ABC . Construire le symétrique de ce triangle par rapport à (Δ) .
- 2) Tracer deux cercles de centres O et O' sécants en A et B . Démontrer que A et B sont symétriques par rapport à (OO') .

Exercices 9 :

Dessine une droite (Δ) et un segment $[AB]$ n'ayant aucun point commun avec (Δ) .

Soit M le milieu de $[AB]$.

- 1) Construire les images respectives : A' ; B' ; C' de A ; B ; M par la symétrie d'axe (Δ) .
- 2) Démontrer que M' appartient à $(A'B')$.
- 3) Démontrer que $A'M' = BM'$. Que représente le point M' pour le segment $[A'B']$?

Exercices 10:

- 1) Soient : $A(1; 0)$; $B(2; 1)$ deux points du plan

Tracer l'image $A'B'$ de AB par une rotation de centre $\Omega(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ et d'angle $\Theta = \frac{-\pi}{2}$.

- 2) Soit ABC un triangle quelconque.

- a- Faire la Construction.
- b- Construire l'image de ce triangle par une rotation de centre $\Omega(1; 2)$ et d'angle $\Theta = \frac{\pi}{4}$.

Exercices 11:

Soit un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) et O le milieu du segment $[BC]$.

- 1) Construire le triangle ABC et marquer le point O.
- 2) Déterminer l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle $\Theta = \frac{\pi}{3}$.

Géométrie Dans

Evaluation diagnostique

Activités

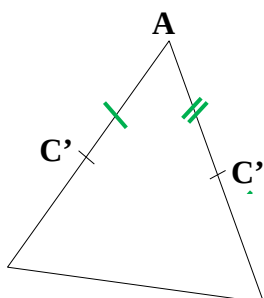
Trouve les bonnes réponses pour chacune des affirmations suivantes :

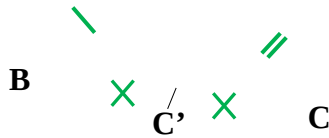
Activité 1 :

Dans un triangle :

Le point G est le centre de gravité du triangle ABC ci-dessous lorsque :

- a- $GA = GB = GC$.
- b- $G \in [BB']$ et $GB = \frac{2}{3}GB'$.
- c- $G \in [AA']$ et $2GA = 3GA'$.
- d- G est le milieu de $[C'B']$





Activité 2

Trouve les bonnes réponses pour chacune des affirmations suivantes :

Dans le triangle précédent, on a :

- a- $(C'A') \parallel (CA)$;
- b- $AB = 2A'B'$;
- c- $C'B'A'B$ est un parallélogramme ;
- d- Les aires des triangles ABA' et $AA'C$ sont égales

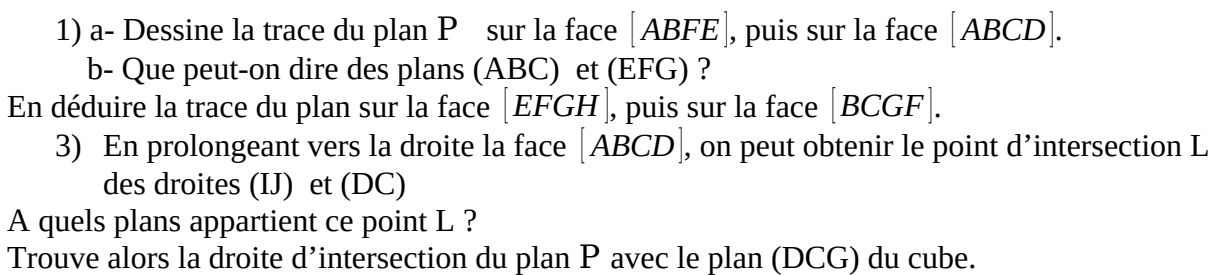
Activité 3 : Situation de Thalès

Trouve les bonnes réponses pour chacune des affirmations suivantes :

- a- D_1 et D_2 sont deux droites parallèles et toutes deux sécantes à deux droites se coupant en O.
- b- ABC est triangle et une droite D coupe $[AB]$ en E et $[AC]$ en F.
- c- MNP est un triangle, K un point de (MN) et la parallèle à (MP) passant par K coupe ON en L

Situation - Problème

Le cube ci-dessous de côté 10 carreaux est coupé par le plan P passant par les points I ; J et K des arêtes tel que :
 $IC = 5$; $BJ = 3$ et $EK = 4$



Sommaire

1- Présentation d'un solide dans l'espace.....	167
2- Points et droite dans le plan.....	170
3- Figures géométriques dans l'espace.....	173

I- Présentation d'un solide dans le plan

1) La perspective cavalière :

Définition :

On appelle perspective cavalière, toute représentation d'une figure géométrique dans l'espace dont :

- Les **faces frontales** sont perpendiculaires au regard.
- Les droites perpendiculaires aux faces frontales s'appellent les **fuyantes**.
- L'angle que fait toute fuyante avec l'horizon, noté α , s'appelle **l'angle de fuite**.
- Le rapport entre la dimension sur les fuyantes, noté k , s'appelle le **coefficient de fuite**.

Règle :

N° 1 : les arêtes vues sont représentées en trait plein et les arêtes cachées en pointillés.

N° 2 : Les faces frontales sont présentées en vraie grandeur (sans changer leurs formes).

N° 3 : le parallélisme de deux droites est conservé sur la représentation en perspective cavalière.

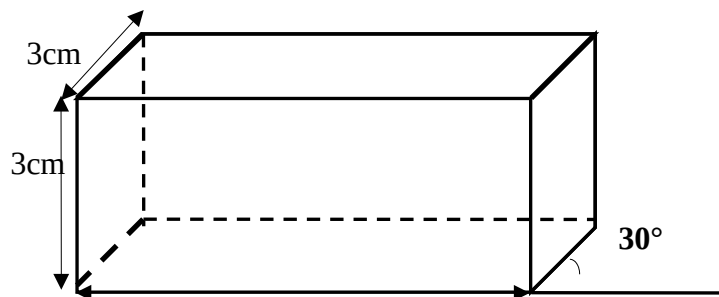
N° 4 : des points alignés sont représentés par des points alignés (ou un seul point).

N° 5 : le rapport des longueurs d'un même plan de fuite est conservé, en particulier le milieu d'un segment.

Remarque : sur les faces fuyantes, ni les angles, ni les longueurs ne sont conservés.

Activité :

Utilise les règles ci-dessus pour représenter en perspective cavalière, un parallélépipède rectangle de dimension : 3cm x 3cm x 3cm avec $\alpha = 30^\circ$ et $k = 0,5$.



$$6 \times k = 6 \times 0,5 = 3\text{cm}$$

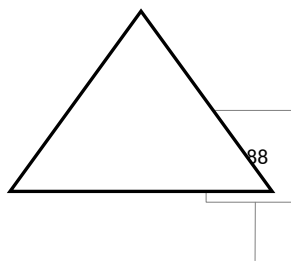
NB : les frontales sont représentés en trait foncés.

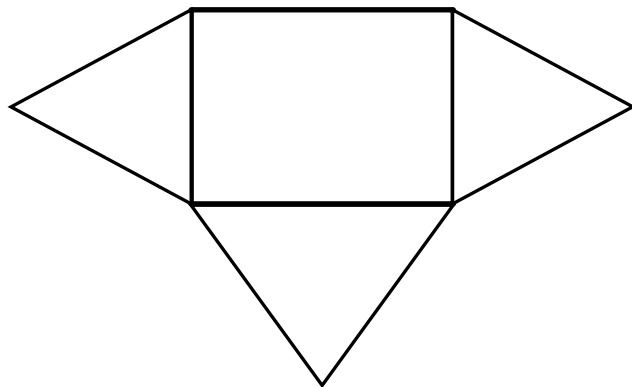
Les fuyants sont représentés en trait claire.

1- Le patron :

Définition :

Le patron d'un solide, constitué de deux faces, est une représentation plane des faces de ce solide en vraie grandeur.

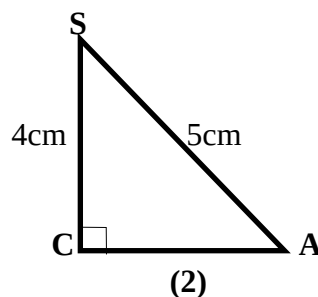
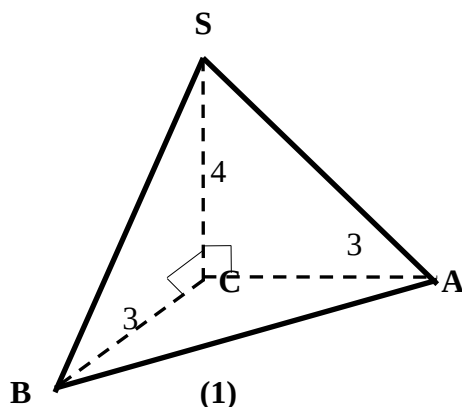




Remarque : pour réaliser le patron d'un solide, on découpe certaines **arêtes** pour déployer le patron dans un plan ; un solide peut être représenté par plusieurs patrons différents ; certains solides comme la sphère n'ont pas de patron.

Exemple :

On a représenté un tétraèdre ABCS en perspective cavalière.
 $SB = SA = 5\text{cm}$; $SC = AB = 4\text{cm}$ et $CB = CA = 3\text{cm}$ (1)



Recopie et complète, à la règle et au compas, le patron de cette pyramide en respectant les dimensions affichées.

On commencera par tracer le triangle SAC puis le segment $[CB]$ comme indiqué en (2)

Solution

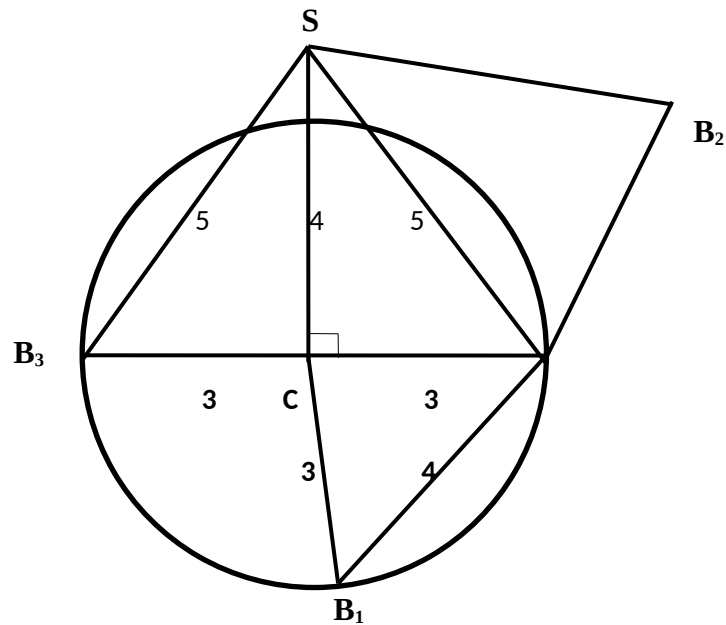
Règle :

N° 1 : on trace un premier cercle de centre A et de rayon 4.

N° 2 : on trace un deuxième cercle de centre C et de rayon 3.

N° 3 : on trace un troisième cercle de centre S et de rayon 5.

N° 4 : les intersections des cercles déterminent les points manquants du patron.



NB : les points manquants étaient : B_1 ; B_2 ; B_3

II- Points, droites et plan

1) Les règles d'indice :

a- Définition

Des points sont dits **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan.

b- Propriétés

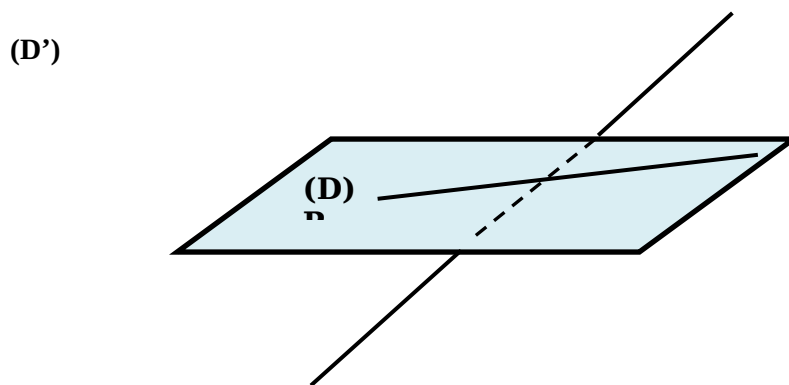
- Une seule droite passe par deux points **distincts** de l'espace.
La droite qui passe par deux points est notée : « **droite (AB)** ».
- Un seul plan passe par trois points non alignés de l'espace.
- Le plan qui passe par trois points **non alignés** A, B et C est noté : « **plan (ABC)** ».
- Deux points d'un plan déterminent une droite qui est **contenue** dans ce plan.

2) Position relative de deux droites distinctes

a- Définition

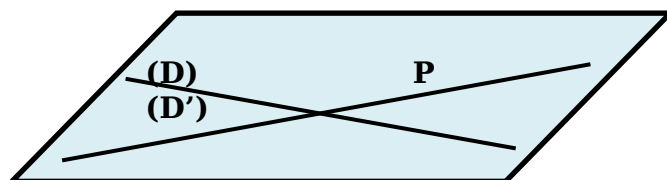
Deux droites contenues dans un même plan sont dites **coplanaires**.

S'il n'existe aucun plan contenant deux droites, elles sont dites **non coplanaires**.



b- Propriétés :

- Deux droites sécantes sont coplanaires



- Deux droites parallèles sont coplanaires





- Deux droites sont strictement parallèles si elles sont coplanaires et si elles n'ont aucun point commun.

Remarque : deux droites confondues sont dites parallèles au sens large.

3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

a- Définition

- Une droite et un plan qui n'ont qu'un seul point commun sont dits **sécants**.
- Une droite et un plan qui n'ont aucun point commun sont dits **parallèles**.
- Si deux points distincts d'une droite sont dans un plan, la droite qui les joint est contenue dans ce plan.

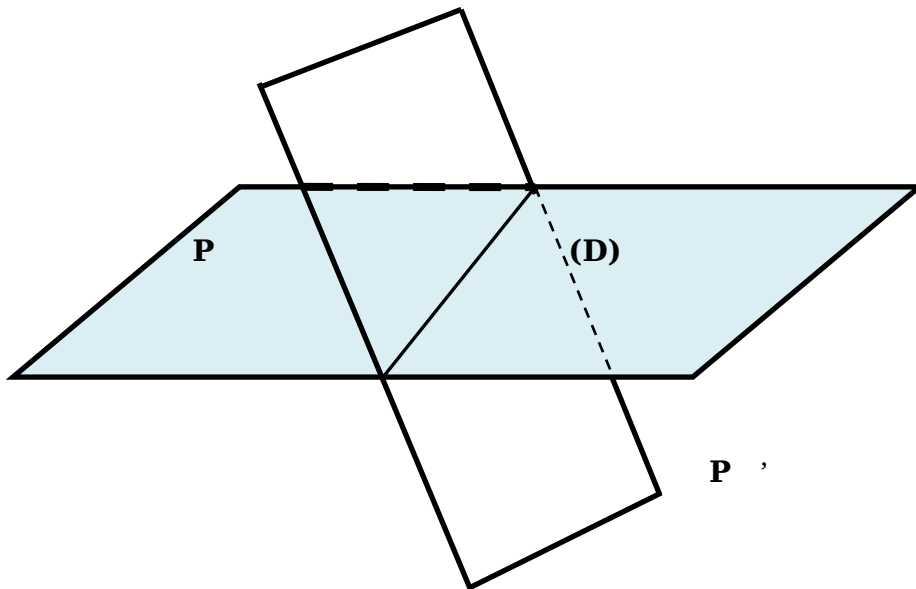
b- Propriété

Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan.

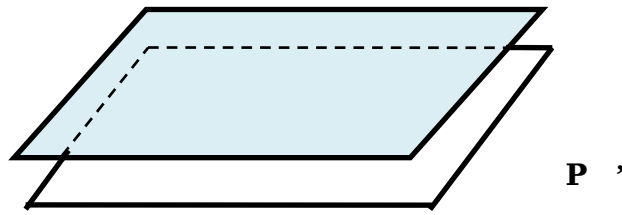
4) Position relative de deux plans distincts :

Propriétés :

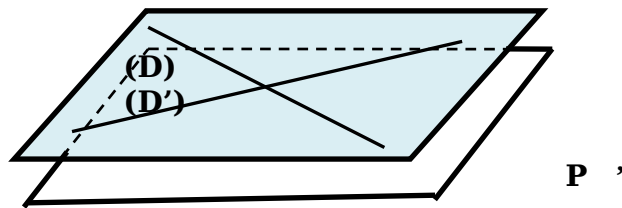
- Deux plans sécants ont pour intersection une droite.



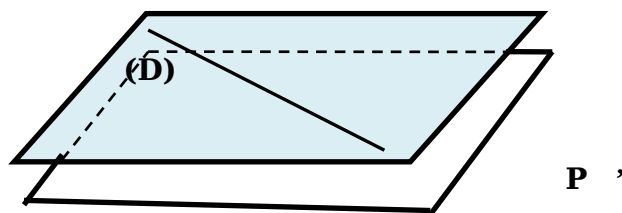
- Deux plans sans point commun sont parallèles.



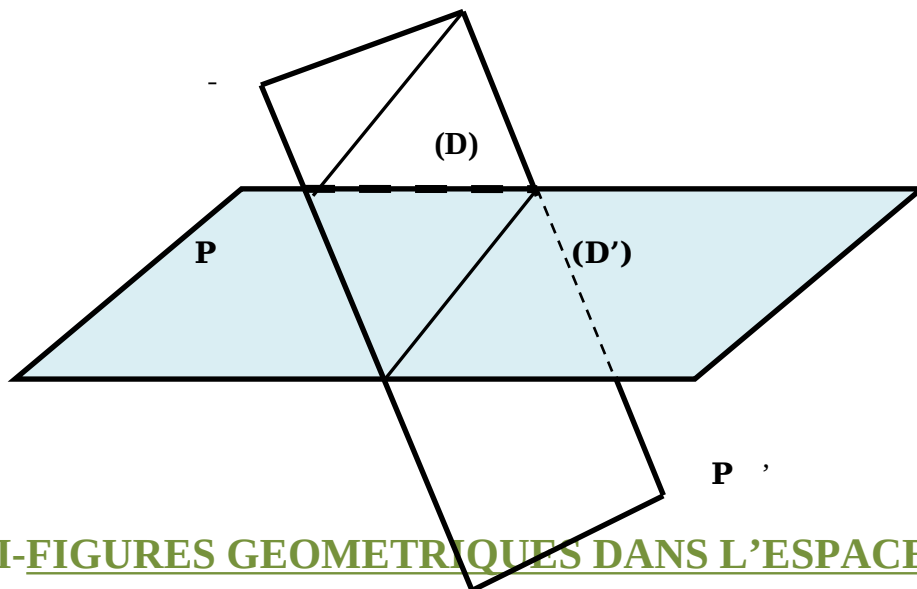
- Si deux droites sécantes sont parallèles à un plan, le plan qu'elles déterminent est parallèle à l'autre plan.



- Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre plan.

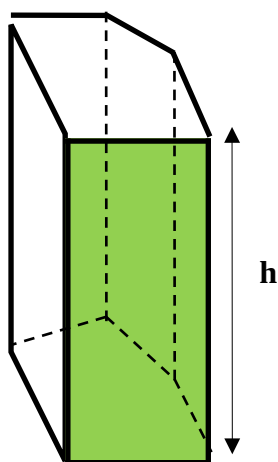


- Si une droite est parallèle à un plan, tout plan contenant cette droite et sécant à ce plan, coupe celui-ci suivant une droite parallèle.



III-FIGURES GEOMETRIQUES DANS L'ESPACE

1) Prisme droit :

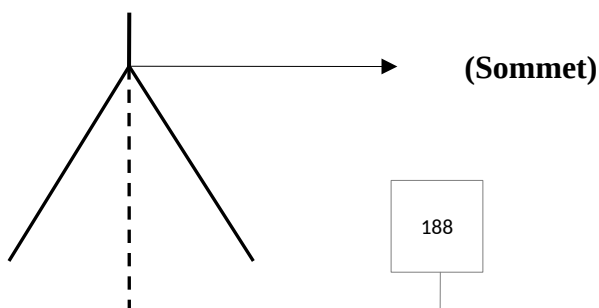


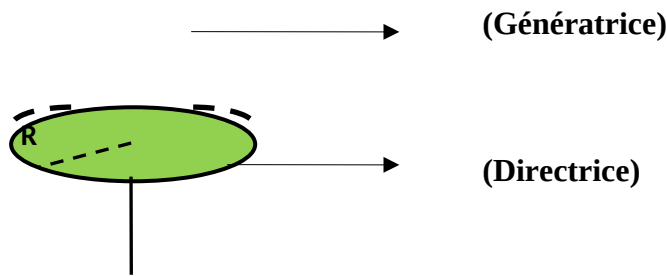
Prisme : polyèdre constitué par deux bases polygonales superposables situées dans deux plans parallèles et par des parallélogrammes (surface latérale) « joignant » les bases. On appelle aussi *prisme* le solide intérieur à cette surface.

La *hauteur* d'un prisme est la distance entre les plans des deux bases. Un prisme *tronqué* est la partie d'un prisme comprise entre l'une de ses bases et la section formée par un plan non parallèle à la base, mais coupant toutes les arêtes latérales, comme sur la figure. On obtient le volume V d'un prisme en multipliant l'aire B de la base par la hauteur h , soit $V = Bh$. Si a , b et c sont les longueurs des trois arêtes d'un parallélépipède rectangle qui se coupent en un sommet (la longueur, la largeur et la hauteur d'un pavé), le volume est donné par la formule : $V = abc$. En particulier, si a est la longueur de chacune des douze arêtes d'un cube, le volume du cube est $V = a^3$, et l'aire totale S des faces du cube est $S = 6a^2$.

Volume = aire de la base x hauteur $\Leftrightarrow V = Bh$

2) **Cône** :





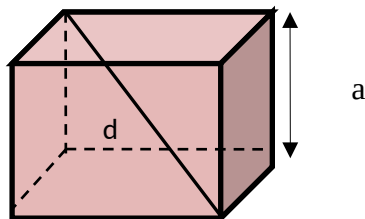
Cône : surface engendrée par le déplacement d'une droite, dont un point S est fixe, et qui s'appuie sur une courbe fermée située dans un plan ne contenant pas le point fixe S.

La droite est la génératrice, le point fixe S est le sommet et la courbe fermée est la directrice du cône (appelée aussi base). La génératrice étant de longueur infinie, elle engendre deux nappes infinies situées de part et d'autre du sommet. Si la directrice du cône est un cercle, le cône est un « cône à base circulaire ».

Les cônes circulaires obliques ont un axe qui n'est pas perpendiculaire au plan de la base. La surface appelée communément cône est en fait un cône droit à base circulaire, c'est-à-dire tel que le sommet S est sur la perpendiculaire à la base passant par le centre du cercle, droite appelée l'axe du cône. Il est aussi appelé cône de révolution, car il peut être engendré par la rotation d'une droite d'un plan autour d'un axe du même plan, la droite et l'axe se coupant en un point qui est le sommet du cône

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \pi \times (\text{rayon})^2 \times (\text{hauteur}) \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

3) Cube :



Cube : polyèdre régulier à six faces, chaque face étant un carré.

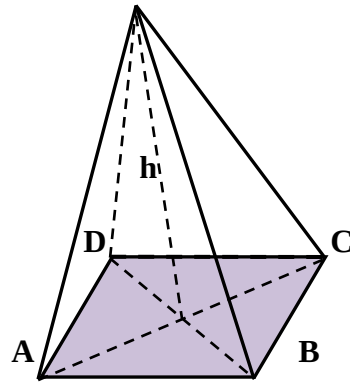
Si a est la longueur de l'une des 12 arêtes, l'aire totale de la surface du cube est $6a^2$ et le volume est a^3 . Le cube possède un centre de symétrie, 3 axes de symétrie et 5 plans de symétrie.

$$\text{Volume} = (\text{longueur des arêtes})^3 \Leftrightarrow V = a^3 \text{ et } d = a\sqrt{3}$$

4) Pyramide et tétraèdre :

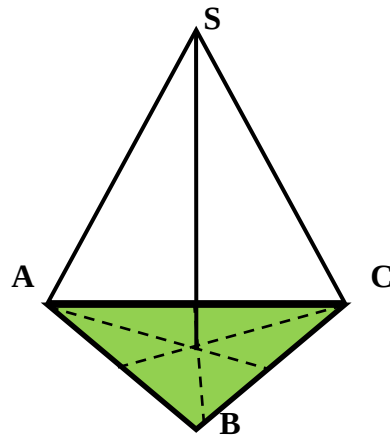
a- Pyramide régulière à base carrée (autres faces triangles isocèles)

S



(Fig 1)

b- Pyramide régulière à base triangulaire ou tétraèdre
(autres faces triangles équilatéraux)



(Fig 2)

Pyramide : polyèdre formé d'un polygone plan et de tous les triangles ayant pour sommet un même point extérieur au plan (sommet de la pyramide) et un côté commun avec les côtés du polygone. On appelle aussi pyramide le solide limité par ce polyèdre.

Le polygone est la base de la pyramide, et la pointe en est le sommet. La hauteur d'une pyramide est la distance du sommet au plan de la base.

Le nom d'une pyramide dépend de la forme de sa base. Par exemple, une pyramide carrée a une base carrée (**voir figure 1**) et une pyramide triangulaire (**voir figure 2**) est également appelée **tétraèdre**. Elle est constituée de quatre triangles, chacun d'eux pouvant être à son tour considéré comme la base.

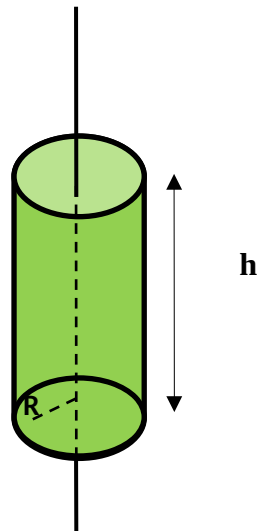
Une pyramide régulière a pour base un polygone régulier et un sommet situé sur la perpendiculaire à la base au centre du polygone. L'apothème d'une pyramide régulière est la distance du sommet à tout côté de la base.

L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires des faces latérales. L'aire latérale d'une pyramide régulière est égale à $\frac{ap}{2}$, où **a** est la longueur de l'apothème et **p** le périmètre de la

base. Le volume d'une pyramide quelconque est $\frac{hk}{3}$, où **h** est la hauteur de la pyramide et **K** l'aire de la base. Ainsi, le volume d'une pyramide est égal à un tiers du volume d'un prisme de même base et de même hauteur.

$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times (\text{hauteur}) \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} k h$

5) cylindre :



Cylindre : surface (appelée aussi surface cylindrique) engendrée par une droite (appelée génératrice) qui se déplace en gardant une même direction et en s'appuyant sur une courbe (appelée directrice).

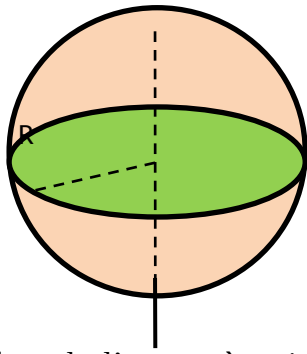
On appelle aussi cylindre le solide limité par cette surface (appelée alors surface latérale) et par deux plans parallèles définissant, par leurs intersections avec la surface, deux bases. La directrice peut être une courbe quelconque. Si c'est une ellipse ou un cercle, le cylindre est dit *elliptique* ou *circulaire*. Le cylindre est dit *droit* si la génératrice est perpendiculaire à la directrice ; dans le cas contraire, il est dit *oblique*. Dans un cylindre circulaire droit délimité par deux plans parallèles, la surface latérale a pour aire **2prh** où **r** est le rayon des cercles constituant les bases et **h** la distance entre celles-ci. L'aire totale du cylindre (bases incluses) est donc **2pr (r + h)**. Le volume de ce cylindre est **pr²h**. De façon plus générale, le volume d'un cylindre ayant pour directrice une courbe fermée délimitant une surface d'aire **B** et dont les deux plans parallèles sont séparés par une distance **h** a un volume égal à **Bh**. (Voir figure).

Aire latérale = 2π (rayon)x(hauteur) $\Leftrightarrow A = 2\pi Rh$
--

Volume = π (rayon)² (hauteur) $\Leftrightarrow V = \pi R^2h$

6) Sphère :





Sphère : surface de l'espace à trois dimensions dont chaque point est à égale distance (appelée rayon) d'un point donné (appelé centre) ; sphère est également le nom donné au solide délimité par cette surface.

Une sphère présente le même aspect quel que soit l'angle d'observation. Une sphère peut être engendrée par la rotation dans l'espace d'un demi-cercle ou d'un cercle autour d'un de ses diamètres. Si r est le rayon de la sphère, son volume est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$ et sa surface est égale à $4\pi r^2$.

La sphère a de nombreuses propriétés intéressantes. C'est aussi une figure qui intervient souvent dans la nature et dans l'Univers. C'est en effet la forme d'équilibre d'une substance fluide (bulles de savon, gouttelettes d'eau) soumise à des forces internes, ou de surfaces homogènes et isotropes (égales dans toutes directions). C'est, pour la même raison (à l'aplatissement près), la forme de la Terre, des planètes ou des étoiles (Soleil, par exemple). Sur la sphère, on peut définir comme dans le plan des triangles (dits sphériques), ce qui permet de développer toute une branche particulière de la trigonométrie, très utilisée en géodésie et en navigation.

• Aire = $4\pi(\text{rayon})^2 \Leftrightarrow A = 4\pi R^2$
--

• Volume = $\frac{4}{3}\pi(\text{rayon})^3 \Leftrightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3$
--

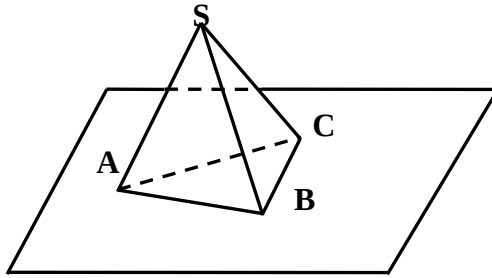
EXERCICES

Exercices 1 :

Dessiner en perspective cavalière, à la règle et au compas, un cube ABCDEFGH de côté 5 cm, d'angle de fuite 30° et de coefficient de fuite 0,5.

Exercices 2 :

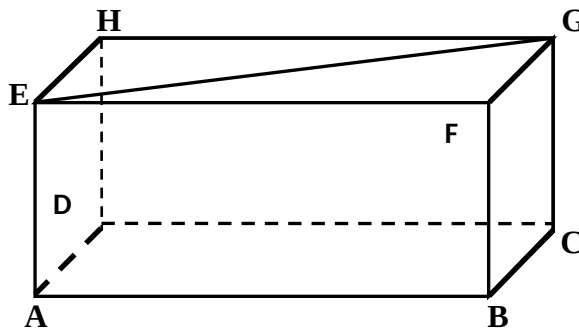
Soit ABCS une pyramide avec I un point du segment $[SA]$ distincts de A et S. Soit J un point du segment $[SB]$ distincts de B et S.



Tracer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC) .

Exercices 3 :

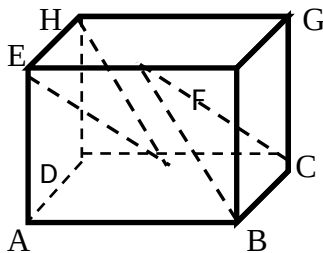
Soit ABCDEFGH un parallélogramme rectangle. Soit I le milieu du segment $[AD]$.



Déterminer l'intersection des plans (EDG) et (HGI) .

Exercices 4 :

Soit ABCDEFGH un cube, K milieu du segment $[DC]$. Soit I le milieu du segment $[EF]$.



Démontrer que les plans (EHK) et (BCI) sont parallèles.

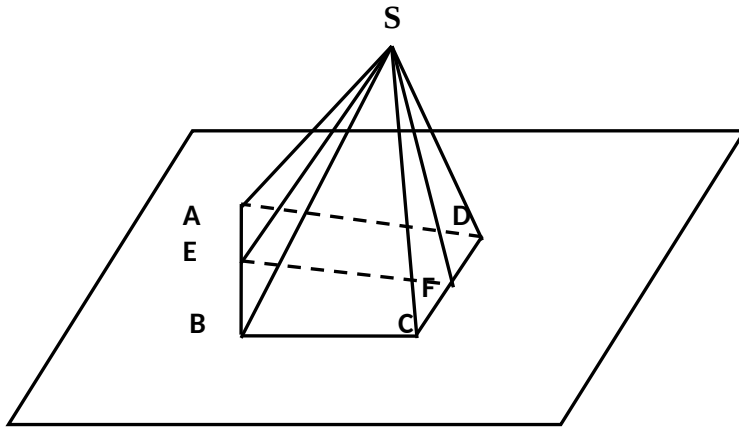
Exercices 5 :

Soit $ABCS$ une pyramide de sommet S .

I et J sont des points des faces SAB et SCD qui n'appartiennent pas aux segments des faces.

La droite (SI) coupe (AB) en F .

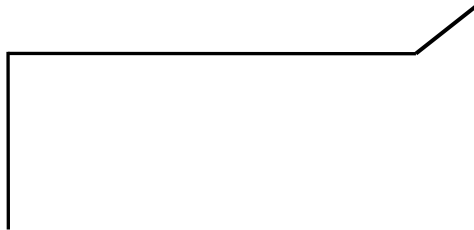
La droite (IJ) coupe (CD) en F .



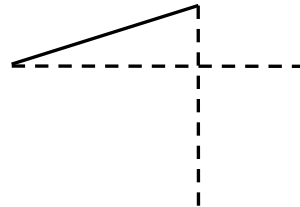
- 1) Les droites (IJ) et (EF) sont-elles sécantes ?
- 2) Les droites (IJ) et (BC) sont-elles sécantes ?

Exercices 6 :

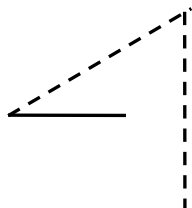
Reproduire et compléter, quand cela est possible, les dessins suivants pour obtenir une perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle.



(fig1)



(fig2)



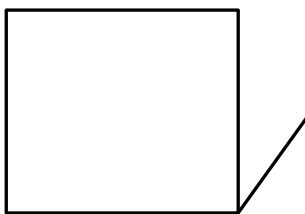
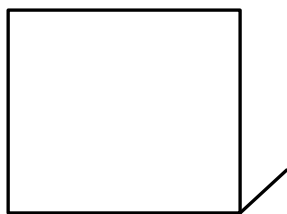
(fig3)



(fig4)

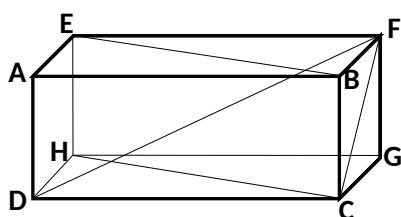
Exercices 7:

Reproduire et compléter, quand cela est possible, les dessins suivants pour obtenir une perspective cavalière d'un cube.



Exercice 8:

Un parallélépipède rectangle est représenté en perspective cavalière avec pour face frontale le rectangle $ABCD$. Quelques diagonales ont été tracées. Indiquer les segments susceptibles d'être en pointillés.



Exercice 9:

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On considère les points M et N respectivement sur les segments $[AB]$ et $[BC]$. Soit I et J deux points situés respectivement sur les segments $[SM]$ et $[SN]$. Reproduire ci-dessous puis étudier l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC) .

