MATH MAX



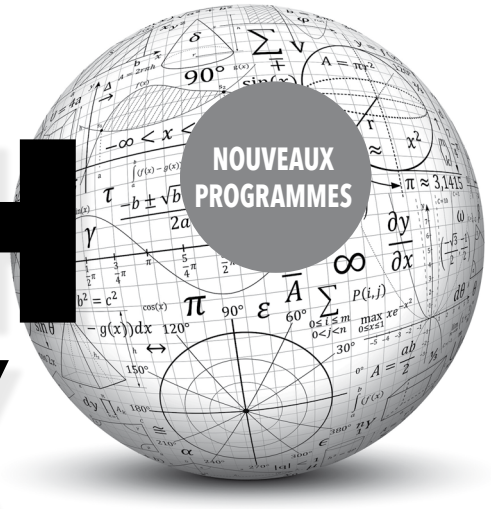
2de

Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

- **Le cours complet** avec des exemples et des conseils
- **Des centaines d'exercices et devoirs, tous corrigés** en détail
- Des cahiers transversaux de **logique** et d'**algorithmique**
- Des extras pour réviser ou **anticiper sur les années à venir**
- Une approche **testée et validée auprès des élèves**

ellipses

MATH MAX



Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

2de

Sébastien Krief-Détraz

Professeur agrégé de mathématiques
au lycée international Georges Duby d'Aix-en-Provence

ellipses

À mes parents

Pour mes élèves

ISBN 9782340-043978
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Vous avez entre les mains un ouvrage entièrement consacré aux mathématiques. Un de plus, direz-vous. Oui et non.

Pour commencer, c'est sa deuxième édition, enrichie, améliorée et conforme aux nouveaux programmes comme il se doit.

Bien sûr, il contient tout le cours, détaillé, avec les démonstrations, les figures, les remarques, les commentaires, les conseils et les exemples d'usage, rectifiés et peaufinés au fil des cours auprès d'élèves de tous horizons.

Puis des exercices, des exercices et des exercices, de difficulté croissante et en lien avec la progression du cours, bien évidemment.

Et tous les corrigés, bien entendu. Et rédigés de plus, pas de simples solutions laconiques.

Ajoutez à cela les devoirs de recherche et de synthèse, vous obtenez déjà un beau traité.

Insérez des cahiers d'algorithmique et de logique, vous aurez un esprit bien construit.

Agrémentez maintenant de quelques exercices en anglais, peu difficiles, vous avez enrichi votre langage.

Complétez d'une rubrique *Extras* dans laquelle on trouve des révisions, des aides, des compléments allant plus loin ou des problèmes ouverts, et de nouvelles perspectives s'ouvrent à vous.

Agrémentez le tout d'énoncés un peu alambiqués, tirés par les cheveux ou complètement décalés, aux références regroupées dans une bibliographie quelque peu insolite et vous avez là l'ensemble idéal pour apprendre, réviser ou étudier avec plaisir.

Bonne lecture.

Sommaire

Cours & Exercices corrigés **5**

I **Les nombres réels** **7**

II **Expressions algébriques** **21**

III **Géométrie et repérages cartésiens du plan** **29**

IV **Premières fonctions de référence** **47**

V **Arithmétique** **71**

VI **Nouvelles fonctions de référence** **83**

VII **Vecteurs du plan** **99**

VIII **Pourcentages & Évolutions** **127**

IX **Généralités sur les fonctions** **137**

X **Inéquations & Tableaux de signes** **165**

XI **Probabilités** **181**

XII **Droites du plan** **199**

XIII **Statistiques descriptives** **223**

XIV **Échantillonnage** **241**

Devoirs corrigés **249**

1 **Le petit papier plat** **251**

2 **Quelles moyennes ?** **253**

3 **To bee or not to bee** **257**

4 Euler (de rien) 261

5 Hair Force 265

6 Les mains sur la table ! 269

7 Fonctions géométriques 271

8 Suivez les flèches 273

9 Beau et fort 277

10 Île héritée 279

11 Belle autoroute 283

12 Que la Force surhumaine soit avec toi 287

13 Big Ben 291

14 Nicolabilités 295

15 Antoine, Octave & Cléo 299

16 Ménagerie 303

17 Des chiffres et des lettres 305

18 Grande musique et chantillonnage 309

19 Devoir parental 313

Cahiers transversaux 315

α Algo à gogo 317

β En toute logique 339

Extras 351

A Collège Express 353

B Les bons comptes 357

C La racine, c'est carré 361

D Équerre et math 363

E Einstein vaut mieux que deux tu l'auras 367

Annexes 369

Table des matières 381

COURS &
EXERCICES CORRIGÉS

Chapitre I

Les nombres réels

Sommaire

1 Puissances entières, racine carrée 8
2 Ensembles de nombres 9
2.1 Représentation des nombres sur une droite 9
2.2 Différents types de nombres 10
2.3 Intervalles 11
2.4 Réunion et intersection d'ensembles 12
3 Valeur absolue 14
Corrigé des exercices 16

La notion de nombre vous semble aller de soit mais elle n'est en fait pas si évidente : le cas des nombres irrationnels, ceux qui ne sont pas des fractions, en est un exemple. Pourtant déjà pressentis il y a 4 000 ans par les babyloniens puis les égyptiens, la découverte de l'existence des nombres irrationnels a provoqué une réelle crise chez les mathématicien grecs. Citons Procus, historien et philosophe du Ve s. : « *On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret ; ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballottés par les vagues.* » Il faudra alors attendre les mathématiques indiennes puis arabes au tournant du premier millénaire pour que ces irrationnels acquièrent enfin le statut de nombres. Nous allons voir lequel.

Commençons donc l'année par rappeler quelques définitions et notions de base du calcul tout en précisant davantage les objets de cette étude que sont les nombres. Nous apprendrons à les représenter et définirons les différents types de nombres que nous pouvons rencontrer. Nous introduirons la notion d'intervalle pour affiner le concept d'encadrement et celle de valeur absolue qui est en lien avec l'idée de distance.

En préambule, voici quelques notations que nous utiliserons avec parcimonie.
Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » tandis que le symbole $\exists$ signifie « il existe », et lui adjoindre un « ! », rajoute « un unique ». Deux exemples suivent.

◦ $\forall x,\ \exists y$ tq. $y \leqslant x$ signifie « Pour tout x, il existe un y tel que $y \leqslant x$ » : vrai.
◦ $\exists! z$ tq. $\forall t,\ z > t$ signifie « Il existe un unique z tel que, pour tout t, $z > t$ » : faux.
Pour de bien plus amples précisions, allez donc lire *En toute logique* en page 339.

1 Puissances entières, racine carrée

Voici de quoi se rafraîchir la mémoire.

Définition 1 *Soit x un nombre réel et n un entier naturel non nul (cf. § 2). On définit les puissances suivantes :* $x^n = \underbrace{x \times x \times ... \times x}_{n\ fois}$
et pour $x \neq 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $x^0 = 1$.

Vous avez certainement remarqué que l'on a pas défini la puissance 0 de 0. En effet, on hésite entre 0 et 1 et l'on ne sait se décider.

Exemples : $2^3 = 8$, $(-6)^2 = 36$, $(-5)^3 = -125$, $(-1)^{19} = -1$, $2^{-4} = \frac{1}{16}$, $-(7)^{-2} = -\frac{1}{49}$.

Propriété 1 *Pour a et b deux nombres réels non nuls, m et n deux entiers relatifs (cf. § 2), on a :*
$a^n.b^n = (ab)^n$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $a^m.a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exercice 1 Effectuer, sans calculatrice, les calculs suivants.

(a) $3 - \frac{5}{7} =$
(b) $19^2 =$
(c) $6 \times \frac{7}{3} - 28 \times \frac{2}{4} =$
(d) $3^2 - 2^3 =$
(e) $37,2^0 =$
(f) $-1^0 =$

Exercice 2 Transformer les écritures suivantes :
$2^3.5^3$, $\frac{4^5}{8^5}$, $2^4.2^3$, $\frac{6^2}{6^3}$, $3^2.3^{-5}$, $(2^3)^{-4}$, $6^4.15^{-2}$.

Exercice 3 Écrire sous la forme $a^p.b^q$ où $p, q \in \mathbb{Z}$ les nombres suivants :
$a^{2^3}a^{-5}$, $\frac{(a^4)^2.b^{-5}}{(ab)^{-1}}$, $(\frac{a}{b^{-1}})^5.\frac{b}{a\times a^3}$.

Exercice 4

1. Déterminer la première puissance de 3 supérieure ou égale à 234, puis celle de 7 supérieure ou égale à 54 689.
2. (∫) Pour a et A strictement positifs, écrire un algorithme donnant la première puissance de a supérieure à A.

Exercice 5 Résoudre $a^2 = 9$, $b^2 = 25$, $c^2 = 0$, $d^2 = 7$, $e^2 = -4$.

Définition & Propriété 2
Pour tout un nombre réel positif ou nul x, il existe un unique réel positif de carré x. Ce réel est appelé la racine carrée de x et il est noté $\sqrt{x}$:
$\forall x \geqslant 0,\ \exists! y = \sqrt{x} \geqslant 0$ *tq.* $(\sqrt{x})^2 = x$.

Dans l'écriture $\sqrt{a}$, le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé *radical* et a est appelé *radicande*.

Exemples : ◦ $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$, ◦ $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$,
◦ $\sqrt{9\times 4}=\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6=3\times 2=\sqrt{9}\,\sqrt{4}$,
◦ $\sqrt{2}\simeq 1,414<2=\sqrt{1}+\sqrt{1}$, ◦ $\sqrt{3}\simeq 1,732<3=\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}$,
◦ $\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$, ◦ $\sqrt{16+9}=\sqrt{5^2}=5<4+3=\sqrt{16}+\sqrt{9}$.

Propriété 3

- *Pour tous a et b positifs, on a* $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ *et si* $b\neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- *Si a et b sont strictement positifs, on a* $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Démonstration : Pour a et b positifs, on a $(\sqrt{ab})^2=ab=(\sqrt{a})^2\,(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2$ donc $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs de même carré. Par unicité de la racine carrée, ils sont égaux.
Nous démontrerons le deuxième point dans un chapitre ultérieur (cf. ex. 10 p. 89). □

Remarque : Il se peut que seul l'un des membres de ces égalités soit défini.
Par exemple, $\sqrt{(-9)\times(-4)}=\sqrt{36}=6$ mais on ne peut définir de racine carrée ni pour -9 ni pour -4. Pour plus de pratique, visiter l'extra de la page 361.

Exercice 6 Exprimer sous la forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :
$\sqrt{45}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{588}$, $\sqrt{1225}$, $\sqrt{6300}$.

Exercice 7 (∫) L'algorithme de Héron d'Alexandrie, mathématicien grec du Ier s., permet de calculer des valeurs approchées de la racine carrée d'un réel positif.
Nous ne pourrons justifier l'efficacité du processus mais rien n'empêche de l'observer.
Voici la démarche : pour approcher la racine d'un réel positif a, on choisit un nombre r strictement positif, disons $u=1$ par exemple, puis on calcule $\dfrac{r+\frac{a}{r}}{2}$ et l'on réitère ce calcul en remplaçant r par la valeur que l'on a obtenue.

1. Appliquer ce processus un certain nombre de fois pour approcher $\sqrt{2}$.
2. Compléter cette fonction Python (cf. *Algo à gogo* en page 317) puis l'exécuter. Très efficace, n'est-ce pas ?

```
1| def Root(a,n) :
2|     r=1
3|     for i in range(1,n+1) :
4|         r= . . .
5|     return . . .
```

EXERCICES

2 Ensembles de nombres

2.1 Représentation des nombres sur une droite

Activité 1 *À la règle et au compas uniquement !*

1. *Placer le milieu d'un segment quelconque préalablement tracé puis découper ce segment en quatre.*

2. *Découper en trois un segment quelconque préalablement tracé.*
3. *Placer les nombres* $4,6$ *puis* $-\frac{3}{7}$ *sur une droite graduée.*
4. *Une unité graphique étant donnée, tracer un segment de longueur* $\sqrt{2}$.
5. *Une unité graphique étant donnée, tracer une courbe de longueur* π. *Essayer ensuite pour un segment.*

Tout nombre nombre positif peut donc être associé à la longueur d'un segment même si pour certains, c'est plus difficile, et l'on sait bien qu'en allant de l'autre « côté », on peut aussi représenter des nombres négatifs. Ainsi, à tout point d'une droite graduée, on peut associer un nombre et à tout nombre, on peut associer un point d'une droite graduée. L'ensemble des *nombres réels* peut être défini comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée, que l'on appelle alors la *droite réelle*.

L'ensemble des nombres réels contient tous les nombres que vous connaissez. Il s'appelle ainsi car il existe aussi d'autres nombres, que l'on qualifie d'imaginaires, ayant une surprenante propriété : leur carré est négatif ! Je sens que cela vous titille mais vous ne les étudierez pas avant quelques années alors patientez.

2.2 Différents types de nombres

Activité 2 *Résoudre les équations et le problème suivants.*

(a)	$3x-6=0$	*(d)*	$7t-3=0$
(b)	$2y+8=0$	*(e)*	*Déterminer le rayon d'un disque d'aire* 4 *?*
(c)	$4z+5=0$		

Vous avez certainement remarqué qu'il y a différents types de nombres. Il y a des nombres que l'on peut matérialiser avec nos doigts (et ceux de nos voisins), il y en a pour lesquels il faut compter à rebrousse-poil, il y a ceux pour qui une virgule est nécessaire, d'autres ont une barre, certains ont un drôle de $\sqrt{\ }$ devant , sans oublier ceux qui nécessitent d'apprendre l'alphabet grec. Mettons-y un peu d'ordre.

Définition 2 *On désigne par :*

- $\mathbb{N}$, *l'ensemble des entiers naturels :* $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 137\ ;\ \ldots$
- $\mathbb{Z}$, *l'ensemble des entiers relatifs :*
  $\ldots\ ;\ -93\ ;\ \ldots\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 137\ ;\ \ldots$
- $\mathbb{D}$, *l'ensemble des nombres décimaux :*
  $2,7\ ;\ -5,896\ ;\ 3,14\ ;\ -7\ ;\ 1,3333\ ;\ 0\ ;\ \ldots$
- $\mathbb{Q}$, *l'ensemble des nombres rationnels :* $\frac{4}{3}\ ;\ -\frac{19}{23}\ ;\ 0,5\ ;\ -3\ ;\ \ldots$
- $\mathbb{R}$, *l'ensemble des nombres réels :*
  $\sqrt{2}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{5}{91}\ ;\ -2\ ;\ 4-\sqrt{7-\pi}\ ;\ 5\ ;\ 3,14\ ;\ \ldots$

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Nous justifierons certains de ces exemples dans un chapitre d'arithmétique ultérieur (cf. p. 76).

Remarques :

- Les nombres réels qui ne sont pas des rationnels sont appelés *irrationnels*.
- Les rationnels sont les nombres réels qui sont des quotients de deux entiers.

Ne pas confondre $0,3333$ et $\frac{1}{3}$, ce sont deux nombres différents, tout comme π et $3,14159$.

Une calculatrice ne donne qu'une dizaine de chiffres significatifs au maximum, le dernier étant arrondi. On est donc très « loin » de la valeur exacte du nombre calculé. Même si une telle précision peut sembler suffisante, il ne faut pas penser que l'on a une égalité mais simplement une valeur approchée.

Plus généralement, les rationnels sont précisément les nombres dont le développement décimal est *périodique*, ce qui signifie qu'après un certain rang, la suite des décimales se répète à l'infini.

Par exemple, $\frac{5}{3} = 1,6666... = 1,\underline{6}$ $29 = 29,000... = 29,\underline{0}$ $\frac{3}{5} = 0,6\underline{0}$ $\frac{7}{11} = 0,\underline{63}$ $\frac{80}{175} = 0,4\underline{571428}$.

- Les décimaux sont des fractions, des rationnels, dont le dénominateur peut s'écrire comme une puissance de 10. Leur développement décimal est *fini* : il se termine par une suite de 0 (ou bien une suite de 9 mais je ne veux pas en discuter ici).

Rappelons quelques écritures décimales exactes usuelles :

$\frac{1}{5} = 0,2$ $\frac{1}{4} = 0,25$ $\frac{2}{5} = 0,4$ $\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{3}{5} = 0,6$ $\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{4}{5} = 0,8$

Il est parfois utile de les utiliser mais pas si souvent car on sait bien mieux diviser par $\frac{3}{5}$ que par $0,6$.

Exercice 8 Pour chacun des nombres suivants, déterminer le plus petit ensemble de nombre auquel il appartient.

$2 \in$	$-5,32 \in$	$\frac{15}{4} \in$	$\frac{3}{5} \in$
$-5 \in$	$7,3444... \in$	$1-\sqrt{9} \in$	$\frac{\frac{33}{\sqrt{16}}}{\frac{33}{2+3\sqrt{4}}} \in$
$\sqrt{11} \in$	$\pi^2 - 5 \in$	$\frac{13}{7} \in$	

Exercice 9 Retrouver les valeurs usuelles à partir de ces valeurs approchées.

1. Un pain au chocolat coûte $\sqrt{2}$€
2. Cet élève mesure $\frac{1977}{1087}$ m.
3. Mon professeur est né en l'an $44{,}44^2$.
4. Cette île paradisiaque est à 17^3 km.
5. Je dors 33,333 % du temps.
6. Ce carré a une diagonale de 41 cm.

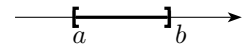
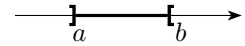
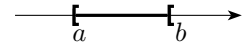
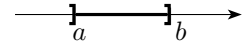
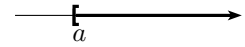
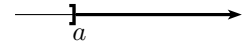
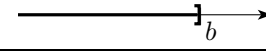
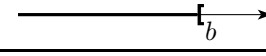
2.3 Intervalles

Activité 3 *Représenter sur la droite réelle l'ensemble A de tous les réels compris entre 3 et 7, l'ensemble B des réels x tels que $-5 \leqslant x < 2$, l'ensemble C des réels positifs ou nuls, l'ensemble D des réels x tels que $x < -4$, l'ensemble E des entiers compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{9}{2}$ et l'ensemble F des rationnels compris entre $-\sqrt{7}$ et $3+\sqrt{2}$.*

Sur une droite graduée, un intervalle de $\mathbb{R}$ correspond à un segment ou à une demi-droite ou à la droite en entier. Ce sont les parties « sans trou », d'un seul tenant de cette droite. On dit que ce sont les parties *connexes* de $\mathbb{R}$. Il faut être précautionneux aux bornes de l'intervalle : elles peuvent être incluses ou non, elles peuvent aussi être infinies (et dans ce cas, non incluses), notées alors $-\infty$ ou $+\infty$.

EXERCICES

Définition 3 *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.*

L'intervalle noté	*est l'ensemble des réels x tels que*	*Il est représenté sur la droite réelle par*
$[\,a\,;b\,]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]\,a\,;b\,[$	$a < x < b$	
$[\,a\,;b\,[$	$a \leqslant x < b$	
$]\,a\,;b\,]$	$a < x \leqslant b$	
$[\,a\,;+\infty\,[$	$a \leqslant x$	
$]\,a\,;+\infty\,[$	$a < x$	
$]\,-\infty\,;b\,]$	$x \leqslant b$	
$]\,-\infty\,;b\,[$	$x < b$	

L'intervalle $[\,a\,;b\,]$ est dit « fermé », $]\,a\,;b\,[$ est dit « ouvert » et $[\,a\,;b\,[$ est dit « fermé en a, ouvert en b ».

Exemples : $[\,-3\,;7\,] = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leqslant x \leqslant 7\}$, $]\,0\,;34\,] = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leqslant 34\}$,
$]\,-4\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} / -4 < x\}$, $\{x \in \mathbb{R} / x \geqslant -5\} = [\,-5\,;+\infty\,[$,
$\mathbb{R} =]\,-\infty\,;+\infty\,[$.

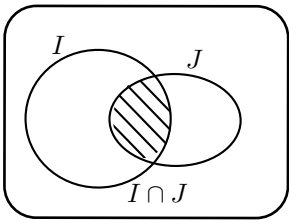
Exercice 10

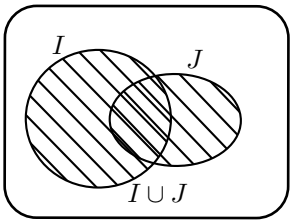
1. Sur une droite graduée, on note $d(\,a\,;\,b\,)$ la distance entre le point d'abscisse a et celui d'abscisse b. Calculer les distances suivantes : $d(\,3\,;\,5\,)$, $d(\,9\,;\,2\,)$, $d(\,2\,;\,9\,)$, $d(\,5\,;\,-4\,)$, $d(\,-1\,;\,-3\,)$, $d(\,-6\,;\,2\,)$, $d(\,-7\,;\,-3\,)$, $d(\,73\,;\,-46\,)$, $d(\,-87\,;\,75\,)$.
2. Exprimer sous forme d'intervalle les ensembles suivants.
   $J_1 = \{x \in \mathbb{R} \;/\; d(\,x\,;\,9\,) \leqslant 2\}$, $J_2 = \{d(\,x\,;\,-4\,) \leqslant 5\}$, $J_3 = \{d(\,x\,;\,1\,) < 7\}$, $J_4 = \{d(\,x\,;\,-2\,) < 3\}$.
3. Représenter les intervalles suivants, préciser leur centre puis les caractériser en termes de distance.
   $I_1 = [\,3\,;11\,]$, $I_2 = [\,8\,;14\,]$, $I_3 = [\,-7\,;-3\,]$, $I_4 =]\,-9\,;3\,[$, $I_5 =]\,-5\,;2\,[$.

On retiendra que pour tous réels a et b, $d(\,a\,;\,b\,) = d(\,b\,;\,a\,)$
et $d(\,a\,;\,b\,) = \max(\,a\,;\,b\,) - \min(\,a\,;\,b\,)$, « le plus grand moins le plus petit ».

2.4 Réunion et intersection d'ensembles

Définition 4 *Soient I et J deux ensembles.*
*L'**intersection** de I et de J, notée $\boldsymbol{I \cap J}$ et lue « inter », est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I **et** à J : $x \in I \cap J \iff x \in I$ **et** $x \in J$.*
*La **réunion** de I et de J, notée $\boldsymbol{I \cup J}$ et lue « union », est l'ensemble des éléments appartenant à I **ou** à J : $x \in I \cup J \iff x \in I$ **ou** $x \in J$.*





Attention, c'est un « ou » inclusif : l'un ou l'autre ou les deux.

Le sens usuel lui est exclusif : soit l'un, soit l'autre mais pas les deux.

Exemples :

- $[-3\,;5]\cap[1\,;8]=[1\,;5]$
- $[-3\,;5]\cup[1\,;8]=[-3\,;8]$
- $]4\,;11]\cap]2\,;9[=]4\,;9[$
- $]4\,;11]\cup]2\,;9[=]2\,;11]$
- $]-\infty\,;4]\cap]-3\,;+\infty[=]-3\,;4]$
- $]-\infty\,;4]\cup]-3\,;+\infty[=\mathbb{R}$
- $]-\infty\,;6]\cap[6\,;21[=\{6\}$
- $]-\infty\,;6]\cup[6\,;21[=]-\infty\,;21[$
- $]5\,;9]\cap[6\,;8[=[6\,;8[$
- $]5\,;9]\cup[6\,;8[=]5\,;9]$
- $]-\infty\,;3]\cap[5\,;7[=\varnothing$
- $]-\infty\,;3]\cup[5\,;7[=]-\infty\,;3]\cup[5\,;7[$

Notation On notera souvent par une étoile (*) le fait d'omettre 0 dans les ensembles de nombres : $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\backslash\{0\}=\{1,2,3,...\}$ et $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\backslash\{0\}=]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Exercice 11 Les nombres indiqués appartiennent-ils aux ensembles proposés ?

	$[-3\,;5[$	$]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-\frac{4}{3}]$	$]-7\,;2]\cup[4\,;9[$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
0						
2						
$11,5$						
5						
-3						
$-4\sqrt{2}$						
$-17,36$						
π						

Exercice 12 Donner un encadrement par des nombres décimaux de l'amplitude précisée.

(a) $\sqrt{2}$, d'amplitude 10^{-2}
(b) π, d'amplitude 10^{-3}
(c) $\frac{5}{3}$, d'amplitude 10^{-5}
(d) $\frac{5}{4}$, d'amplitude 10^{-1}

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et noter l'ensemble solution sous la forme d'un intervalle.

(a) $x-3\geqslant 0$
(b) $x+2\leqslant 0$
(c) $7t>3$
(d) $-4y<3$
(e) $-5t\geqslant -2$
(f) $2x+10\leqslant 0$
(g) $5-x>0$
(h) $-3x+2\geqslant 0$
(i) $7-2y\leqslant 0$
(j) $6t>0$
(k) $-4u\leqslant 0$
(l) $2y+3<1$
(m) $2-3x\geqslant -7$
(n) $5+4y\leqslant 2$
(o) $4x-5>-7-2x$
(p) $-2t+4<-7t-3$
(q) $x+3\leqslant 2x-1$
(r) $5x+9<3x+4$
(s) $3x-5\geqslant 8x+3$
(t) $7x\geqslant x-8$

EXERCICES

3 Valeur absolue

Nous savons bien que pour placer le nombre 3 sur une droite graduée, nous comptons trois unités graphiques à partir de l'origine du côté positif et que pour placer le nombre -5, nous en comptons cinq du côté négatif cette fois. Formalisons cette notion de *distance à zéro*, que l'on nomme *valeur absolue*.

Définition 5 *Pour tout réel a, on définit la valeur absolue de a, notée $|a|$, par*

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Exemples :

◦ $|5| = 5$, ◦ $|-7| = 7$, ◦ $|-2,3| = 2,3$, ◦ $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$, ◦ $\left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$, ◦ $|0| = 0$.

Remarques :

- On a $|-4| = 4 = |4|$, $|8| = 8 = |-8|$,... Ainsi, on a toujours $\boldsymbol{|-a| = |a|}$.
- On a $\sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{(-3)^2} = 3$, $\sqrt{0^2} = 0$,... Ainsi, on a toujours $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$.

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

(a)	$\|x\| = 11$	(d)	$\|z+4\| = 3$	(g)	$2\|x-5\| \leqslant 8$
(b)	$\|y\| = -3$	(e)	$\|x\| \leqslant 7$		
(c)	$\|x-2\| = 5$	(f)	$\|7-y\| < 10$	(h)	$3\|4-2x\| < 6$

On a vu à l'exercice 10 que si nous voulons déterminer la distance entre 61 et 48, il suffit de calculer $61-48$. Pour déterminer la distance, entre 13 et 27, nous calculons $27-13$ et non $13-27$. En effet, la distance entre deux nombres se doit d'être positive. Pour déterminer la distance entre deux réels a et b, il faut donc calculer $a-b$ ou $b-a$ suivant le signe de cette différence. Mais quelle est donc la notion qui nous permet de nous affranchir du signe ? La valeur absolue, pardi !

Propriété 4
La distance entre deux réels a et b est la valeur absolue de leur différence :

$$d(a\,;b) = |b-a| = |a-b|\,.$$

Exemples :

◦ $d(-8\,;0) = |-8-0| = 8$ et l'on retrouve la notion de *distance à zéro* de la valeur absolue,

◦ $d(5\,;12) = |5-12| = |-7| = 7$,

◦ $d(4\,;-3) = |4-(-3)| = |4+3| = 7$,

◦ $d(-13\,;-6) = |-13-(-6)| = |13+6| = 7$,

◦ $d\left(1\,;\sqrt{2}\right) = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$.

Étudions à présent l'équation $|x-5| = 3$. Un tel réel x est donc à distance trois du nombre 5. Ce ne peut donc qu'être que 2 ou 8. De même, $|x-4| = 6$ correspond à un réel x à distance six du nombre 4 : c'est donc -2 ou 10.

En y regardant de plus près, on se rend compte que l'inéquation $|x-5| \leqslant 3$ correspond alors aux réels à distance inférieure ou égale à trois du nombre 5. Ce sont donc les réels compris entre 2 et 8. De même, $|x-4| < 6$ correspond aux réels à

distance strictement inférieure à six du nombre 4. Ce sont donc les réels strictement compris entre -2 et 10.

Réciproquement, l'ensemble des réels compris entre 4 et 10 sont ceux qui sont répartis autour du nombre $\frac{4+10}{2} = 7$ à une distance inférieure ou égale à trois. Ils vérifient donc l'inéquation $|x-7| \leqslant 3$.
De même, l'ensemble des réels strictement compris entre -5 et 3 sont ceux qui sont répartis autour du nombre $\frac{-5+3}{2} = -1$ à une distance inférieure ou égale à quatre. Ils vérifient donc l'inéquation $|x+1| < 4$.

Propriété 5 *Soient a un réel et r un réel positif.*
On a $x \in [\,a-r\,;a+r\,] \iff |x-a| \leqslant r \iff d(\,x\,;\,a\,) \leqslant r.$

Démonstration : On a :
$x \in [\,a-r\,;a+r\,] \iff a-r \leqslant x \leqslant a+r \overset{-a}{\iff} -r \leqslant x-a \leqslant r \iff |x-a| \leqslant r.$ □

Exercice 15 Où il sera certainement utile de représenter les ensembles sur une droite graduée.

1. Exprimer les ensembles suivants en termes de distance ou de valeur absolue, puis sous forme d'intervalle.

$J_1 = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \lvert x-11\rvert \leqslant 2\}$	$J_3 = \{d(\,x\,;\,3\,) \leqslant 5\}$
$J_2 = \{\lvert x+5\rvert < 6\}$	$J_4 = \{d(\,x\,;\,-4\,) < 6\}$

2. Exprimer en termes de valeur absolue puis de distance l'appartenance d'un réel x aux intervalles suivants.

$I_1 = [\,2\,;10\,]$	$I_4 = [\,-10\,;4\,]$
$I_2 =]\,9\,;15\,[$	$I_5 =]\,-2\,;9\,[$
$I_3 = [\,-8\,;-2\,]$	$I_6 =]\,-6\,;3\,[$

EXERCICES

Précipitez-vous donc vers le devoir n° 1 en page 251.

Corrigé des exercices

LES NOMBRES RÉELS

Exercice 1

(a) $3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7}$
(b) $19^2 = 361$
(c) $6 \times \frac{7}{3} - 28 \times \frac{2}{4} = 0$
(d) $3^2 - 2^3 = 1$
(e) $37, 2^0 = 1$
(f) $-1^0 = -1$

Exercice 2 $2^3.5^3 = (2 \times 5)^3$, $\frac{4^5}{8^5} = \frac{4^5}{(2\times4)^5} = \frac{1}{2^5}$,
$2^4.2^3 = 2^{3+4} = 2^7$, $\frac{6^2}{6^3} = 6^{2-3} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$, $3^2.3^{-5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$,
$(2^3)^{-4} = 2^{3\times(-4)} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}}$, $6^4.15^{-2} = \frac{2^4.3^4}{3^2.5^2} = 2^4.3^2.5^{-2}$.

Exercice 3 $a^{2^3}a^{-5} = a^{8-5} = a^3 = a^3b^0$, $\frac{(a^4)^2.b^{-5}}{(ab)^{-1}} = a^{4\times2-(-1)}b^{-5-(-1)} = a^9b^{-4}$,
$(\frac{a}{b^{-1}})^5.\frac{b}{a\times a^3} = a^{5-1-3}b^{-1\times5+1} = a^1b^{-4}$.

Exercice 4

1. On a $3^4 = 81$ et $3^5 = 243$ donc la puissance recherchée est 3^5.
   On a $7^5 = 16807$ et $7^6 = 117649$ donc la puissance recherchée est 7^6.
2. Voici une fonction Python qui fonctionne :

```
1| def puissancemin(a,A) :
2|     n=0
3|     while a**n<A :
4|         n=n+1
5|     print(n)
```

Exercice 5 On a $a^2 = 9 \Leftrightarrow a = -3$ ou $a = 3$, $b^2 = 25 \Leftrightarrow b = -5$ ou $b = 5$,
$c^2 = 0 \Leftrightarrow c = 0$, $d^2 = 7 \Leftrightarrow d = -\sqrt{7}$ ou $d = \sqrt{7}$, $e^2 = -4$ sans solution réelle.

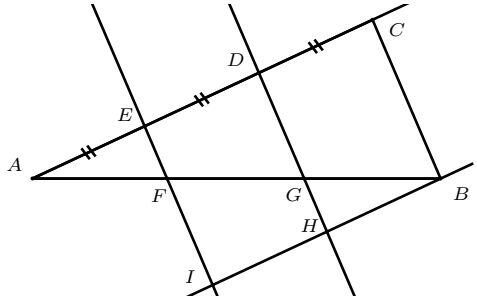
Exercice 6 On a $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$,
$\sqrt{75} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{588} = \sqrt{4 \times 49 \times 3} = 2 \times 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$,
$\sqrt{1225} = \sqrt{25}\sqrt{49} = 5 \times 7 = 35$, $\sqrt{6300} = \sqrt{100}\sqrt{9}\sqrt{7} = 30\sqrt{7}$.

Exercice 7 Les racines d'Héron d'Alexandrie

1. On a $r_0 = 1$, $r_1 = \frac{r_0+\frac{2}{r_0}}{2} = \frac{1+\frac{2}{1}}{2} = \frac{3}{2}$, $r_2 = \frac{r_1+\frac{2}{r_1}}{2} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{3/2}}{2} = \frac{17}{12}$,
   $r_3 = \frac{r_2+\frac{2}{r_2}}{2} = ... = \frac{577}{408}$,...
2. L'algorithme suivant donne $\sqrt{2} \simeq 1,414$ en trois coups !

```
1| def Root(a,n) :
2|     r=1
3|     for i in range(1,n+1) :
4|         r=(r+a/r)/2
5|     return r
```

Activité 1 *À la règle et au compas uniquement !*

1. Pour placer le milieu d'un segment, il suffit de tracer sa médiatrice.
2. 

   Pour découper en trois le segment $[AB]$, il faut réaliser la figure suivante : la demi-droite $[AE)$ est quelconque, la distance $AE = ED = DC$ aussi. On trace alors les parallélogrammes $BCDH$ et $BCEI$, les points F et G répondent au problème. Et tout ceci grâce à monsieur Thalès.
3. Il n'y a aucun problème pour placer $4,6$ sur une droite graduée, pour peu qu'elle le soit au dixième. En revanche, si elle ne l'est pas au septième, il faut utiliser la méthode de la question précédente.
4. La diagonale d'un carré de côté 1 est de longueur $\sqrt{2}$, tout comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1, mais pour tracer l'angle droit, il faudra passer par la médiatrice d'un segment de longueur 2.
5. Un demi-cercle de rayon 1 est de longueur π. Quant à tracer un segment de longueur π, autant résoudre la fameuse *quadrature du cercle*. On peut en revanche tracer un segment de longueur très proche de π.

Activité 2

(a) $3x - 6 = 0 \iff x = 2$
(b) $2y + 8 = 0 \iff y = -4$
(c) $4z + 5 = 0 \iff z = -\frac{5}{4} = -1,25$
(d) $7t - 3 = 0 \iff t = \frac{3}{7}$
(e) $\pi R^2 = 4 \iff R = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

Exercice 8 $2 \in \mathbb{N}$, $-5 \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{11} \in \mathbb{R}$, $-5,32 \in \mathbb{D}$, $7,3444... \in \mathbb{Q}$, $\pi^2 - 5 \in \mathbb{R}$, $\frac{15}{4} \in \mathbb{D}$, $1 - \sqrt{9} = -2 \in \mathbb{Z}$, $\frac{13}{7} \in \mathbb{Q}$, $\frac{3}{5} \in \mathbb{D}$, $\dfrac{\frac{33}{\sqrt{16}}}{\frac{33}{2+3\sqrt{4}}} = 2 \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

1. Un pain au chocolat coûte 1,40 €.
2. Cet élève mesure 1,82 m.
3. Mon professeur est né en l'an 1975.
4. Cette île paradisiaque est à 5 000 km.
5. Je dors un tiers du temps.
6. Ce carré est de côté 29 cm.

CORRIGÉS

Activité 3

$A : [\,3\,;7\,]$, $B : [\,-5\,;2\,[$, $C : [\,0\,;+\infty\,[$, $D :]\,-\infty\,;-4\,[$, $E : \{2;3;4\}$ et $F : \mathbb{Q} \cap \left[\,-\sqrt{7}\,;3+\sqrt{2}\,\right]$.

Exercice 10

1. On a $d(\,3\,;\,5\,) = 5-3 = 2$, $d(\,9\,;\,2\,) = 9-2 = 7$, $d(\,2\,;\,9\,) = 9-2 = 7$,
   $d(\,5\,;\,-4\,) = 5-(-4) = 9$, $d(\,-1\,;\,-3\,) = (-1)-(-3) = 2$,
   $d(\,-6\,;\,2\,) = 2-(-6) = 8$, $d(\,-7\,;\,-3\,) = (-3)-(-7) = 4$,
   $d(\,73\,;\,-46\,) = 73-(-46) = 119$, $d(\,-87\,;\,75\,) = 75-(-87) = 162$.
2. $d(\,x\,;\,9\,) \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x-9 \leqslant 2 \iff 9-2 \leqslant x \leqslant 9+2$: $J_1 = [\,7\,;11\,]$.
   $d(\,x\,;\,-4\,) \leqslant 5 \iff -5 \leqslant x-(-4) \leqslant 5 \iff -5+(-4) \leqslant x \leqslant 5-4$: $J_2 = [\,-9\,;1\,]$.
   $d(\,x\,;\,1\,) < 7 \iff -7 < x-1 < 7 \iff 1-7 < x < 7+1$: $J_3 =]\,-6\,;8\,[$.
   $d(\,x\,;\,-2\,) < 3 \iff -3 < x-(-2) < 3 \iff -3+(-2) < x < 3-2$: $J_4 =]\,-5\,;-1\,[$.
3. $x \in I_1 = [\,3\,;11\,] \iff 3 \leqslant x \leqslant 11 \iff 3-\frac{3+11}{2} \leqslant x-7 \leqslant 11-7$
   $\iff -4 \leqslant x-7 \leqslant 4 \iff d(\,x\,;\,7\,) \leqslant 4$.
   $x \in I_2 = [\,8\,;14\,] \iff 8 \leqslant x \leqslant 14 \iff 8-\frac{8+14}{2} \leqslant x-11 \leqslant 14-11$
   $\iff -3 \leqslant x-11 \leqslant 3 \iff d(\,x\,;\,11\,) \leqslant 3$.
   $x \in I_3 \iff -7 \leqslant x \leqslant -3 \iff -7-\frac{-7-3}{2} \leqslant x-(-5) \leqslant -3+5$
   $\iff -2 \leqslant x-(-5) \leqslant 2 \iff d(\,x\,;\,-5\,) \leqslant 2$.
   $x \in I_4 =]\,-9\,;3\,[\iff -9 < x < 3 \iff -9-\frac{3-9}{2} < x-(-3) < 3+3$
   $\iff -6 < x-(-3) < 6 \iff d(\,x\,;\,-3\,) < 6$.
   $x \in I_5 =]\,-5\,;2\,[\iff -5 < x < 2 \iff -5-\frac{2-5}{2} < x-\frac{-3}{2} < 2+\frac{3}{2}$
   $\iff -\frac{7}{2} < x-\frac{-3}{2} < \frac{7}{2} \iff d\left(x\,;\,-\frac{3}{2}\right) < \frac{7}{2}$.

Exercice 11

	$[\,-3\,;5\,[$	$]\,0\,;+\infty\,[$	$]\,-\infty\,;-\frac{4}{3}\,]$	$]\,-7\,;2\,] \cup [\,4\,;9\,[$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
0	o	n	n	o	o	o
2	o	o	n	o	o	o
$11,5$	n	o	n	n	n	o
5	n	o	n	o	o	o
-3	o	n	o	o	o	o
$-4\sqrt{2}$	n	n	o	o	n	n
$-17,36$	n	n	o	n	n	o
π	o	o	n	n	n	n

Exercice 12 (a) $\sqrt{2} \simeq 1,414 \in [\,1,41\,;1,42\,]$ (b) $\pi \simeq 3,1415 \in [\,3,141\,;3,142\,]$
(c) $\frac{5}{3} \simeq 1,666666 \in [\,1,66666\,;1,66667\,]$ (d) $\frac{5}{4} = 1,25 \in [\,1,2\,;1,3\,]$.

Exercice 13

(a) $x-3 \geqslant 0 \iff x-3+3 \geqslant 0+3 \iff x \geqslant 3 \iff x \in [\,3\,;+\infty\,[$

(b) $x+2 \leqslant 0 \iff x+2-2 \leqslant 0-2 \iff x \leqslant -2 \iff x \in]\,-\infty\,;-2\,]$

(c) $7t > 3 \iff \frac{7t}{7} > \frac{3}{7} \iff t > \frac{3}{7} \iff t \in \left]\,\frac{3}{7}\,;+\infty\,\right[$

(d) $-4y < 3 \iff \frac{-4y}{-4} > \frac{3}{-4} \iff y > -\frac{3}{4} \iff y \in \left]\,-\frac{3}{4}\,;+\infty\,\right[$

(e) $-5t \geqslant -2 \iff \frac{-5t}{-5} \leqslant \frac{-2}{-5} \iff t \leqslant \frac{2}{5} \iff t \in \left]-\infty\,;\frac{2}{5}\right]$

(f) $2x+10 \leqslant 0 \iff 2x+10-10 \leqslant 0-10 \iff \frac{2x}{2} \leqslant \frac{-10}{2} \iff x \leqslant -5$
$\iff x \in \left]-\infty\,;-5\right]$

(g) $5-x>0 \iff 5-x+x>0+x \iff x<5 \iff x \in \left]-\infty\,;5\right[$

(h) $-3x+2 \geqslant 0 \iff -3x+2-2 \geqslant 0-2 \iff \frac{-3x}{-3} \leqslant \frac{-2}{-3} \iff x \leqslant \frac{2}{3}$
$\iff x \in \left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right[$

(i) $7-2y \leqslant 0 \iff 7-2y+2y \leqslant 0+2y \iff \frac{2y}{2}=y \geqslant \frac{7}{2} \iff y \in \left[\frac{7}{2}\,;+\infty\right[$

(j) $6t>0 \iff \frac{6t}{6}=t>\frac{0}{6}=0 \iff t \in \left]0\,;+\infty\right[$

(k) $-4u \leqslant 0 \iff \frac{-4u}{-4}=u \geqslant \frac{0}{-4}=0 \iff u \in \left[0\,;+\infty\right[$

(l) $2y+3<1 \iff 2y<1-3=-2 \iff y<\frac{-2}{2}=-1 \iff y \in \left]-\infty\,;-1\right[$

(m) $2-3x \geqslant -7 \iff -3x \geqslant -7-2=-9 \iff x \leqslant \frac{-9}{-3}=3 \iff x \in \left]-\infty\,;3\right]$

(n) $5+4y \leqslant 2 \iff 4y \leqslant 2-5=-3 \iff y \leqslant -\frac{3}{4} \iff y \in \left]-\infty\,;-\frac{3}{4}\right]$

(o) $4x-5>-7-2x \iff 4x+2x>-7+5 \iff \frac{6x}{6}>\frac{-2}{6} \iff x>-\frac{1}{3}$
$\iff x \in \left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

(p) $-2t+4<-7t-3 \iff -2t+7t<-3-4 \iff \frac{5t}{5}<\frac{-7}{5} \iff t<-\frac{7}{5}$
$\iff t \in \left]-\infty\,;-\frac{7}{5}\right[$

(q) $x+3 \leqslant 2x-1 \iff x-2x \leqslant -1-3 \iff -x \leqslant -4 \iff x \geqslant 4$
$\iff x \in [4\,;+\infty[.$

(r) $5x+9<3x+4 \iff 5x-3x<4-9 \iff 2x<-5 \iff x<-\frac{5}{2}$
$\iff x \in \left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right[.$

(s) $3x-5 \geqslant 8x+3 \iff 3x-8x \geqslant 3+5 \iff -5x \geqslant 8 \iff x \leqslant -\frac{8}{5}$
$\iff x \in \left]-\infty\,;-\frac{8}{5}\right].$

(t) $7x \geqslant x-8 \iff 7x-x \geqslant -8 \iff 6x \geqslant -8 \iff x \geqslant -\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$
$\iff x \in \left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[.$

Exercice 14

(a) $|x|=11 \iff x=11$ ou $x=-11$: $\quad \mathcal{S}_{\text{a}}=\{-11;11\}$

(b) $|y|=-3$: impossible car $|y|>0$, $\quad \mathcal{S}_{\text{b}}=\varnothing$

(c) $|x-2|=5 \iff x-2=5$ ou $x-2=-5$
$\iff x=5+2=7$ ou $x=-5+2=-3$: $\quad \mathcal{S}_{\text{c}}=\{-3;7\}$

(d) $|z+4|=3 \iff z+4=3$ ou $z+4=-3$
$\iff z=3-4=-1$ ou $z=-3-4=-7$: $\quad \mathcal{S}_{\text{d}}=\{-7;-1\}$

(e) $|x| \leqslant 7 \iff -7 \leqslant x \leqslant 7$: $\quad \mathcal{S}_{\text{e}}=[-7\,;7]$

(f) $|7-y|<10 \iff -10<7-y<10 \iff -10-7=-17<-y<10-7=3$
$\iff 17>y>-3$: $\mathcal{S}_{\text{f}}=\left]-3\,;17\right[$

(g) $2\,|x-5| \leqslant 8 \iff |x-5| \leqslant \frac{8}{2}=4$
$\iff -4 \leqslant x-5 \leqslant 4 \iff -4+5=1 \leqslant x \leqslant 4+5=9$: $\quad \mathcal{S}_{\text{g}}=[1\,;9]$

(h) $3\,|4-2x|<6 \iff |4-2x|<\frac{6}{3}=2 \iff -2<4-2x<2$
$\iff -2-4=-6<-2x<2-4=-2$
$\iff \frac{-6}{-2}=3>x>\frac{-2}{-2}=1$: $\quad \mathcal{S}_{\text{h}}=\left]1\,;3\right[$

CORRIGÉS

Exercice 15 Où il sera certainement utile de représenter les ensembles sur une droite.

1. $|x-11| \leqslant 2 \iff d(x\,;11) \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x-11 \leqslant 2$
   $\iff -2+11=9 \leqslant x \leqslant 2+11=13 : \quad J_1=[\,9\,;13\,]$
   $|x+5|<6 \iff d(x\,;-5)<6 \iff -6<x+5<6$
   $\iff -6-5=-11<x<6-5=1 : \quad J_2=]\,-11\,;1\,[$
   $d(x\,;3) \leqslant 5 \iff |x-3| \leqslant 5$
   $\iff -5 \leqslant x-3 \leqslant 5 \iff -5+3=-2 \leqslant x \leqslant 5+3=8 : \quad J_3=[\,-2\,;8\,]$
   $d(x\,;-4)<6 \iff |x+4|<6 \iff -6<x+4<6$
   $\iff -6-4=-10<x<6-4=2 : \quad J_4=]\,-10\,;2\,[$
2. $x \in I_1=[\,2\,;10\,] \iff 2 \leqslant x \leqslant 10$
   $\iff 2-\frac{10+2}{2}=-4 \leqslant x-6 \leqslant 10-6 \iff |x-6| \leqslant 4 \iff d(x\,;6) \leqslant 4$
   $x \in I_2=]\,9\,;15\,[\iff 9<x<15 \iff 9-\frac{9+15}{2}=-3<x-12<15-12$
   $\iff |x-12|<3 \iff d(x\,;12)<3$
   $x \in I_3=[\,-8\,;-2\,] \iff -8-\frac{-8-2}{2}=-3 \leqslant x-(-5) \leqslant -2+5=3$
   $\iff |x+5| \leqslant 3 \iff d(x\,;-5) \leqslant 3$
   $x \in I_4=[\,-10\,;4\,] \iff -10-\frac{4-10}{2}=-7 \leqslant x+3 \leqslant 4+3=7$
   $\iff |x+3| \leqslant 7 \iff d(x\,;-3) \leqslant 7$
   $x \in I_5=]\,-2\,;9\,[\iff -2-\frac{9-2}{2}=-\frac{11}{2}<x-\frac{7}{2}<9-\frac{7}{2}=\frac{11}{2}$
   $\iff \left|x-\frac{7}{2}\right|<\frac{11}{2} \iff d\left(x\,;\frac{7}{2}\right)<\frac{11}{2}$
   $x \in I_6=]\,-6\,;3\,[\iff -6-\frac{3-6}{2}=-\frac{9}{2}<x+\frac{3}{2}<3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$
   $\iff \left|x+\frac{3}{2}\right|<\frac{9}{2} \iff d\left(x\,;-\frac{3}{2}\right)<\frac{9}{2}$

Chapitre II

Expressions algébriques

Sommaire

Exercices **21**
Corrigé des exercices 25

Vous avez appris depuis un certain temps déjà à manipuler des nombres que vous ne connaissez pas a priori en les désignant par une lettre, x, y ou α par exemple. Cette pratique, vous vous en êtes rendu compte, est d'une efficacité redoutable pour la résolution de problèmes et la modélisation de phénomènes divers. C'est en effet grâce à l'essor du calcul littéral que les mathématiques ont pu se développer de manière fulgurante et se rendre indispensables dans de très nombreux domaines appliqués. Le calcul littéral tel que nous le pratiquons est l'aboutissement d'une longue élaboration de symbolismes et l'on est bien aise de résoudre aujourd'hui en quelques lignes des équations qui nécessitaient de nombreuses phrases explicatives il y a encore deux siècles.

Ce chapitre est entièrement composé d'exercices qui ne vous seront d'ailleurs pas totalement inconnus mais ne vous y trompez pas, tout ceci est essentiel.

Exercice 1 On donne le programme de calcul suivant : choisir un nombre, le multiplier par 5, ajouter 3 au résultat obtenu puis afficher le résultat.

(a) Calculer le résultat affiché lorsque le nombre de départ est 10.

(b) Quel est le nombre de départ lorsque le résultat affiché est 0 ? Justifier.

(c) Donner l'expression du résultat affiché en fonction du nombre choisi.

Exercice 2 Soient quatre nombres réels a, b, c et d.
Développer les expressions suivantes.

- $c(a+b) =$
- $c(a-b) =$
- $(a+b)(c+d) =$
- $\boldsymbol{(a+b)^2 =}$
- $\boldsymbol{(a-b)^2 =}$
- $\boldsymbol{(a+b)(a-b) =}$

Les trois dernières sont appelées les **identités remarquables**, justement parce qu'elles le sont. Vous devez dorénavant les connaître par cœur, dans un sens comme dans l'autre.

Vous pouvez par exemple les peindre sur le plafond de votre chambre afin de vous en faciliter l'apprentissage.

Exercice 3 J'en suis presque persuadé, vous connaissez l'expression de l'aire un rectangle en fonction de la longueur de ses côtés : $\mathscr{A} = \ell \times L$.

Soient maintenant quatre nombres positifs (puisque ce sont des longueurs) a, b, c et d tels que $a > b$.
Retrouver l'expression du développement des expressions de l'exercice précédent en traçant pour chacune un rectangle de côtés appropriés.

Un peu de pratique nous est maintenant bien nécessaire.

Exercice 4 Développer puis réduire les expressions suivantes.

(a) $u(v+w) =$
(b) $5h(2b-3c) =$
(c) $(r+2)(t-7) =$
(d) $(m+n)^2 =$
(e) $(y-z)^2 =$
(f) $(r+s)(s-r) =$
(g) $-3x(2x-6) =$
(h) $(4x-2)(3-5x) =$
(i) $(3t-2)(2+3t) =$
(j) $(2x-3y)^2 =$
(k) $-3(2b-1)(4-3b) =$
(l) $(z-5y)^2 =$
(m) $-2(3q-5)^2 =$
(n) $5(x-3)^2 - (3x)^2 =$
(o) $(2x+3)^2 - (3x+2)^2 =$
(p) $3(q-5)(3-2q) =$
(q) $-2(5-2y)(3-5y) =$
(r) $(z-1)(z+1)(1-z) =$
(s) $(x-4)(2x+3)(5x+1) =$
(t) $(a+b)^3 =$
(u) $(a+b+c)^2 =$
(v) $(a+b)^4 =$

Exercice 5 Factoriser les expressions suivantes.

(a) $14 - 7y =$
(b) $35 - 30u^2 + 20u^5 =$
(c) $2q^2 - 6q =$

(d) $x^2 - 2x + 1 =$

(e) $u^2 - 9 =$

(f) $16s^2 + 8s + 1 =$

(g) $z^2 - 8z + 16 =$

(h) $9y^2 - 12y + 4 =$

(i) $36 + 60t + 25t^2 =$

(j) $4 - 9w^2 =$

(k) $-16 + 25y^2 =$

(l) $4r^2 - 7 =$

(m) $5b^2 - 9 =$

(n) $4v^2 - 5v^3 =$

(o) $2(q-3) - 7(q-3)q =$

Exercice 6 Simplifier les écritures suivantes.

(a) $\frac{2x+6}{(x+3)(5-x)} =$

(b) $\frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9} =$

(c) $\frac{25x^2-10x+1}{9x^2-16} \cdot \frac{9x^2-24x+16}{5x-1} \cdot \frac{3x+4}{5x+1} =$

(d) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} =$

(e) $\frac{2x+1}{x-4} - \frac{x+4}{2x-1} =$

(f) $\frac{3}{3x+5} + \frac{5}{3x-5} - \frac{2}{9x^2-30x+25} =$

Exercice 7 Pour chaque identité suivante, exprimer chacune des variables en fonction des autres.

(a) $3x + 2y = 5$:

(b) $U = RI$:

(c) $v = \frac{d}{t}$:

(d) $V = \pi r^2 h$:

(e) $4u - 5uv + 3v = 1$:

Exercice 8 Monsieur Fartezdkrié est un grand professeur de mathématiques : il mesure 1,88 mètre. Il affirme que le produit de la somme de sa taille, en centimètres, et de son âge, en années, par la différence des deux égale 29 415. Mais quel âge a-t-il donc ?

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

(a) $\frac{3}{5}x + 2 = 0$

(b) $5 - 2x = 4x - 1$

(c) $4 - 5y = 7y + 1$

(d) $z^2 = 5$

(e) $3(2\beta - 3) = 2(3 + 3\beta)$

(f) $2t - 3 < 0$

(g) $5 - 3u \geqslant 1$

(h) $2 - 3y \leqslant 5y + 1$

(i) $6x - 3 < 4 - 7x$

(j) $-4x + 7 > 3 - 4x$

(k) $3a - 2b + 1 < 7 - 2b + 6a$

(l) $2\alpha + 3 \leqslant 2(1 + \alpha)$

Exercice 10 Somme d'inégalités

1. Soient deux nombres réels $\alpha \in [\,-2\,;6\,]$ et $\beta \in [\,1\,;4\,]$. Justifier ces inégalités :
   (a) $-1 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 10$
   (b) $-24 \leqslant -4\alpha \leqslant 8$
   (c) $-6 \leqslant \alpha - \beta \leqslant 5$
   (d) $-1 \leqslant 2\alpha - 3\beta \leqslant 24$
2. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = x^2 + x + 3$.
   (a) Montrer que si $x \in [\,2\,;5\,]$ alors $f(x) \in [\,-10\,;20\,]$.
   (b) Montrer que si $x \in]\,-3\,;-1\,[$ alors $g(x) \in]\,1\,;11\,[$.

Exercice 11 Les enfants de monsieur Fartezdkrié sont des filles, dont l'une est l'aînée. Combien en a-t-il sachant qu'il affirme que le double du carré du nombre de ses enfants est inférieur au quintuple de ce même nombre ?

De tout ceci, On retiendra entre autres les résultats suivants :

- $ka \pm kb = k(a \pm b)$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$
- Si $a \neq 0$, alors $ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$
- $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$
- $\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$
- Si $k > 0$, alors $a < b \Longrightarrow ka < kb$
- Si $k < 0$, alors $a < b \Longrightarrow ka > kb$
- Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$ et $a - d < b - c$

Allez donc à la page 253 pour faire le devoir n° 2.

Corrigé des exercices

EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

Exercice 1

(a) On obtient $10 \longmapsto 5 \times 10 = 50 \longmapsto 50 + 3 = 53$. Affichage 53.

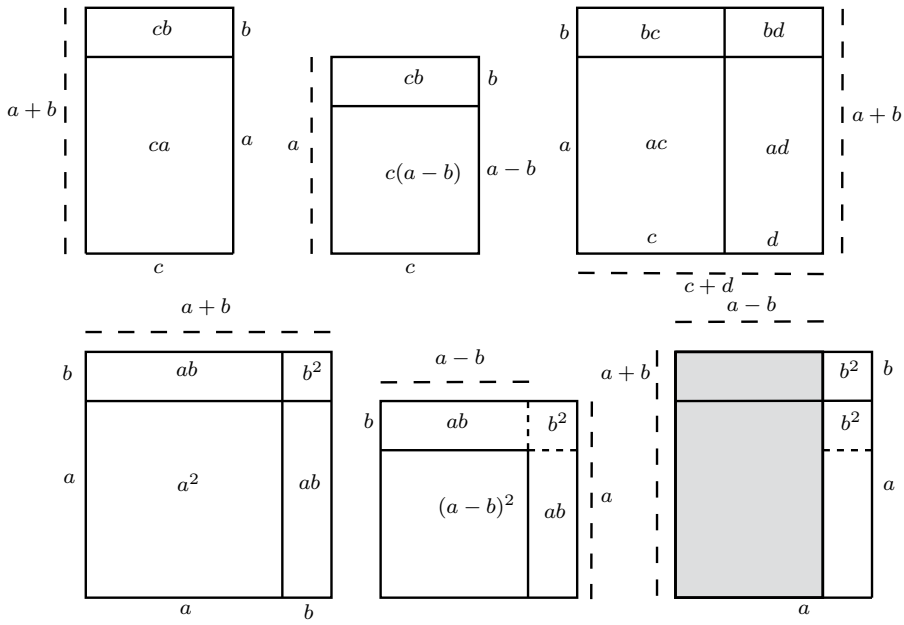
(b) On applique les opérations inverses : $0 \longmapsto 0 - 3 = -3 \longmapsto -3 \times \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$. On avait choisi $-\frac{3}{5}$.

(c) Si x est le nombre choisi, le résultat donné par ce programme est $5x + 3$.

Exercice 2 Voici les développements à connaître par cœur.

- $c(a+b) = ca + cb$
- $c(a-b) = ca - cb$
- $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
- $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
- $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
- $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Exercice 3 Voici les illustrations des développements précédents.



Exercice 4

(a) $u(v+w) = uv + uw$

(b) $5h(2b-3c) = 10hb - 15hc$

(c) $(r+2)(t-7) = rt - 7r + 2t - 14$

(d) $(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

(e) $(y-z)^2 = y^2 - 2yz + z^2$

(f) $(r+s)(s-r) = (s+r)(s-r) = s^2 - r^2$

(g) $-3x(2x-6) = 18x - 6x^2$

(h) $(4x-2)(3-5x) = 12x - 20x^2 - 6 + 10x = -20x^2 + 22x - 6$

(i) $(3t-2)(2+3t) = (3t)^2 - 2^2 = 9t^2 - 4$

(j) $(2x-3y)^2 = (2y)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2 = 4y^2 - 12xy + 9y^2$

(k) $-3(2b-1)(4-3b) = -3(8b-6b^2-4+3b) = -3(-6b^2+11b-4) = 18b^2-33b+12$

(l) $(z-5y)^2 = z^2 - 10yz + 25y^2$

(m) $-2(3q-5)^2 = -2(9q^2 - 30q + 25) = -18q^2 + 60q - 50$

(n) $5(x-3)^2 - (3x)^2 = 5(x^2 - 6x + 9) - 9x^2 = -4x^2 - 30x + 45$

(o) $(2x+3)^2 - (3x+2)^2 = (4x^2 + 12x + 9) - (9x^2 + 12x + 4) = -5x^2 + 5$

(p) $3(q-5)(3-2q) = 3(3q-2q^2-15+10q) = 9q-6q^2-45+30q = -6q^2+39q-45$

(q) $-2(5-2y)(3-5y) = -2(15 - 25y - 6y + 10y^2) = -2(10y^2 - 31y + 15)$
$= -20y^2 + 62y - 30$

(r) $(z-1)(z+1)(1-z) = (z^2-1^2)(1-z) = z^2 - 1 - z^3 + z = -z^3 + z^2 + z - 1$

(s) $(x-4)(2x+3)(5x+1) = (x-4)(10x^2+2x+15x+3) = (x-4)(10x^2+17x+3)$
$= 10x^3 + 17x^2 + 3x - 40x^2 - 68x - 12$
$= 10x^3 - 23x^2 - 65x - 12$

(t) $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(u) $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

(v) $(a+b)^4 = [(a+b)^2]^2 = [a^2 + 2ab + b^2]^2$
$= (a^2)^2 + (2ab)^2 + (b^2)^2 + 2a^2.2ab + 2a^2b^2 + 2b^2 2ab$
$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Exercice 5

(a) $14 - 7y = 7(2-y)$

(b) $35 - 30u^2 + 20u^5 = 5(7 - 6u^2 + 4u^5)$

(c) $2q^2 - 6q = 2q(q-3)$

(d) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

(e) $u^2 - 9 = u^2 - 3^2 = (u-3)(u+3)$

(f) $16s^2 + 8s + 1 = (4s)^2 + 2 \times 4s \times 1 + 1^2 = (4s+1)^2$

(g) $z^2 - 8z + 16 = z^2 - 2 \times z \times 4 + 4^2 = (z-4)^2$

(h) $9y^2 - 12y + 4 = (3y)^2 - 2 \times 3y \times 2 + 2^2 = (3y-2)^2$

(i) $36 + 60t + 25t^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times 5t + (5t)^2 = (6+5t)^2$

(j) $4-9w^2 = 2^2-(3w)^2 = (2-3w)(2+3w)$

(k) $-16+25y^2 = 25y^2-16 = (5y)^2-4^2 = (5y-4)(5y+4)$

(l) $4r^2-7 = (2r)^2-(\sqrt{7})^2 = (2r-\sqrt{7})(2r+\sqrt{7})$

(m) $5b^2-9 = (b\sqrt{5})^2-3^2 = (b\sqrt{5}-3)(b\sqrt{5}+3)$

(n) $4v^2-5v^3 = v^2(4-5v)$

(o) $2(q-3)-7(q-3)q = (q-3)(2-7q)$

Exercice 6

(a) $\frac{2x+6}{(x+3)(5-x)} = \frac{2(x+3)}{(x+3)(5-x)} = \frac{2}{5-x}$

(b) $\frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9} = \frac{(2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2}{(2x)^2-3^2} = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+3}$

(c) $\frac{25x^2-10x+1}{9x^2-16}\cdot\frac{9x^2-24x+16}{5x-1}\cdot\frac{3x+4}{5x+1} = \frac{(5x-1)^2(3x-4)^2(3x+4)}{(3x-4)(3x+4)(5x-1)(5x+1)} = \frac{(5x-1)(3x-4)}{5x+1}$

(d) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1} = \frac{1(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1+2x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)}$

(e) $\frac{2x+1}{x-4}-\frac{x+4}{2x-1} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{(x-4)(2x-1)}-\frac{(x+4)(x-4)}{(2x-1)(x-4)} = \frac{4x^2-1}{(2x-1)(x-4)}-\frac{x^2-16}{(2x-1)(x-4)}$
$= \frac{(4x^2-1)-(x^2-16)}{(2x-1)(x-4)} = \frac{3x^2+15}{(2x-1)(x-4)}$

(f) $\frac{3}{3x+5}+\frac{5}{3x-5}-\frac{2}{9x^2-30x+25} = \frac{3(3x-5)^2}{(3x+5)(3x-5)^2}+\frac{5(3x-5)(3x+5)}{(3x-5)^2(3x+5)}-\frac{2(3x+5)}{(9x^2-30x+25)(3x+5)}$
$= \frac{3(9x^2-30x+25)+5(9x^2-25)-2(3x+5)}{(3x+5)(3x-5)^2} = \frac{27x^2-90x+75+45x^2-125-6x-10}{(3x+5)(3x-5)^2}$
$= \frac{72x^2-96x-60}{(3x+5)(3x-5)^2} = \frac{12(6x^2-8x-5)}{(3x+5)(3x-5)^2}$

Exercice 7

(a) $3x+2y=5 \Leftrightarrow 3x = 5-2y \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(5-2y)$
et $3x+2y=5 \Leftrightarrow 2y = 5-3x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(5-3x)$

(b) $U = RI \iff R = \frac{U}{I} \iff I = \frac{U}{R}$

(c) $v = \frac{d}{t} \iff d = vt \iff t = \frac{d}{v}$

(d) $V = \pi r^2 h \iff h = \frac{V}{\pi r^2} \iff r^2 = \frac{V}{\pi h} \iff r = -\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ ou $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

(e) $4u-5uv+3v = 1 \iff u(4-5v) = 1-3v \iff u = \frac{1-3v}{4-5v}$
et $4u-5uv+3v = 1 \iff v(3-5u) = 1-4u \iff v = \frac{1-4u}{3-5u}$

Exercice 8 Soit a l'âge de monsieur Fartezdkrié.
On a évidemment $0 < a < 188$. Puisque $188-a > 0$, l'énoncé donne :
$(188+a)(188-a) = 29\,415 \iff 188^2-a^2 = 29\,415$
$\iff a^2 = 188^2-29\,415 = 5\,929 \overset{a>0}{\iff} a = \sqrt{5\,929} = 77.$
Monsieur Fartezdkrié est donc âgé de 77 ans.

Exercice 9

(a) $\frac{3}{5}x+2=0 \iff \frac{3}{5}x=-2 \iff x = -2\times\frac{5}{3} = -\frac{10}{3}$: $\mathcal{S}_a = \{-\frac{10}{3}\}$

(b) $5-2x = 4x-1 \iff 4x+2x = 5+1 \iff 6x = 6 \iff x = \frac{6}{6} = 1$:
$\mathcal{S}_b = \{1\}$

(c) $4-5y = 7y+1 \iff 7y+5y = 4-1 \iff 12y = 3 \iff y = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$:
$\mathcal{S}_c = \{\frac{1}{4}\}$

CORRIGÉS

(d) $z^2 = 5 \iff z = -\sqrt{5}$ ou $z = \sqrt{5}$: $\quad \mathcal{S}_\mathsf{d} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

(e) $3(2\beta - 3) = 2(3 + 3\beta) \iff 6\beta - 9 = 6 + 6\beta \iff -9 = 6$: $\quad \mathcal{S}_\mathsf{e} = \varnothing$

(f) $2t - 3 < 0 \iff 2t < 3 \iff t < \frac{3}{2}$: $\quad \mathcal{S}_\mathsf{f} = \left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$

(g) $5 - 3u \geqslant 1 \iff -3u \geqslant 1 - 5 = -4 \iff u \leqslant \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$: $\quad \mathcal{S}_\mathsf{g} = \left]-\infty\,;\frac{4}{3}\right[$

(h) $2 - 3y \leqslant 5y + 1 \iff -3y - 5y \leqslant 1 - 2 \iff -8y \leqslant -1 \iff y \geqslant \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$: $\mathcal{S}_\mathsf{h} = \left[\frac{1}{8}\,;+\infty\right[$

(i) $6x - 3 < 4 - 7x \iff 6x + 7x < 4 + 3 \iff 13x < 7 \iff x < \frac{7}{13}$: $\mathcal{S}_\mathsf{i} = \left]-\infty\,;\frac{7}{13}\right[$

(j) $-4x + 7 > 3 - 4x \iff -4x + 4x > 3 - 7 \iff 0 > -4$: $\quad \mathcal{S}_\mathsf{j} = \mathbb{R}$

(k) $3a - 2b + 1 < 7 - 2b + 6a \iff 3a - 6a - 2b + 2b = -3a < 7 - 1 = 6$
$\iff a > -\frac{6}{3} = -2$: $\quad \mathcal{S}_\mathsf{k} = \left]-2\,;+\infty\right[$

(l) $2\alpha + 3 \leqslant 2(1 + \alpha) \iff 2\alpha + 3 \leqslant 2 + 2\alpha \iff 2\alpha - 2\alpha \leqslant 2 - 3 \iff 0 \leqslant -1$: $\mathcal{S}_\mathsf{l} = \varnothing$

Exercice 10 Somme d'inégalités

1. (a) $-2 \leqslant \alpha \leqslant 6$ et $1 \leqslant \beta \leqslant 4$ donc $-2 + 1 = -1 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 6 + 4 = 10$

   (b) $-2 \leqslant \alpha \leqslant 6$ donc $(-4) \times (-2) = 8 \geqslant -4\alpha \geqslant (-4) \times 6 = -24$

   (c) $1 \leqslant \beta \leqslant 4$ donc $-4 \leqslant -\beta \leqslant -1$ et $-2 \leqslant \alpha \leqslant 6$ mène à $-2 - 4 = -6 \leqslant \alpha + (-\beta) \leqslant 6 - 1 = 5$

   (d) $-2 \leqslant \alpha \leqslant 6$ donc $-2 \times 2 = -4 \leqslant 2\alpha \leqslant 6 \times 2 = 12$
   et $1 \leqslant \beta \leqslant 4$ donc $-3 \times 4 = -12 \leqslant -3\beta \leqslant -3 \times 1 = -3$.
   Ainsi, $-4 + (-12) = -16 \leqslant 2\alpha - 3\beta \leqslant 12 + (-3) = 9$.

2. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = x^2 + x + 3$.

   (a) Si $2 \leqslant x \leqslant 5$ alors $2x \leqslant x \times x \leqslant 5x$ car $x > 0$
   et $2 \times 2 = 4 \leqslant 2x \leqslant x^2 \leqslant 5x \leqslant 5 \times 5 = 25$.
   Par ailleurs, $-3 \times 2 = -6 \geqslant -3x \geqslant -3 \times 5 = -15$
   et $-15 + 1 = -14 \leqslant -3x + 1 \leqslant -6 + 1 = -5$.
   D'où, $4 - 14 = -10 \leqslant x^2 - 3x + 1 = f(x) \leqslant 25 - 5 = 20$.

   (b) Si $-3 < x < -1$ alors $1 < -x < 3$.
   Ainsi, $1(-x) < (-x) \times (-x) < 3(-x)$ car $-x > 0$
   et $1 \times 1 = 1 < 1 \times (-x) < x^2 < 3(-x) < 3 \times 3 = 9$.
   Par ailleurs, $-3 + 3 + 0 < x + 3 < -1 + 3 = 2$.
   D'où, $1 + 0 = 1 < x^2 + x + 3 = g(x) < 9 + 2 = 11$.

Exercice 11 Soient f le nombre de filles de monsieur Fartezdkrié. On a $f \geqslant 2$ car il a plusieurs filles et l'énoncé donne

$2f^2 \leqslant 5f \iff 2f^2 - 5f \leqslant 0 \iff f(2f - 5) \leqslant 0 \overset{\times\frac{1}{f}}{\iff} 2f - 5 \leqslant \frac{0}{f} = 0$
$\iff 2f \leqslant 5 \iff f \leqslant \frac{5}{2}$.

Ainsi, $2 \leqslant f \leqslant \frac{5}{2}$ et comme le nombre de filles est nécessairement entier, monsieur Fartezdkrié a deux filles.

On aurait pu directement vérifier que 2 est une solution et que ni 3 ni 4 n'en sont par exemple mais cela ne montre pas qu'il n'y en a pas d'autres.

Chapitre III

Géométrie et repérages cartésiens du plan

Sommaire

1 Configurations du plan : rappels et compléments 30
1.1 Droites remarquables dans le triangle 30
1.2 Quelques théorèmes classiques 31
1.3 Un peu de trigonométrie 31
1.4 Tangente à un cercle 32
1.5 Définitions et propriétés de certains quadrilatères 32
2 Projeté orthogonal d'un point sur une droite 33
3 Repères du plan 34
4 Coordonnées du milieu d'un segment 35
5 Distances dans un repère orthonormé 36
Exercices 37
Corrigé des exercices 40

Perspicaces, vous avez certainement reconnu l'origine de l'adjectif cartésien. En effet, René Descartes † est l'inventeur du système de repérage des points du plan que l'on va étudier ici. Il publia ses travaux dans le troisième livre de son célèbre *Discours de la méthode* en 1637. Cette révolution permit la numérisation de la géométrie et ouvrit la voie à la physique moderne. Bien que d'autres systèmes aient depuis apparu, les repères cartésiens demeurent d'une importance fondamentale.

Bien évidemment, nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie euclidienne et des fameux axiomes d'Euclide ($\sim$ 300 av. J.-C.). La plupart des résultats de géométrie classique seront admis et sont très intuitifs. Toutefois, leur démonstration est parfois plus délicate qu'il n'y paraît car il est souvent tentant d'utiliser des propriétés « visuelles » qui ne sont en fait pas encore démontrées. Il est donc toujours utile de

†. Formidable mathématicien que vous pourrez voir au non moins formidable Musée de l'Homme. Son crâne y est exposé.

relire les *Éléments* d'Euclide *in extenso* :

http ://euclides.fr/bibliotheque/euclide/index.html |;-)

Par ailleurs, cette géométrie n'est pas *ultime*. En effet, ce que l'on appelle le cinquième postulat d'Euclide – qui affirme que, dans un plan, par un point distinct d'une droite, il existe une et une seule droite parallèle à cette droite – a été de plus en plus questionné au fil des siècles. D'aucuns disant que c'est un théorème qui doit être démontré, d'autres remettant en cause l'existence même de ce résultat. Cela a mené à des géométries différentes, dites *non euclidiennes*, et à de nouvelles et prolifiques théories. Ceci vous paraît peut-être iconoclaste mais installez-vous sur une sphère, disons la Terre. Puisqu'ils réalisent les distances minimales, les grands cercles sont alors les équivalents des droites. Et maintenant, que pensez-vous de ce fameux postulat ? Il n'y a pas de grands cercles parallèles : ils sont tous sécants en deux points antipodaux (cf. méridiens par exemple). Sur Terre, il n'y a pas de « droites » parallèles. Nous vivons dans un monde non euclidien !

Mais plaçons-nous ici dans le cadre de la géométrie classique définie et étudiée au temps de la rayonnante Grèce antique, où la figure était reine et la démonstration, loi.

1 Configurations du plan : rappels et compléments

1.1 Droites remarquables dans le triangle

Activité 1

- *La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire en son milieu.*
  Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
- *Une **hauteur** d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.*
  Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé l'orthocentre du triangle.
- *Une **médiane** d'un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.*
  Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité de ce triangle.
- *La **bissectrice** d'un angle est la droite partageant cet angle en deux angles de même mesure.*
  Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Démonstration : Démontrons les deux premiers points.

• Soient Δ_C, Δ_A et Δ_B les médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ respectivement. Ces segments n'étant pas parallèles, leur médiatrices ne le sont pas non plus. On appelle O l'intersection de Δ_A et Δ_B. Puisque $O \in \Delta_A$, la médiatrice de $[BC]$, $OB = OC$. De même, avec Δ_B, $OA = OC$. Ainsi, $OA = OB = OC$ et

O est équidistant des points A, B, C : il est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. De plus, $OA = OB$ implique que $O \in \Delta_C$ et les trois médiatrices sont bien concourantes.

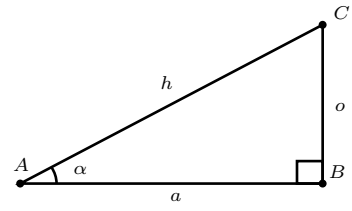
• À partir d'un triangle ABC, on trace les parallèles aux côtés passant par les sommets opposés et l'on obtient alors un « grand » triangle IJK. Les quadrilatères $ABIC$ et $AKBC$ sont alors des parallélogrammes et $BI = AC = BK$: B est le milieu de $[IK]$. De même, A et C sont les milieux des côtés $[JK]$ et $[IJ]$. Nous venons de voir que les médiatrices de IJK sont concourantes. Or, ces médiatrices sont perpendiculaires aux côtés de IJK donc à ceux de ABC. De plus, elles passent par les points A, B et C. Ce sont donc les hauteurs du triangle ABC. □

1.2 Quelques théorèmes classiques

- Théorème de Pythagore : Soit ABC un triangle.
  ABC est rectangle en A *ssi* $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- Théorème de Thalès : Soient ABC un triangle et $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ deux points distincts de A.
  · Si (BC) et (MN) sont parallèles alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$
  · Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre alors $(BC)//(MN)$.
- Théorème de de la droite des milieux. Cas particulier du résultat précédent qu'il faut connaître.
  · Dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.
  · Dans un triangle, la droite passant le milieu d'un côté et parallèle à un second côté passe par le milieu du troisième côté.
- Théorème Triangle rectangle et Cercle circonscrit : Soit ABC un triangle.
  ABC est rectangle en A *ssi* $[BC]$ est un diamètre de son cercle circonscrit
- Théorème de l'angle au centre : Si A, B et C sont des points d'un cercle de centre O, alors $\widehat{BOC} = 2.\widehat{BAC}$.

1.3 Un peu de trigonométrie

Définition 1 *Dans un triangle ABC rectangle en B, on définit les nombres suivants :*
$\cos(\widehat{A}) = \frac{AB}{AC}$, $\sin(\widehat{A}) = \frac{BC}{AB}$
et $\tan(\widehat{A}) = \frac{BC}{BA}$.



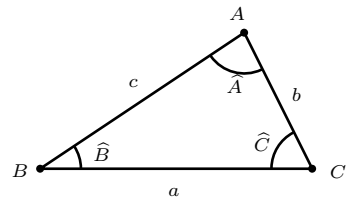
On se souviendra du fameux *CAHSOHTOA*.

Le cosinus et le sinus d'un angle sont toujours inférieurs à 1 puisque les côtés adjacents et opposés sont plus courts que l'hypoténuse.

Théorème 1 *Pour tout* α, $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Démonstration : C'est l'égalité de Pythagore que l'on divise par le carré de la longueur de l'hypoténuse. □

Propriété 1 ***Aire d'un triangle***
Avec les notations de la figure ci-contre, l'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$.

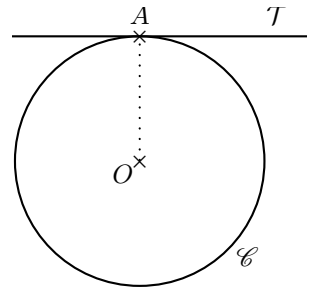


On peut bien sûr permuter les lettres en fonction les valeurs que l'on connaît.

Démonstration : Puisque $\sin(\widehat{C}) = \frac{h}{b}$, on a $h = b\sin(\widehat{C})$ et la formule $\frac{Base \times Hauteur}{2}$ devient $\frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$. □

1.4 Tangente à un cercle

Définition & Propriété 2
Une tangente à un cercle est une droite ayant un seul point commun avec ce cercle.
Si A est un point du cercle $\mathscr{C}$ *de centre O, la tangente au cercle* $\mathscr{C}$ *en A est la perpendiculaire au rayon* $[OA]$ *en A.*



1.5 Définitions et propriétés de certains quadrilatères

- Un quadrilatère est un **parallélogramme**
  ssi ses côtés opposés sont parallèles deux à deux,
  ssi ses diagonales ont même milieu,
  ssi il est non croisé et deux de ses côtés sont parallèles et de même longueur.
  Un parallélogramme admet le point d'intersection de ses diagonales pour centre de symétrie.
- Un quadrilatère est un **rectangle**
  ssi il possède trois (quatre) angles droits,
  ssi c'est un parallélogramme dont un angle est droit,
  ssi ses diagonales ont même milieu et même longueur.
  Un rectangle admet l'intersection de ses diagonales pour centre de symétrie et les médiatrices de ses côtés pour axes de symétrie.
- Un quadrilatère est un **losange**
  ssi ses quatre côtés ont même longueur,
  ssi ses diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires.
  Un losange admet l'intersection de ses diagonales pour centre de symétrie et ses diagonales pour axes de symétrie.

- Un quadrilatère est un **carré**
  ssi il possède trois (quatre) angles droits et ses côtés ont même longueur,
  ssi ses diagonales ont même milieu, même longueur et sont perpendiculaires.
  Un carré admet l'intersection de ses diagonales comme centre de symétrie et les médiatrices de ses côtés ainsi que ses diagonales pour axes de symétrie.

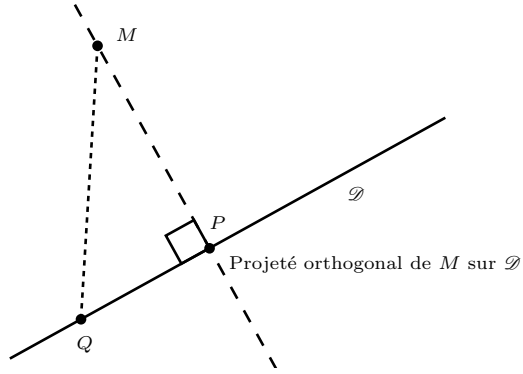
2 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Activité 2

1. *Tracer une droite $\mathscr{D}$ et placer un point M extérieur à cette droite.*
2. *Comment placer le point P de la droite le plus proche possible du point M ?*
3. *Justifier votre conjecture.*
4. *Que dire si le point M est déjà placé sur la droite $\mathscr{D}$?*

Définition 2 *Soient M un point et $\mathscr{D}$ une droite du plan.*
Le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathscr{D}$ est le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par le point M.

Définition & Propriété 3 *Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite $\mathscr{D}$ est le point de la droite $\mathscr{D}$ le plus proche du point M : si P est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$, alors pour tout point $Q \in \mathscr{D}$, $MP \leqslant MQ$.*
La distance MP définit la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$, $d(M, \mathscr{D})$.



Démonstration : Si $Q \in \mathscr{D}$ est distinct de P, le triangle MPQ est rectangle en P donc $MQ^2 = MP^2 + PQ^2 > MP^2$. □

3 Repères du plan

Définition 3 *Définir un repère du plan, c'est choisir trois points non alignés dans un ordre précis : O, I, J. On note ce repère (O, I, J) et :*

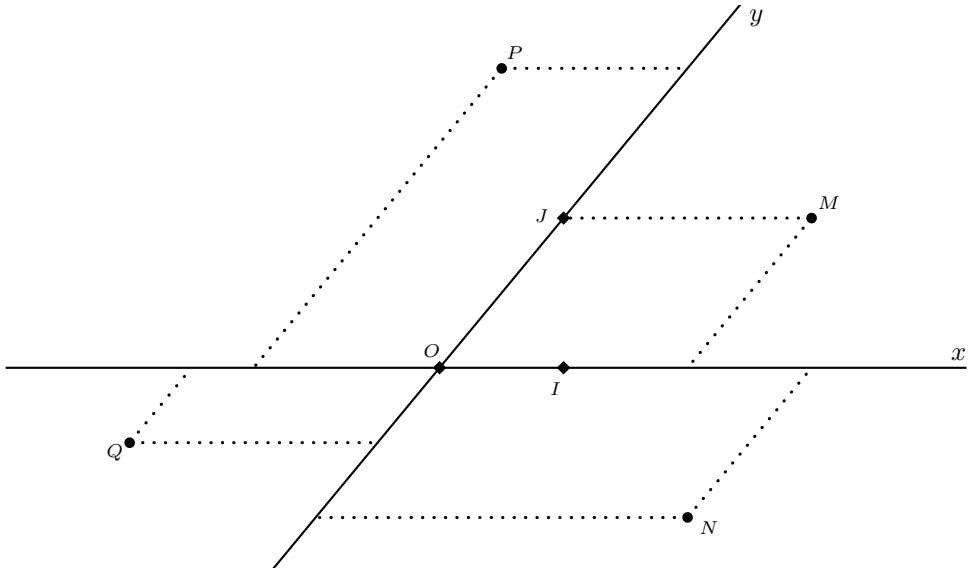
- *le point* ***O*** *est l'**origine** du repère ;*
- *la droite* ***(OI)*** *est l'axe des **abscisses**, le point* ***I*** *donnant l'unité sur cet axe ;*
- *la droite* ***(OJ)*** *est l'axe des **ordonnées**, le point* ***J*** *donnant l'unité sur cet axe.*

*Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère est dit **orthogonal**.*
*S'il est rectangle et isocèle en O, le repère est dit **orthonormé** (un r.o.n.). On a alors $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ = 1$.*

Définition 4 *On considère un repère (O, I, J) du plan et un point M quelconque.*

- *En traçant la parallèle à (OJ) en M, on obtient l'**abscisse** x_M du point M sur l'axe (OI).*
- *En traçant la parallèle à (OI) en M, on obtient l'**ordonnée** y_M du point M sur l'axe (OJ).*
- *Le couple de nombres réels $(x_M\,;\,y_M)$ est le couple des **coordonnées** du point M dans le repère (O, I, J).*

Exemple : Dans le repère (O, I, J) suivant, les coordonnées cartésiennes sont approximativement : $M\,(2\,;1)$, $N\,(3\,;-1)$, $P\,(-1,5\,;2)$, $Q\,(-2\,;-0,5)$, $O\,(0\,;0)$, $I\,(1\,;0)$, $J\,(0\,;1)$. et $V\,(-2\,;-1)$.



Dans un repère quelconque, le **quadrillage** est donc constitué de **parallélogrammes**.

Propriété 4 *Dans un repère donné, tout point est repéré par un* ***unique couple*** *de coordonnées. Réciproquement, tout couple de coordonnées repère un* ***unique point****.*

Démonstration : Cela découle de l'existence et de l'unicité de la parallèle à une droite donnée en un point donné. □

4 Coordonnées du milieu d'un segment

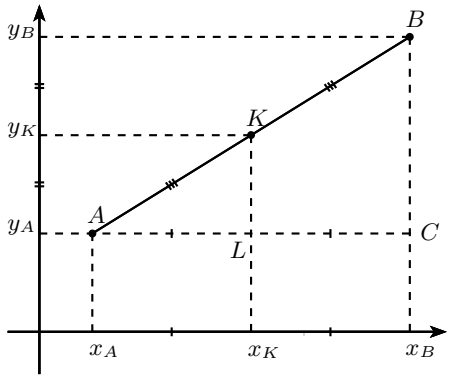
Activité 3 *Placer les milieux A, B, C, D et E des segments* $[MR]$, $[IJ]$, $[NT]$, $[UM]$ *et* $[PQ]$ *précédents puis déterminer graphiquement leur coordonnées. Que remarque-t-on ?*

Théorème 2 ***Coordonnées du milieu***
Soient $A(x_A;y_A)$ *et* $B(x_B;y_B)$ *deux points dans un repère quelconque du plan.*

$$K(x_K;y_K) \text{ est le } \textbf{milieu} \text{ du segment } [AB]$$
$$ssi \quad \boldsymbol{x_K = \frac{x_A + x_B}{2}} \quad et \quad \boldsymbol{y_K = \frac{y_A + y_B}{2}}.$$

Remarque : Les coordonnées du milieu d'un segment sont donc les moyennes des coordonnées de ses extrémités.
Vérifiez-le pour les milieux des segments $[MN]$, $[IJ]$, $[QN]$ et $[PQ]$ précédents.

Démonstration :



Le théorème de la droite des milieux dans le triangle ABC affirme que $AL = \frac{1}{2}AC$
donc $x_K - x_A = \frac{1}{2}(x_B - x_A)$
d'où $x_K = \frac{x_B - x_A}{2} + x_A = \frac{x_A + x_B}{2}$.
De même pour les ordonnées.
On a représenté ici un repère orthogonal mais il peut très bien être quelconque.

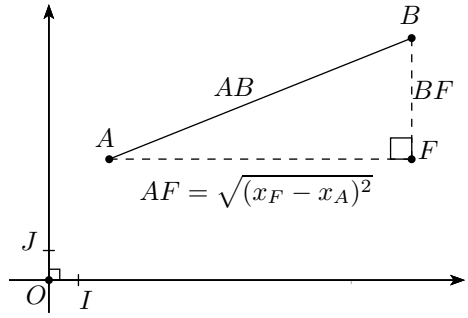
□

Exemple : Soient $A(1;3)$, $B(-2;5)$ et $C(4;-1)$ dans un repère.
Déterminons les coordonnées du milieu D du segment $[BC]$ et celles du symétrique E du point A par rapport au point B :
On a $x_D = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $y_D = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$ donc $D(1;2)$.
B est le milieu du segment $[AE]$ donc $x_B = \frac{x_A+x_E}{2}$ et $x_E = 2x_B - x_A$
$x_E = 2\times(-2)-1 = -5$. De même, $y_E = 2y_B - y_A = 2\times 5 - 3 = 7$: $E(-5;7)$.

Ceci est l'analogue du problème suivant :
Votre moyenne obtenue sur deux devoirs de mathématiques est de 13. Sachant que vous avez obtenu 11 au premier, combien avez-vous eu au second ? 15 bien sûr.

5 Distances dans un repère orthonormé

Soit $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et $B\,(\,x_B\,;\,y_B\,)$ dans un repère (O,I,J) **orthonormé**.
On a $AF^2 = (x_B - x_A)^2$, $BF^2 = (y_B - y_A)^2$.
Le théorème de Pythagore dans le triangle ABF, rectangle en F, affirme que
$AB^2 = AF^2 + BF^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.



Ce résultat reste vrai même si B est « à gauche » ou « en dessous » de A puisque $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$.

Théorème 3 ***Distance entre deux points***
Soit (O,I,J) un repère ***orthonormé*** *et soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points. La distance entre les points A et B est :*

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}\,.$$

Exemple : Dans un repère orthonormé, on donne $P(-2;7)$, $Q(1;3)$.
Calculons la distance PQ :
$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-7)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Exercices

GÉOMÉTRIE ET REPÉRAGES CARTÉSIENS DU PLAN

Exercice 1 Dresser un diagramme de Venn (cf. *En toute logique* en page 339) illustrant les différents types de quadrilatères que vous connaissez.

Exercice 2 Tracer un quadrilatère n'étant pas un parallélogramme mais dont les côtés opposés ont même longueur.

Exercice 3 Soient M, I et R trois points non alignés du plan et soit O l'intersection des médiatrices des segments $[MI]$ et $[IR]$. Que représente O pour le triangle MIR ? Que peut-on dire de la médiatrice de $[MR]$?

Exercice 4 $[BU]$ et $[OM]$ sont deux diamètres quelconques d'un cercle $\mathscr{C}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $BOUM$? Justifier.

Exercice 5 Formule d'Al-Kashi
Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et l'on souhaite montrer le théorème de Pythagore généralisé $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.
On suppose les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ aigus et l'on nomme I le pied de la hauteur issue de B.

1. Exprimer AI, BI et IC en fonction de a, b, et $\widehat{C}$.
2. (a) Quelle est la nature du triangle BAI ?
   (b) En déduire cette fameuse loi des cosinus annoncée.

Exercice 6 Soit BIO un triangle tel que $\widehat{I} = 24°$, $\widehat{B} = 119°$ et $IO = 12\,\text{cm}$.
Calculer une valeur approchée à $0,1$ près de la distance de O à (BI) et celle de I à (BO).

Exercice 7 Résoudre les équations suivantes.

(a) $2x - 7 = 4$ (b) $5 - 2y = 8$ (c) $\frac{5-z}{2} = -3$ (d) $\frac{6-3t}{8} = 2$

Exercice 8 Dans un repère du plan d'origine O, on donne $A\,(\,2\,;\,5\,)$ et $B\,(\,-5\,;\,1\,)$.

1. Calculer les coordonnées du point M tel que O soit le milieu du segment $[AM]$.
2. Calculer les coordonnées du point N tel que A soit le milieu du segment $[BN]$.

Exercice 9 Dans un repère du plan, on considère les points $Z\,(\,-1\,;\,4\,)$, $E\,(\,5,5\,;\,-1,5\,)$, $B\,(\,4,5\,;\,3\,)$ et $U\,(\,0\,;\,-0,6\,)$. $ZEBU$ est-il un parallélogramme ?

Exercice 10 Dans un repère, on donne $I\,(\,4\,;\,-1\,)$, $J\,(\,2\,;\,5\,)$, $K\,(\,3\,;\,2\,)$ et $L\,(\,4\,;\,1\,)$.

1. Démontrer que K est le milieu du segment $[IJ]$.
2. Justifier que la parallèle à (IL) en K coupe $[JL]$ en son milieu M.
3. Calculer les coordonnées du point M.

Exercice 11 Dans le plan muni d'un repère quelconque, on place les points $B(-3;-1)$, $A(5;-2)$, $L(7;3)$ et $I(-1;4)$. Démontrez votre conjecture.

Exercice 12 Ⓢ Dans un repère quelconque, on considère cette fonction Python :

```
1| def cettefonction(xA,yA) :
2|     xB=-1*xA
3|     yB=yA
4|     return (xB,yB)
```

1. Tester la fonction pour différents points.
2. Quel est le rôle de ce programme ?
3. Écrire un programme donnant le symétrique d'un point par rapport à l'origine.

Exercice 13 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A\,(-2\,;3)$, $B\,(2\,;1)$, $C\,(0\,;2)$ et $D\,(-1\,;4)$ et l'on appelle $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle BAD.

1. Vérifier que C est bien le milieu du segment $[AB]$.
2. Quel semble être le centre du cercle $\mathscr{C}$? Démontrer cette conjecture.

Exercice 14 Dans un repère orthonormé, on a $P\,(3\,;-2)$, $E\,(-2\,;-3)$ et $I\,(-4\,;3)$. Le triangle PEI est-il rectangle ?

Exercice 15 Dans un r.o.n., on donne les points $A\,(4\,;3)$, $B\,(-1\,;0)$ et $K\,(3\,;-1)$.

1. Calculer les longueurs AK et BK. Qu'en déduire pour le point K ?
2. En est-il de même pour le point $L\left(\frac{1}{2}\,;3\right)$?

Exercice 16 Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient E, F, G, H et M les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et $[AC]$.
Déterminer les coordonnées de chacun des points dans chacun des repères suivants :
(A,B,D), (C,D,B), (B,C,A), (A,B,C), (C,A,D) et (M,A,B).

Exercice 17 Ⓢ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

1. Compléter la fonction suivante donnant la distance entre les points A et B.

```
1| from math import *
2| def distance(xA, yA, xB, yB) :
3|     d=...
4|     return (...)
```

2. En utilisant la fonction distance précédente, compléter la fonction suivante déterminant si les points A, B et C sont alignés ou non.

```
1| def alignement(xA, yA, xB, yB,xC,yC) :
2|     d1=distance(xA, yA, xB, yB)
3|     d2=distance(xB, yB, xC, yC)
4|     d3=distance(xA, yA, xC, yC)
5|     if d1+d2==d3 :
```

```
6|       return (True)
7|    elif d2+d3 . . . :
8| . . .
```

Exercice 18 Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, placer les points $A(1;2)$, $B(2;-1)$ et $C(3;1)$ puis tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A ainsi que la médiatrice $\mathscr{D}$ du segment $[AB]$. Émettre des conjectures puis les démontrer.

Exercice 19 Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et E, F, G et H les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On note $(a;b)$ les coordonnées du point C dans le repère (A, B, D). Démontrer de deux manières différentes que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Exercice 20 BAC est un triangle équilatéral de côté 4 cm, M est le milieu du côté $[AC]$, N est le symétrique du point B par rapport au point C et P, Q sont les points de $[AB]$ tels que $AP = PQ = QB$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, M, N, P et Q dans le repère (B, C, A).
3. Démontrer que le triangle BAN est rectangle et en déduire la longueur AN.

Exercice 21 Gap filling

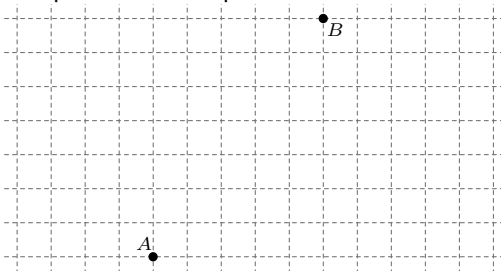
Complete the text with the following words : *coordinates, intersecting, point, x axis, y axis, numbers, coordinate system, origin, rectangular, orthonormal, unit length.*

A ..... O and two lines ..... at right angles at O define a rectangular ..... O is called the ....., one of the lines is called the ..... and the other one, the ..... of this ..... coordinate system. Each ..... of the plane can be identified by a pair of real ..... $(x\,;y)$ called the ..... of this point. If moreover the unit on each axis is the ....., the system is said to be .....

Exercice 22 Are you good at counting ?

Let $A(-1\,;1)$, $B\left(1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\right)$ and $C\left(-1-\sqrt{2}\,;3-\sqrt{2}\right)$ be three points in a orthonormal coordinate system. What is the nature of the triangle CAB ?

Exercice 23 Sur ce quadrillage, on se déplace uniquement suivant les lignes. Déterminer les nœuds à équidistance des points A et B.

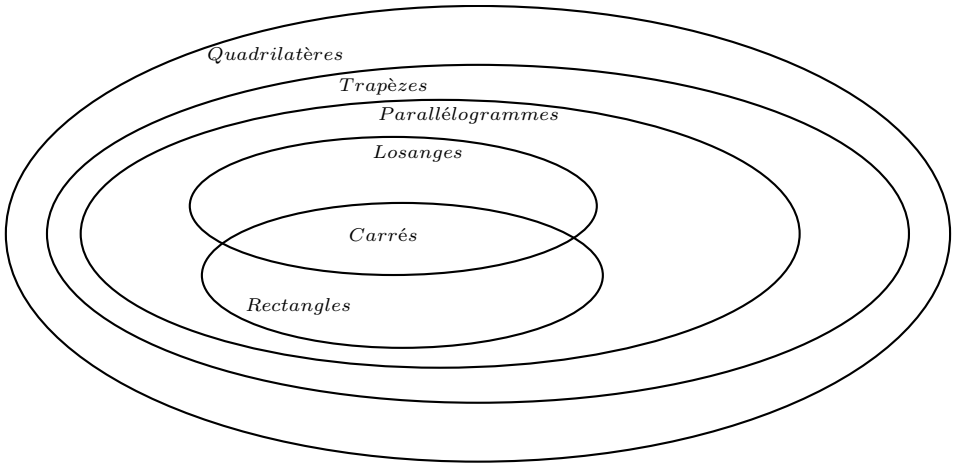


Veuillez vous rendre en pages 257 et 261 pour faire les devoirs n°s 3 et 4, merci.

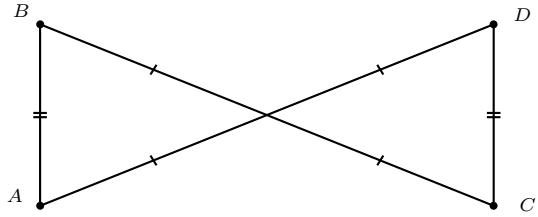
Corrigé des exercices

GÉOMÉTRIE ET REPÉRAGES CARTÉSIENS DU PLAN

Exercice 1 Voici un diagramme de Venn illustrant différents types de quadrilatères :



Exercice 2 Voici un quadrilatère $ABCD$ n'étant pas un parallélogramme mais dont les côtés opposés ont même longueur :



Exercice 3 Dans le triangle MIR, O est l'intersection de deux, donc des trois médiatrices. O est donc le cercle du cercle circonscrit à MIR et il est situé sur la médiatrice du segment $[MR]$.

Exercice 4 Les diagonales $[BU]$ et $[OM]$ du quadrilatère $BOUM$ ont même longueur et même milieu (diamètre et centre de $\mathscr{C}$). $BOUM$ est donc un rectangle.

Exercice 5 Formule d'Al-Kashi

1. Le triangle BIC est rectangle en I donc $\sin(\widehat{C}) = \frac{BI}{BC}$ et $BI = a\sin(\widehat{C})$, $\cos(\widehat{C}) = \frac{CI}{BC}$ et $CI = a\cos(\widehat{C})$, $AI = AC - CI = b - a\cos(\widehat{C})$.

2. (a) Le triangle BAI est rectangle en I et le théorème de Pythagore donne
$BA^2 = BI^2 + AI^2$

(b) Ainsi, $c^2 = (a\sin(\widehat{C}))^2 + (b - a\cos(\widehat{C}))^2$
$c^2 = a^2\sin^2(\widehat{C}) + b^2 - 2ba\cos(\widehat{C}) + (a\cos(\widehat{C})^2$
$c^2 = a^2(\cos^2(\widehat{C}) + \sin^2(\widehat{C})) + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}) = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.

Exercice 6 Soit K l'intersection de la droite (BI) et de sa perpendiculaire en O. On cherche donc la distance OK. Dans le triangle rectangle KIO, on a $\sin(\widehat{I}) = \frac{OK}{IO}$ donc $d(O;(BI)) = OK = IO\sin(\widehat{I}) = 12\sin(24°) \simeq 4,9$ cm.
Soit J l'intersection de la droite (BO) et de sa perpendiculaire en I. On cherche donc la distance IJ. Dans le triangle rectangle JOI, on a $\sin(\widehat{O}) = \frac{IJ}{IO}$
donc $d(I;(BO)) = IJ = IO\sin(\widehat{O}) = 12\sin(180° - 119° - 24°) \simeq 7,2$ cm.

Exercice 7

(a) $2x - 7 = 4 \iff 2x = 4 + 7 \iff x = \frac{11}{2}$

(b) $5 - 2y = 8 \iff 5 - 8 = 2y \iff y = -\frac{3}{2}$

(c) $\frac{5-z}{2} = -3 \iff 5 - z = -3 \times 2 \iff -z = -6 - 5 \iff z = 11$

(d) $\frac{6-3t}{8} = 2 \iff 6 - 3t = 8 \times 2 \iff -3t = 16 - 6 \iff t = -\frac{10}{3}$

Exercice 8 Dans un repère du plan d'origine O, on donne $A(2;5)$ et $B(-5;1)$.

1. On veut $x_O = \frac{x_A+x_M}{2}$ donc $x_M = 2x_O - x_A = 2 \times 0 - 2 = -2$ et, de même, $y_M = 2y_O - y_A = 2 \times 0 - 5 = -5$: $M(-2;-5)$.
2. On veut $x_A = \frac{x_B+x_N}{2}$ donc $x_N = 2x_A - x_B = 2 \times 2 - (-5) = 9$ et, de même, $y_N = 2y_A - y_B = 2 \times 5 - 1 = 9$: $N(9;9)$.

Exercice 9 Le milieu de la diagonale $[ZB]$ a pour coordonnées $\frac{x_Z+x_B}{2} = \frac{-1+4,5}{2} = 1,75$ et $\frac{y_Z+y_B}{2} = \frac{4+3}{2} = 3,5$. Celui de la diagonale $[EU]$ a pour coordonnées $\frac{x_E+x_U}{2} = \frac{5,5}{2} = 2,75 \neq 1,75$ (et $\frac{y_E+y_U}{2} = \frac{-1,5-0,6}{2} = -2,1 \neq 3,5$).
Ses diagonales n'ayant pas même milieu, le quadrilatère $ZEBU$ n'est pas un parallélogramme.

Exercice 10 Dans un repère, on donne $I(4;-1)$, $J(2;5)$, $K(3;2)$ et $L(4;1)$.

1. On a $\frac{x_I+x_J}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 = x_K$ et $\frac{y_I+y_J}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2 = y_K$ donc K est bien le milieu du segment $[IJ]$.
2. Un des théorèmes de la droite des milieux dans le triangle JIL permet d'affirmer que la parallèle à (IL) passant par le milieu K du côté $[IJ]$ passe par le milieu M du côté $[JL]$.
3. On a alors $\frac{x_L+x_J}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$ et $\frac{y_L+y_J}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$ donc $M(3;3)$.

Exercice 11 Sur une figure élémentaire, il semble que $BALI$ soit un parallélogramme. En effet, $\frac{x_B+x_L}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$, $\frac{y_B+y_L}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $\frac{x_A+x_I}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$, $\frac{y_A+y_I}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$.
Ses diagonales ayant même milieu, $BALI$ est bien un parallélogramme (contrairement aux cartes de géographie qui la représentent souvent en forme de poisson).

Exercice 12

1. `cettefonction(3,4)` retourne `(-3,4)`, `cettefonction(-5,-2)` retourne `(5,-2)` et `cettefonction(0,-7)` retourne `(0,-7)`.
2. Ce programme change le signe de l'abscisse d'un point : elle donne les coordonnées du symétrique d'un point par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Le programme suivant donnant le symétrique d'un point par rapport à l'origine du repère.

```
1| def cettefonction(xA,yA) :
2|     xC=-1*xA
3|     yC=-1*yA
4|     return (xC,yC)
```

Exercice 13

1. On a $\frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 = x_C$ et $\frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 = y_C$ donc C est bien le milieu du segment $[AB]$.
2. Il semble bien que le centre du cercle circonscrit au triangle ABD soit le point C. Dans ce r.o.n., $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (-2)^2 + (2-3)^2 = 4+1 = 5$ et $DC^2 = (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = (0-(-1))^2 + (2-4)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Ainsi, $CA = CB = CD$ et C est bien le centre du cercle circonscrit à BAD.

Exercice 14 Puisque le repère est un r.o.n., on a
$PE^2 = (x_E - x_P)^2 + (y_E - y_P)^2 = (-2-3)^2 + (-3-(-2))^2 = 5^2 + 1^2 = 26$,
$EI^2 = (x_I - x_E)^2 + (y_I - y_E)^2 = (-4+2)^2 + (3+3)^2 = 2^2 + 6^2 = 40$
et $IP^2 = (x_P - x_I)^2 + (y_P - y_I)^2 = (3+4)^2 + (-2-3)^2 = 7^2 + 5^2 = 74$.
Puisque $IP^2 = 74 > 40 + 26 = EI^2 + PE^2$, la contraposée (cf. *En toute logique* en page 339) du théorème de Pythagore permet d'affirmer que PEI n'est pas rectangle.

Exercice 15

1. Dans ce r.o.n., $AK^2 = (x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2 = (3-4)^2 + (-1-3)^2 = 17$ et $BK^2 = (x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2 = (3+1)^2 + (-1)^2 = 4^2 + 1^2 = 17$.
K est équidistant des points A et B : il est sur la médiatrice du segment $[AB]$.
2. On a $AL^2 = (x_L - x_A)^2 + (y_L - y_A)^2 = (\frac{1}{2} - 4)^2 + (3-3)^2 = 3,5^2 = 12,25$ et $BL^2 = (x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2 = (\frac{1}{2} + 1)^2 + (3)^2 = 1,5^2 + 3^2 = 11,25$.
Ainsi, $AL \neq BL$ et L n'est pas sur la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 16 Voici les coordonnées de chacun des points dans les repères demandés :

	(A,B,D)	(C,D,B)	(B,C,A)	(A,B,C)	(C,A,D)	(M,A,B)
A	$(0\,;0)$	$(1\,;1)$	$(0\,;1)$	$(0\,;0)$	$(1\,;0)$	$(1\,;0)$
B	$(1\,;0)$	$(0\,;1)$	$(0\,;0)$	$(1\,;0)$	$(1\,;-1)$	$(0\,;1)$
C	$(1\,;1)$	$(0\,;0)$	$(1\,;0)$	$(0\,;1)$	$(0\,;0)$	$(-1\,;0)$
D	$(0\,;1)$	$(1\,;0)$	$(1\,;1)$	$(-1\,;1)$	$(0\,;1)$	$(0\,;-1)$
E	$\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$	$\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$	$\left(1\,;-\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$
F	$\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$
G	$\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$	$\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}\,;1\right)$	$\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$
H	$\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$	$\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$
M	$\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$	$(0\,;0)$

Exercice 17

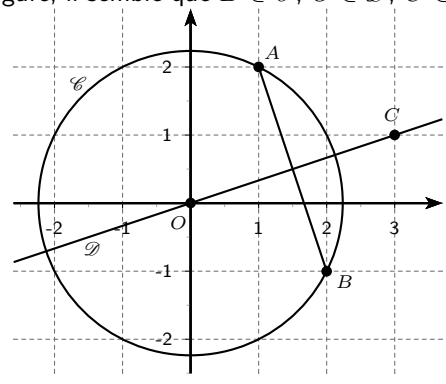
1. La fonction suivante donne la distance entre les points A et B.

```
1| from math import *
2| def distance(xA,yA,xB,yB) :
3|    d= sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)
4|    return (d)
```

2. Celle-ci détermine si les points A, B et C sont alignés ou non.

```
1| def alignement(xA,yA,xB,yB,xC,yC) :
2|    d1=distance(xA,yA,xB,yB)
3|    d2=distance(xB,yB,xC,yC)
4|    d3=distance(xA,yA,xC,yC)
5|    if d1+d2==d3 :
6|       return (True)
7|    elif d2+d3==d1 :
8|       return (True)
9|    elif d1+d3==d2 :
10|      return (True)
11|   return(False)
```

Exercice 18 Sur la figure, il semble que $B \in \mathscr{C}$, $O \in \mathscr{D}$, $C \in \mathscr{D}$ et $BOAC$ carré.



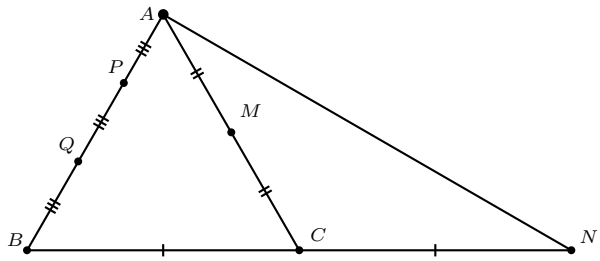
CORRIGÉS

Le repère étant un r.o.n., on a $OA^2 = (x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ et $OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ donc $OA = OB$: $B \in \mathscr{C}$ et $O \in \mathscr{D}$.
Par ailleurs, $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3-1)^2 + (1-2)^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ et $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (3-2)^2 + (1-(-1))^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.
Ainsi, $CA = CB$ et $C \in \mathscr{D}$.
Puisque $OA = CA = OB = CB$, le quadrilatère $BOAC$ est un losange.
Comme $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (2-1)^2 + (-1-2)^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ et $OC^2 = (x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2 = (3-0)^2 + (1-0)^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, ses diagonales ont même longueur : $BOAC$ est bien un carré.

Exercice 19 • Le théorème de la droite des milieux dans les triangles BAC et DAC permet d'affirmer que $(EF)//((AC)//(HG)$ et $EF = \frac{1}{2}AC = HG$ donc $EFHG$ est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur mais on a vu à l'exercice 2 que cela n'est pas suffisant pour qu'il soit un parallélogramme car il peut être croisé. On applique alors ce même théorème dans les triangles BAD et CBD afin de montrer que (EH) et (FG) sont parallèles. On a alors le résultat escompté.
• Dans le repère (A, B, D), on a $A(0\,;0)$, $B(1\,;0)$, $C(a\,;b)$ et $D(0\,;1)$ donc $E\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$, $F\left(\frac{a+1}{2}\,;\frac{b}{2}\right)$, $G\left(\frac{a}{2}\,;\frac{b+1}{2}\right)$ et $H\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$. Le milieu de la diagonale $[EG]$ a donc pour coordonnées $\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2} = \frac{a+1}{4}$ et $\frac{0+\frac{b+1}{2}}{2} = \frac{b+1}{4}$. Celui de la diagonale $[FH]$, $\frac{\frac{a+1}{2}+0}{2} = \frac{a+1}{4}$ et $\frac{\frac{b}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{b+1}{4}$. Ses diagonales ayant même milieu, le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Exercice 20 BAC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

1.



2. Dans le repère (B, C, A), on a $A(0\,;1)$, $B(0\,;0)$, $C(1\,;0)$, $M\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $N(2\,;0)$, $P\left(0\,;\frac{2}{3}\right)$ et $Q\left(0\,;\frac{1}{3}\right)$.
3. On a $CA = CB = CN$ donc C est le centre du cercle circonscrit au triangle BAN. Étant sur l'un de ses côtés, $[BN]$, ce dernier est un des diamètres et le triangle est rectangle en A. Ainsi, $AN^2 = BC^2 - AB^2 = (2 \times 4)^2 - 4^2 = 48$ et $AN = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$ cm.

Exercice 21 Gap filling

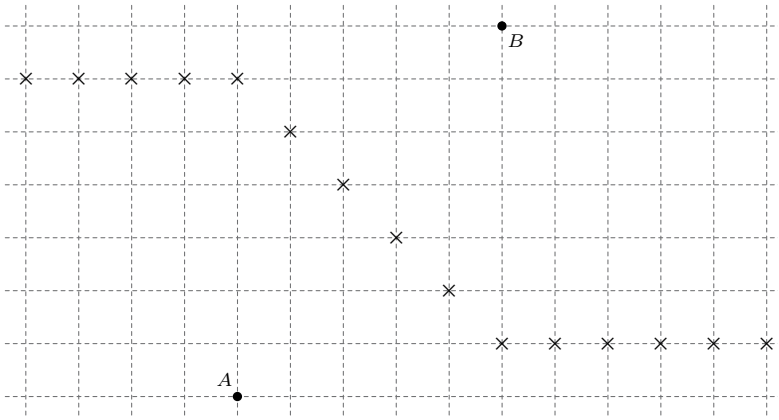
A *point* O and two lines *intersecting* at right angles at O define a rectangular *coordinate system*. O is called the *origin*, one of the lines is called the *x axis* and the other one, the *y axis* of this *rectangular* coordinate system. Each *point* of the plane can be identified by a pair of real *numbers* $(x\,;y)$ called the *coordinates* of this point. If moreover the unit on each axis is the *unit length*, the system is said to be *orthonormal*.

Exercice 22 Since the coordinate system is orthonormal,

$$\begin{aligned}
AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 + (1 + \sqrt{2} - 1)^2 = (2 + \sqrt{2})^2 + 2 \\
&= 2^2 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 8 + 4\sqrt{2}, \\
BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (-1 - \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2} - 1)^2 = 2^2 + (2 - \sqrt{2})^2 \\
&= 4 + 2^2 - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 10 - 4\sqrt{2}, \\
AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (-1 - \sqrt{2} + 1)^2 + (3 - \sqrt{2} - 1)^2 = \sqrt{2}^2 + (2 - \sqrt{2})^2 \\
&= 2 + 4 - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 8 + 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Hence, the triangle BAC is isosceles in A but is not a right triangle.

Exercice 23 Voici les nœuds à équidistance des points A et B si l'on se déplace uniquement suivant les lignes.



Chapitre IV

PREMIÈRES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Sommaire

1 Fonctions affines 48
2 Fonction carré 51
3 Fonction inverse 54
4 À la calculatrice 57
Exercices 58
Corrigé des exercices 64

Voici le premier chapitre d'analyse de l'année. « Enfin ! », me direz-vous. En effet, l'analyse consiste en l'étude des magnifiques objets que sont les fonctions et d'aucuns disent que s'y déroule la plus belle partie des mathématiques et peut-être même de l'Univers. En effet, Galilée nous l'a dit : « Le livre de la nature est écrit en langage mathématique. » Il a fallu des millénaires avant qu'émerge le concept mathématique de fonction. Cela a nécessité entre autres la construction des nombres réels, la formalisation de l'algèbre et l'idée de variable. Les découvertes qui s'en suivirent sont innombrables et les mathématiques ne peuvent plus se passer des fonctions qui sont donc indispensables à la science moderne.

Nous commencerons par observer ici certaines fonctions numériques usuelles, dites de référence, afin de nous familiariser à de nouvelles idées, à des concepts que nous généraliserons dans un chapitre ultérieur. De nombreuses fonctions seront par la suite construites à partir de ces fonctions de référence et les résultats obtenus ici pourront alors être étendus à des phénomènes plus complexes. Ces fonctions de référence modélisent des situations très courantes et sont utiles dans tous les domaines.

Définition 1 *Une fonction numérique d'un ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ est une application qui, à tout élément de l'ensemble $\mathscr{D}$, associe un* ***unique*** *élément de l'ensemble $\mathscr{A}$.*
On note $f : x \in \mathscr{D} \longmapsto f(x) \in \mathscr{A}$ *où $f(x)$ est l'image de x par f et x est un antécédent de $f(x)$ par f.*

1 Fonctions affines

Vous avez déjà pratiqué ces fonctions au collège. Nous formalisons ici cette étude.

Définition 2
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite ***affine*** *s'il existe deux réels a et b tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$.*
a *est appelé le* ***coefficient directeur*** *et* ***b*** *est l'****ordonnée à l'origine*** *de la fonction affine.*

Exemples : ◦ $f(x) = 3x - 2$ est une fonction affine : $a = 3$ et $b = -2$.
L'image de 4 par f est $f(4) = 10$ et -8 admet -2 pour antécédent par f : $f(x) = -8 \Leftrightarrow x = -2$.
◦ $g(x) = 7 - x$ est une fonction affine : $a = -1$ et $b = 7$.
L'image de 2 par g est $g(2) = 5$ et 1 admet 6 pour antécédent par g : $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 6$.
◦ $h(x) = 2x$ est une fonction affine : $a = -2$ et $b = 0$.
L'image de -3 par h est $h(-3) = -6$ et -4 admet -2 pour antécédent par h : $h(x) = -4 \Leftrightarrow x = -2$.
◦ $k(x) = -5$ est une fonction affine : $a = 0$ et $b = -5$.
L'image de -7 par k est $k(-7) = -5$ et 9 n'admet pas d'antécédent par k : $f(x) = 9 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.
◦ $\ell(x) = 2x - x^2$ n'est pas une fonction affine.
L'image de -1 par ℓ est $\ell(-1) = -3$ et 0 admet 0 et 2 pour antécédents par ℓ : $\ell(x) = 0 \Leftrightarrow x =$0 ou 2.

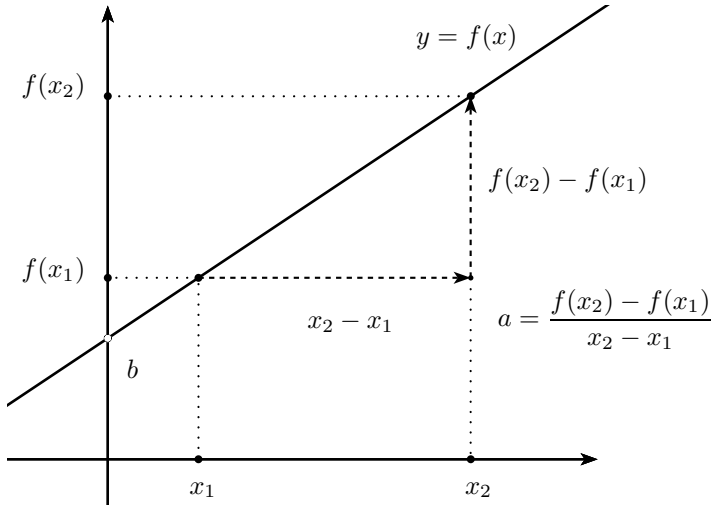
Propriété 1 *On a toujours* $\boldsymbol{b = f(0)}$ *et, pour tous réels distincts x_1 et x_2,* $\boldsymbol{a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$ *:* *le* ***taux d'accroissement*** *de f entre x_1 et x_2.*

Démonstration : On a $f(0) = a \times 0 + b = b$ et, pour tous réels x_1 et x_2, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{ax_2-ax_1}{x_2-x_1} = \frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = a$. □

Souvenez-vous que la représentation graphique d'une fonction dans un repère est l'ensemble des points du plan tels que leur ordonnée est précisément l'image de leur abscisse : $\mathscr{C}_f = \{M(x\,;y) \;/\; y = f(x)\}$.
Un point du graphe précise donc à la fois une image (y) et un antécédent (x).

Propriété 2 *La représentation graphique d'une fonction affine dans tout repère du plan est une droite.*

Ceci sera justifié dans un chapitre ultérieur. Nous voyons tout de même poindre le théorème de Thalès.
Si $f(x) = ax + b$, on dit que sa représentation graphique est la droite d'équation $y = ax + b$: tous les points de cette droite ont pour ordonnée « $a\times$ abscisse $+ b$ » et réciproquement, tout point vérifiant cette même relation est situé sur cette droite.



Activité 1 *Soient les fonctions définies par* $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 7 - x$, $h(x) = 2x$ *et* $k(x) = -5$.

1. *Pour chacune des quatre fonctions, calculer les images de* -2, 0, 1 *et* 3 *et les comparer.*
2. *Retrouver ensuite chacun des coefficients directeurs et ordonnées à l'origine.*
3. *Tracer les représentations graphiques* $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ *et* $\mathscr{C}_k$ *et les observer.*

Définition 3 ***Cas particuliers***

- *Si* $b = 0$, *la fonction* $\boldsymbol{x \longmapsto f(x) = a\,x}$ *est dite* ***linéaire****.*
  Sa représentation graphique est alors une droite passant par l'origine du repère.
  Ces fonctions ***linéaires*** *traduisent exactement les situations de* ***proportionnalité****.*
- *Si* $a = 0$, *la fonction* $\boldsymbol{x \longmapsto f(x) = b}$ *est dite* ***constante****.*
  Sa représentation graphique est alors une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemples : La fonction $h(x) = 2x$ est linéaire et la fonction $k(x) = -5$ est constante.

Vous savez bien qu'il y a plusieurs types de droites : quand on les observe de « gauche à droite », il y a celles qui « montent », celles qui « descendent », les « horizontales » et les « verticales » (nous verrons ultérieurement que ce dernier cas n'est pas la représentation graphique d'une fonction). Dans l'activité 1, nous avons observé que cela traduit le fait que la fonction affine associée conserve ou non l'ordre. On dira que la fonction est *croissante* si elle conserve l'ordre, *décroissante* si elle l'inverse. Lorsque l'on détermine si une fonction est croissante ou décroissante, on dit que l'on étudie ses *variations*. Vous vous doutez bien qu'en général une fonction, tel un ascenseur, n'a pas toujours le même comportement, mais dans le cas d'une fonction affine, si : elle ne peut pas varier, elle ne peut pas changer de variations. On dit qu'elle est *monotone*.

Théorème 1 *Soit* $f(x) = ax + b$ *une fonction affine.*

- f *est* ***strictement croissante*** i.e. f *conserve l'ordre si et seulement si* $\boldsymbol{a > 0}$.
- f *est* ***strictement décroissante*** i.e. f *inverse l'ordre si et seulement si* $\boldsymbol{a < 0}$.
- f *est* ***constante*** *si et seulement si* $\boldsymbol{a = 0}$.
- *Une fonction affine est donc* ***monotone***.

En bref, pour une fonction affine, (dé)croissante un jour, (dé)croissante toujours !

Démonstration : Soient x_1 et x_2 deux réels distincts.

On a $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow ax_1+b < ax_2+b \Leftrightarrow ax_1 < ax_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x_1 < x_2 & \text{et} & a > 0 \\ x_1 > x_2 & \text{et} & a < 0. \end{array} \right.$

Ainsi, f conserve l'ordre pour a positif et inverse l'ordre pour a négatif.

Par ailleurs, $f(x_1) = f(x_2) \iff ax_1 = ax_2 \iff a = 0$ car x_1 et x_2 sont distincts. □

Exemples : ◦ $f(x) = 3x - 2$ est une fonction affine croissante car $a = 3 > 0$.

◦ $g(x) = 7 - x$ est une fonction affine décroissante car $a = -1 < 0$.

◦ $h(x) = 2x$ est une fonction affine croissante car $a = 2 > 0$.

◦ $k(x) = -5$ est une fonction affine constante car $a = 0$.

◦ $\ell(x) = 2x - x^2$ n'est pas une fonction affine : on ne peut encore rien préciser.

Penchons-nous sur un cas très courant : lorsque la fonction affine n'est pas constante c.-à-d. $a \neq 0$.

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$, la fonction affine $f(x) = ax + b$ ne s'annule qu'en $-\dfrac{b}{a}$.

En effet, $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$. On dit que $-\dfrac{b}{a}$ est la **racine** de la fonction affine f.

Le graphe de f est donc l'unique droite passant par les points de coordonnées $(0\,;\,b)$ et $\left(-\frac{b}{a}\,;\,0\right)$.

Exemples :

◦ La fonction $f(x) = 3x - 2$ s'annule en $\frac{2}{3}$ et son graphe est la droite passant par $(0\,;\,-2)$ et $\left(\frac{2}{3}\,;\,0\right)$.

◦ La fonction $g(x) = 7 - x$ s'annule en 7 et son graphe est la droite passant par $(0\,;\,7)$ et $(7\,;\,0)$.

◦ La fonction $h(x) = 2x$ s'annule en 0 et son graphe est la droite passant par $(0\,;\,0)$ et $(1\,;\,2)$.

◦ La fonction $k(x) = -5$ ne s'annule pas et son graphe est la droite passant par $(0\,;\,-5)$ et $(2\,;\,-5)$.

De plus, on a, pour $a > 0$ $ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$

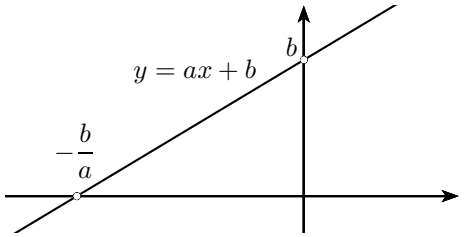
et pour $a < 0$ $ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$.

Ceci est bien rassurant car si une fonction est croissante alors elle est négative « avant » de s'annuler, positive « après » et si elle est décroissante, alors elle est positive « avant » de s'annuler, négative « après ». Afin de résumer tout ceci, on dresse souvent des tableaux de signes, de variations et l'on trace les représentations graphiques. Dans un tableau de signes, le « + » signifie que $f(x) > 0$ pour des x com-

pris entre les bornes spécifiées et le « - », qu'elle est négative entre ces bornes. Dans un tableau de variation, une flèche qui « monte » signifie que la fonction conserve l'ordre, *i.e.* croissante, entre les bornes spécifiées, et une flèche qui « descend », qu'elle inverse l'ordre, *i.e.* décroissante, entre ces bornes.

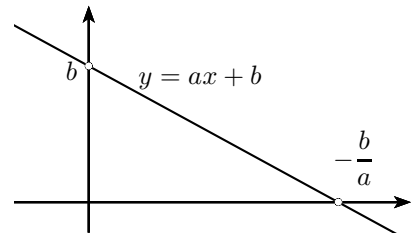
$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$
f		0 ↗	



$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$
f		0 ↘	



Exemple : Déterminons l'équation de la droite passant par les points $A(2;-4)$ et $B(-1;5)$ puis dressons les tableaux de signes et de variations de la fonction affine f associée :
On a $f(2) = -4$ et $f(-1) = 5$ donc $a = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{-4-5}{3} = -3$ d'où $f(x) = -3x+b$. Ainsi, $f(2) = -3\times 2+b = -4$ et $b = -4+6 = 2$. Vérifions pour le point B : $-3 \times (-1) + 2 = 5 = f(-1)$. On a donc $f(x) = -3x + 2$ qui est affine décroissante car $a = -3 < 0$, qui s'annule en $-\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ et a pour tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x) = -3x + 2$	$+$	0	$-$

2 Fonction carré

Définition 4 *La **fonction carré** est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *qui à tout nombre associe son carré :*

$$\boldsymbol{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = x^2}.$$

Activité 2

1. *À l'aide de la calculatrice, tracer le graphe de la fonction carré (cf. p. 57). Qu'observe-t-on ?*
2. *Calculer de tête les images de* -4, -3, -1, 0, 2, 5 *et les comparer. Que remarque-t-on ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?*

3. *Calculer de tête les images de* -5, -2, 1, 3 *et* 4. *Que remarque-t-on ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?*

4. *Déterminer de tête les antécédents éventuels de* 4, 9, 1, 0, 5, 11, -9 *et* -36.

Propriété 3 *La fonction carré est* ***strictement décroissante*** *sur l'intervalle* $]-\infty\,;0]$ *et* ***strictement croissante*** *sur l'intervalle* $[0\,;+\infty[$.

Démonstration : • Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
On a $a \times a < b \times a$ et $a \times b < b \times b$ puisque a et b sont positifs.
Ainsi, $a^2 < ab < b^2$ et $f(a) < f(b)$.
f conserve l'ordre sur $\mathbb{R}^+$: f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• Soient a et b deux réels tels que $a < b < 0$. On a $a \times a > b \times a$ et $a \times b > b \times b$ puisque a et b sont négatifs. Ainsi, $a^2 > ab > b^2$ et $f(a) > f(b)$.
f inverse l'ordre sur $\mathbb{R}^-$: f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$. □

Conséquences *:*

- Deux nombres **positifs** sont rangés dans le même ordre que leur **carré**.
- Deux nombres **négatifs** sont rangés dans l'ordre contraire à leur **carré**.

Puisque $f(0) = 0^2 = 0$, on obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	
x^2		↘	0	↗	

Représentation graphique

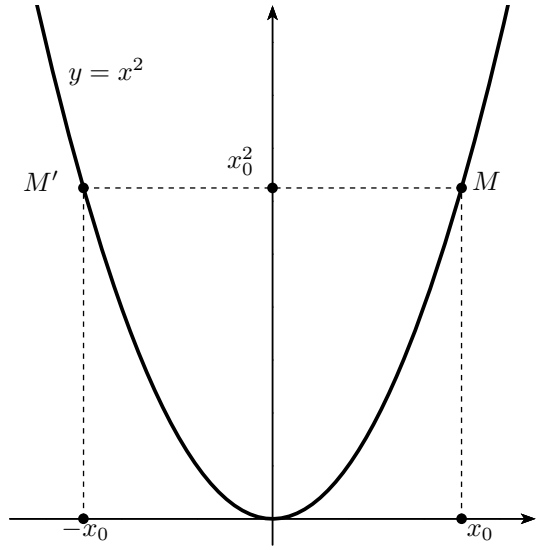
La représentation graphique $\mathscr{P}$ de la fonction carré s'appelle une parabole.
Son équation est $\boldsymbol{y = x^2}$.

Elle est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ est positif.
On dit que la fonction carré admet sur $\mathbb{R}$ un **minimum** en 0 valant $0^2 = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(0)$.
L'activité 2 nous a fait remarquer le résultat suivant.

Propriété 4 *Pour tout réel* x, $f(-x) = f(x)$.
On dit que la fonction carrée est ***paire****. Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Démonstration : En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
Les points $\left(-x\,;\,x^2\right)$ et $\left(x\,;\,x^2\right)$ appartiennent donc tous deux à la parabole d'équation $y = x^2$. □

Elle est représentée en page suivante.



Fonction carré et équations

Propriété 5 ***Équation $x^2 = a$*** *Soit a un nombre réel.*

- *Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution réelle.*
- *Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ admet une unique solution $x = 0$.*
- *Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet exactement deux solutions distinctes $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.*

Exemples : ◦ L'équation $x^2 = -9$ n'admet pas de solution réelle car $-9 < 0$.

◦ L'équation $x^2 + 1 = 1$ équivaut à $x^2 = 0$ et admet donc 0 pour unique solution.

◦ L'équation $x^2 - 3 = 13$ équivaut à $x^2 = 16$ et admet donc $\sqrt{16} = 4$ et -4 pour solutions.

Fonction carré et encadrements

En s'aidant de la parabole $y = x^2$, il est aisé de résoudre des problèmes d'encadrements tels que les suivants en passant d'un axe à un autre au moyen de la parabole.

◦ $x > 7 \Longrightarrow x^2 \in]\,49\,;+\infty\,[$.

◦ $x \leqslant -3 \Longrightarrow x^2 \in [\,9\,;+\infty\,[$.

◦ $x^2 \leqslant 5 \iff x \in \left[\,-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\,\right]$.

◦ $x^2 > 9 \iff x \in]-\infty\,;-3\,[\cup]\,3\,;+\infty\,[$.

◦ $x \in]\,2\,;6\,] \Longrightarrow x^2 \in]\,4\,;36\,]$.

◦ $x \in]-4\,;-1\,] \Longrightarrow x^2 \in]\,1\,;16\,]$.

◦ $x \in]-3\,;2\,[\Longrightarrow x^2 \in [\,0\,;9\,[$.

◦ $x \in]-2\,;5\,] \Longrightarrow x^2 \in [\,0\,;25\,]$.

◦ $x^2 \in]\,7\,;14\,] \iff x \in \left[\,-\sqrt{14}\,;-\sqrt{7}\,\right[\cup\left]\,\sqrt{7}\,;\sqrt{14}\,\right]$.

◦ $x < 8 \Longrightarrow x^2 \in [\,0\,;+\infty\,[$.

3 Fonction inverse

On rappelle que, si x est un réel non nul, son inverse est $\frac{1}{x}$, l'unique réel qui multiplié par x donne 1 .
Le réel 0 ne peut donc avoir d'inverse car tout réel multiplié par 0 donne 0 et non 1. On dit que 0 est une *valeur interdite* de la fonction inverse suivante.

Définition 5 *La **fonction inverse** est la fonction qui à tout nombre réel non nul associe son inverse :*

$$\boldsymbol{f \ : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}}.$$

Activité 3

1. *À l'aide de la calculatrice, tracer le graphe de la fonction inverse (cf. p. 57). Qu'observe-t-on ?*
2. *Calculer de tête les images de -4, -3, $-\frac{5}{4}$, -1, -0.5, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{8}{7}$, 2 et 5 et les comparer. Que remarque-t-on ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?*
3. *Calculer de tête les images de -5, -2, $-\frac{8}{7}$, -1, $-\frac{2}{3}$, 0.5, 1, $\frac{5}{4}$, 3 et 4. Que remarque-t-on ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?*
4. *Déterminer de tête les antécédents éventuels de -6, $-\frac{7}{6}$, -1, 0, $\frac{4}{9}$, 1, $\frac{7}{3}$ et 11.*

Propriété 6
*La fonction inverse est **décroissante** sur* $\boldsymbol{]-\infty\,;0[}$ *et **décroissante** sur* $\boldsymbol{]0\,;+\infty[}$.

Démonstration : Soient a et b deux réels non nuls et de même signe tels que $a \leqslant b$.
On a $ab > 0$, $b - a \geqslant 0$ et $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$.
Ainsi, $f(a) - f(b)$ est positif et $f(a) \geqslant f(b)$: f inverse l'ordre de a et b pour peu qu'ils soient de même signe. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. □

Remarques :

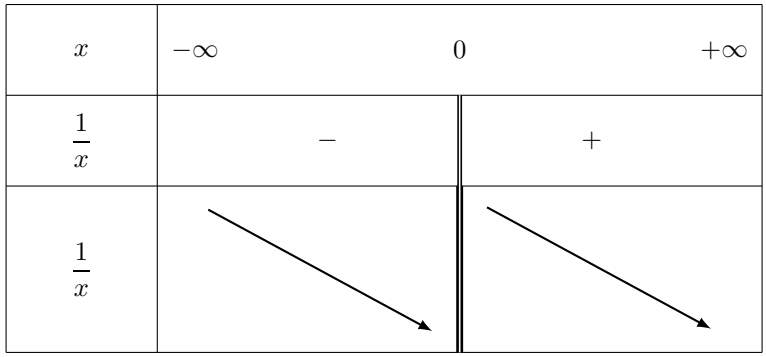
- La fonction inverse conserve les signes :
$$x > 0 \iff \tfrac{1}{x} > 0 \quad \text{et} \quad x < 0 \iff \tfrac{1}{x} < 0.$$
- La fonction inverse ne s'annule jamais *i.e.* elle n'admet pas de racine :
$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{1}{x} \neq 0.$
- $f(x) = a \in \mathbb{R}^* \iff x = \frac{1}{a}$. Tout réel non nul admet un unique antécédent par la fonction inverse.
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(f(x)) = x.$ En effet, $f(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1/x} = x.$
« L'inverse de l'inverse, c'est le nombre lui-même ».

Attention : On ne peut surtout pas dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Premièrement, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle et l'on verra que les variations ne s'étudient que sur des intervalles et deuxièmement, la fonction inverse conserve les signes donc l'inverse d'un négatif reste inférieur à l'inverse d'un positif : $-3 \leqslant 2$ et $-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2}$ par exemple.

Conséquences *:*

- Deux réels non nuls et de **même** signe sont rangés dans l'ordre contraire à leur **inverse**.
- Deux réels non nuls et de signes **opposés** sont rangés dans le même ordre que leur **inverse**.

Ainsi, la fonction inverse admet le tableau de signes et de variations suivant, la double barre marquant la valeur interdite.



Représentation graphique

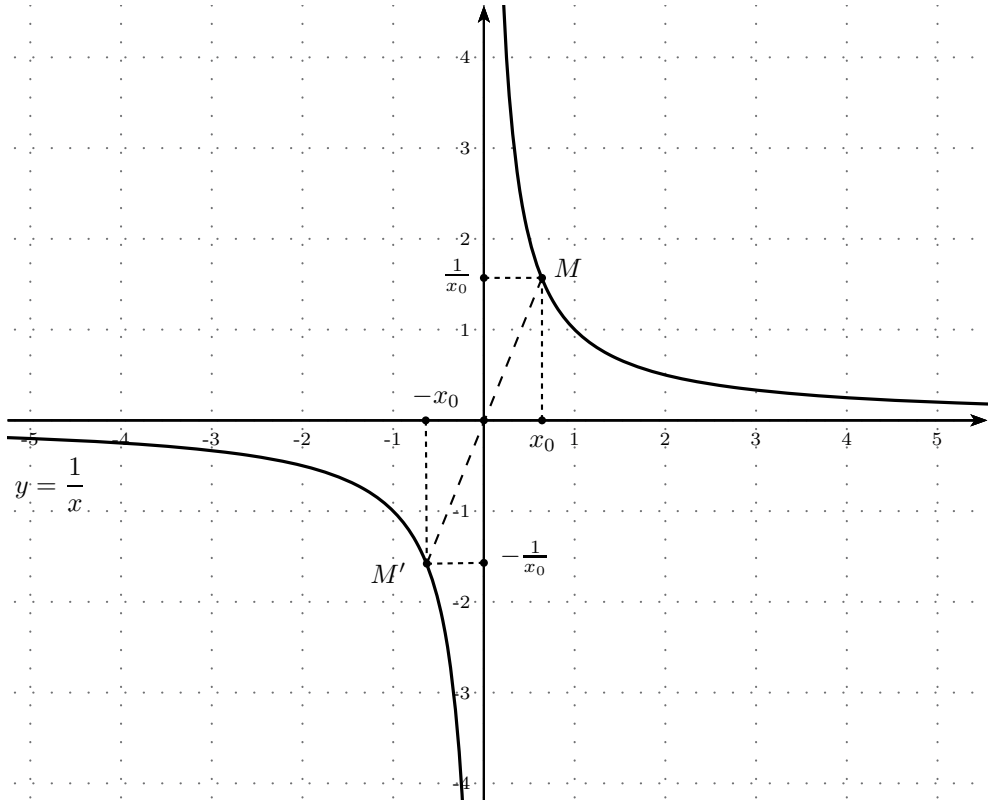
La représentation graphique $\mathscr{H}$ de la fonction inverse s'appelle une hyperbole. Son équation est $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x}}$.

L'activité 3 nous a fait remarquer le résultat suivant.

Propriété 7 *Pour tout réel non nul x, $f(-x) = -f(x)$. On dit que la fonction inverse est* ***impaire****.*
Sa représentation graphique dans un repère est alors symétrique par rapport à l'origine.

Démonstration : En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.
Les points $\left(-x\,;\,-\frac{1}{x}\right)$ et $\left(x\,;\,\frac{1}{x}\right)$ appartiennent donc tous deux à l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$. □

Elle est représentée en page suivante.



Fonction inverse et encadrements

En s'aidant de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, il est aisé de résoudre des problèmes d'encadrements tels que les suivants en passant d'un axe à un autre au moyen de l'hyperbole.

- $x > 3 \iff \frac{1}{x} \in \left]0\,;\frac{1}{3}\right[$.
- $x \leqslant -\frac{1}{4} \iff \frac{1}{x} \in [-4\,;0[$.
- $\frac{1}{x} \geqslant 5 \iff x \in \left]0\,;\frac{1}{5}\right]$.
- $\frac{1}{x} < -\frac{7}{3} \iff x \in \left]-\frac{3}{7}\,;0\right[$.
- $x \in]2\,;6] \iff \frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{6}\,;\frac{1}{2}\right[$.
- $x \in [-4\,;-1[\iff \frac{1}{x} \in]-1\,;-\frac{1}{4}]$.
- $x \in \left]-3\,;\frac{1}{2}\right] \setminus \{0\} \iff \frac{1}{x} \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[\cup [2\,;+\infty[$.
- $\frac{1}{x} \in \left]-\frac{6}{7}\,;5\right] \iff x \in \left]-\infty\,;-\frac{7}{6}\right[\cup \left[\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$.

4 À la calculatrice

Les grandes lignes : entrer l'expression de la fonction, le début et le pas du tableau avant de l'afficher, le cadre de la fenêtre avant de tracer la courbe.

- Pour entrer l'expression d'une fonction :

[TI] : [f(x)] puis entrer l'expression de la fonction et valider.
[Casio] : [Menu] Table (ou Graphe) puis entrer l'expression de la fonction et valider.
[TI+Casio] : Le signe « = » peut être en surbrillance (fonction activée) ou non : y aller avec les flèches et valider.

- Pour dresser un tableau de valeurs de cette fonction :

[TI] : [2nde] [Fenêtre] (déf. table) puis entrer la première valeur (Déb. Table) et le Pas.
Afficher ensuite le tableau : [2nde] [Graphe] (Table).
Pour avoir des valeurs de son choix, il suffit de mettre les « valeurs » en mode « Dem » sur l'écran « def. table ».
[Casio] : Sur l'écran précédent (menu Table), appuyer sur [F5] (Tabl). Entrer les valeurs de départ, de fin et le pas (pitch) puis valider : [EXE].
Pour avoir des valeurs de son choix, il suffit de taper l'abscisse de son choix dans la colonne « X ».

- Pour tracer la courbe représentative de cette fonction :

[TI] : [Fenêtre] puis entrer les bornes de la fenêtre voulue (grad. signifie graduation, peu utile en pratique). Afficher ensuite la courbe : [Graphe].
Si plusieurs fonctions sont activées, elles sont tracées dans l'ordre Y_1, Y_2,...
Pour déplacer un curseur sur une courbe, [Trace] puis les flèches gauche et droite. Les flèches haut et bas changent le curseur de courbe le cas échéant. Les coordonnées du curseur sont affichées en bas de l'écran.
Le mode [Calculs] permet de déterminer des valeurs, des racines, des intersections,...
[Casio] : [Shift] [F3] (V-Window) puis entrer les bornes de la fenêtre voulue (scale correspond aux graduations, peu utile en pratique).
Afficher ensuite la courbe : [Menu] [Graph] [F6] (Draw).
Si plusieurs fonctions sont activées, elles sont tracées dans l'ordre Y_1, Y_2,...
Pour déplacer un curseur sur une courbe, [Shift] [F1] (Trace) puis les flèches gauche et droite. Les flèches haut et bas changent le curseur de courbe le cas échéant. Les coordonnées du curseur sont affichées en bas de l'écran.

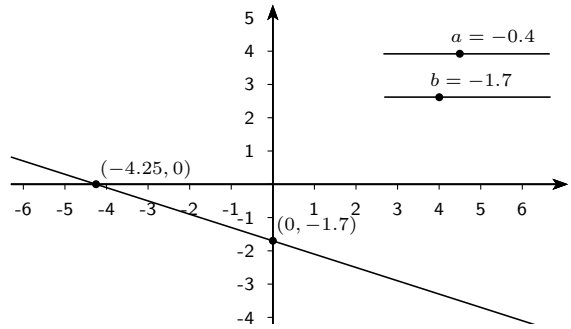
Exercices

PREMIÈRES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonctions affines

Exercice 1 Geogebra

Dans une fenêtre Geogebra, reproduire la figure ci-contre où la droite est la représentation de la fonction affine $f(x) = ax + b$.
Qu'observera-t-on si l'on fait varier les valeurs de a et b sur les curseurs ? Le vérifier.



Exercice 2

1. f est une fonction affine telle que $f(2) = -2$ et $f(0) = -3$.
   Si $x \in [-5\,;7]$, quel est le meilleur encadrement de $f(x)$?
2. g est une fonction affine telle que $g(3) = 5$ et $g(1) = 8$.
   Si $x \in]-1\,;4]$, quel est le meilleur encadrement de $g(x)$?

Exercice 3 Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 7 - 4x$.

Exercice 4 Le tableau ci-dessous donne le signe d'une fonction affine f.
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles peuvent convenir pour f ? $a : x \longmapsto x - 5$
$b : x \longmapsto 2x + 10$ $c : x \longmapsto \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ $d : x \longmapsto -3x - 15$

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 5 The *gradient-intercept method* is the quickest and most straightforward method to draw linear graphs. For the function $f(x) = 2x + 3$ for instance, the ... is 2 and the constant term, the ..., is 3. To draw its graph, first mark the point ... then move ... unit across and ... units up to show the gradient and mark the point you're at. Finally, draw the straight line.
To find the equation of a line from its graph, just find the ... then measure the ....

Exercice 6 Le but est de montrer, sans faire de calcul ni de dessin, qu'il n'existe pas de fonction affine dont la représentation graphique dans un repère du plan passe par les points $A\,(-5\,;\,11\,)$, $B\,(-4\,;\,13\,)$ et $C\,(-3\,;\,12\,)$.

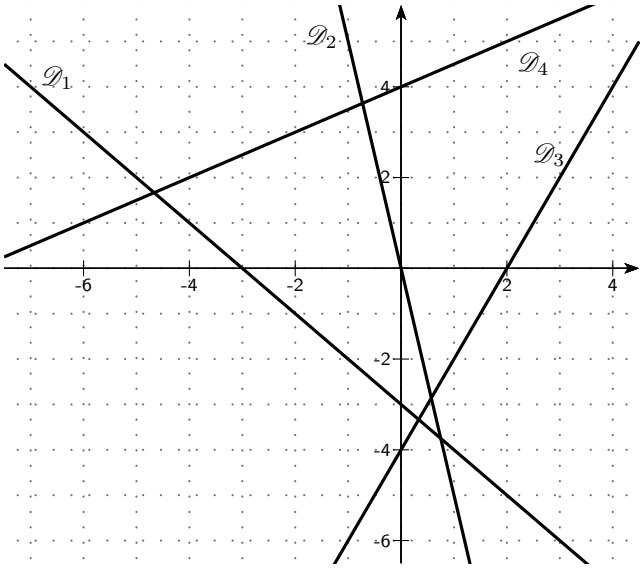
On note f et g les fonctions affines ayant pour représentations graphiques respectives les droites (AB) et (BC).

1. Que peut-on dire des fonctions f et g si le point $C \in (AB)$?
2. En observant les coordonnées de A et B, déterminer le sens de variation de f.
3. Préciser de même les variations de la fonction g.
4. Conclure.

Exercice 7

Les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$ sont les représentations graphiques respectives des fonctions affines f, g, h et k dans un repère.

1. Retrouver le tableau de signes de chacune des fonctions parmi les propositions ci-dessous.
2. Déterminer ensuite graphiquement l'expression en fonction de x de chacune des fonctions f, g, h et k.



(α)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

(β)

x	$-\infty$		-8		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

(γ)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

(δ)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

(ε)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

(ζ)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

(η)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

(θ)

x	$-\infty$		-8		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Fonction carré

Exercice 8 Ce tableau donne le signe d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

1. Quel est le signe de a ? Quel est le signe de b ?
2. Le point de coordonnées $(\,a\,;\,b\,)$ appartient à la courbe représentative de la fonction carré. Calculer a et b.

Exercice 9 Dans chacun des cas, comparer a^2 et b^2 sans utiliser la calculatrice.

(a) $a = 3,14$ et $b = \pi$

(b) $a = \frac{1}{3}$ et $b = 0,333$

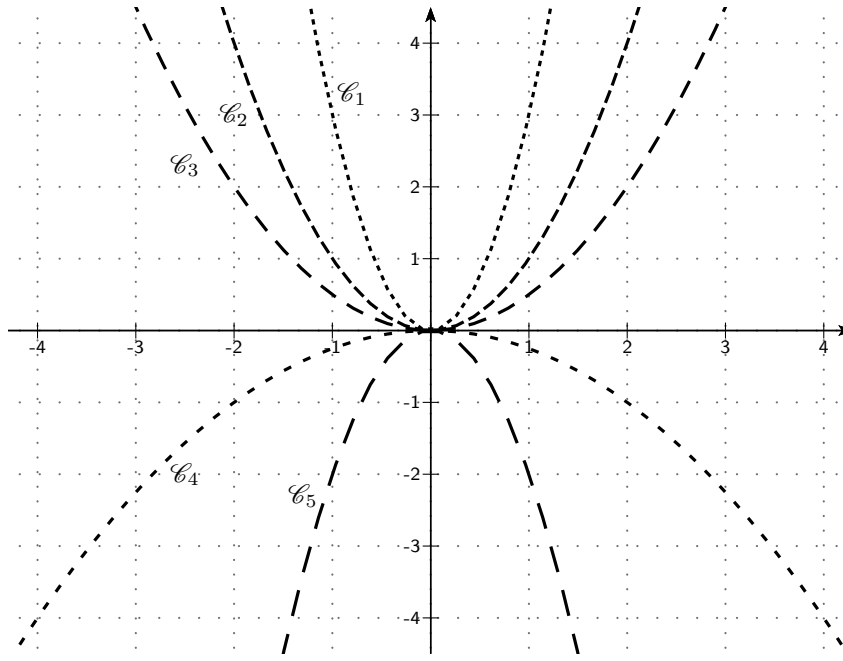
(c) $a = -\frac{1}{7}$ et $b = -\frac{1}{9}$

(d) $a = 7$ et $b = 4\sqrt{3}$

(e) $a = -2$ et $b = 1$

(f) $a = 5$ et $b = -\sqrt{2}$

Exercice 10 Chaque courbe tracée ci-dessous a une équation du type $y = kx^2$. Déterminer la valeur de k pour chacune d'entre elles.



Exercice 11 Étudier les variations des fonctions suivantes sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Y admettent-elles un minimum ? un maximum ?

(a) $f(x) = x^2 - 2$

(b) $g(x) = -x^2$

(c) $h(x) = -x^2 + 10$

(d) $k(x) = -6 + x^2$

Exercice 12 On considère la fonction $g : x \longmapsto (3-x)^2$.

1. Montrer que g est décroissante sur $]-\infty\,;3\,]$.
2. En déduire le meilleur encadrement de $g(x)$ lorsque $x \in]-4\,;2\,]$.

Exercice 13 On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = (x-1)^2$.

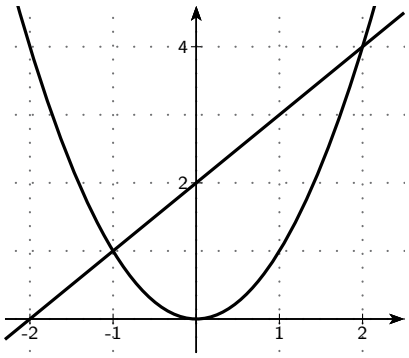
1. Démontrer que k est décroissante sur $]-\infty\,;1\,]$ et croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer le meilleur encadrement de $k(x)$ dans les deux cas suivants :
   (a) $-3 < x \leqslant 1$ (b) $x \in [\,2\,;5\,[$.

Exercice 14 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x+2)^2$.

1. Visualiser la représentation graphique de f à l'écran d'une calculatrice et conjecturer ses variations.
2. Démontrer cette conjecture.
3. En déduire que f admet un maximum. En quelle valeur est-il atteint et combien vaut-il ?
4. Déterminer le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque x parcourt $[\,-1\,;3\,]$, $[\,-4\,;-3\,]$, $[\,-2\,;0\,]$ puis $]-4\,;2\,[$.

Exercice 15 Using graphs to solve quadratic equations

1. Explain why this graph shows the solutions of the equation : $x^2 - x - 2 = 0$.
2. Draw similar graphs in order to solve the following equations :
   (a) $x^2 + 3x + 2 = 0$,
   (b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$,
   (c) $x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$.



Exercice 16 Les triangles de Pete

Pete possède de magnifiques triangles rectangles ayant de surprenantes propriétés. En effet, l'hypoténuse de son triangle carmin est de longueur double de celle de l'un de ses côtés et l'aire de son triangle indigo vaut le carré de la longueur de l'un des côtés adjacents à son angle droit.

On note x la longueur de ces côtés.

Exprimer en fonction de x l'aire $\mathscr{A}_C$ de cet étonnant triangle carmin et la longueur h_I de l'hypoténuse de ce déroutant triangle indigo.

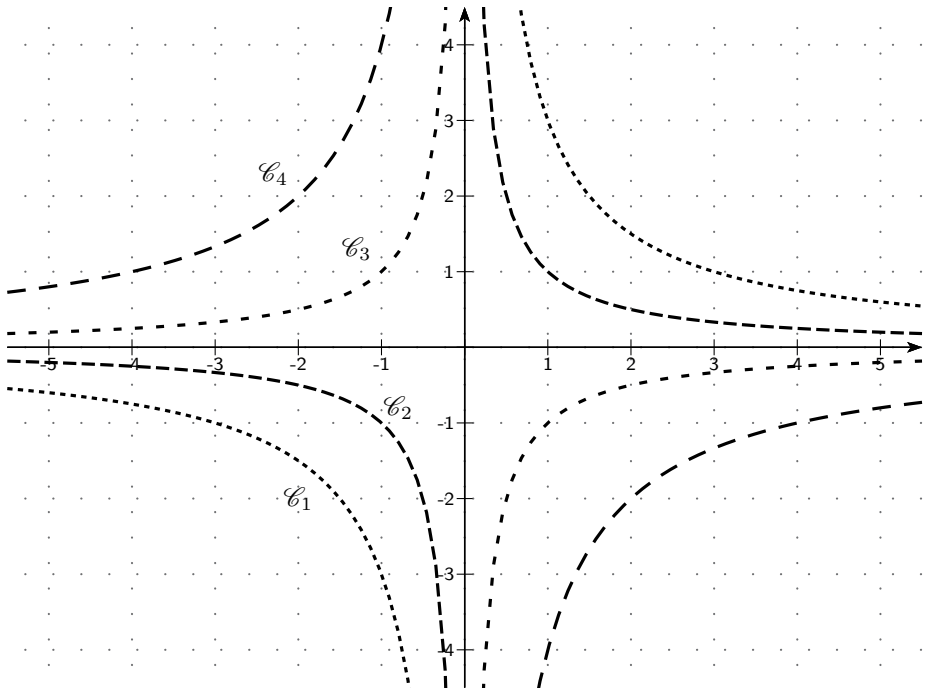
Fonction inverse

Exercice 17 Ce tableau donne le signe d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

1. Quel est le signe de a ? Quel est le signe de b ?
2. Le point de coordonnées $(\,a\,;\,b\,)$ appartient à la courbe représentative de la fonction inverse. Calculer a et b.

Exercice 18 Chaque courbe tracée ci-dessous a une équation du type $y = \dfrac{k}{x}$.
Déterminer la valeur de k pour chacune d'entre elles.



Exercice 19 Déterminer un encadrement du réel $1 - \dfrac{1}{x}$ lorsque $x \in \left[\,\frac{1}{2}\,;4\,\right]$.

Exercice 20 Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 2 - \dfrac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $]\,-\infty\,;0\,[$ et $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Sur l'intervalle $]\,1\,;2\,]$, la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
3. Montrer que la fonction f admet un maximum valant 3 sur l'intervalle $]\,-\infty\,;-1\,]$.

Problèmes de synthèse

Exercice 21 Histoires de boucles

1. Créer un programme donnant les images par la fonction inverse des entiers non nuls jusqu'à un entier donné.
2. Créer une fonction donnant le premier entier dont l'image par la fonction carré est supérieure à un nombre donné.

Exercice 22 Soient les fonctions de référence $a(x) = 4 - 5x$, $b(x) = 2x - 3$, $c(x) = x^2$, et $i(x) = \frac{1}{x}$, définies sur leur ensemble de définition usuel et soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{I}$ leur représentation graphique dans un repère.
À laquelle ou auxquelles de ces courbes les points $A(0\,;0)$, $B(1\,;-1)$, $C(1\,;1)$, $D(-2\,;4)$, $E(4\,;-2)$, $F(-1\,;1)$, $G(0\,;-1)$, $H(-1\,;-1)$, $I(-2\,;-7)$ et $J(5\,;0,2)$ appartiennent-ils ?

Exercice 23 VouF ?

(a) Tout réel est inférieur ou égal à son carré.

(b) Tout réel positif non nul est supérieur ou égal à son inverse.

Exercice 24 Comparaison de x^2 et $\dfrac{1}{x}$

1. Justifier que pour tout $x < 0$, $\dfrac{1}{x} < x^2$.
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la comparaison de x^2 et $\dfrac{1}{x}$ lorsque $x > 0$.
3. Démonstration utilisant les variations. On note $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
   (a) Compléter les phrases suivantes.
   La fonction f est ... sur $]\,0\,;1\,]$ donc, pour tout $x \in]\,0\,;1\,]$, $f(x) \ldots f(1)$.
   La fonction g est ... sur $]\,0\,;1\,]$ donc, pour tout $x \in]\,0\,;1\,]$, $g(x) \ldots g(1)$.
   Or $f(1) \ldots g(1)$ donc, pour tout $x \in]\,0\,;1\,]$, on a $x^2 \ldots \dfrac{1}{x}$.
   (b) Reprendre ce raisonnement sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.
4. Démonstration algébrique.
   (a) Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $x^2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}$.
   (b) Justifier alors que, pour tout $x > 0$, $x^2 - \dfrac{1}{x}$ a le même signe que $(x-1)$.
   (c) Conclure.

Exercice 25 Soient le point $F(0\,;1)$ et la droite $\Delta : y = -1$ dans un r.o.n.
Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan à équidistance du point F et de la droite Δ. F est alors appelé le foyer et Δ la directrice de cet ensemble reconnaissable.
Dans une fenêtre GeoGebra, tracer la courbe obtenue et vérifier qu'elle répond bien au problème posé.

Il est plus que temps de filer à la page 265 faire le devoir n° 5.

Corrigé des exercices

PREMIÈRES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonctions affines

Activité 1 *Soient* $f(x)=3x-2$, $g(x)=7-x$, $h(x)=2x$ *et* $k(x)=-5$.

1. *On a* $f(-2)=3(-2)-2=-8$, $f(0)=3\times 0-2=-2$, $f(1)=3\times 1-2=1$, $f(3)=3\times 3-2=7$ *et* $f(-2)<f(0)<f(1)<f(3)$ *;*
   $g(-2)=7-(-2)=9$, $g(0)=7-0=7$, $g(1)=7-1=6$, $g(3)=7-3=4$ *et* $g(-2)>g(0)>g(1)>g(3)$ *;* $h(-2)=2(-2)=-4$, $h(0)=2\times 0=0$, $h(1)=2$, $h(3)=2\times 3=6$ *et* $h(-2)<h(0)<h(1)<h(3)$ *;*
   $k(-2)=k(0)=k(1)=k(3)=-5$.
2. *On a* $a_f=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{7-1}{2}=3$ *et* $b_f=f(0)=-2$,
   $a_g=\frac{g(0)-g(-2)}{0-(-2)}=\frac{7-9}{2}=-1$ *et* $b_g=g(0)=7$, $a_h=\frac{h(0)-h(3)}{0-3}=\frac{0-6}{-3}=2$ *et* $b_h=h(0)=0$, $a_k=\frac{k(-2)-k(1)}{-2-1}=\frac{-5-(-5)}{-3}=0$ *et* $b_k=k(0)=-5$.
3. *On trace alors quatre droites et lorsqu'on les parcourt de « gauche à droite », $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ « montent », $\mathscr{C}_g$ « descend » et $\mathscr{C}_k$ est « horizontale ».*

Exercice 1 On observe graphiquement que :
• lorsque b varie, la droite d'équation $y=ax+b$ se déplace parallèlement de haut en bas,
• lorsque a varie, l'inclinaison de la droite d'équation $y=ax+b$ change et un point reste fixe : celui sur l'axe des ordonnées ; la droite est « montante » pour $a>0$, « descendante » pour $a<0$ et « horizontale » pour $a=0$

Exercice 2

1. On cherche a et b tels que $2a+b=-2$ et $0a+b=-3$ donc $b=-3$ et $2a=-2-b=-2+3=1$ d'où $a=\frac{1}{2}$ et $f(x)=\frac{1}{2}x-3$, qui est croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour $-5\leqslant x\leqslant 7$, $f(-5)=-\frac{11}{2}\leqslant f(x)\leqslant f(7)=\frac{1}{2}$.
2. On cherche a et b tels que $3a+b=5$ et $1a+b=8$ donc $b=8-a$ et $3a+8-a=5$ d'où $2a=-3$ et $a=-\frac{3}{2}$, $b=8-(-\frac{3}{2})=\frac{19}{2}$: $g(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{19}{2}$, qui est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, pour $-1\leqslant x\leqslant 4$, $g(4)=\frac{7}{2}\leqslant g(x)\leqslant g(-1)=11$.

Exercice 3 La fonction $f(x)=7-4x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $-4<0$ et s'annule en $\frac{7}{4}$ ($7-4x=0$) d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 4 Ce tableau de signes est celui d'une fonction affine croissante s'annulant en -5 donc seules les fonctions b et c peuvent convenir.

Exercice 5 The *gradient-intercept method* is the quickest and most straightforward method to draw linear graphs. For the function $f(x) = 2x + 3$ for instance, the *gradient* is 2 and the constant term, the *intercept*, is 3. To draw its graph, first mark the point $(0\,;3)$ then move 1 unit across and 2 units up to show the gradient and mark the point you're at. Finally, draw the straight line.
To find the equation of a line from its graph, just find the y-*intercept* then measure the *gradient*.

Exercice 6 $A(-5\,;11)$, $B(-4\,;13)$ et $C(-3\,;12)$

1. Si le point C appartient à la droite (AB) alors les droites (AB) et (BC) sont confondues et les fonctions f et g sont identiques.
2. On observe que $x_A < x_B$ et $y_A = f(x_A) < f(x_B) = y_B$ donc la fonction affine f est croissante.
3. On observe que $x_B < x_C$ et $y_B = f(x_B) > f(x_C) = y_C$ donc la fonction affine g est décroissante.
4. Les fonctions f et g ayant des variations différentes, elles ne sont pas identiques et les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 7

1. $\mathscr{D}_1$: f admet le tableau de signes (η) car elle s'annule en -3 et elle est décroissante.
   $\mathscr{D}_2$: g admet le tableau de signes (δ) car elle s'annule en 0 et elle est croissante.
   $\mathscr{D}_3$: h admet le tableau de signes (γ) car elle s'annule en 2 et elle est croissante.
   $\mathscr{D}_4$: k admet le tableau de signes (θ) car elle s'annule en $x_0 < -7$ et elle est croissante.
2. Par lecture graphique des ordonnées à l'origine et des coefficients directeurs, on a
   $f(x) = -x - 3$, $g(x) = -5x$, $h(x) = 2x - 4$ et $k(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

Fonction carré

Activité 2

1. *On observe que le graphe de la fonction carré est situé au-dessus de l'axe des abscisses et qu'il est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Lorsqu'on la parcourt de « gauche à droite », la courbe « descend » sur* $]-\infty\,;0[$ *et « monte » sur* $]0\,;+\infty[$.
2. *D'une part* $-4 < -3 < -1 < 0$ *et* $(-4)^2 = 16 > (-3)^2 = 9 > (-1)^2 = 1 > 0^2$ *et d'autre part,* $0 < 2 < 5$ *et* $0^2 = 0 < 2^2 = 4 < 5^2 = 25$ *: on retrouve l'allure descendante puis montante de la courbe.*

CORRIGÉS

3. *On a* $(-5)^2 = 25 = 5^2$, $(-2)^2 = 4 = 2^2$, $1^2 = (-1)^2$, $3^2 = 9 = (-3)^2$ *et* $4^2 = 16 = (-4)^2$ *: on retrouve bien la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées.*

4. $x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2;2\}$, $x^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \{-3;3\}$, $x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1;1\}$, $x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0\}$, $x^2 = 5 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$, $x^2 = 11 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{11};\sqrt{11}\}$, $x^2 = -9 \Leftrightarrow x \in \varnothing$, $x^2 = -36 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Exercice 8

1. D'après le tableau, la fonction affine est strictement décroissante donc $a < 0$. Elle s'annule de plus en $2 > 0$ donc le point d'abscisse 0 est au-dessus de l'origine et son ordonnée à l'origine est positive : $b > 0$.

2. $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = a^2 \end{cases}$ donc $2a + a^2 = 0 \Leftrightarrow a(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = -2$.
On a vu que seul $a = -2$ est acceptable et $b = a^2 = 4$. Ainsi, $f(x) = -2x + 4$.

Exercice 9

(a) $0 \leqslant a = 3,14 < b = \pi$ donc $a^2 < b^2$.

(b) $a = \frac{1}{3} > b = 0,333 \geqslant 0$ donc $a^2 > b^2$.

(c) $a = -\frac{1}{7} < b = -\frac{1}{9} \leqslant 0$ donc $a^2 > b^2$.

(d) $a = 7 > b = 4\sqrt{3} \geqslant 0$ donc $a^2 > b^2$.

(e) $a = -2 < -b = -1 \leqslant 0$ donc $a^2 > b^2$.

(f) $a = 5 > -b = \sqrt{2} \geqslant 0$ donc $a^2 > b^2$.

Exercice 10
- $(1\,;3) \in \mathscr{C}_1$ donc $k_1 \times 1^2 = 3$ et $k_1 = 3$. $\mathscr{C}_1 : y = 3x^2$.
- $(-2\,;4) \in \mathscr{C}_2$ donc $k_2 \times (-2)^2 = 4$ et $k_2 = \frac{4}{4} = 1$. $\mathscr{C}_2 : y = x^2$.
- $(2\,;2) \in \mathscr{C}_3$ donc $k_3 \times 2^2 = 2$ et $k_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. $\mathscr{C}_3 : y = \frac{1}{2}x^2$.
- $(2\,;-1) \in \mathscr{C}_4$ donc $k_4 \times 2^2 = -1$ et $k_4 = -\frac{1}{4}$. $\mathscr{C}_4 : y = -\frac{1}{4}x^2$.
- $(-1\,;-2) \in \mathscr{C}_5$ donc $k_5 \times (-1)^2 = -2$ et $k_5 = -2$. $\mathscr{C}_5 : y = -2x^2$.

Exercice 11 Soient a et $b \in [\,0\,;+\infty\,[$ tels que $a < b$. On a :

(a) $0 \leqslant a < b \overset{\cdot^2 \nearrow}{\Longrightarrow} a^2 < b^2 \Longrightarrow a^2 - 2 < b^2 - 2$ et $f(x) = x^2 - 2$ est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

(b) $0 \leqslant a < b \overset{\cdot^2 \nearrow}{\Longrightarrow} a^2 < b^2 \Longrightarrow -2 > -b^2$ et $g(x) = -x^2$ est décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

(c) $0 \leqslant a < b \overset{g \searrow}{\Longrightarrow} g(a) > g(b) \Longrightarrow -a^2 + 10 > -b^2 + 10$ et $h(x) = -x^2 + 10$ est décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

(d) $0 \leqslant a < b \overset{\cdot^2 \nearrow}{\Longrightarrow} a^2 < b^2 \Longrightarrow a^2 - 6 < b^2 - 6$ et $k(x) = -6 + x^2$ est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 12 On considère la fonction $g : x \longmapsto (3-x)^2$.

1. Soient $a < b \leqslant 3$. On a $-a > -b \geqslant -3 \iff 3 - a > 3 - b \geqslant 0$
$\overset{\cdot^2 \nearrow}{\Longrightarrow} (3-a)^2 > (3-b)^2 \iff g(a) > g(b)$: g est décroissante sur $]-\infty\,;3\,]$.

2. Ainsi, $-4 < x \leqslant 2 \Longrightarrow g(-4) = (3-(-4))^2 = 49 > g(x) \geqslant (3-2)^2 = 1$.

Exercice 13 On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = (x-1)^2$.

1. • Soient u et $v \in]-\infty\,;1]$. On a $u < v \leqslant 1 \iff u-1 < v-1 \leqslant 1-1 = 0$
   $\overset{\text{2}\searrow}{\Longrightarrow} (u-1)^2 > (v-1)^2 \iff k(u) > k(v)$ et k est décroissante sur $]-\infty\,;1]$.
   • Soient u et $v \in [1\,;+\infty[$. On a $1 \leqslant u < v \iff 1-1 = 0 \leqslant u-1 < v-1$
   $\overset{\text{2}\nearrow}{\Longrightarrow} (u-1)^2 < (v-1)^2 \iff k(u) < k(v)$ et k est croissante sur $[1\,;+\infty[$.
2. Ainsi, $-3 < x \leqslant 1 \Longrightarrow k(-3) = (-3-1)^2 = 16 > k(x) \geqslant k(1) = (1-1)^2 = 0$
   et $2 \leqslant x < 5 \Longrightarrow k(2) = (2-1)^2 = 1 \leqslant k(x) < k(5) = (5-1)^2 = 16$.

Exercice 14 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x+2)^2$.

1. Il semble que la fonction $f(x) = -3(x+2)^2$ soit croissante sur $]-\infty\,;-2]$ et décroissante sur $[-2\,;+\infty[$.
2. Soient a, $b \in]-\infty\,;-2]$. On a $a < b \leqslant -2 \iff a+2 < b+2 \leqslant -2+2 = 0$
   $\overset{\text{2}\searrow}{\Longrightarrow} (a+2)^2 > (b+2)^2 \overset{\times(-3)}{\Longleftrightarrow} -3(a+2)^2 < -3(b+2)^2 \iff f(a) < f(b)$:
   f croissante sur $]-\infty\,;-2]$. Sur $[-2\,;+\infty[$, la démonstration de la décroissance de f est analogue.
3. Ainsi, $f(x) \leqslant f(-2)$ pour $x \leqslant -2$ et $f(-2) \geqslant f(x)$ pour $-2 \leqslant x$.
   La fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en -2 valant $f(-2) = -3(-2+2)^2 = 0$.
4. Si x parcourt $[-1\,;3]$, f est décroissante donc $f(-1) = -3 \geqslant f(x) \geqslant f(3) = -75$.
   Si $x \in [-4\,;-3]$, f est croissante donc $f(-4) = -12 \leqslant f(x) \leqslant f(-3) = -3$.
   Si x parcourt $[-2\,;0]$, f est décroissante donc $f(-2) = 0 \geqslant f(x) \geqslant f(0) = -12$.
   Lorsque x parcourt $[-4\,;2]$, f est croissante jusqu'à $x = -2$ puis décroissante.
   Comme $f(-4) = -12$ et $f(2) = -48$, $f(-2) = 0 \geqslant f(x) \geqslant f(2) = -48$.

Exercice 15

1. Graphically, the parabola is of equation $y = x^2$ and the straight line $y = x+2$. Hence, at the crossings, we have $y = x^2 = x+2$ so $x^2 - x - 2 = 0$. The intersections correspond to the solutions of this quadratic equation : $x = -1$ and $x = 2$.
2. (a) In order to solve the equation $x^2 + 3x + 2 = 0$, one should draw the parabola $y = x^2$ and the straight line $y = -3x - 2$. At the intersection, one can see the two solutions $x = -2$ and $x = -1$.
   (b) At the intersection of the parabola $y = x^2$ and the line $y = x - \frac{1}{4}$, we can see the only solution $x = \frac{1}{2}$ of the equation $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.
   (c) The intersection of the parabola $y = x^2$ and the straight line $y = \frac{1}{2}x - 1$ is empty so the equation $x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ has no solution.

Exercice 16 Les triangles de Pete

• Si y est la longueur du troisième côté du triangle carmin, le théorème de « Pethagore » permet d'affirmer que $x^2 + y^2 = (2x)^2$ donc $y^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$ et $y = \sqrt{3}\,x$. D'où l'aire du triangle carmin de Pete $\mathscr{A}_C = \frac{x \times \sqrt{3}\,x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x^2$.

• Si y est la longueur de l'autre côté adjacent à l'angle droit du triangle indigo, on a $\mathscr{A}_I = \frac{xy}{2} = x^2$ d'où $y = \frac{2x^2}{x} = 2x$. Le théorème de « Pethagore » permet d'affirmer que $h_I^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (2x)^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2$ donc $h_I = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}$.

Fonction inverse

Activité 3

1. *On observe que le graphe de la fonction inverse est en deux parties séparées et qu'il est symétrique par rapport à l'origine. Lorsqu'on la parcourt de « gauche à droite », la courbe « descend » sur* $]-\infty\,;0[$ *et sur* $]\,0\,;+\infty[$.
2. *On a* $-4 < -3 < -\frac{5}{4} < -1 < -0.5$ *et* $\frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} > \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} > \frac{1}{-5/4} = -\frac{4}{5} > \frac{1}{-1} = -1 > \frac{1}{-0.5} = -2$ *et d'autre part* $\frac{2}{3} < 1 < \frac{8}{7} < 2 < 5$ *et* $\frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} > \frac{1}{1} = 1 > \frac{1}{8/7} = \frac{7}{8} > \frac{1}{2} > \frac{1}{5}$. *On retrouve l'allure descendante de la courbe sur la partie « gauche » et sur la partie « droite ».*
3. *On a* $\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$, $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{-8/7} = -\frac{7}{8}$, $\frac{1}{-1} = -1$, $\frac{1}{-2/3} = -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{0.5} = 2$, $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ *: les images des opposés sont les opposées des images et l'on retrouve bien la symétrie de la courbe par rapport à l'origine.*
4. *On a* $\frac{1}{x} = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1/6} = 6$, $\frac{1}{x} = -\frac{7}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{-7/6} = -\frac{6}{7}$, $\frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{-1} = -1$, $\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$, $\frac{1}{x} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4/9} = \frac{9}{4}$, $\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{x} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7/3} = \frac{3}{7}$, $\frac{1}{x} = 11 \Leftrightarrow x = \frac{1}{11}$.

Exercice 17

1. D'après le tableau, la fonction affine est strictement croissante donc $a > 0$. Elle s'annule de plus en $-4 < 0$ donc le point d'abscisse 0 est au-dessus de l'origine et son ordonnée à l'origine est positive : $b > 0$.
2. On a $\begin{cases} -4a + b = 0 \\ b = \frac{1}{a} \end{cases}$ donc $-4a + \frac{1}{a} = 0 \iff \frac{1}{a}(-4a^2 + 1) = 0$ $\iff 1 - 4a^2 = 0 \iff a^2 = \frac{1}{4} \iff a = \frac{1}{2}$ ou $a = -\frac{1}{2}$. On a vu que seul $a = \frac{1}{2}$ est acceptable et $b = \frac{1}{a} = 2$. Ainsi, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Exercice 18
- $(3\,;1) \in \mathscr{C}_1$ donc $\frac{k_1}{3} = 1$ et $k_1 = 3$. $\mathscr{C}_1 : y = \frac{3}{x}$.
- $(-1\,;-1) \in \mathscr{C}_2$ donc $\frac{k_2}{-1} = -1$ et $k_2 = 1$. $\mathscr{C}_2 : y = \frac{1}{x}$.
- $(1\,;-1) \in \mathscr{C}_3$ donc $\frac{k_3}{1} = -1$ et $k_3 = -1$. $\mathscr{C}_3 : y = -\frac{1}{x}$.
- $(-2\,;2) \in \mathscr{C}_4$ donc $\frac{k_4}{-2} = 2$ et $k_4 = -4$. $\mathscr{C}_4 : y = -\frac{4}{x}$.

Exercice 19 On a $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4 \overset{1/\searrow}{\iff} 2 \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{4} \iff -2 \leqslant -\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{4}$ $\iff 1 - 2 = -1 \leqslant 1 - \frac{1}{x} \leqslant 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Exercice 20 Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 2 - \frac{1}{x}$.

1. Soient $a, b \in]-\infty\,;0[$. On a $a < b < 0 \overset{1/\searrow}{\Longrightarrow} \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \iff -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$ $\iff 2 - \frac{1}{a} < 2 - \frac{1}{b}$ et f est croissante sur $]-\infty\,;0[$. De manière analogue, la fonction f est croissante sur $]\,0\,;+\infty[$.

2. Sur l'intervalle $]\,1\,;2\,]$, la fonction f est croissante et admet un minimum en $x=2$ valant $f(2)=\frac{3}{2}$ mais n'admet pas de maximum car $1\notin\,]\,1\,;2\,]$.
3. Puisque f est croissante sur $]\,-\infty\,;-1\,]$, sa valeur maximale est atteinte en $x=-1$ et vaut $f(-1)=3$.

Problèmes de synthèse

Exercice 21 Histoires de boucles

1. Ce programme donne les images par la fonction inverse des entiers non nuls jusqu'à un entier donné.

```
1| n=int(input("Jusqu'à quel entier? "))
2| for i in range(1,n+1) :
3|    print(1/i)
```

2. Cette fonction donne le premier entier dont l'image par la fonction carré est supérieure à un nombre donné.

```
1| def carrédépasse(M) :
2|    n=0
3|    while n**2<=M :
4|       n=n+1
5|    return(n)
```

Exercice 22 On a $a(0)=4-5\times 0=4\neq 0$ donc $A\,(\,0\,;\,0\,)\notin\mathcal{A}$, $a(1)=4-5\times 1=-1\neq 1$ donc $B\,(\,1\,;\,-1\,)\in\mathcal{A}$ et $C\,(\,1\,;\,1\,)\notin\mathcal{A}$,... En calculant successivement les images des abscisses des différents points et vérifiant leur égalité avec les ordonnées, on détermine l'appartenance des points aux courbes. On obtient ici $A\in\mathcal{C}$, $B\in\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, $C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{I}$, $D\in\mathcal{C}$, $F\in\mathcal{C}$, $H\in\mathcal{I}$, $I\in\mathcal{B}$ et $J\in\mathcal{I}$.

Exercice 23 VouF ?

(a) Tout réel est inférieur ou égal à son carré : Faux. Par exemple, $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$.

(b) Tout réel positif non nul est supérieur ou égal à son inverse : Faux. Par exemple, $\frac{1}{1/2}=2>\frac{1}{2}$.

Exercice 24 Comparaison de x^2 et $\frac{1}{x}$

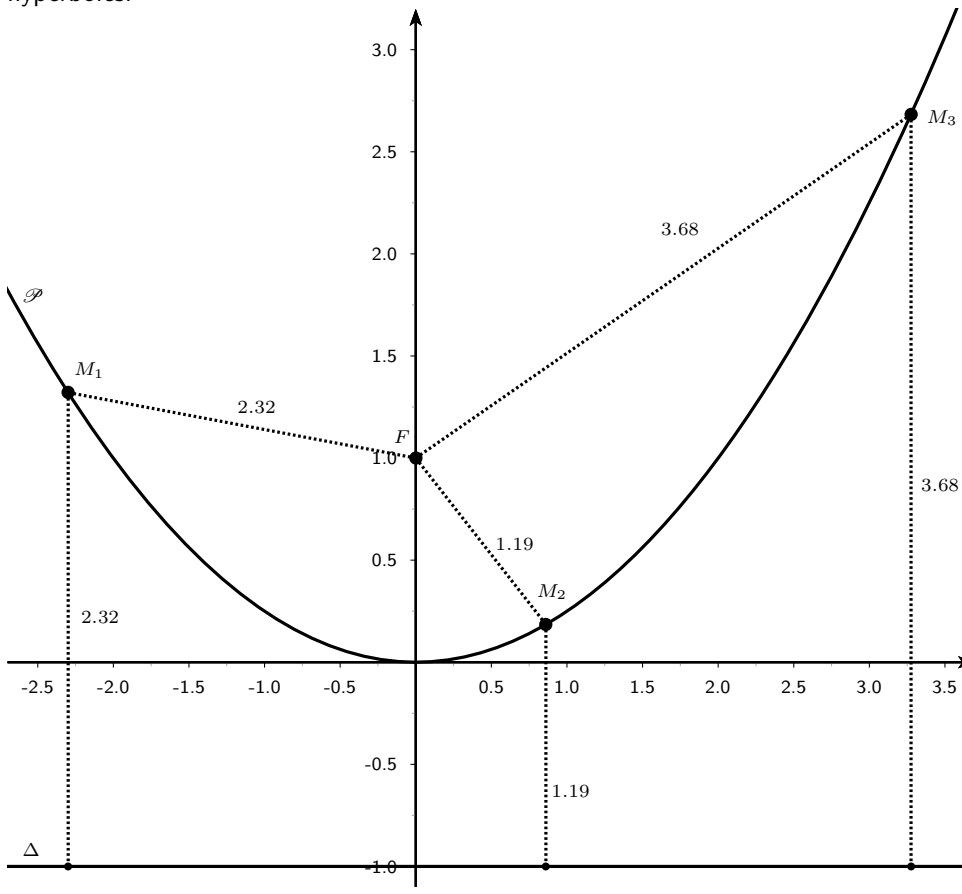
1. Pour tout $x<0$, on a $\frac{1}{x}<0<x^2$.
2. On conjecture que $x^2\leqslant\frac{1}{x}$ pour $x\in\,]\,0\,;1\,]$ et $x^2\geqslant\frac{1}{x}$ pour $x\geqslant 1$.
3. On note $f:x\longmapsto x^2$ et $g:x\longmapsto\frac{1}{x}$.
   (a) La fonction f est croissante sur $]\,0\,;1\,]$ donc, $\forall x\in\,]\,0\,;1\,]$, $f(x)\leqslant f(1)$.
   La fonction g est décroissante sur $]\,0\,;1\,]$ donc, $\forall x\in\,]\,0\,;1\,]$, $g(x)\geqslant g(1)$.
   Or $f(1)=g(1)=1$ donc, pour tout $x\in\,]\,0\,;1\,]$, on a $x^2\leqslant\frac{1}{x}$.
   (b) La fonction f est croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ donc, $\forall x\in[\,1\,;+\infty\,[$, $f(x)\geqslant f(1)$.
   La fonction g est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ donc, $\forall x\in[\,1\,;+\infty\,[$, $g(x)\leqslant g(1)$.
   Or $f(1)=g(1)=1$ donc, pour tout $x\in[\,1\,;+\infty\,[$, on a $x^2\geqslant\frac{1}{x}$.

4. (a) Pour tout $x \neq 0$, $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} = \frac{x^3+x^2+x-x^2-x-1}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{1}{x} = x^2 - \frac{1}{x}$.

   (b) Si $x > 0$, $x^2 + x + 1 > 0$ et $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} = x^2 - \frac{1}{x}$ est du signe de $(x-1)$.

   (c) Ainsi, $x^2 - \frac{1}{x} < 0$ pour $x - 1 < 0$ c.-à-d. $x^2 < \frac{1}{x}$ pour $0 < x < 1$
   et $x^2 - \frac{1}{x} > 0$ pour $x - 1 > 0$ c.-à-d. $x^2 > \frac{1}{x}$ pour $x > 1$.

Exercice 25 Soient $M(x\,;y)$, $F(0\,;1)$ et $\Delta : y = -1$ dans un r.o.n.
On a $MF^2 = x^2 + (y-1)^2$. Le projeté orthogonal de M sur Δ est le point $H(x\,;-1)$. D'où $dist^2(M,\Delta) = MH^2 = (x-x)^2 + (y-(-1))^2 = (y+1)^2$.
Ainsi, M est équidistant de F et de Δ *ssi*
$MF^2 = dist^2(M;\Delta) \iff x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \iff x^2 - 4y = 0$
et le lieu géométrique recherché est la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$.
Plus généralement, une parabole est l'ensemble des points équidistants d'un foyer et d'une directrice. Elle fait partie de la famille de courbes des coniques, avec les ellipses et les hyperboles.



Chapitre V

Arithmétique

Sommaire

1 Divisibilité 72
2 Nombres premiers 73
3 Nombres premiers entre eux, fractions irréductibles . . 75
4 Problèmes 76
Corrigé des exercices 78

L'arithmétique, du grec ancien *arithmos* (nombre), est le domaine des mathématiques qui explore la science des nombres. On y étudie les entiers, ou les rationnels, et les propriétés des opérations traditionnelles qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. L'origine de l'arithmétique semble être une invention phénicienne. Dans l'école pythagoricienne, au VIe s. av. J.-C., l'arithmétique était, avec la géométrie, l'astronomie et la musique, une des quatre sciences quantitatives ou mathématiques. Les mathématiciens indiens, au VIe s., puis islamiques, au Xe s., apportent de grandes avancées, en particulier dans la résolution des équations diophantiennes, à coefficients entiers (de Diophante, IIe s.) et dans l'étude de nombres entiers particuliers. Après l'introduction en Europe des chiffres arabes la fin du Xe s. et l'invention de l'écriture fractionnaire, l'arithmétique a reçu, parallèlement avec l'algèbre, de grands développements au point de vue théorique au cours des siècles qui suivirent. Citons le fameux théorème de Fermat (XVIIe s.) affirmant que l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'admet de solutions entières que pour $n \leqslant 2$ et qui n'a été démontré qu'à la toute fin du XXe s. Toutefois, l'arithmétique reste une science où de nombreuses conjectures ne sont pas démontrées, ni même supputées, ce qui est aguichant pour de futurs chercheurs tels que vous.
Commencez donc par vous échauffer avec l'extra *Les bons comptes* de la page 357.

Nous nous placerons principalement dans l'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$. Dans $\mathbb{Z}$, les choses seront similaires.

1 Divisibilité

Définition 1 *Soient n et $p \in \mathbb{Z}$.*

- *On dit que n est un multiple de p (n est divisible par p) et que p est un diviseur de n (p divise n), s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = k \times p$. On note alors $p|n$.*
- *En particulier, si 2 divise n, on dit que n est pair. Sinon, on dit que n est impair.*

Exemples : $5|2020$, $2|476$, $4\not|57$, $3|657$, $3\not|653$, $9|4536$, $9\not|281$, $17|0$, $0\not|3$, $1|329$, $0|0$.

Remarques :

- Tout entier est un diviseur de 0 mais ce dernier ne divise que lui-même.
- Si $p \neq 0$, on a $p|n \iff \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}$.
- Tout entier est un multiple de 1 et de lui-même.

Exercice 1 Compléter par *diviseur* ou *multiple*.

(a) 13 est un ... de 260.
(b) 350 est un ... de 50.
(c) 0 est un ... de 89.
(d) 1 est un ... de 16.
(e) 7 est ... de 7.
(f) 17 est un ... de 0.

Exercice 2 (∫)

1. En langage Python, $8\%3$ donne 2, $9\%4$ donne 1, $6\%2$ donne 0, $23\%5$ donne 3, $89\%10$ donne 9, $11\%14$ donne 11. Que donne donc l'opérateur % ?
2. Faire tourner les programmes Python suivants pour différentes valeurs.
3. Quel est leur rôle respectif ?

```
1| def Mul(a,b):
2|     if a%b==0:
3|         M="Yes"
4|     else:
5|         M="No"
6|     return M
```

```
7| def PGMI(a,b):
8|     n=0
9|     m=0
10|    while m<=b:
11|        m=m+a
12|        n=n+1
13|    m=m-a
14|    return m
```

Exercice 3

(a) Rappeler les critères de divisibilité par 2, par 3, par 5, par 9, par 10.
(b) 111...11 avec 99 chiffres est-il divisible par 9 ?
(c) Quels sont les diviseurs de 60 ? de 120 ? de 72 ? de 210 ?
(d) Quelles peuvent être les dimensions entières d'un cube de $12\,\text{cm}^3$ de volume ?

Exercice 4 VouF ?

1. Pour tous entiers a, b et c, si $a|bc$ alors $a|b$ ou $a|c$.
2. La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
3. La somme de quatre entiers consécutifs est un multiple de 4.
4. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.
5. Le produit de deux multiples de 3 est un multiple de 9.
6. Le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 12.

Propriété 1

- *Si m et n sont des multiples de $p \in \mathbb{Z}$, alors $m+n$ est aussi un multiple de p.*
- *Tout entier n pair s'écrit sous la forme $n = 2p$ où $p \in \mathbb{Z}$*
  et tout entier m impair s'écrit sous la forme $m = 2q+1$ où $q \in \mathbb{Z}$.
- *Le carré d'un nombre pair est pair et le carré d'un nombre impair est impair.*

Exercice 5 Montrer le premier point puis, en supposant le deuxième, montrer le troisième point.

Démonstration : Montrons maintenant le deuxième point.
Si n est pair, alors $2|n$ et il existe p tel que $n = 2 \times p$.
On remarque que tout entier suivant un nombre pair est impair : sinon, $2|n$ et $2|n+1$ donc $2|-n$ et $2|n+1+(-n) = 1$ qui est absurde. De plus, si n est pair, alors $n+2$ l'est aussi puisque $2|n$ et $2|2$ implique $2|n+2$. Ainsi, tout nombre impair est le suivant d'un nombre pair et $m = 2q+1$. □

Exercice 6 Soit a et b deux entiers.
Montrer que si a est un diviseur de $a+b$ alors a est un diviseur de b.
7 divise-t-il 763 ?

Exercice 7 Les âges des quatre frères Joe, Jack, William et Averell sont 3, 8, 12 et 14 ans. La somme des âges de William et Joe est divisible par 5, et tout comme celle des âges de Averell et William. Quel âge a Jack ?

Exercice 8 Quels sont les entiers naturels n tels que $n^2 - 1$ est multiple de 4 ?

Exercice 9 Les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle sont des nombres entiers. Montrer qu'au moins un de ces nombres est pair.

Exercice 10 Ottokar et Ottobous tournent en boucle, l'un sur un parcours de 1 h 12 minutes, l'autre de 54 minutes. Partis tous deux à 7 h 28 minutes, quand se rejoindront-ils à nouveau ?

EXERCICES

2 Nombres premiers

Définition 2 *Un nombre premier est un entier ayant exactement deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.*

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 sont premiers. 4, 6, 9, 21, 39 ne le sont pas.

Exercice 11 VouF ?

1. La somme de deux nombres impairs n'est pas un nombre premier.
2. Il existe trois nombres impairs consécutifs dont la somme est premier.

Exercice 12 ⟆ Faire tourner le programme suivant pour $n = 7$, pour $n = 15$ puis pour $n = 1$. Quelle est le rôle de la fonction Prems ?

```
1  def Prems(n):
2      pr=0
3      d=2
4      while pr==0 and d<n:
5          if n%d==0:
6              pr=1
7          d=d+1
8      if pr=0:
9          P="Yes"
10     else:
11         P="No"
12     return P
```

Vous vous convaincrez rapidement qu'il suffit de tester la divisibilité d'un nombre par les premiers inférieurs ou égaux à sa racine pour vérifier s'il est premier ou non. En effet, si $n = p \times q$, alors $p \leqslant \sqrt{n}$ ou $q \leqslant \sqrt{n}$.
Par exemple, 101 n'est pas premier car il n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7.

Exercice 13 On dit que deux nombres premiers différents forment une paire s'ils s'écrivent avec les mêmes chiffres mais en sens inverse.

1. Justifier que 1933 et 3391 forment une paire.
2. Expliquer pourquoi le premier chiffre d'un entier (supérieur à 10) d'une paire ne peut être que 1, 3, 7 ou 9.
3. Trouver toutes les paires de nombres premiers à deux chiffres.

Le résultat suivant est admis mais il sera toutefois très utile dans la pratique.

Théorème 1 *Tout nombre entier s'écrit, de manière unique, comme le produit de nombres premiers.*

Exemples : $15 = 3 \times 5$, $39 = 3 \times 13$, $16 = 2^4$, $1000 = 2^3.5^3$, $720 = 2^4.3^2.5$, $17787 = 3.7^2.11^2$.

Exercice 14 Retrouver les diviseurs de 60 et 72 obtenus à l'exercice 3 p. 72.

Exercice 15 Deux carrés ont des côtés de longueurs a et $b \in \mathbb{N}^*$ en cm et leurs aires diffèrent de $35\,\text{cm}^2$.
Déterminer toutes les valeurs possibles pour a et b.

Exercice 16 Yves, sans Laurent, est costumier d'une troupe de spectacle. Il dispose de nombres premiers de chapeaux, de vestes, de pantalons et de paires de souliers, ce dernier étant le plus grand nombre de tous. Sachant qu'Yves, sans Laurent, pourrait ainsi former 1482 costumes, combien de paires de souliers a-t-il ?

Exercice 17 Déterminer le plus petit entier naturel non nul qui, multiplié par 2020, est un carré parfait.
Déterminer ensuite celui qui, multiplié par 2020, est un cube parfait.

Exercice 18 Le $ppcm(a, b)$ désigne le plus petit commun multiple des entiers a et b. Il est très utile pour déterminer un dénominateur commun par exemple.
Déterminer le $ppcm$ des nombres suivants.

(a)	12, 15	(c)	363, 231	(e)	8, 22, 36
(b)	8, 9	(d)	60, 126	(f)	350, 90, 84

Exercice 19 Une infinité de nombres premiers

1. (a) $2 \times 3 \times 5 + 1$ est-il divisible par 2, 3 ou 5 ?
   (b) Le produit des cinq premiers nombres premiers augmenté de 1 est-il divisible par ceux-ci ?
2. (a) Soit $\{p_1 ; p_2 ; ... ; p_n\}$ un ensemble de n nombres premiers.
   Justifier que $N = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$ n'est pas divisible par p_1.
   (b) En déduire, avec Euclide, qu'il y a une infinité de nombres premiers.

EXERCICES

3 Nombres premiers entre eux, fractions irréductibles

Définition 3
Deux nombres entiers sont dits premiers entre eux s'ils n'ont qu'un seul diviseur commun : 1.

Exemples : 5 et 7 le sont, 92 et 36 ne le sont pas, 24 et 35 le sont, 15 et 39 ne le sont pas.

Définition & Propriété 2 *Soient p et $q \in \mathbb{Z}^*$.*
Il existe un unique couple d'entiers $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ et a et b sont premiers entre eux.
Une telle fraction $\frac{a}{b}$ est dite irréductible et l'on ne peut la simplifier.

Pour rendre irréductible une fraction, il suffit de décomposer son numérateur et son dénominateur en facteurs premiers puis de simplifier ceux qui sont en commun. Par exemple, $\frac{698775}{86625} = \frac{3\times5^2\times7\times11^3}{3^2\times5^3\times7\times11} = \frac{11^2}{3\times5}$.

Exercice 20 Simplifier le plus possible les fractions suivantes.
$\frac{160}{320}$ $\frac{35}{20}$ $\frac{92}{36}$ $\frac{24}{35}$ $\frac{300}{126}$ $\frac{336}{720}$ $\frac{16473}{2907}$ $\frac{9996}{67914}$

Pour réduire au même dénominateur plusieurs fractions, il suffit de prendre le plus petit commun multiple, le *ppcm*, de leur dénominateur en les décomposant en facteurs premiers et en prenant la plus grande puissance de chacun des termes. On met ensuite chaque fraction à ce même dénominateur. On n'oubliera pas de simplifier

les fractions en début et en fin de calcul si cela est possible.
Par exemple, $\frac{25}{60}+\frac{70}{180}=\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5}{2^2\times 3}+\frac{7}{2\times 3^2}=\frac{5\times 3+7\times 2}{2^2\times 3^2}=\frac{29}{36}$.

Exercice 21 Effectuer, sans calculatrice, les calculs suivants.

(a) $3-\frac{5}{7}$
(b) $\frac{4}{7}-\frac{3}{5}$
(c) $\frac{19}{4}-\frac{3}{2}$
(d) $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$
(e) $\frac{3}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{3}$
(f) $\frac{7}{84}-\frac{11}{165}$
(g) $\frac{13}{15}-\frac{1}{18}+\frac{9}{10}$
(h) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$
(i) $\frac{2/3}{4/9}$
(j) $6\times\frac{7}{3}-28\times\frac{2}{4}$
(k) $\frac{14}{45}\cdot\frac{35}{6}\cdot\frac{18}{49}$
(l) $\frac{26}{77}\cdot\frac{35}{6}\cdot\frac{33}{65}$
(m) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$
(n) $\frac{14}{21}-\frac{12}{15}+\frac{95}{38}-\frac{121}{66}$
(o) $\frac{1}{420}-\frac{1}{294}$
(p) $\frac{14}{30}-\frac{35}{126}+\frac{72}{320}$
(q) $\frac{160}{320}+\frac{300}{126}$
(r) $\frac{300}{126}+\frac{336}{720}-\frac{16473}{2907}$

Nous pouvons maintenant justifier l'existence de nombres non décimaux et celle de nombres irrationnels.

Démonstrations : • Nous avons affirmé que $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal, autrement dit, qu'il ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où q est une puissance de 10. Afin de le démontrer, faisons un raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'il existe deux entiers p et n tels que $\frac{1}{3}=\frac{p}{10^n}$. Ainsi, $3p=10^n$ et 3 divise 10^n donc 3 divise $10=5\times 2$. $\lightning$ Ainsi, $\frac{1}{3}\notin\mathbb{D}$.

• Montrons maintenant que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, *i.e.* un quotient d'entiers, en faisant un nouveau raisonnement par l'absurde.

Supposons qu'il existe deux entiers strictement positifs p et q tels que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$. Nous supposons que la fraction est irréductible, sinon, réduisons-la auparavant.
On a alors $\sqrt{2}^2=2=\frac{p^2}{q^2}$ donc $p^2=2q^2$. p^2 est donc pair ainsi que p puisque le carré d'un impair est toujours impair. Il existe alors un entier naturel r tel que $p=2r$ et donc $p^2=4r^2$.
Puisque $p^2=2q^2$, $q^2=\frac{4r^2}{2}=2r^2$ donc q^2 est pair tout comme q. On peut alors simplifier $\frac{p}{q}$ par 2 ce qui est absurde puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. $\lightning$
Ainsi, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. □

Exercice 22

1. Déterminer une fraction égale à $\frac{15}{21}$ dont la différence entre le dénominateur et le numérateur est 30.
2. Existe-t-il une fraction égale à $\frac{40}{56}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 125 ?

4 Problèmes

Les exercices suivants proposent une synthèse de ce qu'il faut savoir. Ils sont à réaliser de préférence sans calculatrice.

Exercice 23

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants :

$a = 210$	$c = 1575$	$e = 4356$
$b = 675$	$d = 882$	$f = 1728$

2. Simplifier les fractions suivantes.

$g = \frac{675}{210}$	$h = \frac{882}{1575}$	$i = \frac{1728}{4356}$

3. Effectuer les calculs suivants.

$j = \frac{3}{25} + \frac{7}{10}$	$m = \frac{675}{882} \times \frac{1728}{1575} \times \frac{49}{16}$	$o = \frac{2}{15} - \frac{3}{35} + \frac{4}{21}$
$k = \frac{21}{33} - \frac{45}{18}$		$p = \frac{21}{28} + \frac{55}{66} - \frac{8}{30}$
$l = \frac{60}{77} \times \frac{110}{225}$	$n = \frac{\frac{675}{210}}{\frac{1575}{882}}$	$q = \frac{\sqrt{1575}}{\sqrt{28}}$

4. $r = 324$ est-il un carré parfait ?
   $s = 270$ est-il un cube parfait ?
5. Quel est le plus petit commun multiple de $b = 675$, $c = 1575$ et $d = 882$?

Exercice 24 Soit $n \in \mathbb{Z}$. On appelle S_n la somme des deux nombres qui précédent n et des deux qui le suivent.
De quel nombre non trivial S_n est-il multiple ?

Exercice 25 On dispose de plusieurs rectangles de dimensions 48 cm et 72 cm. Déterminer le côté du plus petit carré que l'on peut former avec ces rectangles en les plaçant toujours dans la même orientation.

Exercice 26 Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel tel que si on le divise par 5, 7, 10 et 15, il reste toujours 1.

1. Trouver des diviseurs premiers de $n - 1$.
2. Montrer alors que le plus petit n possible est 211.

Exercice 27 Un nombre parfait est un entier de $\mathbb{N}$ qui est égal à la somme de ses diviseurs stricts, c.-à-d. autres que lui-même. Quels sont les nombres parfaits inférieurs ou égaux à 30 ?

Rendez-vous en page 269 et faites donc le devoir n° 6.

Corrigé des exercices

ARITHMÉTIQUE

Exercice 1 Diviseur ou multiple ?

(a) 350 est un multiple de 50.

(b) 13 est un diviseur de 260.

(c) 0 est un multiple de 89.

(d) 1 est un diviseur de 16.

(e) 7 est multiple et diviseur de 7.

(f) 17 est un diviseur de 0.

Exercice 2

L'opérateur % donne le reste de la division euclidienne : $a\%b$ donne r si $a = kb + r$ avec le plus grand k possible.

Mult(7,3) donne No et Mul(24,4) donne Yes : Mul(a,b) donne Yes si a est multiple de b, No sinon.

PGMI(2,7) donne 6, PGMI(8,27) donne 24, PGMI(11,44) donne 44 : PGMI(a,b) donne le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b.

Exercice 3

(a) Un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
Un entier est divisible par 3 si la somme des ses chiffres est divisible par 3.
Un entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
Un entier est divisible par 9 si la somme des ses chiffres est divisible par 9.
Un entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

(b) On a $1+1+...+1 = 99\times 1 = 99$ puis $9+9 = 18$ et enfin $1+8 = 9$: dans la table de 9.

(c) 210 est divisible par 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35 42, 70, 105 et 210.
60 est divisible par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.
120 est divisible par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 et 120.
72 est divisible par 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.
120 est divisible par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 et 120.

(d) 12 est divisible par 1, 2, 3, 4, 6 et 12 et l'on peut écrire
$12 = 1\times 1\times 12 = 1\times 2\times 6 = 1\times 3\times 4 = 2\times 2\times 3$.

Exercice 4 VouF ?

1. Pour tous entiers a, b et c, si $a\,|\,bc$ alors $a\,|\,b$ ou $a\,|\,c$: Faux. $4\,|\,(6\times 10)$ mais $4\not|\,6$ et $4\not|\,10$ par exemple.
2. La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 : Vrai.
$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$.
3. La somme de quatre entiers consécutifs est un multiple de 4 : Faux.
$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \neq 4k$.

4. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5 : Vrai.
   $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(n+2)$.
5. Le produit de deux multiples de 3 est un multiple de 9 : Vrai. $3m\times 3n=9mn$.
6. le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 12 : Vrai. $4p\times 6q=24pq=12(2pq)$.

Exercice 5 • Si $m=kp$ et $n=hp$ alors $m+n=kp+hp=(k+h)p$ est un multiple de p.
• $n^2=(2p)^2=2^2.p^2=2(2p^2)$ est pair et
$m^2=(2q+1)^2=(2q)^2+2\times 2q\times 1+1^2=4q^2+4q+1=2(2q^2+2q)+1$ est impair.

Exercice 6 Si $a\,|\,(a+b)$ alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tq. $a+b=k.a$
et $b=ka-a=(k-1)a$ est multiple de a.
Puisque 7 divise $770=7+763$, 7 divise 763.

Exercice 7 Parmi les nombres 3, 8, 12 et 14, les seules sommes de deux qui sont des multiples de 5 sont $3+12$ et $8+12$, correspondants aux âges de Joe, William ou Averell. Le seul âge restant est celui de Jack : 8 ans.

Exercice 8 On a $n^2-1=4k\Leftrightarrow n^2=4k-1$ impair donc n est impair. Soit maintenant un nombre n impair. On a $n=2p+1$ et $n^2=(2p+1)^2=4p^2+4p+1$ donc $n^2-1=4p^2+4p=4(p^2-p)$ est un multiple de 4. Les entiers recherchés sont donc exactement les nombres impairs.

Exercice 9 Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, c étant le plus grand. On a $a^2+b^2=c^2$. Si a ou b est pair, c'est fini. Supposons que a et b sont impairs. On a alors a^2 et b^2 impairs et leur somme c est paire.

Exercice 10 On cherche deux naturels non nuls k et b tq. $72k=54b\overset{\div 18}{\Longleftrightarrow}4k=3b$. Les plus petits entiers possibles sont donc $k=3$ et $b=4$. Il se retrouveront après $72\times 3=54\times 4=216\,\text{min}=3\,\text{h}\,36$, c.-à-d. à 11 h 04.

Exercice 11 VouF ?

1. La somme de deux nombres impairs n'est pas un nombre premier : Faux. $1+1=2$.
2. Il existe trois nombres impairs consécutifs dont la somme est premier. Faux.
   $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=3(2n+3)$ est un multiple strict de 3.

Exercice 12 Prems(7) donne Yes, Prems(15) donne No, Prems(1) donne No.
La fonction Prems teste si un nombre n est premier ou non. Elle le divise par les entiers successifs d jusqu'à ce que le reste de la division euclidienne soit nul, et affecte alors 1 à pr. Ce processus s'arrête nécessairement car $d\geqslant n$ à partir d'un certain rang.

Exercice 13 Paires de nombres premiers.

1. En testant la non divisibilité de 1933 et 3391 par tous les nombres premiers jusqu'à leur racine respective, 43 et 58, c.-à-d. par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 (et 47, 53), on montre qu'ils sont premiers.
2. Le premier chiffre d'un entier d'une paire ne peut être 2, 4, 6 ou 8 car sinon, son partenaire aurait un tel chiffre des unités et serait divisible par 2. Ce ne peut être 0 car on ne l'écrirait pas ainsi et ce ne peut être 5 car l'autre serait divisible par 5.

3. Les paires de premiers à deux chiffres sont $(13\,;31)$, $(17\,;71)$, $(37\,;73)$ et $(79\,;97)$.

Exercice 14 On a $60 = 2^2.3.5$ et $72 = 2^3.3^2$ et pour obtenir tous les diviseurs, il suffit de prendre les produits de puissances de 2 et de 3 (et de 5) inférieures ou égales à celles apparaissant dans la décomposition des nombres considérés.
Par exemple, $2^1.3^0.5^1 = 10|60$ et $2^3.3^1 = 24|72$.

Exercice 15 Supposons $a \geqslant b$. On a $a^2-b^2 = 35 \iff (a+b)(a-b) = 7\times5 = 35\times1$ donc, puisque ces facteurs sont entiers, on a $\begin{cases} a+b=7 \\ a-b=5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b=35 \\ a-b=1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a+b=7 \\ a-b=5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+b=35 \\ a-b=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b=7-a \\ a-(7-a)=5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b=35-a \\ a-(35-a)=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b=7-a \\ 2a=5+7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b=35-a \\ 2a=1+35 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=\frac{12}{2}=6 \\ b=7-6=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=\frac{36}{2}=18 \\ b=35-18=17. \end{cases}$$

Les seuls couples possibles sont donc $(6\,;1)$ et $(18\,;17)$.

Exercice 16 Pour former un costume, il faut un chapeau, une veste, un pantalon et une paire de souliers, qui sont au nombre de c, v, p et s respectivement, tous premiers, s étant le plus grand de tous. Le nombre de costume qu'il peut former vérifie alors $c.v.p.s = 1482 = 2 \times 3 \times 13 \times 19$. Le plus grand facteur premier possible étant 19, Yves, sans Laurent, dispose de 19 paires de souliers.

Exercice 17 On a $2020 = 2^2.5.101$ donc tout entier naturel non nul n tel que $2020.n$ soit un carré parfait doit « contenir » au moins un 5 et un 101. Le plus petit de tous est donc 505.
Si l'on veut un cube parfait, il faut qu'il contienne $2.5^2.101^2 = 510050$, le plus petit de tous.

Exercice 18 Plus petit commun multiple

(a) $12 = 2^2.3$ et $15 = 3.5$ donc $ppcm(12,15) = 2^2.3.5 = 60$.

(b) $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$ donc $ppcm(8,9) = 2^3.3^2 = 72$.

(c) $363 = 3.11^2$ et $231 = 3.7.11$ donc $ppcm(363,231) = 3.7.11^2 = 2541$.

(d) $60 = 2^2.3.5$ et $126 = 2.3^2.7$ donc $ppcm(60,126) = 2^2.3^2.5.7 = 1260$.

(e) $8 = 2^3$, $22 = 2.11$ et $36 = 2^2.3^2$
donc $ppcm(8,22,36) = 2^3.3^2.11 = 792$.

(f) $350 = 2.5^2.7$, $90 = 2.3^2.5$ et $84 = 2^2.3.7$
donc $ppcm(350,90,84) = 2^2.3^2.5^2.7 = 6300$.

Exercice 19 Une infinité de nombres premiers

1. (a) $2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$ n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Par ailleurs, $2 \times 3 \times 5$ l'est mais pas 1.

(b) Le produit des cinq premiers nombres premiers augmenté de 1 n'est pas divisible par ceux-ci car sinon, 1 le serait aussi.

2. (a) Si $N = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$ était divisible par p_1, alors $k.p_1 = p_1 \times q + 1$ et $1 = (k-q)p_1$ ce qui est impossible car $p_1 \geqslant 2$ et $k - q \in \mathbb{N}$.

(b) Si l'ensemble de tous les nombres premiers était fini, alors il pourrait s'écrire $\mathfrak{P} = \{p_1\,;\, p_2\,;...;\, p_n\}$ et l'on a vu que l'on serait capable de trouver un nombre $N = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$ divisible par aucun des p_i, en raisonnant comme précédemment. N serait alors premier mais pas dans $\mathfrak{P}$ car $N > p_i$. L'ensemble de tous les nombres premiers ne les contiendrait-il pas tous ?

Exercice 20 $\frac{160}{320} = \frac{1}{2}$; $\frac{35}{20} = \frac{7}{4}$; $\frac{92}{36} = \frac{23}{9}$; $\frac{24}{35} =$ irréd. ; $\frac{300}{126} = \frac{50}{21}$; $\frac{336}{720} = \frac{7}{15}$; $\frac{16473}{2907} = \frac{17}{3}$; $\frac{9996}{67914} = \frac{34}{231}$

Exercice 21

(a) $3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7}$
(b) $\frac{4}{7} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{35}$
(c) $\frac{19}{4} - \frac{3}{2} = \frac{13}{4}$
(d) $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{13}{12}$
(e) $\frac{3}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{3} = \frac{91}{30}$
(f) $\frac{7}{84} - \frac{11}{165} = \frac{1}{60}$
(g) $\frac{13}{15} - \frac{1}{18} + \frac{9}{10} = \frac{77}{45}$
(h) $\frac{3}{4}.\frac{5}{7} = \frac{15}{28}$
(i) $\frac{2/3}{4/9} = \frac{3}{2}$
(j) $6 \times \frac{7}{3} - 28 \times \frac{2}{4} = 0$
(k) $\frac{14}{45}.\frac{35}{6}.\frac{18}{49} = \frac{2}{3}$
(l) $\frac{26}{77}.\frac{35}{6}.\frac{33}{65} = 1$
(m) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{37}{60}$
(n) $\frac{14}{21} - \frac{12}{15} + \frac{95}{38} - \frac{121}{66} = \frac{8}{15}$
(o) $\frac{1}{420} - \frac{1}{294} = -\frac{1}{980}$
(p) $\frac{14}{30} - \frac{35}{126} + \frac{72}{320} = \frac{149}{360}$
(q) $\frac{160}{320} + \frac{300}{126} = \frac{1}{2} + \frac{50}{21} = \frac{1\times21+50\times2}{2\times21} = \frac{121}{42}$
(r) $\frac{300}{126} + \frac{336}{720} - \frac{16473}{2907} = \frac{50}{21} + \frac{7}{15} - \frac{17}{3}$
$= \frac{50\times5+7\times7-17\times35}{3\times7\times5} = -\frac{296}{105}$

Exercice 22

1. On cherche p et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{p}{q} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ et $|q-p| = 30$. Donc, $7p = 5q$ et $q - p = 30$ car $q > p$. D'où, $q = 30 + p$ et $7p = 5(30+p)$. Ainsi, $2p = 150$ *i.e.* $p = 75$ et $q = 30 + 75 = 105$. On a bien $\frac{75}{105} = \frac{15}{21}$.
2. On cherche u et $v \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{u}{v} = \frac{56}{40} = \frac{7}{5}$ et $u + v = 125$. Donc, $5u = 7v$ et $u + v = 125$. D'où, $v = 125 - u$ et $5u = 7(125-u)$. Ainsi, $12u = 5^3.7$ ce qui est impossible dans $\mathbb{N}^*$. Une telle fraction n'existe donc pas.

Exercice 23

1. $a = 210 = 2.3.5.7$ | $c = 1575 = 3^2.5^2.7$ | $e = 4356 = 2^2.3^2.11^2$
$b = 675 = 3^3.5^2$ | $d = 882 = 2.3^2.7^2$ | $f = 1728 = 2^6.3^3$

2. $g = \frac{675}{210} = \frac{3^3.5^2}{2.3.5.7} = \frac{3^2.5}{2.7} = \frac{45}{14}$
$h = \frac{882}{1575} = \frac{2.3^2.7^2}{3^2.5^2.7} = \frac{2.7}{5^2} = \frac{14}{25}$
$i = \frac{1728}{4356} = \frac{2^6.3^3}{2^2.3^2.11^2} = \frac{2^4.3}{11^2} = \frac{48}{121}$
3. $j = \frac{3}{25} + \frac{7}{10} = \frac{3}{5^2} + \frac{7}{2.5} = \frac{3.2}{5^2.2} + \frac{7.5}{2.5.5} = \frac{41}{50}$
$k = \frac{21}{33} - \frac{45}{18} = \frac{7}{11} - \frac{5}{2} = \frac{7.2-5.11}{2.11} = -\frac{41}{22}$

CORRIGÉS

$l = \frac{60}{77} \times \frac{110}{225} = \frac{2^2.3.5}{7.11} \times \frac{2.5.11}{3^2.5^2} = \frac{2^3}{3.7} = \frac{8}{21}$

$m = \frac{675}{882} \times \frac{1728}{1575} \times \frac{49}{16} = \frac{3^3.5^2 \times 2^6.3^3 \times 7^2}{2.3^2.7^2 \times 3^2.5^2.7 \times 2^4} = \frac{2.3^2}{7} = \frac{18}{7}$

$n = \frac{\frac{675}{210}}{\frac{1575}{882}} = \frac{675}{210} \times \frac{882}{1575} = \frac{3^2.5}{2.7} \times \frac{2.7}{5^2} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$

$o = \frac{2}{15} - \frac{3}{35} + \frac{4}{21} = \frac{2}{3.5} - \frac{3}{5.7} + \frac{4}{3.7} = \frac{2.7-3.3+4.5}{3.5.7} = \frac{25}{3.5.7} = \frac{5}{21}$

$p = \frac{21}{28} + \frac{55}{66} - \frac{8}{30} = \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2.3} - \frac{4}{3.5} = \frac{3 \times 3.5 + 5 \times 2.5 - 4.2^2}{2^2.3.5} = \frac{79}{30}$

$q = \frac{\sqrt{1575}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{3^2.5^2.7}{2^2.7}} = \sqrt{\frac{3^2.5^2}{2^2}} = \frac{3.5}{2} = \frac{15}{2}$

4. $r = 324 = 4 \times 81 = 2^2.3^4 = (2.3^2)^2$ est un carré parfait.

   $s = 270 = 10 \times 27 = 2.5.3^3 = (2.3)^3$ n'est pas un cube parfait.

5. $b = 675 = 3^3.5^2$, $c = 1575 = 3^2.5^2.7$ et $d = 882 = 2.3^2.7^2$ donc $ppcm(675; 1575; 882) = 2.3^3.5^2.7^2$.

Exercice 24 Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $S_n = (n-2) + (n-1) + (n+1) + (n+2) = 4n$ et S_n est un multiple de 4.

Exercice 25 Il faut placer $n \times m$ rectangles côte à côte tels que la longueur du côté formé par les n côtés courts de nos rectangles égale celle du côté formé par les m côtés longs ce qui donne l'équation suivante :

$48n = 72m \iff 2^4.3n = 2^3.3^2 \iff 2n = 3m$: les plus petits entiers possibles sont donc $n = 3$ et $m = 2$ et l'on doit placer $2.3 = 6$ rectangles.

Exercice 26

1. On a $n = 5p + 1 = 7q + 1 = 10r + 1 = 15s + 1$ donc $n - 1$ est divisible par 5, 7, 2×5 et 3×5.
   Puisque $n - 1 \neq 0$, les premiers 2, 3, 5 et 7 doivent diviser $n - 1$.
2. Le plus petit nombre $n - 1$ vérifiant cette propriété est donc $2.3.5.7 = 210$ et le plus petit n possible vaut donc $n = 210 + 1 = 211$.

Exercice 27 On appelle $S(n)$ la somme des diviseurs stricts d'un entier n.
Un entier parfait ne peut être premier car la somme de ses diviseurs stricts vaut toujours 1 (non premier).
On a $S(1) = 0$, $S(4) = 1 + 2 = 3$, $S(6) = 1 + 2 + 3 = 6$ parfait,
$S(8) = 1 + 2 + 4 = 7$, $S(9) = 1 + 3 = 4$, $S(10) = 1 + 2 + 5 = 8$,
$S(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$, $S(14) = 1 + 2 + 7 = 10$, $S(15) = 1 + 3 + 5 = 9$,
$S(16) = 1+2+4+8 = 15$, $S(18) = 1+2+3+9 = 15$, $S(20) = 1+2+4+5+10 > 20$,
$S(21) = 1 + 3 + 7 = 11$, $S(22) = 1 + 2 + 11 = 14$,
$S(24) = 1+2+3+4+6+8+12 > 24$, $S(25) = 1+5 = 6$, $S(26) = 1+2+13 = 16$,
$S(27) = 1 + 3 + 9 = 13$, $S(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ parfait,
$S(30) = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 > 30$.
Les seuls entiers parfaits inférieurs à 30 sont donc 6 et 28, le prochain étant... 496 !

Chapitre VI

NOUVELLES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Sommaire

1 Fonction cube 83
2 Fonction racine carrée 86
Exercices 88
Corrigé des exercices 93

Nous poursuivons ici notre approche du domaine mathématiques de l'analyse en introduisant et étudiant deux nouvelles fonctions usuelles, de référence, se rapportant à des notions que vous connaissez déjà.

1 Fonction cube

Définition 1 *La fonction* ***cube*** *associe, à tout réel, son cube :*

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 \in \mathbb{R}.$$

Activité 1

1. *À l'aide de la calculatrice, tracer le graphe de la fonction cube (cf. p. 57). Qu'observe-t-on ?*
2. *Calculer de tête les images de* -4, -3, -1, 0, 2, 5 *et les comparer. Que remarque-t-on ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?*
3. *Calculer de tête les images de* -5, -2, 1, 3 *et* 4. *Que remarque-t-on ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?*
4. *Déterminer de tête les antécédents éventuels de* 1, 0, 1000, -1000000, 64 *et* -216.

Remarque : Si $x < 0$ alors $x^3<0$ et si $x > 0$, $x^3>0$: un nombre et son cube sont toujours de même signe.
Le nombre 0 est donc l'unique racine de la fonction cube.

Propriété 1
La fonction cube est ***strictement croissante*** *sur l'intervalle* $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$.
Remarquons que $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3 = a^3-b^3$.
Puisque pour a et b de même signe, ab est nécessairement positif, tout comme a^2+ab+b^2, les nombres a^3-b^3 et $a-b$ sont de même signe, ce qui signifie que si $a<b$ et a, b de même signe, alors $a^3<b^3$.
Par ailleurs, la fonction cube conservant les signes, si $a<0<b$, on a $a^3<0<b^3$.
La fonction cube conserve donc l'ordre strict sur $\mathbb{R}$: elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

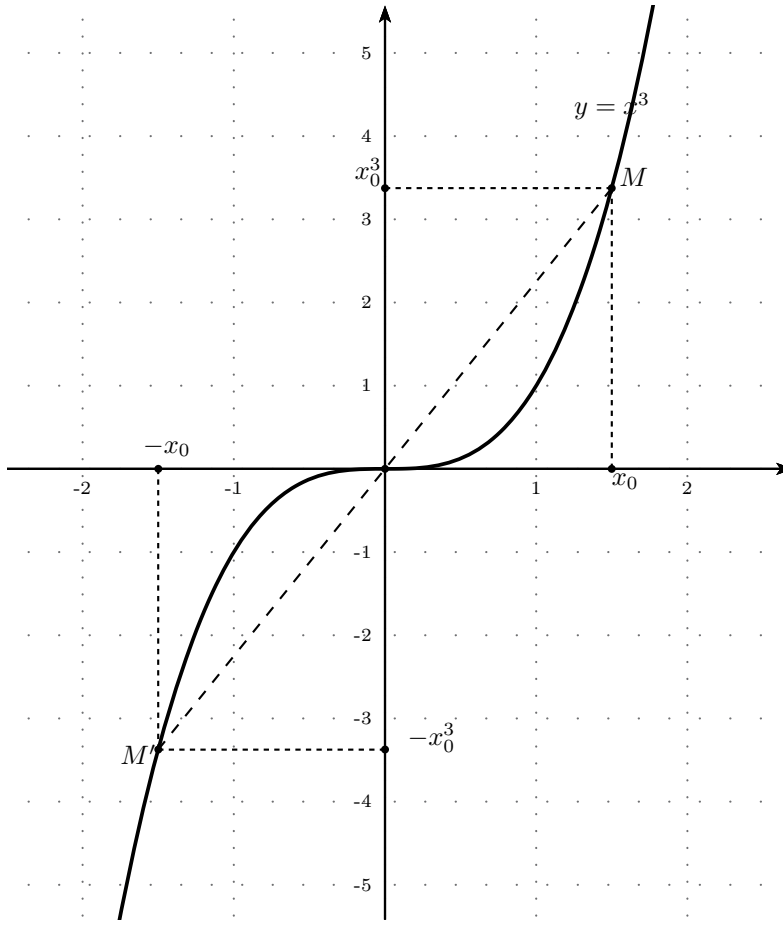
Ainsi, la fonction cube admet le tableau de signes et de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	
x^3		↗	0	↗	

Représentation graphique
La représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction cube s'appelle une cubique. Son équation est $\boldsymbol{y = x^3}$.
L'activité 1 nous a fait remarquer le résultat suivant.

Propriété 2 *La fonction cube est impaire : pour tout réel* x, $f(-x) = -f(x)$. *Sa représentation graphique dans un repère est donc symétrique par rapport à l'origine.*

Démonstration : En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
Les points $\left(-x\,;\,-x^3\right)$ et $\left(x\,;\,x^3\right)$ appartiennent donc tous deux à la cubique d'équation $y = x^3$. □



On observe que tout réel x admet un unique antécédent par la fonction cube :

$\forall b \in \mathbb{R}, \exists! a \in \mathbb{R} \text{ tq } b = a^3$. Un tel antécédent est noté $\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}$, la racine cubique de a.
Par exemple, $\sqrt[3]{27} = 3$ et $\sqrt[3]{-125} = -5$.

Fonction cube et encadrements

En s'aidant de la cubique $y = x^3$, il est aisé de résoudre des problèmes d'encadrements tels que les suivants en passant d'un axe à un autre au moyen de la courbe.

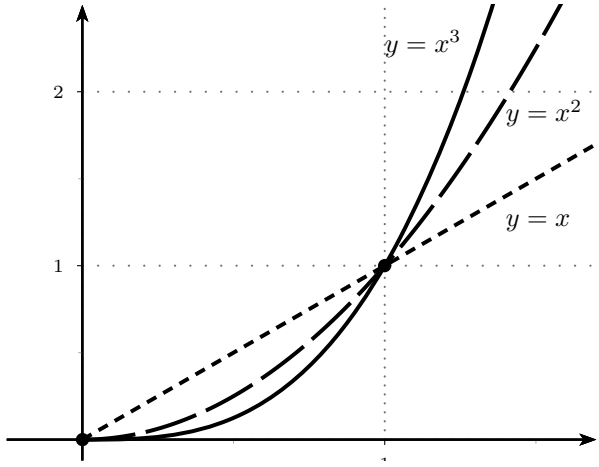
- $x > 3 \iff x^3 \in]\,27\,;+\infty\,[$.
- $x \leqslant -6 \iff x^3 \in]\,-\infty\,;216\,]$.
- $x^3 \geqslant 125 \iff x \in [\,5\,;+\infty\,[$.
- $x^3 < -\frac{8}{27} \iff x \in]\,-\infty\,;-\frac{2}{3}\,[$.
- $x \in]\,2\,;4\,] \iff x^3 \in]\,8\,;64\,]$.
- $x \in [\,-\frac{1}{2}\,;1\,[\iff x^3 \in [\,-\frac{1}{8}\,;1\,[$.
- $x^3 \in]\,-30\,;8\,] \iff x \in]\,-\sqrt[3]{30}\,;2\,]$.
- $x^3 \in [\,-17\,;1\,[\iff x \in [\,-\sqrt[3]{17}\,;1\,[$.

Comparaison des fonctions x, x^2 et x^3 sur $\mathbb{R}^+$

Théorème 1

- *Pour tout réel x de l'intervalle* $]\,\mathbf{0\,;1}\,[$, $\quad \boldsymbol{x^3 < x^2 < x}$.
- *Pour tout réel x de l'intervalle* $]\,\mathbf{1\,;+\infty}\,[$, $\quad \boldsymbol{x < x^2 < x^3}$.

Autrement dit, la courbe $\mathscr{C}_{x^3}$ est située en dessous de la courbe $\mathscr{C}_x$ sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ et au-dessus sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.
Dans tous les cas, la courbe $\mathscr{C}_{x^2}$ est située entre les deux autres.



Démonstration : Soit x un réel positif ou nul.

- $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ est du signe de $x-1$ donc $x^3 < x^2 \iff x < 1$ et $x^3 > x^2 \iff x > 1$.
- $x^2 - x = x(x-1)$ est du signe de $x-1$ donc $x^2 < x \Leftrightarrow x < 1$ et $x^2 > x \iff x > 1$. □

2 Fonction racine carrée

Commençons par quelques rappels.
La racine carrée d'un réel positif ou nul a est l'unique réel positif de carré a :
$\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a}^2 = a$ et $\sqrt{a} \geqslant 0$.
Dans l'expression $\sqrt{a}$, le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé *radical* et a est le *radicande*.
Pour tous a et $b \in \mathbb{R}^+$, $\quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
Attention, $\quad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$: contre-ex. pour $a = b = 1$,
et $\quad \sqrt{a^2} = |a| \neq a$: contre-ex. pour $a = -1$.

Exemples : ◦ $\sqrt{16} = 4$ ◦ $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
◦ $\sqrt{72} = \sqrt{4 \times 9 \times 2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ◦ $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4$.
◦ $\sqrt{(-4) \times (-9)} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 6$ et l'on fait attention...

Définition 2 *La fonction* ***racine carrée*** *associe, à tout réel positif ou nul, sa racine carrée :*

$$\boldsymbol{f} \ : \ \boldsymbol{x} \in [\,\mathbf{0}\,;+\infty\,[\ \longmapsto \ \boldsymbol{\sqrt{x}} \in [\,\mathbf{0}\,;+\infty\,[\,.$$

Activité 2

1. *À l'aide de la calculatrice, tracer le graphe de la fonction racine (cf. p. 57). Qu'observe-t-on ?*
2. *Calculer de tête les images de* 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{16}{25}$, 1, 2, 3 4 *et* 9 *et les comparer. Que remarque-t-on ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?*
3. *Déterminer de tête les antécédents éventuels de* 0, 1, 3, 4, 9, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{3}$ *et* 12.

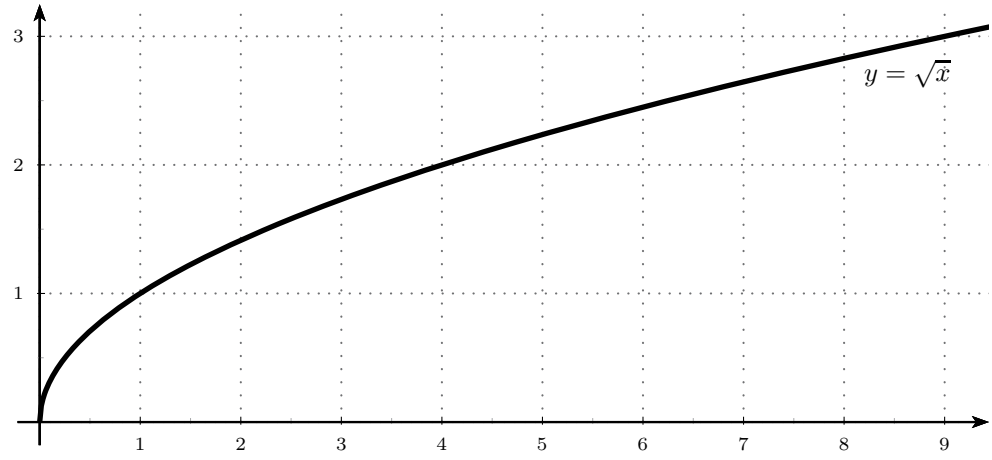
Propriété 3
La fonction racine carrée est ***strictement croissante*** *sur l'intervalle* $[\,0\,;+\infty\,[$.

Démonstration : Soient $a,\ b \in]\,0\,;+\infty\,[$.

On a $\quad \sqrt{b}-\sqrt{a} = \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right) \times \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ qui est du signe de $b-a$. Ainsi, $\quad a<b \Longrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$. □

Remarque : $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ est appelée la *quantité conjuguée* de $\sqrt{b}-\sqrt{a}$. Il est souvent utile d'y faire appel.

Puisque la fonction racine carrée n'est pas définie sur les négatifs, elle ne peut être ni paire, ni impaire.
Pour tout réel positif x, on a $\quad \sqrt{x} \geqslant 0 = \sqrt{0}$, $\quad$ le minimum de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.
Voici la représentation graphique de la fonction racine carrée :



Résolvons quelques équations et inéquations en s'aidant de ce graphe :

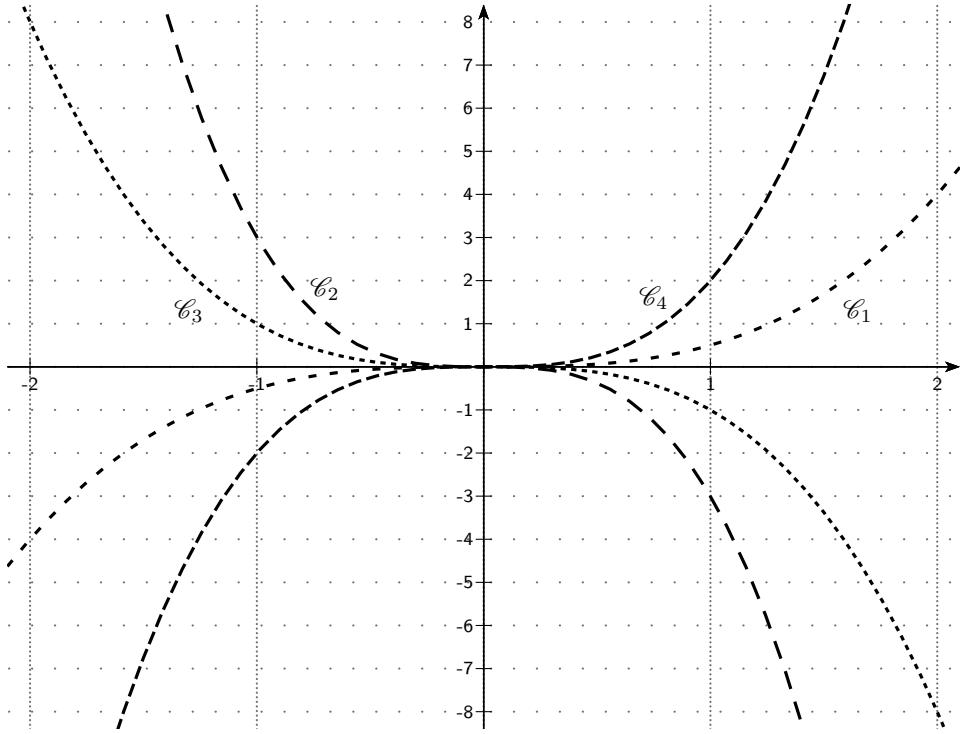
- $x > 9 \iff \sqrt{x} \in]\,3\,;+\infty\,[$
- $\sqrt{x} \in]\,1\,;6\,] \iff x \in]\,1\,;36\,]$
- $\sqrt{x} \geqslant 9 \iff x \in [\,81\,;+\infty\,[$
- $x \in [\,4\,;7\,[\iff \sqrt{x} \in \left[\,2\,;\sqrt{7}\,\right[$
- $\sqrt{x} < 5 \iff x \in [\,0\,;25\,[$
- $\sqrt{x} \in]\,-3\,;2\,] \iff x \in [\,0\,;4\,]$

Exercices

NOUVELLES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonction cube

Exercice 1 Chaque courbe tracée ci-dessous a une équation du type $y = kx^3$. Déterminer la valeur de k pour chacune d'entre elles.



Exercice 2 Étudier les variations des fonctions suivantes sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Que peut-on dire sur $]\,-\infty\,;0\,]$?

$f(x) = x^3 - 2$ $\qquad$ $h(x) = 3 - 2x^3$

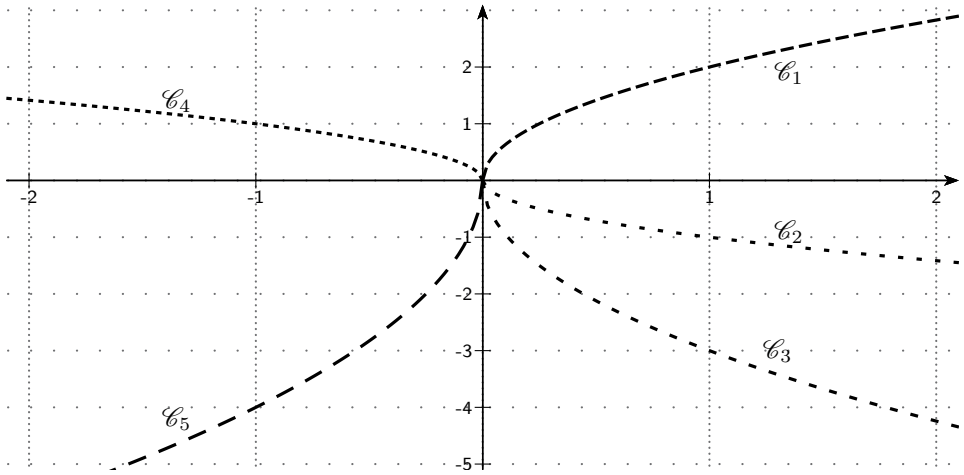
$g(x) = -x^3 + 10$ $\qquad$ $k(x) = 2x^3 + 3x^2$

Exercice 3 Quel est le diamètre d'une sphère de volume 5 m ^{3} ?

Exercice 4 Calculer, sans calculatrice : $a = 56 \times 35 \times 25$, $b = \sqrt[3]{-216}$ et $c = \sqrt[3]{3375}$.

Fonction racine carrée

Exercice 5 Chaque courbe tracée ci-dessous a une équation du type $y = k\sqrt{\pm x}$. Déterminer l'équation de chacune d'entre elles.



Exercice 6 Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction.

$f(x) = 2\sqrt{x} - 5$

$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} - 1$

$h(x) = \sqrt{x+5} - 3$

$i(x) = \frac{x-2}{4-x} + \sqrt{3x-6}$

$j(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$k(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

Exercice 7 Quel est le diamètre d'un disque d'aire 7 m ^{2} ?

Exercice 8 Dans chacun des cas, étudier les variations de la fonction sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

$f(x) = 3\sqrt{x} - 4$ $\qquad$ $g(x) = 7 - 2\sqrt{x}$ $\qquad$ $h(x) = (\sqrt{x}+3)^2$

Exercice 9 Soient a et b deux réels positifs. Montrer que les nombres suivants ont le même signe.

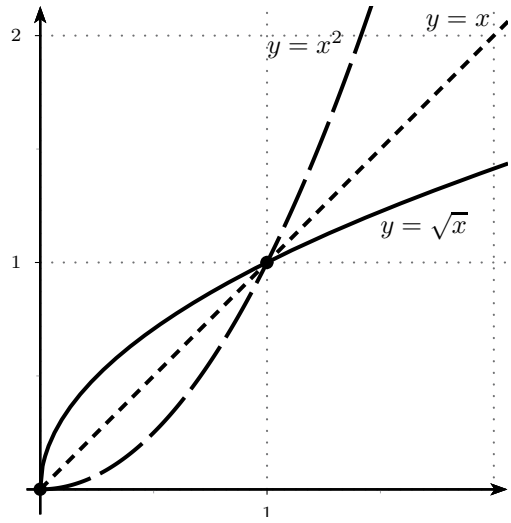
1. $9 - a$ et $3 - \sqrt{a}$ $\qquad$ 2. $b - 5$ et $\sqrt{b} - \sqrt{5}$ $\qquad$ 3. $b - a$ et $\sqrt{b} - \sqrt{a}$

Exercice 10 Soient a et b deux réel positifs.

1. (a) Développer $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.
   (b) En déduire que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$. C'est un résultat annoncé dans le premier chapitre de l'année sur les nombres (cf. p. 9).
2. (a) Justifier que $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.
   (b) En déduire que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.
   (c) Ce dernier résultat signifie que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique de deux réels positifs. À quoi correspond géométriquement cette dernière ?

Exercice 11 On sait bien que si $\lambda \geqslant 0$, $\sqrt{\lambda^2} = (\dots)^2 = |\dots| = \dots$.

On a tracé ci-contre les représentations graphiques des fonctions carré et racine carrée. En les observant, compléter le texte suivant :
Dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_{x^2}$ et $\mathscr{C}_{\sqrt{x}}$ sont .....
On dit que les fonctions carré et racine carrée sont des *fonctions réciproques* l'une de l'autre sur .....
En effet, on a
$y = \sqrt{x} \iff x = \dots$
donc $M(x\,;y) \in \mathscr{C}_{\sqrt{\cdot}}$
$\iff M'(\dots\,;\dots) \in \mathscr{C}_{\cdot^2}$.



Problèmes

Exercice 12 Soient les fonctions de référence $u(x) = x^3$ et $r(x) = \sqrt{x}$, définies sur leur ensemble de définition usuel et soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{R}$ leur représentation graphique dans un repère. À laquelle ou auxquelles de ces courbes les points $A(0\,;0)$, $B(1\,;-1)$, $C(1\,;1)$, $D(-2\,;8)$, $E(4\,;-2)$, $F(-1\,;1)$, $G(0\,;-1)$, $H(-1\,;-1)$, $I(-2\,;-8)$ et $J(5\,;2,5)$ appartiennent-ils ?

Exercice 13 Comparer les réels a et b donnés ci-dessous.
Justifier les réponses par une phrase du type : « La fonction $x \longmapsto$ ..... est ..... sur l'intervalle ..... et .....<..... ».

(a) $a = 5\pi - 8$ et $b = 5 \times 4 - 8$.
(b) $a = -5 - 2 \times \frac{7}{2}$ et $b = -5 - 2 \times \frac{11}{3}$.
(c) $a = \pi^2$ et $b = 3,14^2$.
(d) $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$ et $b = (-0,66)^2$.
(e) $a = \frac{1}{969}$ et $b = \frac{1}{696}$.
(f) $a = -\frac{1}{0,709}$ et $b = -\frac{1}{0,71}$.
(g) $a = (-3,14)^3$ et $b = (-\pi)^3$.
(h) $a = \sqrt{10}$ et $b = \pi$.
(i) $a = (\sqrt{2})^3$ et $b = (\sqrt{5})^3$.
(j) $a = (3 - 2\sqrt{6})^3$ et $b = (3 - 2\sqrt{7})^3$.
(k) $a = \frac{-4}{\sqrt{3}+5}$ et $b = \frac{-4}{\sqrt{2}+5}$.

Exercice 14 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

$$a(x) = \frac{\sqrt{3x}-1}{x^3-8} \qquad b(x) = \frac{x-2}{\sqrt{3-x}} \qquad c(x) = \sqrt{3x^3+24} \qquad d(x) = \frac{4x^5-73}{\sqrt{5-2x^3}}$$

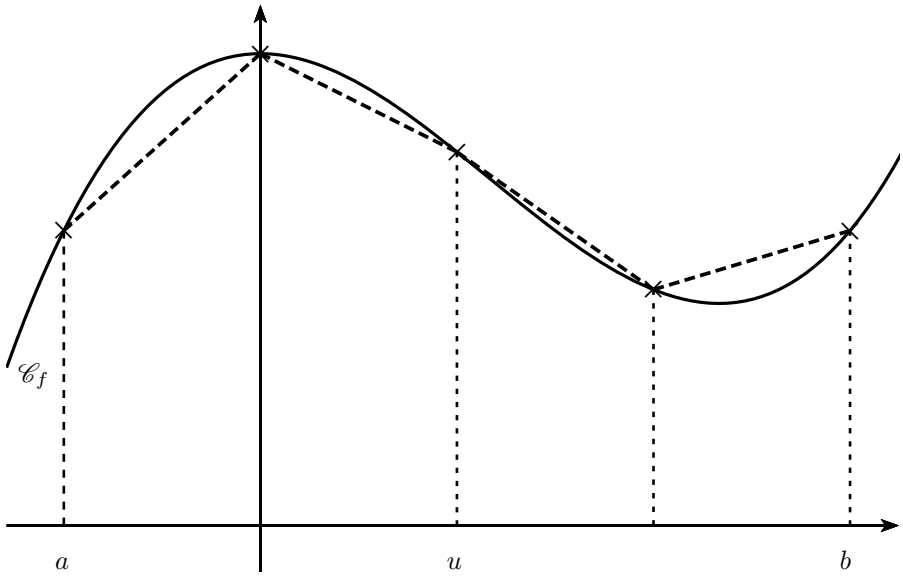
Exercice 15 Duplication du cube

Au VIe s. avant notre ère, les habitants de Délos sont frappés par la peste. Ils implorent l'oracle qui exige alors la construction d'un autel cubique à la gloire d'Apollon dont le volume soit le double de celui de l'autel cubique existant déjà. Certains ont proposé de doubler le côté de l'autel. Cela convient-il ? Comment faire ?

Exercice 16 ∫ Approcher la longueur d'une courbe

Calculer la longueur exacte d'une courbe est un problème mathématique difficile. Nous allons ici en obtenir des valeurs approchées en utilisant des objets pour lesquels il est aisé de connaître la longueur : des segments. Ceux-ci seront de plus en plus proches de la courbe donc leur longueur se rapprochera de celle voulue.

Nous nous plaçons bien évidemment dans un repère orthonormé et l'on appelle f la fonction dont on veut approcher la longueur de la courbe sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$. On découpe l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ en N segments de même longueur et l'on calcule les longueur des segments entre les images respectives comme il est illustré ci-dessous pour $N = 4$.



1. (a) Quelle est l'amplitude des sous-intervalles en fonctions de a, b et N ?
   (b) Si u est l'une des bornes de ces sous-intervalles, quelle est la suivante ?
   (c) Exprimer la longueur du segment entre les deux points de la courbe d'abscisse u et sa suivante.
2. Se rappeler de la fonction Python `Distance` retournant la distance entre deux points `(xA;yA)` et `(xB;yB)`.
3. On désigne par `f` la fonction Python retournant l'image d'un nombre `x` par la fonction f. Compléter la fonction `LongueurCourbe` suivante.

```
def LongueurCourbe(a,b,N) :
    S=0
    u=a
    pas= ...
    for i in range (0, ...) :
        v= ...
        S=S+distance(...,...,...,...)
        u=v
    return S
```

4. Tester cette fonction pour la courbe de la fonction carré entre 0 et 1, pour celle de la fonction cube entre -2 et 4, pour la fonction inverse entre 1 et 10 puis pour la fonction racine entre 0 et 9.

N'oubliez pas d'aller en page 271 faire le devoir n° 7.

Corrigé des exercices

NOUVELLES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonction cube

Activité 1

1. *Sur la calculatrice, on observe que la courbe de la fonction cube « monte » lorsqu'on la parcourt de gauche à droite, que la partie « gauche » est située en dessous de l'axe des abscisses et que la partie « droite » est située au-dessus et que la courbe semble symétrique par rapport à l'origine du repère.*
2. *On a* $-4 < -3 < -1 < 0 < 2 < 5$ *et* $(-4)^3 = -64 < (-3)^3 = -27 < (-1)^3 = -1 < 0^3 = 0 < 2^3 = 8 < 5^3 = 125$ *: la fonction cube semble croissante et les images semblent avoir le même signe que leur antécédent.*
3. *On a* $(-5)^3 = -125 = -5^3$, $(-2)^3 = -8 = -2^3$, $1^3 = 1 = -(-1)^3$, $3^3 = 27 = -(-3)^3$ *et* $4^3 = 64 = -(-4)^3$ *: la fonction cube semble impaire, son graphe semble symétrique par rapport à l'origine.*
4. *On a* $1 = 1^3$, $0 = 0^3$, $1000 = 10^3$, $-1000000 = (-100)^3$, $64 = 4^3$ *et* $-216 = (-6)^3$ *: tout nombre semble avoir un unique antécédent par la fonction cube.*

Exercice 1

On a $(2\,;4) \in \mathscr{C}_1$ d'où l'équation $4 = k_1 \times 2^3 \Leftrightarrow k_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $\mathscr{C}_1 : y = \frac{1}{2}x^3$.
On a $(-1\,;3) \in \mathscr{C}_2$ d'où l'équation $3 = k_2 \times (-1)^3 \Leftrightarrow k_2 = -3$ et $\mathscr{C}_2 : y = -3x^3$.
On a $(1\,;-1) \in \mathscr{C}_3$ d'où l'équation $-1 = k_3 \times 1^3 \Leftrightarrow k_3 = -1$ et $\mathscr{C}_3 : y = -x^3$.
On a $(-1\,;-2) \in \mathscr{C}_4$ d'où l'équation $-2 = k_4 \times (-1)^3 \Leftrightarrow k_4 = 2$ et $\mathscr{C}_4 : y = 2x^3$.

Exercice 2

$f(x) = x^3 - 2$: On a $a < b \overset{x^3\nearrow}{\iff} a^3 < b^3 \overset{-2}{\iff} a^3 - 2 < b^3 - 2 \iff f(a) < f(b)$: f est croissante.

$g(x) = -x^3 + 10$: $a < b \overset{x^3\nearrow}{\iff} a^3 < b^3$
$\overset{\times(-1)<0}{\iff} -a^3 > -b^3 \overset{+10}{\iff} -a^3 + 10 > -b^3 + 10 \Leftrightarrow g(a) > g(b)$: g est décroissante.

$h(x) = 3 - 2x^3$: $a < b \overset{x^3\nearrow}{\iff} a^3 < b^3 \overset{\times(-2)<0}{\iff} -2a^3 > -2b^3$
$\overset{+3}{\iff} -2a^3 + 3 > -2b^3 + 3 \Leftrightarrow h(a) > h(b)$: h est décroissante.

$k(x) = 2x^3 + 3x^2$: $0 \leqslant a < b \overset{x^3 \text{ et } x^2\nearrow}{\Longrightarrow} a^3 < b^3$ et $a^2 < b^2 \Longrightarrow 2a^3 < 2b^3$ et $3a^2 < 3b^2 \Longrightarrow 2a^3 + 3a^2 < 2b^3 + 3b^2$ et k est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Il en sera de même sur $]-\infty\,;0\,]$ pour les fonctions f, g et h. En revanche, pour la fonction k, nous avons utilisé la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$. Cette dernière étant décroissante sur $\mathbb{R}^-$, nous ne pouvons plus rien afirmer pour la fonction k sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice 3 Le volume d'une sphère est donné par la formule $v = \frac{4}{3}\pi R^3$ donc $R^3 = \frac{3v}{4\pi}$ et si $v = 5\,\text{m}^3$, $R^3 = \frac{15}{4\pi}$. Le rayon de cette sphère est donc $R = \sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}}$ et son diamètre est double : $D = 2\sqrt[3]{\frac{15}{4\pi}} \simeq 2,12\,\text{m}$.

Exercice 4 On a $a = 56 \times 35 \times 25 = 2{\cdot}7.5.7.5^2 = 7^2.(2.5)^3 = 49\,000$,
$b = \sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{2^3.3^3} = -2.3 = -6$ et $c = \sqrt[3]{3375} = \sqrt[3]{3^3.5^3} = 3.5 = 15$.

Fonction racine carrée

Activité 2

1. *La courbe n'est dessinée que sur la partie « gauche » et « monte » lorsqu'on la parcourt de « gauche à droite » : la fonction racine carrée semble être définie sur $\mathbb{R}^+$ et semble être croissante.*
2. *On a* $0 < \frac{1}{4} < \frac{16}{25} < 1 < 2 < 3 < 4 < 9$ *et* $\sqrt{0} = 0 < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} < \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 < \sqrt{9} = 3$ *: la fonction racine carrée semble bien être croissante.*
3. $0 = \sqrt{0}$, $1 = \sqrt{1}$, $3 = \sqrt{9}$, $4 = \sqrt{16}$, $9 = \sqrt{81}$, $\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{7}{3} = \sqrt{\frac{49}{9}}$ *et* $12 = \sqrt{144}$ *: tout nombre positif semble avoir un unique antécédent par la fonction racine carrée.*

Exercice 5
On a $(\,1\,;\,2\,) \in \mathscr{C}_1$ d'où l'équation $2 = k_1\sqrt{+1} \Leftrightarrow k_1 = 2$ et $\mathscr{C}_1 : y = 2\sqrt{x}$.
On a $(\,1\,;\,-1\,) \in \mathscr{C}_2$ d'où l'équation $-1 = k_2\sqrt{+1} \Leftrightarrow k_2 = -1$ et $\mathscr{C}_2 : y = -\sqrt{x}$.
On a $(\,1\,;\,-3\,) \in \mathscr{C}_3$ d'où l'équation $-3 = k_3\sqrt{+1} \Leftrightarrow k_3 = -3$ et $\mathscr{C}_3 : y = -3\sqrt{x}$.
On a $(\,-1\,;\,1\,) \in \mathscr{C}_4$ d'où l'équation $1 = k_4\sqrt{-(-1)} \Leftrightarrow k_4 = 1$ et $\mathscr{C}_4 : y = \sqrt{-x}$.
On a $(\,-1\,;\,-4\,) \in \mathscr{C}_5$ d'où l'équation $-4 = k_5\sqrt{-(-1)} \Leftrightarrow k_4 = -4$ et $\mathscr{C}_5 : y = -4\sqrt{-x}$.

Exercice 6 L'ensemble définition d'une fonction est l'ensemble de tous les nombres qui ont une image par cette fonction. Les objections mathématiques peuvent être de natures différentes : par exemple, un radicande doit être positif ou nul et un dénominateur ne doit pas être nul.

$f(x) = 2\sqrt{x} - 5$: le radicande x doit être positif ou nul donc $\mathscr{D}_f = [\,0\,;+\infty\,[$.

$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} - 1$: le radicande x doit être positif ou nul et le dénominateur x ne doit pas être nul donc $\mathscr{D}_g =]\,0\,;+\infty\,[$.

$h(x) = \sqrt{x+5} - 3$: le radicande $x+5$ doit être positif ou nul *i.e.* $x \geqslant -5$ donc $\mathscr{D}_h = [\,-5\,;+\infty\,[$.

$i(x) = \frac{x-2}{4-x} + \sqrt{3x-6}$: le dénominateur $4-x$ ne doit pas être nul *i.e.* $x \neq 4$ et le radicande $3x-6$ doit être positif ou nul *i.e.* $x \geqslant 2$ donc $\mathscr{D}_i = [\,2\,;4\,[\,\cup\,]\,4\,;+\infty\,[$.

$j(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$: le radicande x doit être positif ou nul et le dénominateur $\sqrt{x}-1$ ne doit pas être nul *i.e.* $\sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc $\mathscr{D}_j = [\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

$k(x) = \sqrt{1-\frac{1}{x}}$: le dénominateur x ne doit pas être nul et le radicande $1-\frac{1}{x}$ doit être positif ou nul *i.e.* $\frac{1}{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in\,]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,]$ donc $\mathscr{D}_k =\,]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,]$.

Exercice 7 L'aire d'un disque est donnée par la formule $\mathscr{A} = \pi R^2$ donc $R^2 = \frac{\mathscr{A}}{\pi}$ et si $\mathscr{A} = 7\,\text{m}^2$, $R^2 = \frac{7}{\pi}$. Puisque $R > 0$, $R = \sqrt{\frac{7}{\pi}}$ et le diamètre est double $D = 2\sqrt{\frac{7}{\pi}} \simeq 2,99\,\text{m}$.

Exercice 8

$f(x) = 3\sqrt{x} - 4 : 0 \leqslant a < b \overset{\sqrt{x}\nearrow}{\Longleftrightarrow} \sqrt{a} < \sqrt{b} \overset{\times 3>0}{\Longleftrightarrow} 3\sqrt{a} < 3\sqrt{b}$
$\overset{-4}{\Longleftrightarrow} 3\sqrt{a} - 4 < 3\sqrt{b} - 4 \iff f(a) < f(b) : f$ est croissante.

$g(x) = 7 - 2\sqrt{x} : 0 \leqslant a < b \overset{\sqrt{x}\nearrow}{\Longleftrightarrow} \sqrt{a} < \sqrt{b}$
$\overset{\times(-2)<0}{\Longleftrightarrow} -2\sqrt{a} > -2\sqrt{b} \overset{+7}{\Longleftrightarrow} 7 - 2\sqrt{a} > 7 - 2\sqrt{b} : g$ est décroissante.

$h(x) = (\sqrt{x}+3)^2 : 0 \leqslant a < b \overset{\sqrt{x}+3\nearrow}{\Longleftrightarrow} 0 \leqslant \sqrt{a}+3 < \sqrt{b}+3$
$\overset{x^2\nearrow\mathbb{R}^+}{\Longleftrightarrow} (\sqrt{a}+3)^2 < (\sqrt{b}+3)^2 : h$ est croissante.

Exercice 9 Soient a et b deux réels positifs.

$9 - a = 3^2 - \sqrt{a}^2 = (3-\sqrt{a})(3+\sqrt{a})$ du même signe que $3-\sqrt{a}$ car $3+\sqrt{a} > 0$.

$b-5 = \sqrt{b}^2 - \sqrt{5}^2 = (\sqrt{b}-\sqrt{5})(\sqrt{b}+\sqrt{5})$ du même signe que $\sqrt{b}-\sqrt{5}$ car $\sqrt{b}+\sqrt{5} > 0$.

$b-a = \sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2 = (\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})$ du même signe que $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ car $\sqrt{b}+\sqrt{a} > 0$.

Il est souvent utile de faire appel à $\sqrt{b} \pm \sqrt{a}$ lorsque l'on a $\sqrt{b} \mp \sqrt{a}$: on dit que ce sont des quantités conjuguées.

Exercice 10 Soient a et b deux réel positifs.

1. (a) On a $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$.

   (b) Ainsi, $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geqslant a + b$ et comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante, $\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a}+\sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$.

2. (a) On a $(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 \geqslant 0$ donc $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

   (b) Ainsi, $\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab \overset{\sqrt{\cdot}\nearrow}{\Longrightarrow} \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

   (c) La moyenne géométrique de deux réels positifs a et b est le nombre $\sqrt{ab}$: il correspond à la longueur du côté d'un carré de même aire qu'un rectangle de côtés de longueur a et b.

Exercice 11 On sait bien que si $\lambda \geqslant 0$, $\sqrt{\lambda^2} = (\sqrt{\lambda})^2 = |\lambda| = \lambda$.
Dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_{x^2}$ et $\mathscr{C}_{\sqrt{x}}$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
On dit que les fonctions carré et racine carrée sont des *fonctions réciproques* l'une de l'autre sur $\mathbb{R}^+$.
En effet, on a $y = \sqrt{x} \iff x = y^2$ donc $M(x\,;y) \in \mathscr{C}_{\sqrt{\cdot}} \Leftrightarrow M'(y\,;x) \in \mathscr{C}_{\cdot^2}$.

Problèmes

Exercice 12 $0^3 = 0$ donc $A \in \mathcal{U}$ et $G \notin \mathcal{U}$, $\sqrt{0} = 0$ donc $A \in \mathcal{R}$ et $G \notin \mathcal{R}$; $1^3 = 1 \neq -1$ donc $B \notin \mathcal{U}$ et $C \in \mathcal{U}$, $\sqrt{1} = 1 \neq -1$ donc $B \notin \mathcal{R}$ et $C \in \mathcal{R}$; $(-2)^3 = -8 \neq 8$ donc $D \notin \mathcal{U}$ et $I \in \mathcal{U}$, $-2 < 0$ donc D, $I \notin \mathcal{R}$; $4^3 \neq -2$ donc $E \notin \mathcal{U}$, $\sqrt{4} = 2 \neq -2$ donc $E \notin \mathcal{R}$; $(-1)^3 = -1 \neq 1$ donc $F \notin \mathcal{U}$ et $H \in \mathcal{U}$, $-1 < 0$ donc F, $H \notin \mathcal{R}$; $5^3 \neq 2,5$ donc $J \notin \mathcal{U}$, $\sqrt{5} \neq 2,5$ donc $J \notin \mathcal{R}$.

Exercice 13

(a) $a = 5\pi - 8 < b = 5 \times 4 - 8$ car $x \mapsto 5x - 8$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\pi < 4$.

(b) $a = -5 - 2\frac{7}{2} > b = -5 - 2\frac{11}{3}$ car $x \mapsto -5 - 2x$ décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\frac{7}{2} < \frac{11}{3}$.

(c) $a = \pi^2 > b = 3,14^2$ car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\pi > 3,14 \geqslant 0$.

(d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 > (-0,66)^2$ car $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et $-\frac{2}{3} < -0,66 \leqslant 0$.

(e) $a = \frac{1}{969} < b = \frac{1}{696}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $969 > 696 \geqslant 0$.

(f) $-\frac{1}{0,709} < -\frac{1}{0,71}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et $0 \geqslant -709 > -710$.

(g) $a = (-3,14)^3 > b = (-\pi)^3$ car $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $-3,14 > -\pi$.

(h) $a = \sqrt{10} > b = \pi \geqslant 0$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $10 > \pi^2$.

(i) $0 \leqslant 2 < 5 \overset{\sqrt{\nearrow}\mathbb{R}^+}{\Longrightarrow} \sqrt{2} < \sqrt{5} \overset{x^3\nearrow}{\Longrightarrow} a = (\sqrt{2})^3 < (\sqrt{5})^3 = b$.

(j) $0 \leqslant 6 < 7 \overset{\sqrt{\nearrow}\mathbb{R}^+}{\Longrightarrow} \sqrt{6} < \sqrt{7} \overset{3-2x\searrow}{\Longrightarrow} 3 - 2\sqrt{6} > 3 - 2\sqrt{7}$
$\overset{x^3\nearrow}{\Longrightarrow} a = (3 - 2\sqrt{6})^3 > (3 - 2\sqrt{7})^3 = b$.

(k) $3 > 2 > 0 \overset{\sqrt{\nearrow}\mathbb{R}^+}{\Longrightarrow} \sqrt{3} > \sqrt{2} > 0 \Longrightarrow \sqrt{3}+5 > \sqrt{2}+5 > 0 \overset{1/x\searrow\mathbb{R}^+}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}+5} < \frac{1}{\sqrt{2}+5}$
$\overset{-4<0}{\Longrightarrow} a = \frac{-4}{\sqrt{3}+5} > \frac{-4}{\sqrt{2}+5} = b$.

Exercice 14

$a(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{x^3-8}$: le radicande $3x$ doit être positif ou nul *i.e.* $x \geqslant 0$ et le dénominateur $x^3 - 8$ ne doit pas être nul *i.e.* $x^3 \neq 8 = 2^3 \iff x \neq 2$ et donc
$\mathscr{D}_a = [\,0\,;2\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$.

$b(x) = \frac{x-2}{\sqrt{3-x}}$: le radicande $3 - x$ doit être positif ou nul *i.e.* $x \leqslant 3$ et le dénominateur $\sqrt{3-x}$ ne doit pas être nul *i.e.* $3 - x \neq 0 \iff x \neq 3$ et donc
$\mathscr{D}_b =]\,-\infty\,;3\,[$.

$c(x) = \sqrt{3x^3 + 24}$: le radicande $3x^3 + 24$ doit être positif ou nul
i.e. $3x \geqslant -24 \iff x \geqslant -\frac{24}{3} = -8 = (-2)^3 \iff x \geqslant -2$ et donc
$\mathscr{D}_c = [\,-2\,;+\infty\,[$.

$d(x) = \dfrac{4x^5 - 73}{\sqrt{5 - 2x^3}}$: le radicande $5 - 2x^3$ doit être positif ou nul
i.e. $-2x^3 \geqslant -5 \iff x^3 \leqslant \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \iff x \leqslant \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ et le dénominateur $5 - 2x^3$ ne doit pas être nul *i.e.* $x \neq \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ et donc $\mathscr{D}_d = \left]-\infty\,;\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right[$.

Exercice 15 Duplication du cube
Si l'ancien autel à un côté de longueur c, l'autel de côté $2c$ aura un volume de $(2c)^3 = 2^3c^3 = 8c^3$: huit fois plus que l'ancien autel.
On cherche d tel que $\mathcal{V}_d = 2\mathcal{V}_c \iff d^3 = 2 \times c^3 \iff d = \sqrt[3]{2 \times c^3} = c\sqrt[3]{2}$.
Il faut donc multiplier la longueur du côté de l'ancien autel par $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$.

Exercice 16

1. (a) Puisque l'on a découpé l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ en N, les sous-intervalles ont une amplitude de $\frac{b-a}{N}$
   (b) Si u est l'une des bornes de ces sous-intervalles, la suivante est $v = u + \frac{b-a}{N}$.
   (c) La longueur du segment entre les deux points de la courbe $(\,u\,;\,f(u)\,)$ et $(\,v\,;\,f(v)\,)$ est donc $\sqrt{(v-u)^2 + (f(v) - f(u))^2}$.
2. Voici les fonctions `Distance` et `f`, après avoir importé la racine carrée.

```
def Distance(xA,yA,xB,yB) :
    return sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)
def f(x) :
    return x**2    # par exemple
```

3. La fonction `LongueurCourbe` suivante répond au problème posé.

```
def LongueurCourbe(a,b,N) :
    S=0
    u=a
    pas= (b-a)/N    # le pas d'avancement
    for i in range (0,N) :
          # N n'est pas dans la boucle mais le dernier v vaut b
       v= u+pas
       S=S+distance(u,f(u),v,f(v))
       u=v
    return S
```

4. On obtient $\mathcal{L}_{\cdot^2}([\,0\,;1\,]) \simeq 1.478$, $\mathcal{L}_{\cdot^3}([\,-2\,;4\,]) \simeq 73.280$, $\mathcal{L}_{1/\cdot}([\,1\,;10\,]) \simeq 9.149$ et $\mathcal{L}_{\sqrt{\cdot}}([\,0\,;9\,]) \simeq 9,717$.

Chapitre VII

VECTEURS DU PLAN

Sommaire

Introduction **99**
Activités **100**
1 Translations **101**
2 Notion de vecteur **102**
2.1 Définitions 102
2.2 Représentation graphique 102
2.3 Cas particuliers 103
2.4 Exercices 103
3 Somme de vecteurs **104**
3.1 Définition 104
3.2 Constructions 104
3.3 Compléments 104
3.4 Exercices 105
4 Coordonnées d'un vecteur **106**
4.1 Milieu d'un segment : rappel 106
4.2 Définition 106
4.3 Exercices 107
4.4 Coordonnées de la somme de vecteurs 108
4.5 Norme d'un vecteur – Repères orthonormés 108
5 Multiplication d'un vecteur par un réel **109**
5.1 Définition et premières propriétés 109
5.2 Colinéarité de vecteurs 111
5.3 Homothéties 113
6 Problèmes **114**
Corrigé des exercices 116

Introduction

Le concept de vecteur (et d'espace vectoriel) naît de la géométrie affine avec l'introduction des coordonnées dans un repère du plan. Au XVIIe s., Descartes et

Fermat donnèrent les bases de la géométrie analytique en associant la résolution d'une équation à deux inconnues à la détermination graphique d'une courbe du plan. Afin de parvenir à une résolution géométrique sans utiliser la notion de coordonnées, Bolzano introduisit des opérations sur les points, droites et plans. L'étape fondatrice de la définition des vecteurs fut la définition du bipoint : un segment orienté, une extrémité est une origine et l'autre un but. La relation qui rend équivalents deux bipoints lorsqu'ils déterminent un parallélogramme achève ainsi de définir les vecteurs.

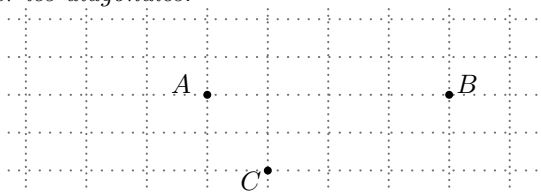
Au XIXe s., la notion s'enrichit avec l'apparition du produit scalaire (cf. classe de première) et se généralise avec la notion d'algèbre. Puis au XXe s., le lien se fait avec l'analyse, dite fonctionnelle, et l'introduction des espaces de fonctions et des espaces de dimension infinie. Les vecteurs peuvent être dorénavant considérés comme des objets ultimes, permettant dans une certaine mesure d'unifier la géométrie, l'algèbre et même l'analyse.

Activités

Activité 1 *Soient A, N, E et G quatre points tels que les segments $[AN]$ et $[EG]$ soient parallèles et de même longueur. Quelle est la nature du quadrilatère ainsi formé ?*

Activité 2

- *Construire les points D, E et F tels que $ABDC$, $ABCE$ et $BCAF$ soient des parallélogrammes.*
- *En tracer les diagonales.*



Activité 3

1. *Nous sommes à Claquebue, tout au bout de la rue sans nom, et Marcel est enchanté. Il vient en effet de terminer le plan de la cabane qu'il veut bâtir au fond du jardin et y va de ce pas. Mais comment diable a-t-il pu oublier ce satané vieux puits ? Il lui faut alors déplacer la cahute tout en lui gardant la même orientation, idéale au soleil levant. Aide-le donc à en tracer le plan en page suivante, le point A allant sur le point A'.*
2. *Sa compagne Aymée préfèrerait que cette maison basse soit déplacée au point $\tilde{A}$, elle y pourrait mieux observer Uranus. Aide-la donc à en tracer le plan.*
3. *Il s'avère que la partie gauche est réservée à leur jument verte et leur bœuf clandestin (qui ne passe muraille). Ils décident donc de placer leur bicoque au point A''. Aide-les donc à en tracer le plan.*
4. *(a) Afin qu'il sache où le chat se perche, Marcel compte sur un repère orthonormé d'origine A et d'unité 2 carreaux sur les axes.*

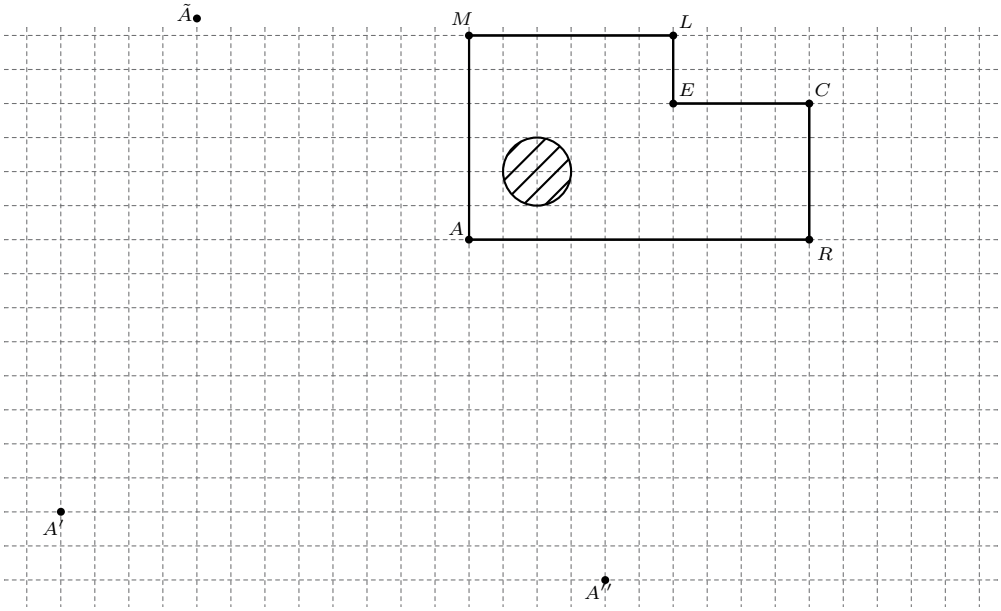
Détermine les coordonnées de chacun des points (exceptés les ˜).

Coordonnées	*"m"*	*"a"*	*"r"*	*"c"*	*"e"*	*"l"*
$MARCEL$						
$M'A'R'C'E'L'$						
$M''A''R''C''E''L''$						

(b) Que remarques-tu de ligne à ligne ?

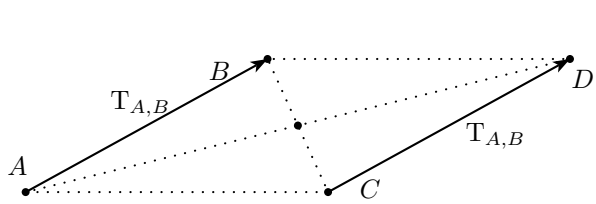
(c) Que remarques-tu de colonne à colonne ?

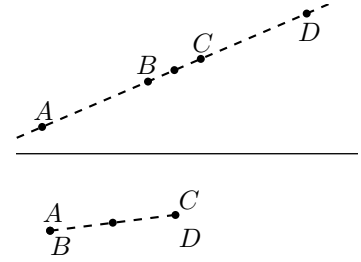
5. Quels titres sont ici disséminés ?



1 Translations

Définition 1 *Soient A et B deux points du plan.*
La translation qui transforme A en B est une transformation du plan qui, à tout point C, associe l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient même milieu.





Propriété 1 *Soient A, B, C et D quatre points.*
Les translations qui transforment A en B et C en D sont identiques si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

2 Notion de vecteur

2.1 Définitions

Définition 2 *Soient A et B deux points du plan.*
La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

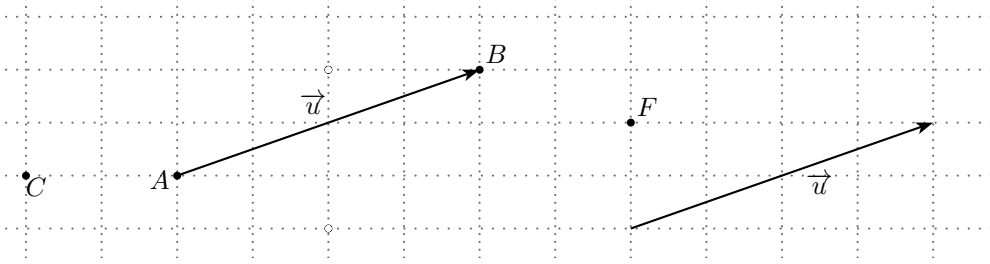
Définition 3 *A, B, C et D étant quatre points du plan.*
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits égaux s'ils définissent la même translation c.-à-d. si la translation qui transforme A en B associe au point C le point D.
On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Propriété 2 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *ssi* *$ABDC$ est un parallélogramme.*

2.2 Représentation graphique

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on dit qu'ils sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut noter $\overrightarrow{u}$.
Plus précisément, $\overrightarrow{AB}$ est le représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ d'origine A et d'extrémité B.

Exemples : ◦ Construire le représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{u}$.
On appelle D son extrémité.
◦ Construire le point E tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{u}$.
◦ Vérifier l'obtention de parallélogrammes.



<u>*Remarque*</u> : Deux **vecteurs** sont donc **égaux** s'ils ont **même direction, même sens et même longueur**.

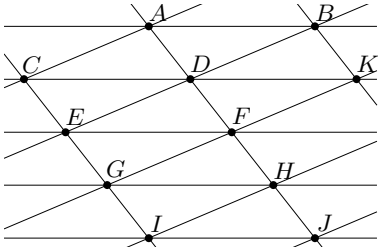
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longrightarrow \quad (AB)//(CD) \text{ et } AB = CD.$$

Un vecteur est donc défini par sa direction, son sens et sa longueur.

2.3 Cas particuliers

- Le **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$, est défini par la translation qui transforme A en A , B en B , C en C , etc.
  Ainsi, $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$ Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est de longueur nulle et a toutes les (ou aucune) direction(s).
- Le **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$ est défini par la translation qui transforme B en A. C'est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$. Il a même direction, même longueur mais sens contraire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est noté $-\overrightarrow{u}$. On a donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
  Tout comme $(-2) = -(+2)$.

2.4 Exercices



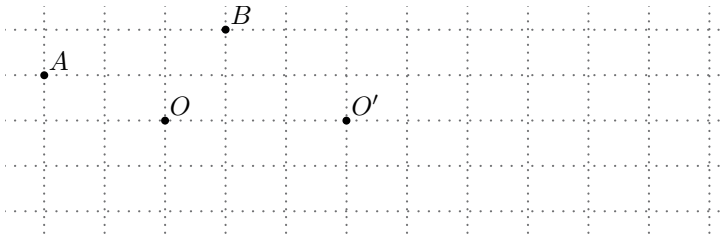
Exercice 1 La figure ci-contre est constituée de parallélogrammes. Déterminer l'image de chacun des points A et E par les translations de vecteurs suivants :
(a) $\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{GI}$ (c) $\overrightarrow{DH}$ (d) $\overrightarrow{CE}$ (e) $\overrightarrow{GJ}$

Exercice 2 VouF Les affirmations sont-elles vraies ? Justifier.

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati. On a :
   (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
2. La translation qui transforme E en F transforme aussi G en H.
   (a) $EFGH$ est un parallélogramme.
   (b) $[EF]$ et $[GH]$ ont même milieu.
   (c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

Exercice 3 A, B, O et O' sont quatre points distincts. C et D sont les symétriques respectifs de A et de B par rapport à O ; E et F ceux de A et de B par rapport à O'.

1. Compléter la figure.
2. Démontrer que $DCEF$ est un parallélogramme.

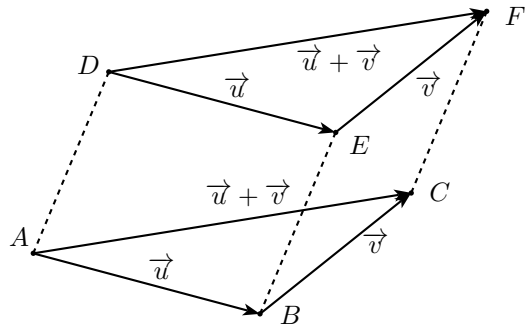


EXERCICES

3 Somme de vecteurs

3.1 Définition

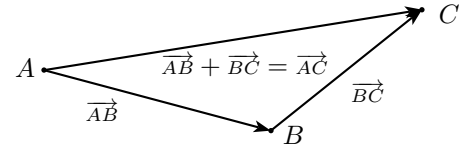
Définition & Propriété 3
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est une translation.
Le vecteur qui lui est associé est appelé le vecteur somme de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ et il est noté $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.



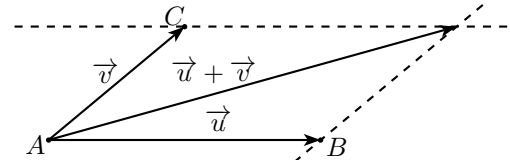
Dém. : On démontre aisément que si $ABED$ et $BCFE$ sont des parallélogrammes alors $ACFD$ aussi. □

3.2 Constructions

Relation de Chasles[†] : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
On trace des représentants de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ « bout à bout ».



Règle du parallélogramme :
On trace des représentants de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ de même origine et l'on construit un parallélogramme.



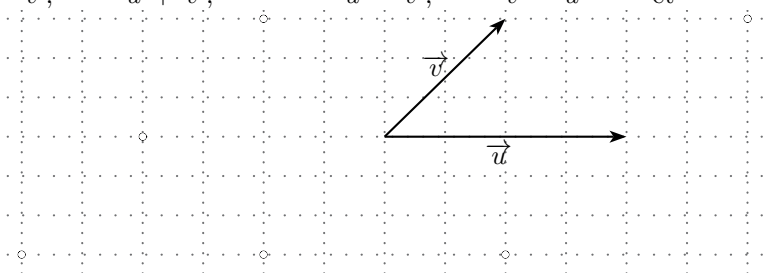
3.3 Compléments

Définition 4 ***Soustraction de vecteurs***
Soustaire le vecteur $\overrightarrow{v}$ au vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est lui ajouter son opposé :
$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})$.

On a toujours $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ en utilisant la relation de Chasles par exemple :
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$.

[†]. Michel Chasles (1793-1880), éminent mathématicien français dont le nom est inscrit sur la non moins éminente tour Eiffel.

Exemple : Tracer un représentant de chacun des vecteurs suivants :
$-\overrightarrow{u}$, $-\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.



Propriété 4 *Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a :*
$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$.

Démonstration : Ceci découle des propriétés des parallélogrammes. □

Propriété 5 *Si une symétrie centrale transforme les points A en A' et B en B', alors* $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.

Démonstration : En effet, $[AA']$ et $[BB']$ ont alors même milieu donc $AB'A'B$ est un parallélogramme. □

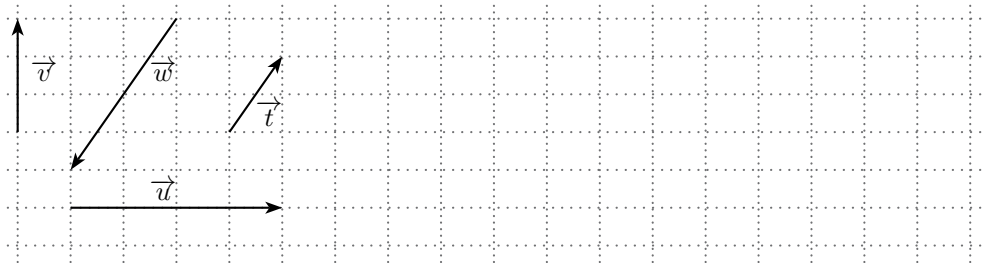
3.4 Exercices

Exercice 4 $ABCD$ est un rectangle de centre I.

- Faire une figure puis construire le représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BC}$.
- Démontrer que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AI}$ (on dit que l'on a réduit l'écriture de $\overrightarrow{u}$).
- Réduire l'écriture de $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$.

Exercice 5 Écrire le plus simplement possible $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{z}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{t}=-\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{QA}$.

Exercice 6 Construire les vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}+\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{w}-\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}$.



4 Coordonnées d'un vecteur

Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. On pose souvent $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et le repère s'écrit $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

4.1 Milieu d'un segment : rappel

Propriété 6 *Soient $A\,(x_A\,;\,y_A\,)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,)$ deux points.*
Le point $K\,(x_K\,;\,y_K\,)$ est le milieu du segment $[AB]$
ssi $\boldsymbol{x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}}$ *et* $\boldsymbol{y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}}$.

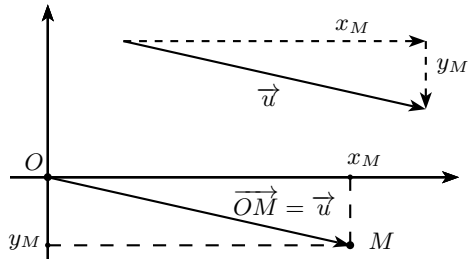
Cette propriété a été démontrée au chapitre III.

4.2 Définition

Définition 5 *Dans un repère, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont celles du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.*

$$\boldsymbol{x_{\vec{u}} = x_{\overrightarrow{OM}} = x_M}$$
$$\boldsymbol{y_{\vec{u}} = y_{\overrightarrow{OM}} = y_M}$$

On les appelle aussi les composantes du vecteur $\vec{u}$.



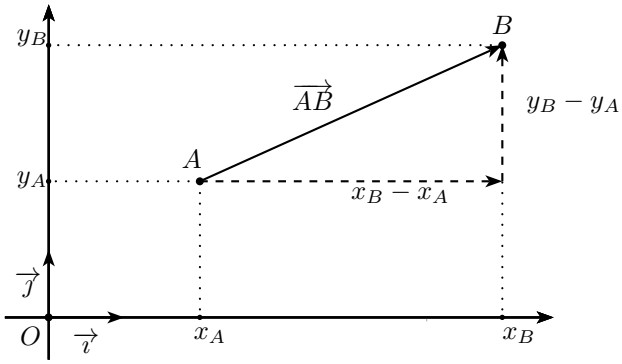
Exemple : Dans le repère $(O; I; J)$, on a $I\,(1\,;\,0\,)$ et $J\,(0\,;\,1\,)$ donc $\vec{\imath}\binom{1}{0}$ et $\vec{\jmath}\binom{0}{1}$.

Propriété 7
Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

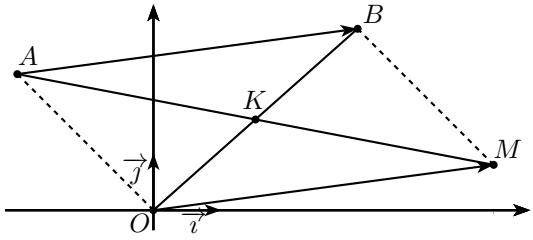
$$\vec{u}\binom{a}{b} = \vec{v}\binom{a'}{b'} \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En effet, les images de O par les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont confondues si et seulement si elles ont les mêmes coordonnées.

Propriété 8 ***Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$***
Soient $A\,(x_A\,;\,y_A\,)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,)$ deux points.
Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A$ *et* $y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A$.
On se souviendra de l'expression "Extrémité - Origine" (du vecteur).



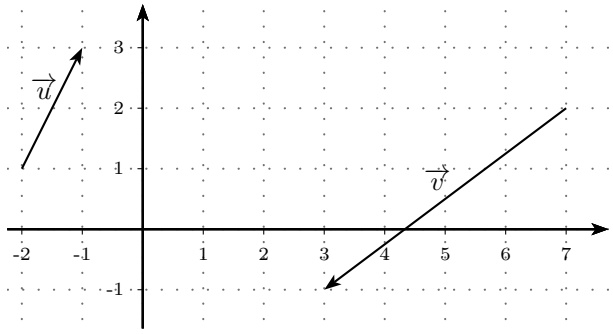
Démonstration : Soit M un point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ c.-à-d. $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu K. On en déduit $x_K = \dfrac{x_O + x_B}{2} = \dfrac{x_B}{2}$ et $x_K = \dfrac{x_M + x_A}{2}$ donc $\dfrac{x_B}{2} = \dfrac{x_M + x_A}{2}$ et $x_{\overrightarrow{AB}} = x_M = x_B - x_A$.
De même pour les ordonnées.



□

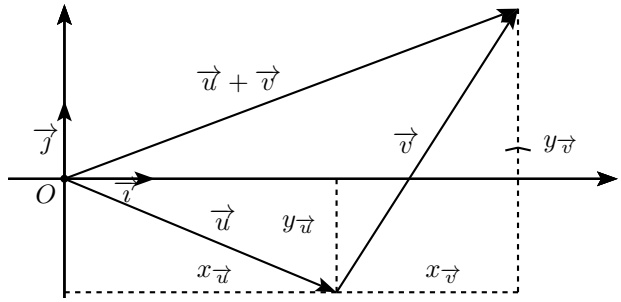
4.3 Exercices

Exercice 7
- Par lecture graphique, quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?
- Tracer deux représentants de chacun des vecteurs $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{z}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.



Exercice 8 On donne $A\,(-3\,;\,5\,)$, $B\,(4\,;\,2\,)$, $C\,(3\,;\,-1\,)$ et $D\,(-4\,;\,1\,)$ dans un repère.
- $ABCD$ est-il un parallélogramme ?
- Déterminer les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

4.4 Coordonnées de la somme de vecteurs



Propriété 9 *Dans un repère, si* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *alors* $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.
Les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs sont les sommes des coordonnées de ces vecteurs.

Il en est de même pour les composantes de la différence de deux vecteurs.

Exercice 9 On donne $A(-3\,;5)$, $B(4\,;2)$, $C(3\,;-1)$, $D(-4\,;1)$ et E et F tels que $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ dans un repère.

- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}$.
- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.
- Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}$.
- Déterminer les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CD}$.

4.5 Norme d'un vecteur – Repères orthonormés

Définition 6 *Soit* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur.*
On appelle ***norme*** *de* $\overrightarrow{u}$*, et l'on note* $||\overrightarrow{u}||$*, la longueur du vecteur* $\overrightarrow{u}$.

Définition 7 *Un repère* $(O;I,J)$ *est dit* ***orthonormé*** *(un r.o.n.)*
si $(OI)\perp(OJ)$ *et* $OI=||\overrightarrow{i}||=OJ=||\overrightarrow{j}||=1$, *l'unité de longueur.*

Au chapitre III, nous avons montré la propriété suivante.

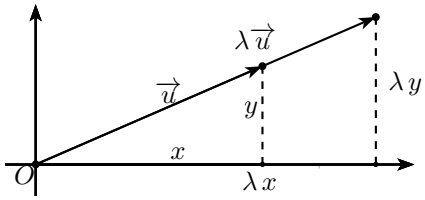
Propriété 10
Soient $A(x_A\,;y_A)$ *et* $B(x_B\,;y_B)$ *deux points dans un* ***repère orthonormé.***
On a $||\overrightarrow{AB}||=\boldsymbol{AB}=\sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2+(y_{\overrightarrow{AB}})^2}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Exercice 10 Soient $M(-3\,;5)$, $P(4\,;2)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.
Calculer MP et $||\overrightarrow{u}||$.

5 Multiplication d'un vecteur par un réel

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 8 *Soit λ un réel et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans un repère.*
Le vecteur $\boldsymbol{\lambda\overrightarrow{u}}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda x}\\\boldsymbol{\lambda y}\end{pmatrix}$.



On peut démontrer que le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ est indépendant du repère choisi.
En particulier, le théorème de Thalès concernant des droites parallèles et des longueurs proportionnelles et non des angles droits, le repère ne doit pas nécessairement être orthogonal.

Propriété 11 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.*
- $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *ssi* $\lambda = 0$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- *Si $\lambda \neq 0$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\lambda\overrightarrow{u}$ est un vecteur ayant pour :*
  - *direction : la même direction que $\overrightarrow{u}$,*
  - *sens : même sens que $\overrightarrow{u}$ si $\lambda > 0$, sens contraire à celui de $\overrightarrow{u}$ si $\lambda < 0$.*
  - *norme : $\|\lambda.\overrightarrow{u}\| = \lambda.\|\overrightarrow{u}\|$ si $\lambda > 0$ et $\|\lambda.\overrightarrow{u}\| = -\lambda.\|\overrightarrow{u}\|$ si $\lambda < 0$.*

Ainsi, il n'est plus nécessaire de se placer dans un repère pour multiplier un vecteur par un réel.

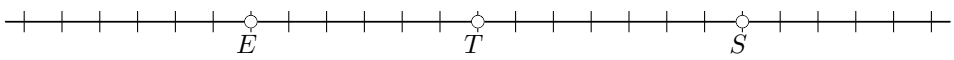
Exemples : ◦ $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$ vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$. ◦ $2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$.
◦ I est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Propriété 12 *Pour tous réels λ et λ' et tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :*
$\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ $(\lambda + \lambda')\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda'\overrightarrow{u}$ $(\lambda\lambda')\overrightarrow{u} = \lambda(\lambda'\overrightarrow{u})$

Cela se démontre immédiatement avec les définitions de la somme et de la multiplication.

Exercice 11 Sur la droite graduée suivante, on a placé les points E, T et S.

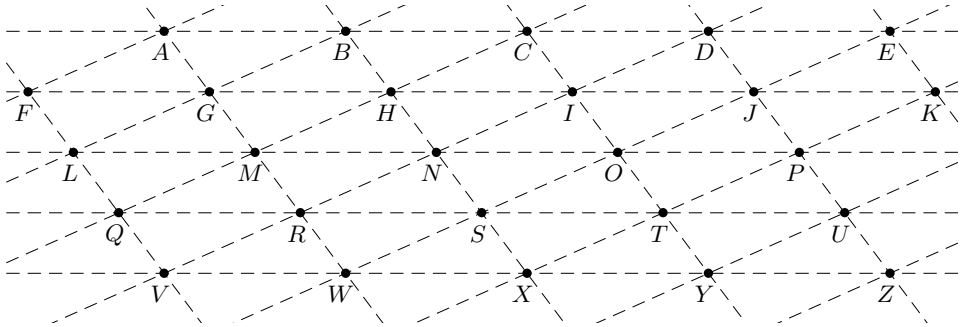
1. Justifier que $\overrightarrow{ES} = \frac{13}{6}\overrightarrow{ET}$.
2. Placer les points V, O, R et C tels que $\overrightarrow{EV} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{RE} = -\frac{11}{6}\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CT}$.



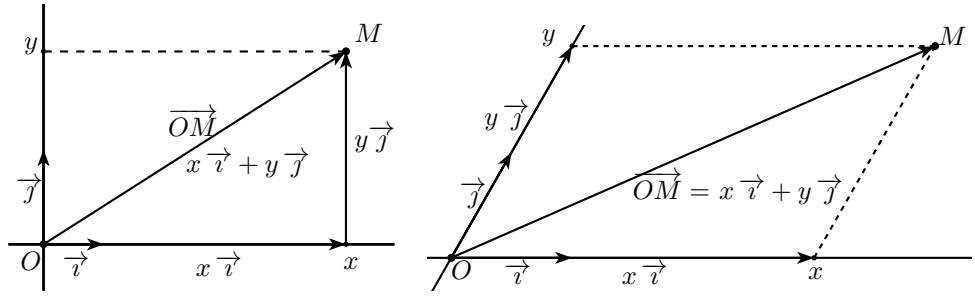
EXERCICES

Exercice 12 QCM Dans chacun des cas suivants, déterminer la (ou les) réponse(s) exacte(s).

1. Le vecteur $3\overrightarrow{AB}$ est égal à (a) $\overrightarrow{AE}$ (b) $\overrightarrow{JG}$ (c) $\overrightarrow{QT}$ (d) $\overrightarrow{VI}$
2. Le vecteur $-2\overrightarrow{SX}$ est égal à (a) $\overrightarrow{BN}$ (b) $\overrightarrow{WM}$ (c) $\overrightarrow{SQ}$ (d) $\overrightarrow{RG}$
3. Le vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{GW}$ est égal à (a) $\overrightarrow{HN}$ (b) $\overrightarrow{VL}$ (c) $\overrightarrow{FQ}$ (d) $\overrightarrow{CO}$
4. Le vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AR}$ égale (a) $\overrightarrow{AJ}$ (b) $\overrightarrow{JA}$ (c) $\overrightarrow{RP}$ (d) $\overrightarrow{MJ}$
5. $\overrightarrow{AQ}$ égale (a) $\overrightarrow{BW}$ (b) $\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{MW}$ (c) $\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{UT}$ (d) $\overrightarrow{CZ}-\overrightarrow{RY}$



Propriété 13 *Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on a*
$$M\,(x\,;\,y) \iff \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}.$$



Exercice 13 Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, placer les points A, B, C, D, E, F et G tels que $\overrightarrow{OA} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{9}{2}\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OD}\binom{-1}{4}$, $\overrightarrow{OE}\binom{2}{3}$, $\overrightarrow{AF} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{GB} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis les vérifier graphiquement.

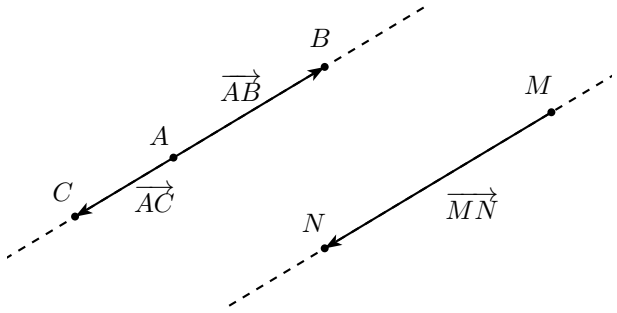
Exercice 14 On donne $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, $A\,(1\,;\,2)$, $B\,(-1\,;\,2)$, $C\,(-3\,;\,-4)$ et $D\,(2\,;\,-1)$ dans $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$. Calculer les coordonnées puis placer les points M, N, P, Q et R tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{RD}$.

5.2 Colinéarité de vecteurs

Définition 9 *Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.*
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Remarques :
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils ont même direction.
- Le vecteur nul a toutes les directions (ou alors aucune).
- Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est un « multiple » de l'autre.

Propriété 14
Trois points A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires (non nuls).



Exemple : Dans un repère, $A(-7\,;-1)$, $B(1\,;3)$ et $C(5\,;5)$ sont-ils alignés ?
On a $\overrightarrow{AB}\binom{-1-(-7)=8}{3-(-1)=4}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{5-(-7)=12}{5-(-1)=6}$. Or $8 = \frac{2}{3}\times 12$ et $4 = \frac{2}{3}\times 6$ donc $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et les points A, B et C sont alignés.

Exercice 15 VouF On se place dans un repère (O, I, J). Dans chacun des cas suivants, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

(a) $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{0}{9}$

(b) $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{4}{6}$

(c) $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\binom{-5}{6}$

(d) $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$

(e) $\vec{u}\binom{2}{3}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(f) $\vec{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\ 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Exercice 16 VouF On se place dans un repère (O, I, J).

1. Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}\binom{4}{7}$ a des composantes positives.
2. Tout vecteur colinéaire à $\vec{v}\binom{3}{5}$ a des composantes de même signe.
3. Tout vecteur colinéaire à $\vec{w}\binom{0}{2}$ admet 0 comme première composante.
4. Si $AB = AC$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

EXERCICES

Exercice 17 VouF On se place dans un repère (O, I, J) et l'on considère les points $A(-1\,;5)$, $B(1\,;1)$, $C(4\,;-5)$, $D(2\,;3)$ et $E(3\,;5)$.
Indiquer les réponses exactes.

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
(b) $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
(c) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
(d) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.
(e) B, D et E sont alignés.
(f) A, B et C sont alignés.
(g) B est le milieu du segment $[AC]$.
(h) D est le milieu du segment $[BE]$.

Exercice 18 Les points A, B, C, et D sont distincts.
Dans chaque cas, peut-on affirmer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?

(a) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$
(b) $AB = 2CD$
(c) $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{BD}$
(d) $\overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{CD}$
(e) $5\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$
(f) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
(g) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$
(h) $\overrightarrow{AC} = BD$

Exercice 19 Dans un triangle BAC, construire les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Démontrer alors que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 20 On donne les points $A(0\,;1)$, $B(5\,;0)$, $C(0\,;-4)$ et $D(x\,;0)$ dans un repère. Déterminer le réel x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires et trouver le réel λ tel que $\overrightarrow{CD} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$.

Nous avons donc remarqué que la colinéarité de deux vecteurs est affaire de proportionnalité donc de « produits en croix ». La définition suivante est donc toute naturelle et la proposition qui suit, bien utile.

Définition 10 ***Déterminant de deux vecteurs***
Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *deux vecteurs du plan repéré.*
On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$ *et de* $\overrightarrow{v}$ *le nombre* $\det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = xy' - x'y$.

Propriété 15 ***Critère de colinéarité***
Deux vecteurs sont colinéaires ssi leurs coordonnées sont proportionnelles.
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *sont colinéaires ssi* $\det(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}) = xy' - x'y = 0$.

Démonstration : Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires. Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors $xy' - x'y = 0 - 0 = 0$. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires alors
$\exists\lambda$ tq $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y \iff xy' - x'y = x\lambda y - \lambda xy = 0$.
Réciproquement, supposons $xy' - x'y = 0$. Si toutes les composantes sont nulles, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Si $x \neq 0$, on pose $\lambda = \frac{x'}{x}$ et l'on obtient $x' = \frac{x'}{x}.x = \lambda x$ et $xy' - x'y = 0 \iff xy' = x'y \iff y' = \frac{x'}{x}y = \lambda y$ donc $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
Si $x = 0$ alors on en choisit un non nul parmi x', y et y' et l'on procède de manière analogue. □

Exercice 21 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires deux à deux ?

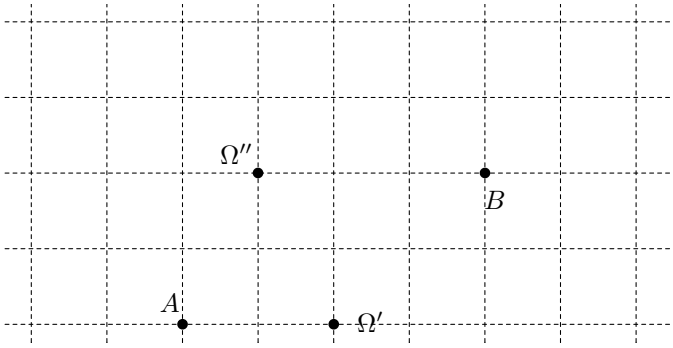
Exercice 22 Soient $A\,(1\,;-2)$, $B\,(-1\,;-4)$, $C\,(4\,;1)$, $D\,(5\,;4)$ et $E\,(-1\,;-2)$ cinq points du plan repéré.

1. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ? Et les droites (AE) et (BD) ?
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Et les points A, B et D ?

5.3 Homothéties

Exercice 23

1. Construire les points A' et B', images des points A et B par l'homothétie de centre Ω' et de rapport 2.
2. Construire les points A'' et B'', images des points A et B par l'homothétie de centre Ω'' et de rapport -1.
3. Que remarque-t-on du point de vue vectoriel ?



Définition 11 *Soient Ω un point et λ un réel non nul.*
L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application qui à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$.

Propriété 16
Si une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ transforme les points A en A' et B en B', alors $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Démonstration : En effet, si Ω en est le centre,
$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'\Omega} + \overrightarrow{\Omega B'} = \lambda\overrightarrow{A\Omega} + \lambda\overrightarrow{\Omega B} = \lambda(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{C\Omega}) = \lambda\overrightarrow{AB}$. □

Exercice 24 Le plan étant muni d'un repère, h est l'homothétie de centre $C\,(-2\,;3)$ et de rapport $-\frac{1}{2}$. Les points $P\,(6\,;-1)$ et $Q\,(-4\,;13)$ ont pour images respectives les points P' et Q'.

1. Déterminer les coordonnées du point P'.
2. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{P'Q'}$.
3. Calculer de deux manières les coordonnées du point Q'.

6 Problèmes

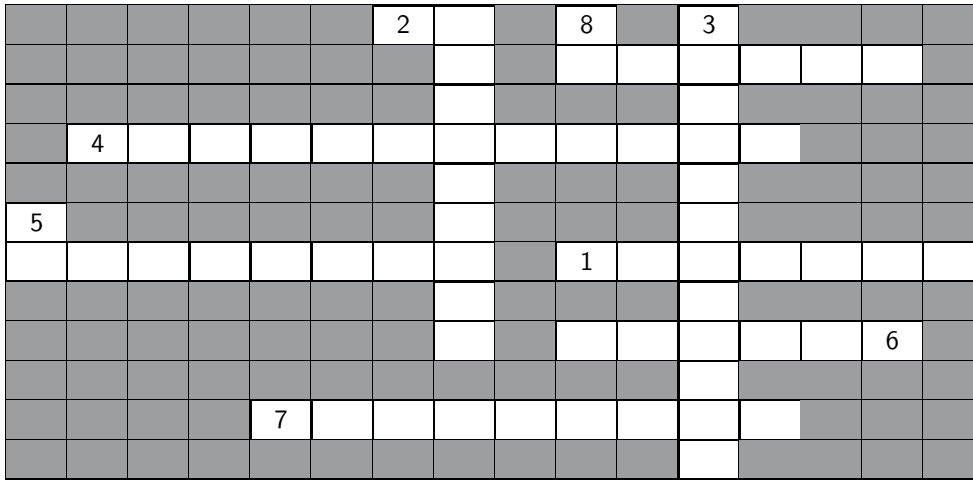
Exercice 25 BAC est un triangle. E et D sont les points tels que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$. Faire une figure puis démontrer que C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 26 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. Démontrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$.
2. Démontrer que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

Exercice 27 Crossword

1. The point K of $[AB]$ defined by $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$.
2. Two vectors with proportional coordinates.
3. A vector can have two of them.
4. A transformation described by a vector.
5. Add to a vector in order to obtain $\overrightarrow{0}$.
6. The translated of a point by a translation.
7. Two straight lines (AB) and (CD) such that $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{CD}$ are two collinear vectors.
8. An arrow connecting an initial point with a terminal point.



Exercice 28

Algo (A)
xA, yA, xB, yB, xI et yI sont des réels
Saisir xA, yA, xB, yB
$xI \leftarrow \frac{xA+xB}{2}$
... $\leftarrow$ ...
Afficher $(xI; yI)$

1. Analyser l'algorithme (A) ci-contre et le compléter afin qu'il réponde au problème suggéré.
2. Écrire un algorithme (B) calculant la norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ après saisie des coordonnées des points P et Q dans un r.o.n.

3. Écrire un algorithme (C) déterminant si les droites (SN) et (CF) sont parallèles ou non, après saisie des coordonnées des points S et N, C et F, distincts deux à deux.

Exercice 29 Dans un repère, on donne $A\,(\,1\,;\,-1\,)$, $B\,(\,-1\,;\,-2\,)$ et $C\,(\,-2\,;\,2\,)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D vérifiant $\quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point G vérifiant $\quad \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
3. Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 30 Dans un triangle ABC, I est le milieu de $[BC]$, J celui de $[AI]$. La droite (BJ) coupe (AC) en K.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, I et J dans le repère $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
3. Déterminer les coordonnées $(\,x\,;\,y\,)$ du point K.
   Indice : $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires. De même,...
4. En déduire que $\quad \overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 31 $ABCD$ est un parallélogramme. Soit P tel que $\quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\quad$ et Q tel que $\quad \overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$.

- Faire une figure puis émettre une conjecture à propos des points Q, P et C.

On souhaite montrer l'alignement des points Q, P et C de différentes façons.

- Méthode 1 : Considérations géométriques.
  Soit P' l'intersection des droites (AB) et (QC). Le but est de montrer que P et P' sont confondus.
  (a) Montrer que $\quad \dfrac{P'A}{P'B} = \dfrac{QA}{BC}$.
  (b) En déduire que $\quad P'A = \dfrac{1}{2}P'B$.
  (c) Conclure.
- Méthode 2 : Calcul vectoriel.
  (a) Montrer que $\quad \overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.
  (b) Montrer que $\quad \overrightarrow{PC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
  (c) Conclure.
- Méthode 3 : Utilisation d'un repère cartésien.
  (a) Déterminer les coordonnées des points C, P et Q dans le repère $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.
  (b) Conclure.

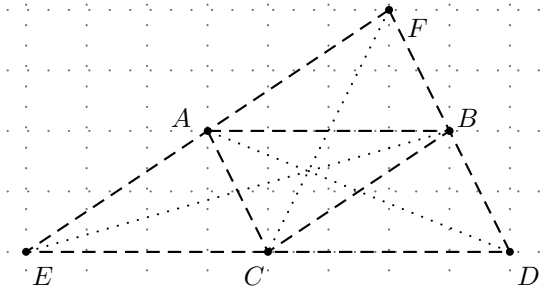
Pointez vers la page 273 afin de faire le devoir n° 8.

Corrigé des exercices

VECTEURS DU PLAN

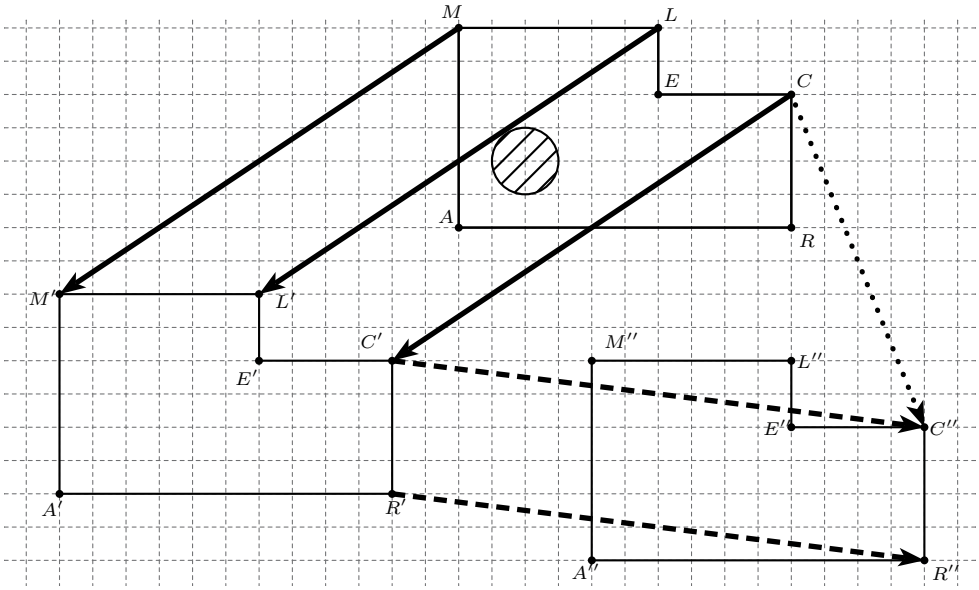
Activité 1 *Si les segments $[AN]$ et $[EG]$ sont parallèles et de même longueur alors le quadrilatère tracé est un parallélogramme, éventuellement aplati si les points sont alignés. En revanche, nous ne pouvons dire s'il se nomme $ANGE$ ou $NAGE$.*

Activité 2



Activité 3

1. et 3. Voici la figure complète.



2. Pour tracer $\tilde{M}\tilde{A}\tilde{R}\tilde{C}\tilde{E}\tilde{L}$, il faut construire des parallélogrammes dont l'un des côtés est $[A\tilde{A}]$.

4. (a)

Coordonnées	*"m"*	*"a"*	*"r"*	*"c"*	*"e"*	*"l"*
$MARCEL$	$(0\,;3)$	$(0\,;0)$	$(5\,;0)$	$(5\,;2)$	$(3\,;2)$	$(3\,;3)$
$M'A'R'C'E'L'$	$(-6\,;-1)$	$(-6\,;-4)$	$(-1\,;-4)$	$(-1\,;-2)$	$(-3\,;-2)$	$(-3\,;-1)$
$M''A''R''C''E''L''$	$(2\,;-2)$	$(2\,;-5)$	$(7\,;-5)$	$(7\,;-3)$	$(5\,;-3)$	$(5\,;-2)$

(b) Tu remarques que pour passer de $Marcel$ à $Marcel'$, on diminue les abscisses de 6 et les ordonnées de 4, pour passer de $Marcel'$ à $Marcel''$, on augmente les abscisses de 8 et l'on diminue les ordonnées de 1 et pour passer de $Marcel$ à $Marcel''$, on augmente les abscisses de $2 = -6 + 8$ et l'on diminue les ordonnées de 5 $(-5 = -4 - 1)$.
On écrira plus loin $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M'M''}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MM''}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$.

(c) Tu remarques par exemple, qu'entre "m" et "r", les abscisses augmentent de 5 et les ordonnées diminuent de 3, entre "r" et "e", les abscisses diminuent de 2 et les ordonnées augmentent de 2 et entre "m" et "e", les abscisses augmentent de $3 = 5 - 2$ et les ordonnées diminuent de 1 $(= -3 + 2)$.
On écrira plus loin $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{M'R'} = \overrightarrow{M''R''}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{R'E'} = \overrightarrow{R''E''}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{M'E'} = \overrightarrow{M''E''}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$
et $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RE} = \overrightarrow{ME}$.

5. Marcel Aymé a écrit La Rue sans nom, Maison basse, Uranus, La Jument verte, Le Bœuf clandestin, Le Passe-muraille, Les Contes du chat perché,...

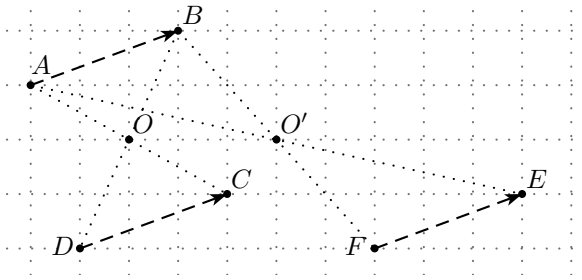
Exercice 1 (a) $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AB}} : A \mapsto B$ et $E \mapsto F$ (b) $\mathrm{T}_{\overrightarrow{GI}} : A \mapsto D$ et $E \mapsto G$
(c) $\mathrm{T}_{\overrightarrow{DH}} : A \mapsto F$ et $E \mapsto I$ (d) $\mathrm{T}_{\overrightarrow{CE}} : A \mapsto D$ et $E \mapsto G$
(e) $\mathrm{T}_{\overrightarrow{GJ}} : A \mapsto K$ et $E \mapsto H$

Exercice 2 VouF

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati.
   (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: Faux, ils sont de sens contraire.
   (b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$: Vrai.
   (c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$: Faux, ils n'ont pas la même direction.

2. La translation qui transforme E en F transforme G en H.
   (a) $EFGH$ parallélogramme : Faux, il est croisé.
   (b) $[EF]$ et $[GH]$ ont même milieu : Faux, côtés opposés d'un parallélogramme.
   (c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$: Vrai.

Exercice 3 Les diagonales du quadrilatère non croisé $ABCD$ se coupant en leur milieu O, c'est un parallélogramme et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. De même, $ABEF$ est un parallélogramme de centre O' et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$. D'où, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ et $DCEF$ est un parallélogramme.

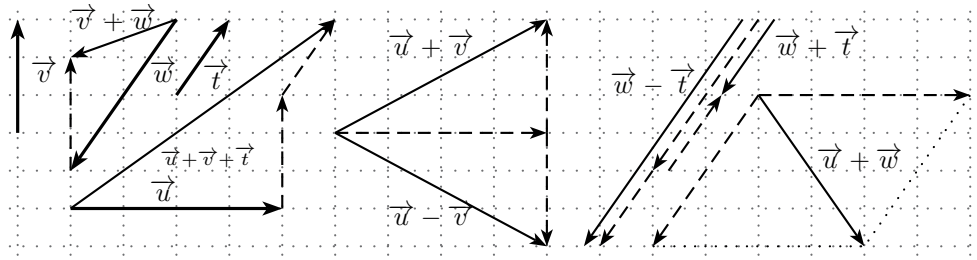


Exercice 4 $ABCD$ est un rectangle de centre I.

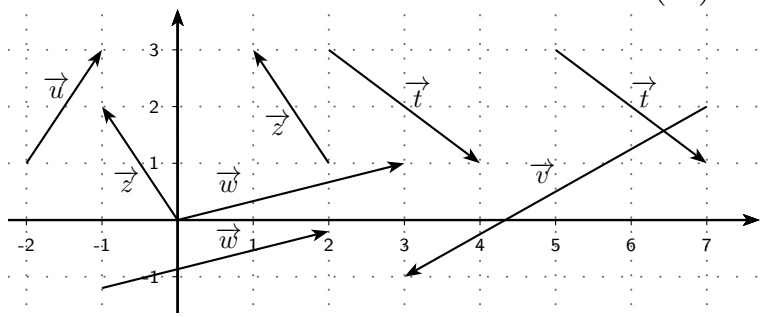
- On a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI}$.
- On a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 5 On a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA}$,
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$,
$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$,
$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA}$,
$\overrightarrow{t} = -\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QQ} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 6



Exercice 7 Par lecture graphique, on a $\overrightarrow{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$.



Exercice 8 On donne $A(-3\,;5)$, $B(4\,;2)$, $C(3\,;-1)$ et $D(-4\,;1)$ dans un repère.

- On a $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 4 - (-3) = 7$ et $y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 2 - 5 = -3$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$.
  Par ailleurs, $x_{\overrightarrow{DC}} = x_C - x_D = 3 - (-4) = 7$ et $y_{\overrightarrow{DC}} = y_C - y_D = -1 - 1 = -2$.
  $y_{\overrightarrow{DC}} \neq y_{\overrightarrow{AB}}$ donc $\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{AB}$ et $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

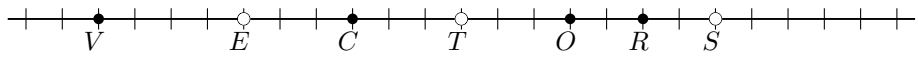
- On a $x_{\overrightarrow{AE}} = x_E - x_A$ donc $x_E = x_{\overrightarrow{AE}} + x_A = 5 - 3 = 2$.
  De même, $y_E = y_{\overrightarrow{AE}} + y_A = -2 + 5 = 3$ et $E\,(2\,;3)$.
  On a $x_{\overrightarrow{FB}} = x_B - x_F$ donc $x_F = x_B - x_{\overrightarrow{FB}} = 4 - (-2) = 6$.
  De même, $y_F = y_B - y_{\overrightarrow{FB}} = 2 - 3 = -1$ et $F\,(6\,;-1)$.

Exercice 9 $A\,(-3\,;5)$, $B\,(4\,;2)$, $C\,(3\,;-1)$, $D\,(-4\,;1)$, $\overrightarrow{AE}\binom{5}{-2}$ et $\overrightarrow{FB}\binom{-2}{3}$.

- On a $x_{\overrightarrow{u}} = x_{\overrightarrow{AE}} + x_{\overrightarrow{FB}} = 5 - 2 = 3$ et $y_{\overrightarrow{u}} = y_{\overrightarrow{AE}} + y_{\overrightarrow{FB}} = -2 + 3 = 1$
  donc $\overrightarrow{u}\binom{3}{1}$.
- On a $x_{\overrightarrow{v}} = x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{BC}} = x_B - x_A + x_C - x_A - (x_C - x_B) = 2x_B - 2x_A$
  $x_{\overrightarrow{v}} = 2(4 - (-3)) = 14$ et, de même, $y_{\overrightarrow{v}} = 2y_B - 2y_A = 2(2 - 5) = -6$
  d'où $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}14\\-6\end{pmatrix}$.
- On a $x_{\overrightarrow{BM}} = x_{\overrightarrow{AD}} - x_{\overrightarrow{CB}} \iff x_M - x_B = x_D - x_A - (x_B - x_C)$
  $\iff x_M = x_D - x_A + x_C = -4 - (-3) + 3 = 2$
  et, de même, $y_M = y_D - y_A + y_C = 1 - 5 - 1 = -5$ d'où $M\,(2\,;-5)$.
- On a $x_{\overrightarrow{NA}} = x_{\overrightarrow{FB}} + x_{\overrightarrow{CD}} \iff x_A - x_N = x_{\overrightarrow{FB}} + x_D - x_C$
  $\iff x_N = x_A - x_{\overrightarrow{FB}} - x_D + x_C \iff x_N = -3 - (-2) - (-4) + 3 = 6$
  et $y_N = y_A - y_{\overrightarrow{FB}} - y_D + y_C = 5 - 3 - 1 - 1 = 0$ d'où $N\,(6\,;0)$.

Exercice 10 $MP = ||\overrightarrow{MP}|| = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}$
$MP = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$
et $||\overrightarrow{u}||^2 = x_{\overrightarrow{u}}^2 + y_{\overrightarrow{u}}^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ donc $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{10}$.

Exercice 11 Sur la droite graduée suivante, on a placé les points E, T et S.

1. E, T et S sont alignés (direction), $T \in [ES]$ (sens) et $\frac{ES}{ET} = \frac{13}{6}$ (longueur)
   donc $\overrightarrow{ES} = \frac{13}{6}\overrightarrow{ET}$.
2. 

Exercice 12 QCM

1. (c) $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QT}$.
2. (b) et (d) $-2\overrightarrow{SX} = \overrightarrow{WM} = \overrightarrow{RG}$
3. (c) et (d) $\frac{2}{3}\overrightarrow{GW} = \overrightarrow{GR} = \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{CO}$
4. (c) et (d) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MJ}$
5. (b), (c) et (d) $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{MW} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{UT}$
   $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{CZ} - \overrightarrow{RY}$

Exercice 13 On a $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OE}$ donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-(-1)+2\\-4+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = (-2\overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}) + (-\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}) = -3\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$ donc $\overrightarrow{BA}\binom{-3}{2}$
et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE} = (-\frac{3}{2}\overrightarrow{\imath} + \frac{9}{2}\overrightarrow{\jmath}) + (2\overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\imath} + \frac{15}{2}\overrightarrow{\jmath}$ donc $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1/2\\15/2\end{pmatrix}$.

CORRIGÉS

Exercice 14 $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

• On a $x_M = x_{\overrightarrow{OM}} = x_{\overrightarrow{u}} = 2$ et $y_M = y_{\overrightarrow{u}} = 3$ d'où $M(2\,;3)$.

• $x_{\overrightarrow{AN}} = x_N - x_A = x_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow x_N = x_{\overrightarrow{u}} + x_A = 2+1 = 3$ et $y_N = y_{\overrightarrow{u}} + y_A = 3+2 = 5$ d'où $N(3\,;5)$.

• $x_{\overrightarrow{BP}} = x_P - x_B = x_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow x_P = x_{\overrightarrow{u}} + x_B = 2-1 = 1$ et $y_P = y_{\overrightarrow{u}} + y_B = 3+2 = 5$ d'où $P(1\,;5)$.

• $x_{\overrightarrow{QC}} = x_C - x_Q = x_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow x_Q = x_C - x_{\overrightarrow{u}} = -3-2 = -5$ et $y_Q = y_C - y_{\overrightarrow{u}} = -4-3 = -7$ d'où $Q(-5\,;-7)$.

• $x_{\overrightarrow{RD}} = x_D - x_R = x_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow x_R = x_D - x_{\overrightarrow{u}} = 2-2 = 0$ et $y_R = y_D - y_{\overrightarrow{u}} = -1-3 = -4$ d'où $R(0\,;-4)$.

Exercice 15 VouF Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?

(a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\9\end{pmatrix}$: Non car $x_{\overrightarrow{u}} \neq 0$.

(b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$: Oui.

(c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$: Non, $y_{\overrightarrow{v}} = 2y_{\overrightarrow{u}}$ et $x_{\overrightarrow{v}} \neq 2x_{\overrightarrow{u}}$.

(d) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$: Non car $\frac{x_{\overrightarrow{v}}}{x_{\overrightarrow{u}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{v}}}{y_{\overrightarrow{u}}}$.

(e) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 6\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$: Oui.

(f) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$: Oui,
$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = -1$.

Exercice 16 VouF

1. Tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ a des composantes positives : Faux.
Regarder $-\overrightarrow{u}$ par exemple.
2. Tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ a des composantes de même signe : Vrai.
3λ et 5λ sont de même signe.
3. Tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ admet 0 comme première composante : Vrai.
$0\lambda = 0$.
4. Si $AB = AC$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : Faux.
On peut avoir $OI = OJ$ mais pas O, I, J alignés.

Exercice 17 VouF $A(-1\,;5)$, $B(1\,;1)$, $C(4\,;-5)$, $D(2\,;3)$ et $E(3\,;5)$.

(a) Faux : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A=1+1=2\\y_B-y_A=1-5=-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B=4-1=3\\y_C-y_B=-5-1=-6\end{pmatrix}$. $x_{\overrightarrow{AB}} \neq x_{\overrightarrow{BC}}$ donc $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BC}$.

(b) Vrai : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A=4+1=5=\frac{5}{2}\times 2\\y_C-y_A=-5-5=-10=\frac{5}{2}\times(-4)\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.

(c) Vrai : $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ d'après (a).

(d) Faux : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2+1=3\\3-5=-2\end{pmatrix}$ et $\frac{2}{3} \neq \frac{-4}{-2}$.

(e) Vrai : $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D-x_B=2-1=1\\y_D-y_B=3-1=2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}x_E-x_D=3-2=1\\y_E-y_D=5-3=2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE}$.

(f) Vrai d'après (b).

(g) Faux d'après (b).

(h) Vrai d'après (e).

Exercice 18

(a) Oui : $(AB)//(CD)$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

(b) Non : les distances sont multiples mais les directions ne sont pas nécessairement identiques.

(c) Non : $(AC)//(BD)$ mais pas (AB) et (CD).

(d) Oui : $(AB)//(CD)$ car les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

(e) Oui : $(AB)//(CD)$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

(f) Oui : $ACDB$ est un parallélogramme donc $(AB)//(CD)$.

(g) Non : $ACBD$ est un parallélogramme dont $[AB]$ et $[CD]$ sont les diagonales.

(h) Non : cela n'a aucun sens.

Exercice 19 On a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. □

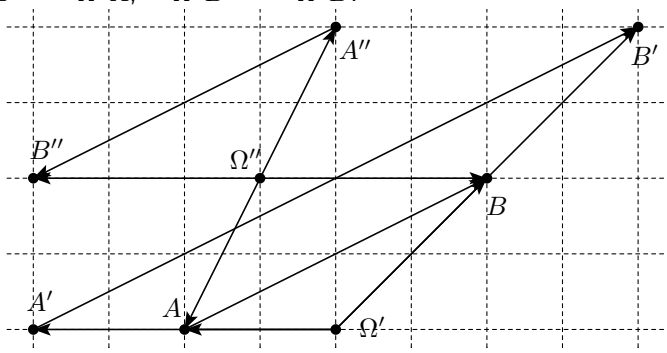
Exercice 20 On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x\\4\end{pmatrix}$ colin. $\Leftrightarrow 5\times 4 - x\times(-1) = 0 \Leftrightarrow x = -20$ et $\overrightarrow{CD} = -4\overrightarrow{AB}$.

Exercice 21 On a $-2\times(-10) - 5\times 4 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (non nuls), $4\times(-2) - (-10)\times 1 \neq 0$ donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne peuvent donc pas l'être.

Exercice 22 $A(1\,;-2)$, $B(-1\,;-4)$, $C(4\,;1)$, $D(5\,;4)$ et $E(-1\,;-2)$

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
   On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ donc
   $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = (-2)\times 8 - 0\times 6 = -16 \neq 0$
   et les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AE) et (BD) ne sont pas parallèles.
2. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (AC) sont parallèles. Ayant un point commun, elles sont confondus et les points A, B et C sont alignés.
   On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ donc
   $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = (-2)\times 6 - (-2)\times 4 = -4 \neq 0$
   et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (AD) ne sont pas parallèles : les points A, B et D ne sont pas alignés.

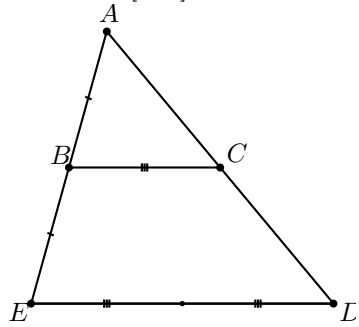
Exercice 23 On remarque graphiquement que $\overrightarrow{\Omega' A'} = 2\overrightarrow{\Omega' A}$, $\overrightarrow{\Omega' B'} = 2\overrightarrow{\Omega' B}$ et que $\overrightarrow{\Omega'' A''} = -\overrightarrow{\Omega'' A}$, $\overrightarrow{\Omega'' B''} = -\overrightarrow{\Omega'' B}$.



Exercice 24 $P\,(6\,;\,-1)$, $Q\,(-4\,;\,13)$ et h est l'homothétie de centre $C\,(-2\,;\,3)$ et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. On a $\overrightarrow{CP}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CP'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$ donc $\overrightarrow{CP'}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$. Puisque $x_{\overrightarrow{CP'}} = x_{P'} - x_C$, en ajoutant les coordonnées de C, on obtient $P'\,(-6\,;\,5)$.
2. On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{P'Q'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ donc $\overrightarrow{P'Q'}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$.
3. On a $\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CQ'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$ donc $\overrightarrow{CQ'}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$. Puisque $x_{\overrightarrow{CQ'}} = x_{Q'} - x_C$, en ajoutant les coordonnées de C, on obtient $Q'\,(-1\,;\,-2)$. Sinon, $P'\,(-6\,;\,5)$ et $\overrightarrow{P'Q'}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ donc, en ajoutant les coordonnées de P', on obtient $Q'\,(-1\,;\,-2)$.

Exercice 25 On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC} = 2\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\,\overrightarrow{AC}$ et C est bien le milieu de $[AD]$.



Exercice 26

1. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O, le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Ainsi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
2. Pour tout M,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} &= (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})\\ &= 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$

Exercice 27 Crossword

1. MIDDLE
2. COLLINEAR
3. COORDINATES
4. TRANSLATION
5. OPPOSITE
6. IMAGE
7. PARALLEL
8. VECTOR

Exercice 28

1. Si l'on affecte à yI la valeur $\frac{yA+yB}{2}$, l'algorithme (A) donne les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

2.
Algo (B)
xP, yP, xQ, yQ et N sont des réels
Saisir xP, yP, xQ, yQ
$N \leftarrow \sqrt{(xQ-xP)^2+(yQ-yP)^2}$
Afficher N

3.
Algo (C)
xS, yS, xN, yN, xC, yC, xF, yF et d sont des réels
Saisir xS, yS, xN, yN, xC, yC, xF, yF
$d \leftarrow (xN-xS)(yF-yC)-(xF-xC)(yN-yS)$
Si $d=0$, afficher "Les droites (SN) et (CF) sont parallèles."
Sinon, afficher "Les droites (SN) et (CF) ne sont pas parallèles."

Exercice 29 Dans un repère, on donne $A\,(1\,;-1)$, $B\,(-1\,;-2)$ et $C\,(-2\,;2)$.

1. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_{\overrightarrow{BD}} &=& x_{\overrightarrow{BA}}+x_{\overrightarrow{BC}} \\ y_{\overrightarrow{BD}} &=& y_{\overrightarrow{BA}}+y_{\overrightarrow{BC}} \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_D &=& x_B+(x_A-x_B)+(x_C-x_B)=1-2-(-1)=0 \\ y_D &=& y_B+(y_A-y_B)+(y_C-y_B)=-1+2-(-2)=3 \end{array}\right.$ et $D\,(0\,;3)$.

2. $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_{\overrightarrow{GA}}+2x_{\overrightarrow{GB}}+x_{\overrightarrow{GC}} &=& x_{\overrightarrow{0}} \\ y_{\overrightarrow{GA}}+2y_{\overrightarrow{GB}}+y_{\overrightarrow{GC}} &=& y_{\overrightarrow{0}} \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} (x_A-x_G)+2(x_B-x_G)+(x_C-x_G) &=& 0 \\ (y_A-y_G)+2(y_B-y_G)+(y_C-y_G) &=& 0 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -4x_G &=& -x_A-2x_B-x_C \\ -4y_G &=& -y_A-2y_B-y_C \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_G &=& \frac{x_A+2x_B+x_C}{4} \\ y_G &=& \frac{y_A+2y_B+y_C}{4} \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_G &=& \frac{1+2\times(-1)+(-2)}{4}=-\frac{3}{4} \\ y_G &=& \frac{-1+2\times(-2)+2}{4}=-\frac{3}{4} \end{array}\right.$ et $G\left(-\frac{3}{4}\,;-\frac{3}{4}\right)$.

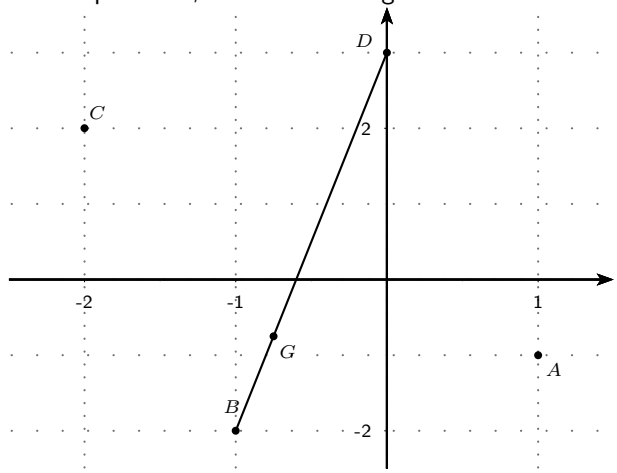
Sinon, $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\,(2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ et l'on regarde les coordonnées.

3. $\left\{\begin{array}{l} x_{\overrightarrow{BG}}=x_G-x_B=-\frac{3}{4}-(-1)=\frac{1}{4} \\ y_{\overrightarrow{BG}}=y_G-y_B=-\frac{3}{4}-(-2)=\frac{5}{4} \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x_{\overrightarrow{BD}}=x_D-x_B=0-(-1)=1 \\ y_{\overrightarrow{BD}}=y_D-y_B=3-(-2)=5 \end{array}\right.$:

$\overrightarrow{BG}\binom{1/4}{5/4}$ et $\overrightarrow{BD}\binom{1}{5}$.

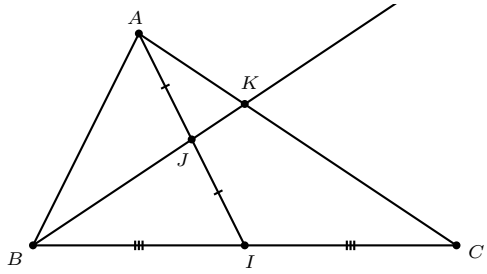
CORRIGÉS

Puisque $x_{\overrightarrow{BG}}\,y_{\overrightarrow{BC}} - x_{\overrightarrow{BC}}\,y_{\overrightarrow{BG}} = \frac{1}{4} \times 5 - \frac{5}{4} \times 1 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et les points B, G et D sont alignés.



Exercice 30

1.

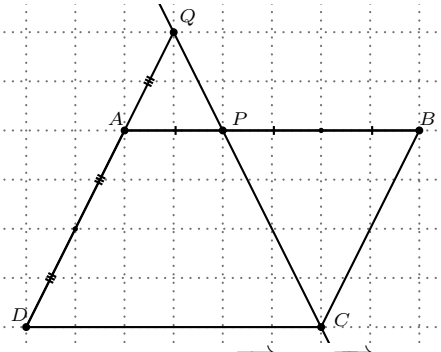


2. Dans le repère $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0} = 0\,\overrightarrow{BA} + 0\,\overrightarrow{BC}$ et $B\,(0\,;\,0)$,
$\overrightarrow{BA} = 1\,\overrightarrow{BA} + 0\,\overrightarrow{BC}$ donc $A\,(1\,;\,0)$, $\overrightarrow{BC} = 0\,\overrightarrow{BA} + 1\,\overrightarrow{BC}$ donc $C\,(0\,;\,1)$,
$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC} = 0\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$ donc $I\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$,
$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI}) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC})$ donc $J\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$.

3. B, J et K sont alignés et distincts donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BK} = \lambda\,\overrightarrow{BJ}$.
Ainsi, $x - x_B = \lambda(x_J - x_B)$ et $\lambda = 2x$, $y - y_B = \lambda(y_J - y_B)$ et $\lambda = 4y$ d'où $\lambda = 2x = 4y$ et $x = 2y$. De même, A, C et K sont alignés et distincts donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AK} = \mu\,\overrightarrow{AC}$.
Ainsi, $x - x_A = \mu(x_C - x_A)$, $x - 1 = -\mu$ et $\mu = 1 - x$, $y - y_A = \mu(y_C - y_A)$, $y - 0 = \mu$ et $\mu = y$ d'où $1 - x = y$ et $x = 1 - y$. Ainsi, $x = 2y = 1 - y$ donc $y = \frac{1}{3}$ et $x = 2y = \frac{2}{3}$: $K\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

4. On a $x_{\overrightarrow{AC}} = x_C - x_A = -1$, $y_{\overrightarrow{AC}} = y_C - y_A = 1$ et
$x_{\overrightarrow{AK}} = x_K - x_A = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,x_{\overrightarrow{AC}}$, $y_{\overrightarrow{AK}} = y_K - y_A = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,y_{\overrightarrow{AC}}$ donc $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$. *Sinon, $\overrightarrow{AK} = \mu\,\overrightarrow{AC}$ avec $\mu = y = \frac{1}{3}$...*

Exercice 31



$ABCD$ est un parallélogramme. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$.
Les points Q, P et C semblent alignés.

* Méthode 1 : $P' = (AB) \cap (QC)$. ? $P \overset{?}{=} P'$?

(a) Les droites (QA) et (BC) étant parallèles et les droites (AB) et (QC) sécantes en P', le théorème de Thalès permet d'affirmer que $\frac{P'A}{P'B} = \frac{QA}{BC}$ $\left(= \frac{P'Q}{P'C}\right)$.

(b) Puisque $QD = \frac{3}{2}\,AD$, $QA = \frac{1}{2}\,AD = \frac{1}{2}\,BC$ et $P'A = \frac{QA}{BC}\,P'B = \frac{1}{2}P'B$.

(c) Ainsi $AP' = \frac{1}{3}\,AB$ et $P' \in [AB]$ donc P' et P sont confondus et $P \in (QC)$.

* Méthode 2 : Calcul vectoriel.

(a) On a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$
$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

(b) On a $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

(c) $\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}\right) = -2\,\overrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires et P, C et Q alignés.

* Méthode 3 : Dans le repère $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$,

(a) $\overrightarrow{DC} = 1\,\overrightarrow{DC} + 0\,\overrightarrow{DA}$ donc $C\,(1\,;\,0)$;
$\overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{DA} = 0\,\overrightarrow{DC} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{DA}$ donc $Q\,(0\,;\,3/2)$
et $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ donc $P\,(1/3\,;\,1)$.

(b) On a alors $x_{\overrightarrow{PC}} = x_C - x_P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $y_{\overrightarrow{PC}} = y_C - y_P = 0 - 1 = -1$ et $x_{\overrightarrow{PQ}} = x_Q - x_P = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, $y_{\overrightarrow{PQ}} = y_Q - y_P = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $\overrightarrow{PC}\binom{2/3}{-1}$ et $\overrightarrow{PQ}\binom{-1/3}{1/2}$.

$x_{\overrightarrow{PC}}\,y_{\overrightarrow{PQ}} - x_{\overrightarrow{PQ}}\,y_{\overrightarrow{PC}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{2} - \frac{-1}{3}\,(-1) = 0$ donc $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires et les points P, C et Q alignés.

Chapitre VIII

POURCENTAGES & ÉVOLUTIONS

Sommaire

1	**Pourcentages & Proportions**	**127**
2	**Évolutions**	**128**
3	**Évolutions successives**	**131**
4	**Exercices**	**132**
	Corrigé des exercices	133

L'utilité des pourcentages et des proportions est évidente, tant dans la vie courante que dans la vraie vie mathématique. Aussi, le paragraphe introductif de ce chapitre est bref.

1 Pourcentages & Proportions

Activité 1

(a) *Dans le groupe de 60 élèves participant au club Math Max du lycée Henri Matisse de la Fare-en-Dole, 36 sont des filles. Quelle est la proportion de garçons dans ce groupe ?*

(b) $75\,\%$ *des élèves des membres du club sont demi-pensionnaires. Combien de demi-pensionnaires comporte le club ?*

(c) $80\,\%$ *des clubbers sont âgés de moins de 18 ans, dont* $62,5\,\%$ *de filles. Combien de mineures comporte le club ?*

Propriété 1 *Soient t, P et Q trois nombres réels positifs.*

- *La part de P dans Q est le quotient* $\dfrac{P}{Q}$.
- *Prendre $t\,\%$ de Q équivaut à multiplier Q par* $\dfrac{t}{100}$.

Exercice 1

1. Calculer mentalement :
   (a) 10 % de 45 € (b) 25 % de 52 kg (c) 50 % de 13 cm (d) 75 % de 24 L
2. Estimer mentalement :
   (a) 31 % de 146 € (b) 89 % de 2574 kg (c) 148 % de 127 cm (d) 65 % de 92 L

Propriété 2
A est une population d'un ensemble E, B une sous-population de A : $B \subset A \subset E$.

- *La proportion de B par rapport à A est le nombre $p = \frac{\#B}{\#A}$ où $\#C$ désigne le nombre d'individus, i.e. le cardinal, d'une population C.*
- *Si p_B est la proportion de B par rapport à A et p_A la proportion de A par rapport à E, alors la proportion de B par rapport à E est $p_A \times p_B$.*

Exercice 2 On sait que 7 % du quart des 97 % d'élèves possédant un téléphone portatif ne l'utilisent pas avant 7h du matin. Combien parmi les soixante membres du club sont dans ce cas ?

Exercice 3 On estime que $89\,\%$ des ménages du Toutoustan ont au moins un animal de compagnie et pour $68\,\%$ de ces ménages, il s'agit de chiens. Quelle proportion de ménages du Toutoustan n'ont pas de chien ?

Exercice 4 Voici les résultas aux examens des étudiants de deux universités :

	Lille	Lens	Total
Garçons présents	100	500	600
Garçons reçus	50	400	450
Filles présentes	400	100	500
Filles reçues	200	80	280

1. Une journaliste rapporte ces résultats en soulignant que les filles réussissent moins bien que les garçons. Sur quelles données s'appuie-t-elle ?
2. Les présidents des deux universités répondent que cette analyse est erronée. Sur quelles données s'appuient-ils ?
3. Quel phénomène est à l'origine de ce paradoxe ?

2 Évolutions

Activité 2

(a) L'année dernière, ce groupe de soixante Math Max clubbers comportait $20\,\%$ d'élèves en plus. Combien étaient-ils ?

(b) L'an prochain, ils seront $17\,\%$ de moins. Combien seront-ils ?

(c) Il y a deux ans, les clubbers étaient cinquante. De combien cet effectif a-t-il évolué depuis ?

(d) Sur les quatre dernières années, le nombre de membres a augmenté de $11\,\%$. Combien étaient-ils alors ?

Propriété 3 *Soient t, P et Q trois nombres réels positifs.*

- *Augmenter Q de $t\,\%$ équivaut à multiplier Q par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.*
- *Diminuer Q de $t\,\%$ équivaut à multiplier Q par $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)$.*

Attention à ne pas confondre un pourcentage d'évolution avec un pourcentage de proportion : s'il arrive parfois qu'un élève soit 10 % plus grand que son professeur de mathématiques bien aimé (pourcentage d'évolution), il est impossible que la taille de ce dernier égale 10 % de la taille d'un de ses élèves (pourcentage de proportion).

Exercice 5 La carte de réduction CTop permet d'obtenir un rabais de 15 %. Exprimer le prix à payer en fonction du montant des achats avant la réduction.

Exercice 6 Comme d'habitude, Colette trouve une réclame dans ta boîte aux lettres : Super-méga promotion spéciale sur les topinambours ! Au choix : 10 % de produit en plus ou 10 % de réduction sur le prix. Quelle est la meilleure offre ?

Exercice 7 Calculer mentalement : (a) 55 € augmenté de 20 %
(b) 60 kg diminué de 10 % (c) 16 cm augmenté de 25 % (d) 70 L diminué de 5 %

Définition & Propriété 4 *Lorsqu'une quantité évolue d'une valeur initiale v_I à une valeur finale v_F,*

- *le coefficient multiplicateur associé à cette évolution est $CM = \dfrac{v_F}{v_I}$,*
- *la variation absolue de cette quantité est $v_F - v_I$ dans la même unité que la quantité concernée,*
- *la variation relative ou le taux d'évolution de la valeur initiale est le rapport $t = \dfrac{v_F - v_I}{v_I}$ souvent exprimé en pourcentage,*
- *on a $CM = 1 + t$.*

Démonstration : On a $v_F = \frac{v_F}{v_I}.v_I = CM.v_I$: coefficient multiplicateur permettant de passer de v_I à v_F.
Par ailleurs, $1 + t = \frac{v_I}{v_I} + \frac{v_F - v_I}{v_I} = \frac{v_I + v_F - v_I}{v_I} = \frac{v_F}{v_I} = CM$. □

Exemple : Lorsque l'on passe de 2 à 3, le coefficient multiplicateur est $CM = \frac{3}{2} = 1,5 = 1 + \frac{1}{2}$ $(3 = \frac{3}{2} \times 2)$, la variation absolue est de $3 - 2 = 1$ et la variation relative de $t = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} = CM - 1$ c.-à-d. $+50\,\%$.

Exercice 8 Ⓢ Pour calculer un taux d'évolution t d'une valeur I à une valeur F, Agathe a commencé à écrire le script en langage Python ci-dessous (cf. *Algo à gogo* en page 317). Aide-la donc à le terminer.

```
1| def taux(I,F) :
2|     ...
3|     return(t)
```

EXERCICES

Exercice 9 Vous êtes en charge de la création d'une affiche publicitaire d'une grande enseigne d'électroménager annonçant la promotion suivante : un robot pâtissier initialement affiché à 350 € sera proposé à 245 € durant tout le mois de juin.

1. Calculer la variation absolue et la variation relative du prix du robot. En déduire le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur de cette évolution.
2. En plus des valeurs initiale et finale du produit, quelle information, parmi les deux calculées à la question précédente, décideriez-vous de faire apparaître sur votre affiche afin d'attirer le plus de clients possible ?

Définition & Propriété 5
Une quantité évolue d'un taux t, de coefficient multiplicateur CM.
Le coefficient multiplicateur réciproque CM_r est celui permettant de passer de la valeur finale à la valeur initiale. On a $CM_r = \dfrac{1}{CM}$.
Le taux d'évolution réciproque est alors $t_r = CM_r - 1$.

Démonstration : Si $v_F = CM \times v_I$, alors $v_I = \frac{1}{CM} v_F$.
Si $CM_r = 1 + t_r$, alors $t_r = CM_r - 1$. □

Exemple : Lorsque l'on repasse de 3 à 2, le coefficient multiplicateur réciproque est bien $CM_r = \frac{2}{3} = \frac{1}{3/2}$ $(2 = \frac{2}{3} \times 3)$ et le taux réciproque est bien $t_r = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$ c.-à-d. $-33,3\,\%$ environ.

Exercice 10 Après avoir réalisé qu'il fallait travailler, Clotaire a obtenu 7,79 de moyenne au second semestre, ce qui correspond à une augmentation de 44 % par rapport au premier. Combien avait-il alors ?

Exercice 11 Après une augmentation de 18 %, le prix d'un veston a augmenté de 27 €. Quel était le prix initial du veston avant augmentation ?

Exercice 12 Retrouver de tête la valeur initiale connaissant la valeur finale et l'évolution :

(a) 30 € après augmentation de 50 %
(b) 60 kg après diminution de 25 %
(c) 100 cm après augmentation de 33,3 %

Remarque : Lorsque qu'un pourcentage évolue en valeur absolue, on exprime cette évolution en *points*. Par exemple, si une sous-population passe de $20\,\%$ à $30\,\%$, on dit qu'elle a augmenté de 10 *points*, ce qui correspond à une augmentation de $50\,\%$ en valeur relative.

Exercice 13 Le mois dernier, Alceste dégustait au goûter $43\,\%$ de croissants au beurre et $36\,\%$ de pains au chocolat, le reste étant des pains au lait, croissants aux amandes et autres viennoiseries.
Ce mois-ci, la part des croissants a diminué de 12 points tandis que celle des pains au chocolat a augmenté $25\,\%$.
Quelle est la nouvelle répartition de son goûter ?

3 Évolutions successives

Activité 3

1. *C'est un fait, tu grandis de 5 % par an depuis trois ans.*
   (a) *As-tu grandi de 15 % ces trois dernières années ?*
   (b) *Ta taille est de 1m74 actuellement. Quelle était-elle l'année dernière ? Et il y a trois ans ?*
   (c) *Si cela se poursuit encore deux ans, de combien auras-tu grandi globalement sur la période de cinq ans ?*
2. (a) *Ta camarade, elle, a grandi de 6 % la première année, de 5 % la seconde et de 4 % la dernière. A-t-elle grandi autant que toi en pourcentage ?*
   (b) *Elle mesure actuellement 1m72. Combien mesurait-elle il y a trois ans ?*

Propriété 6 *Lors d'évolutions successives, on multiplie la quantité de départ par les coefficients multiplicateurs successifs :* $CM_{global} = CM_1 \times CM_2$.
Le taux d'évolution global est alors $t_{global} = CM_{global} - 1$.
Suite à n évolutions identiques, on élève le coeff. multiplicateur à la puissance adéquate : $CM_{global} = CM^n$.

Exercice 14 Un vêtement, initialement vendu 29,99 €, a subit deux démarques, une de 40 % puis une de 10 %.

1. Quel est taux de réduction global du prix de cet article ?
2. En déduire le nouveau prix de l'article après ces deux démarques.

Exercice 15 Après deux augmentations successives au même taux, le prix d'une part de gâteau est passé de 1,20 € à 1,59 €. Quel est le taux de ces augmentations ?

Exercice 16 A la naissance de son fils Midas, Gordias a placé 1000 euros sur un compte bancaire à 2,50 % d'intérêts annuels. Il décide de ne pas toucher à ce compte bancaire et de le laisser évoluer au seul taux d'intérêt, sans retirer ni verser d'argent.

1. Quelle somme aura Midas sur son compte bancaire pour ses 18 ans ?
2. Quel aura donc été le taux d'évolution global de la somme versée initialement sur toute la période ?
3. Midas veut partir en voyage avec ses amis pour fêter son passage à l'âge adulte. Il décide de laisser les 1000 € initiaux sur son compte et utiliser les intérêts accumulés pour financer son week-end. Quel pourcentage de son pécule utilise-t-il donc ?
4. (∫) Pour calculer le montant total de son pécule en fonction du nombre n d'années passées et du taux t gracieusement attribué par son banquier, Midas a commencé à écrire le script en langage Python ci-dessous. Aide-le donc à le terminer.

```
1| ..... pecule(n,t) :
2|     P=
3|     .....(P)
```

EXERCICES

Exercice 17 Le chiffre d'affaire d'une entreprise a subi une baisse de 5 % de fin 2016 à fin 2017, puis une hausse de 3 % de fin 2017 à fin 2018.

1. Quel a été, en pourcentage arrondi au centième, le taux d'évolution global du chiffre d'affaire entre fin 2016 et fin 2018 ?
2. Les actionnaires sont inquiets et le PDG de l'entreprise tient à les rassurer rapidement. Quel doit être le taux d'évolution de fin 2018 à fin 2019 pour que le chiffre d'affaire revienne à son niveau de fin 2016 ?

4 Exercices

Exercice 18

1. Pour chaque proposition donner, le plus rapidement possible, le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur associés à l'évolution :
   (a) Augmentation de 17 %.
   (b) Diminution de 17,5 %.
   (c) Diminution de 8 %.
   (d) Augmentation de 8 %.
   (e) Augmentation de 5,5 %.
   (f) Diminution de 50 %.
   (g) Diminution de 5 %.
   (h) Augmentation de 1,75 %.
   (i) Augmentation de 19,6 %.
   (j) Augmentation de 100 %.
   (k) Augmentation de 250 %.
   (l) Diminution de 120 %.
2. Pour chaque proposition donner le taux d'évolution et le pourcentage d'évolution correspondant au coefficient multiplicateur :
   (a) Multiplication par 1,04.
   (b) Multiplication par 1,4.
   (c) Multiplication par 0,8.
   (d) Multiplication par 0,25.
   (e) Multiplication par 1,196.
   (f) Multiplication par 1,055.
   (g) Multiplication par 0.
   (h) Multiplication par 2,10.
   (i) Division par 1,5.

Exercice 19 En 2010, un patron gagnait 240 % de plus que l'un des ses employés. Quatre ans plus tard, alors que l'employé a été augmenté de 10 %, le patron gagne 350 % de plus que lui. Quel a été le taux d'augmentation du salaire du patron ?

Exercice 20 En 2015, il y a eu 17 268 immatriculations de voitures électriques. Ce nombre a augmenté de 44,26 % en 2 ans, dont 25,96 % la première année.

1. Déterminer le taux d'évolution du nombre d'immatriculations de voitures électriques de 2016 à 2017.
2. Quel est le nombre total de voitures électriques immatriculées entre 2015 et 2017 ?

Exercice 21 Depuis l'an 2000, la population de la charmante cité de Villeneuve-la-vieille augmente de 5 % du fait de l'accroissement naturel et diminue de 1000 habitants du fait de l'exode rural. La population était de 30 000 habitants au 1er janvier 2000.
Combien de personnes résident à Villeneuve-la-vieille le 1er janvier 2020 ?

Hasardez-vous à présent vers la page 277 et faites le devoir n° 9.

Corrigé des exercices

POURCENTAGES & ÉVOLUTIONS

Activité 1

(a) *On a* $\frac{(60-36)\textit{filles}}{60\textit{élèves}} = 0,4 = 40\,\%$ *de garçons dans ce groupe.*

(b) *On a* $\frac{75}{100} \times 60 = 45$ *demi-pensionnaires.*

(c) *Il y a* $\frac{62,5}{100} \times \frac{80}{100} \times 60 = 30$ *mineures dans ce groupe.*

Exercice 1

1. (a) 10 % de 45 € =4,5 €
   (b) 25 % de 52 kg=13 kg
   (c) 50 % de 13 cm =6,5 cm
   (d) 75 % de 24 L=18 L
2. (a) 31 % de 146 € $\simeq$ 45 €
   (b) 89 % de 2574 kg$\simeq$2310 kg
   (c) 148 % de 127 cm $\simeq$190 cm
   (d) 65 % de 92 L$\simeq$60 L

Exercice 2 $\frac{7}{100} \times \frac{1}{4} \times \frac{97}{100} \times 60 \simeq 1$ clubber n'utilise pas son téléphone portatif avant 7h du matin.

Exercice 3 Les toutoustanis sont $\frac{68}{100} \times \frac{89}{100} \simeq 60,5\,\%$ a avoir un chien donc 39,5 % environ n'en ont pas.

Exercice 4 Réussite estudiantine

1. On a $\frac{450}{600} = 0,75$ donc les garçons dans leur ensemble réussissent à 75 %
   et $\frac{280}{500} = 0,56$ donc les filles dans leur ensemble réussissent à 56 %.
2. À Lille, $\frac{50}{100} = \frac{200}{400} = 0,5$ donc les garçons et les filles réussissent à 50 % et
   à Lens, $\frac{400}{500} = \frac{80}{100} = 0,8$ donc les garçons et les filles réussissent à 80 %.
3. Il s'avère donc qu'une analyse faite sur des parties de la population donne des résultats différents de l'analyse globale. C'est ce que l'on appelle l'*effet de structure*.

Activité 2

(a) *On avait* $(1 + \frac{20}{100}) \times 60 = 72$ *élèves l'année dernière.*

(b) *On aura* $(1 - \frac{17}{100}) \times 60 \simeq 50$ *élèves l'an prochain.*

(c) *On a une variation absolue de* $60 - 50 = 10$ *clubbers en plus cette année, ce qui correspond à une variation relative de* $\frac{60-50}{50} \times 100 = 20\,\%$ *sur l'année.*

(d) *On a* $\left(1 + \frac{11}{100}\right) N = 60$ *donc* $N = \frac{60}{1,11} \simeq 54$ *membres il y a quatre ans.*

Exercice 5 Si P est le montant initial, le montant après rabais CTop est de $\left(1 - \frac{15}{100}\right) P = 0,85P$.

CORRIGÉS

Exercice 6 Soit T le prix d'origine d'un kilogramme de topinambours, T' celui avec la promotion "10 % de produit en plus" et T'' celui avec "10 % de réduction sur le prix".
On a trivialement $T'' = (1 - \frac{10}{100})T = 0,9T$ et $1T = (1 + \frac{10}{100})T'$ par produit en croix puisque l'on paie le prix T pour $1,1$ kg.
Comme $T'' = 0,9T < \frac{1}{1,1}T \simeq 0,909T = T'$, la promotion "10 % de réduction sur le prix" est plus avantageuse.

Exercice 7 (a) 55 € augmenté de 20 % = 66 € (b) 60 kg diminué de 10 % = 54 kg
(c) 16 cm augmenté de 25 % = 20 cm (d) 70 L diminué de 5 % = 66,5 L

Exercice 8 Pour calculer un taux d'évolution t d'une valeur I à une valeur F, Agathe peut écrire :

```
1| def taux(I,F) :
2|     t=(F-I)/I
3|     return(t)
```

Exercice 9 Un robot pâtissier initialement affiché à 350 € sera proposé à 245 € durant tout le mois de juin.

1. On a une variation absolue de $245 - 350 = -105$ € et une variation relative de $\frac{245-350}{350} \times 100 = -30$ %.
   Le taux d'évolution est donc $t = -0,3$
   et le coefficient multiplicateur $CM = 1 + t = 0,7$.
2. Afin d'attirer le plus de clients possible, il semble pertinent d'afficher la variation relative de -30 %.

Exercice 10 Soit m la moyenne précédente. On a $m(1 + \frac{44}{100}) = 7,79$
donc $m = \frac{1}{1,44} \times 7,79 \simeq 5,41$.

Exercice 11 Soit P le prix initial du veston avant augmentation.
On a $P(1 + \frac{18}{100}) = P + 27 \iff 1,18P - P = 27 \iff P = \frac{1}{0,18} \times 27 = 150$ €
ou directement $0,18P = 27$...

Exercice 12 (a) 20 € donnent 30 € après augmentation de 50 %
(b) 80 kg donnent 60 kg après diminution de 25 %
(c) 75 cm donnent 100 cm après augmentation de 33,3 %

Exercice 13 Alceste déguste maintenant $43\,\% - 12\,\% = 31\,\%$ de croissants, $(1 + \frac{25}{100}) \times 36\,\% = 45\,\%$ de pains au chocolat et $100\,\% - 31\,\% - 45\,\% = 24\,\%$ d'autres viennoiseries.

Activité 3

1. *(a) Au cours des trois années d'augmentation de 5 %, tu as grandis de* $[(1 + \frac{5}{100})^3 - 1] \times 100 \simeq 15,8\,\%$.
   (b) On a $T_{-1} = \frac{1}{1,05}T_0 = \frac{1,74}{1,05} \simeq 1,66\,cm$ *l'an dernier et* $T_{-3} = \frac{1}{1,05^3}T_0 \simeq 1,50\,cm$ *il y a trois ans.*
   (c) Sur les cinq années, tu auras grandi de $[(1 + \frac{5}{100})^5 - 1] \times 100 \simeq 27,6\,\%$ *en valeur relative et de* $T_{+2} - T_{-3} = 1,05^2T_0 - T_{-3} \simeq 1,92 - 1,50 = 42\,cm$ *en valeur absolue.*

2. *(a) Ta camarade a grandi de*
$\left[(1+\frac{6}{100})(1+\frac{5}{100})(1+\frac{4}{100})-1\right]\times 100 \simeq 15,7\,\%$, *moins que toi.*
(b) Il y a trois ans, elle mesurait $\frac{1}{(1+\frac{6}{100})(1+\frac{5}{100})(1+\frac{4}{100})}\times 1,72 \simeq 1,49\,cm.$

Exercice 14 Un vêtement, initialement vendu 29,99€, a subit deux démarques, une de $40\,\%$ puis une de $10\,\%$.

1. On a $(1-\frac{40}{100})(1-\frac{10}{100})=0,54$ de coeff. mult. et donc $t=0,54-1=0,46$: 46 % de réduction.
2. Ainsi, le vêtement coûte désormais $29,99\times 0,54 \simeq 16,19$€.

Exercice 15 $CM^2\times 1,2=1,59 \iff CM=\sqrt{\frac{1,59}{1,20}}\simeq 1,151$: deux augmentations de $15,1\,\%$ chacune.

Exercice 16

1. À 18 ans, Midas aura $\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^{18}\times 1000 \simeq 1559,66$€ sur son compte.
2. Le taux d'évolution global sera donc de $t_{global}=(1,025^{18}-1)\times 100=55,97\,\%$.
3. En ne dépensant que les seuls intérêts, Midas utilise $\frac{1559,66-1000}{1559,66}\times 100\simeq 35,88\,\%$ de son pécule.
4. Le script en langage Python ci-dessous calcule le montant total de son pécule en fonction du nombre n d'années passées et du taux t gracieusement attribué par son banquier :

```
1| def pecule(n,t) :
2|     P=1000*(1+t)**n
3|     return(P)
```

Exercice 17

1. Le coefficient multiplicateur global du chiffre d'affaire entre fin 2016 et fin 2018 est de $CM_{17-18}=CM_{2017}\times CM_{2018}=(1-\frac{5}{100})(1+\frac{3}{100})=0,9785$
et le taux global est de $t_{17-18}=CM_{17-18}-1=-0,0215=-2,15\,\%$.
2. On cherche CM_{2019} tel que
$CM_{17-18}\times CM_{2019}=1 \iff CM_{2019}=\frac{1}{CM_{17-18}}\simeq 1,022$.
Le chiffre d'affaire devrait donc augmenter de $2,2\,\%$ en 2019 afin qu'il revienne à son niveau de fin 2016.

Exercice 18

1. (a) $+17\,\% : CM=1,17$; $t=0,17$.
(b) $-17,5\,\% : CM=0,825$; $t=-0,175$.
(c) $-8\,\% : CM=0,92$; $t=-0,08$.
(d) $+8\,\% : CM=1,08$; $t=0,08$.
(e) $+5,5\,\% : CM=1,055$; $t=0,055$.
(f) $-50\,\% : CM=0,5$; $t=-0,5$.
(g) $-5\,\% : CM=0,95$; $t=-0,05$.

(h) $+1,75\,\% : CM = 1,0175\,;\ t = 0,0175.$

(i) $+19,6\,\% : CM = 1,196\,;\ t = 0,196.$

(j) $+100\,\% : CM = 2\,;\ t = 100.$

(k) $+250\,\% : CM = 3,5\,;\ t = 2,5.$

(l) $-120\,\%$: impossible.

2. (a) $\times 1,04 : t = 0,04\,;\ +4\,\%.$

(b) $\times 1,4 : t = 0,4\,;\ +40\,\%.$

(c) $\times 0,8 : t = -0,2\,;\ -20\,\%.$

(d) $\times 0,25 : t = -0,75\,;\ -75\,\%.$

(e) $\times 1,196 : t = 0,196\,;\ +19,6\,\%.$

(f) $\times 1,055 : t = 0,055\,;\ 5,5\,\%.$

(g) $\times 0 : t = -1\,;\ -100\,\%.$

(h) $\times 2,10 : t = 1,1\,;\ +110\,\%.$

(i) $/1,5 : t = -\frac{1}{3}\,;\ -33,3\,\%.$

Exercice 19 Soient P, P', E, E' les salaires du patron et de son employé avant et après l'augmentation.
On a $P = (1 + \frac{240}{100})E \iff E = \frac{P}{3,4}$, $E' = (1 + \frac{10}{100})E = 1,1E$ et $P' = (1 + \frac{350}{100})E' = 4,5E'$
donc $P' = 4,5 \times E' = 4,5 \times 1,1E = 4,5 \times 1,1 \times \frac{1}{3,4}P \simeq 1,456P.$
Le patron a donc été augmenté de $45,6\,\%$ sur les quatre ans.

Exercice 20

1. On a $CM_{16-17} = CM_{2016} \times CM_{2017}$
donc $CM_{2017} = \frac{CM_{16-17}}{CM_{2016}} = \frac{1+0,44,26}{1+0,2596} \simeq 1,1453.$
Le taux d'évolution de la deuxième année est donc de
$t_{2017} = 1,1453 - 1 = 0,1453 = 14,53\,\%.$

2. Il y a eu 17268 immatriculations en 2015, $17268 \times CM_{2016} \simeq 21751$ en 2016 et $17268 \times CM_{16_17} \simeq 25032$ en 2017 donc 64051 entre 2015 et 2017.

Exercice 21 Soit P_n la population de Villeneuve-la-vieille au 1er janvier $2000 + n$.
On a $\begin{cases} P_0 = 30000 \\ P_{n+1} = 1,05P_n - 1000. \end{cases}$ On peut alors calculer de proche en proche les valeurs successives de P_i : $P_1 = 1,05P_0 - 1000 = 30500,$
$P_2 = 1,05P_1 - 1000 = 31025,$ $P_3 = 1,05P_2 - 1000 = 31576,...$
Le mode *suite* de la calculatrice permet d'obtenir plus rapidement un tableau de valeurs et l'on a $P_{20} = 46533$ habitants au 1er janvier 2020.

Chapitre IX

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Sommaire

Introduction **137**
1 Notion de fonction **138**
1.1 Définitions 138
1.2 Exercices 140
2 Étude qualitative d'une fonction **141**
2.1 Parité 142
2.2 Variations 143
2.3 Extremums 145
2.4 Signe 145
2.5 Exercices 146
3 Fonctions définies sur $\mathbb{N}$ **146**
4 Problèmes et exercices **147**
Corrigé des exercices 153

Introduction

Une fonction numérique exprime une association entre un nombre réel et un autre.

Lorsqu'une quantité dépend d'une autre quantité, nous associons la variable exprimant la valeur de l'une à celle exprimant la valeur de l'autre. Par exemple, la quantité « chiffre d'affaires » d'une entreprise dépend de la quantité « nombre de produits vendus », la « note obtenue au dernier devoir de mathématiques » dépend du « temps de travail approfondi », etc.

Dans une acception plus large, une fonction numérique peut également désigner une fonction où seules les valeurs sont numériques. Dans ce cas, elle associe alors une valeur à un objet qui n'est pas nécessairement caractérisé par un nombre. Par exemple, le « nombre de produits vendus » en fonction du « nom du produit », la « longueur d'un trajet » en fonction du « chemin choisi », « l'altitude » d'un « point sur une carte ».

L'élaboration de la notion de fonction mathématique a été très lente. Depuis les premières approches durant l'Antiquité jusqu'à la codification actuelle par Dirichlet (XIX^{e}s.) en passant par les première écritures par Newton et l'introduction formelle du concept par le grand intellectuel allemand Leibniz à la fin du XVIIe s., cette notion est passée entre autres de l'association à une courbe du plan au résultat de la combinaison d'opérations à partir d'une variable.

La notion de fonction se généralise à plusieurs variables, sur d'autres ensembles de nombres,... généralisations impulsées notamment grâce à l'utilisation intensive des fonctions en physique. En effet, ce concept est nécessaire dans de très nombreux domaines : physique, chimie, biologie, économie, sociologie,...

Nous définirons ici en toute généralité les notions déjà abordées lors de l'étude des fonctions de référence et nous nous baserons sur ces dernières pour étudier des fonctions plus complexes.

1 Notion de fonction

1.1 Définitions

Définition 1 *Une fonction d'un ensemble $\mathscr{D}$ sur un ensemble $\mathscr{A}$ est une application qui, à tout élément de $\mathscr{D}$, associe un* ***unique*** *élément de $\mathscr{A}$.*

Exemples : ◦ La fonction qui, à un élève donné, associe sa classe ; une autre fonction lui associe sa note au dernier devoir de maths ; une autre lui associe sa salle de cours les mardis de 11h à 12h...

◦ La fonction qui, à un individu donné, associe son sexe ; une autre fonction lui associe son âge en année.

◦ La fonction qui, à un instant donné, associe la température en degrés celsius à un endroit donné.

◦ La fonction qui, à un individu donné, associe son goût prononcé pour les brocolis ou non.

◦ La fonction qui, à un élève donné, associe son professeur de mathématiques préféré.

Les exemples sont multiples mais tout ne s'exprime pas en termes de fonctions. Par exemple, on ne peut associer à une classe un unique élève sans autre précision, ni à une salle une unique classe, ni à un individu le fait qu'il aime les légumes ou non car cela dépend généralement desquels, ni à un individu son frère,...

Nous n'étudierons ici que des fonctions numériques : les ensembles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{A}$ seront des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Définition 2 *Une fonction numérique f définie sur un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ est une application qui, à tout réel $x \in \mathscr{D}$, associe un* ***unique*** *réel noté $f(x)$ et appelé* image *de x par f. On note* $f : x \in \mathscr{D} \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$.

*$\mathscr{D}$ est appelé l'*ensemble de définition *de f.*

Si $\alpha = f(a)$, *on dit que a est un* antécédent *de α par f.*

Dans le cas où $\alpha = 0$, on dit que a est un zéro *ou une* racine *de f* i.e. $f(a) = 0$.

L'ensemble de définition d'une fonction numérique, c'est l'ensemble des réels qui ont une image, l'ensemble de tous les antécédents. La détermination de cet ensemble de définition est souvent la première étape lors de l'étude d'une fonction. Il peut y avoir différents types d'*objections* : des objections contextuelles comme lorsque la variable est une distance, donc positive, et des objections mathématiques qui se résument généralement à : « un dénominateur ne peut être nul » et « un radicande doit être positif ou nul ».

Une image est forcément unique mais un antécédent ne l'est pas nécessairement et peut même ne pas exister.

Exemple : Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, l'image de 2 par f est unique et vaut $f(2) = 4$, 0 admet 0 pour unique antécédent, 9 admet -3 et 3 pour antécédents et -25 n'admet aucun antécédent réel.

Définition 3 *La courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan est l'ensemble $\mathscr{C}_f$ suivant :*

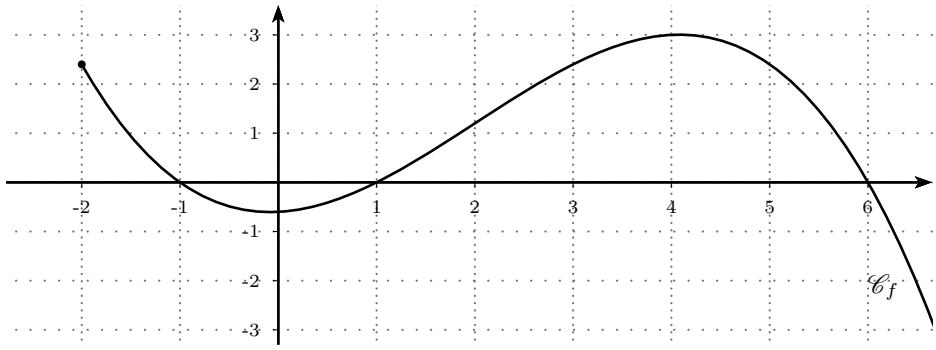
$$\mathscr{C}_f = \left\{ M(x\,;y) \;/\; x \in \mathscr{D} \text{ et } y = f(x) \right\}.$$

On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$: un point du plan appartient à la courbe ssi ses coordonnées vérifient cette équation.

Les repères utilisés pour la représentation de fonctions sont pour la plupart orthogonaux ou orthonormés.

Exemple : Soit f la fonction représentée ci-contre. Par lecture graphique,

- la fonction f est définie sur $[-2\,;+\infty[$
- l'image de 2 par f est $1,3$, l'image de 4 par f est 3
- l'image de $-2,5$ par f n'existe pas
- 1 admet pour antécédent par f : $-1,5\,;\ 1,8\,;\ 5,7$
- -2 admet pour antécédent par f : $6,4$
- 3 admet pour antécédent par f : 4
- $3,5$ admet pour antécédent par f : $\varnothing$
- $-0,5$ admet pour antécédent par f : $-0,5\,;\ 0,3\,;\ 6,1$
- les racines de f sont : $-1\,;\ 1\,;\ 6$.



Une fonction peut être donnée de plusieurs manières :

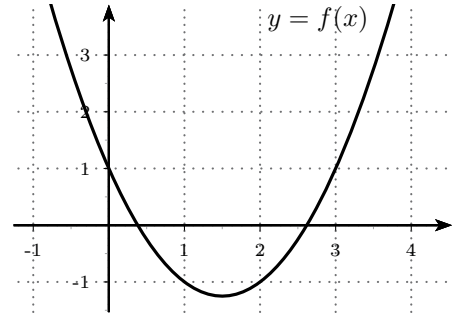
- Au moyen d'une expression algébrique ou d'une formule :
  $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = x^2 - 3x + 1$.
- Au moyen d'un processus ou d'un programme de calcul : choisir un nombre, l'élever au carré, lui retrancher ensuite son triple puis ajouter 1.
- Au moyen d'un tableau de valeurs :

x	-3	-1	0	1	2	5
$f(x)$	19	5	1	-1	-1	11

- Au moyen d'un algorithme :

```
1| def mafonction(x):
2|     f=x**2-3*x+1
3|     return f
```

- Au moyen d'un graphe :



- Une fonction peut aussi être donnée implicitement comme pour les premiers exemples en page 138.

1.2 Exercices

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $[\,-1\,;+\infty\,[$ définie par $f(x) = x^2 - 6x + 9$ de graphe $\mathscr{C}_f$.

1. Les points $A\,(\,1\,;\,4\,)$, $B\,(\,2\,;\,1\,)$, $C\,(\,1\,;\,5\,)$, $D\,(\,-2\,;\,25\,)$, $E\,(\,3\,;\,2\,)$ et $F\,(\,-1\,;\,16\,)$ appartiennent-ils à $\mathscr{C}_f$?
2. Déterminer le ou les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, d'abscisse 4, d'ordonnée 0, d'ordonnée -3.

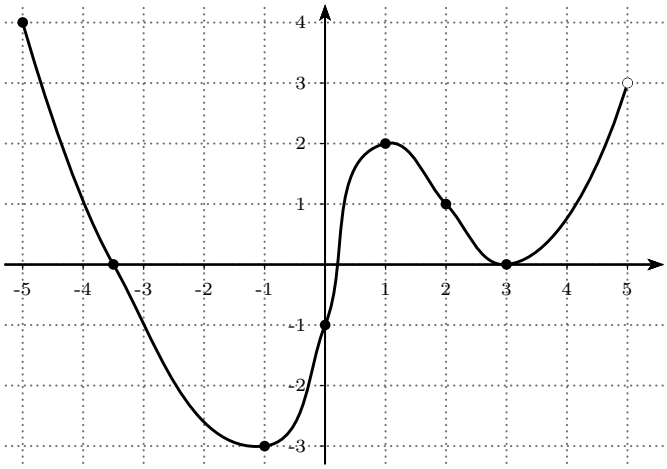
Exercice 2 Soit la fonction f donnée par le graphe ci-dessous. Par lecture graphique,

(a) lire l'ensemble de définition de f,

(b) donner les images par f de -5 ; 0 ; 2 ; $5,3$,

(c) donner les antécédents par f de $3,5$; -1 ; -3 ; 0 ; 3 ; 1 ; $4,2$,

(d) dresser un tableau de valeurs de la fonction f.



Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

1. À l'aide de la calculatrice, construire le tableau de valeurs de f sur l'intervalle $[-3\,;5]$ avec un pas de $0,5$.
2. Dans un repère adapté, placer les points correspondants.
3. On souhaite construire la courbe représentative de f. Doit-on relier les points précédents à la règle ? Justifier.
4. En s'aidant de la calculatrice, construire la courbe représentative de f dans un repère adapté.

Exercice 4 Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes :

$a(x) = \dfrac{8x-16}{3}$

$b(x) = \sqrt{6-2x}$

$c(x) = \dfrac{2}{4-7x}$

$d(x) = \dfrac{\sqrt{3x-6}}{(x-1)(x-3)}$

$e(x) = \dfrac{x-7}{\sqrt{3-x}}$

$f(x) = \dfrac{3x-1}{x^3-8}$

$g(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{2x+8}}$

$h(x) = \sqrt{2x^3+54}$

2 Étude qualitative d'une fonction

Activité *Décrire le graphe de la fonction représentée dans l'exercice 2.*

Lorsque l'on observe le graphe d'une fonction, on peut y apercevoir des points tout en haut ou tout en bas, des courbes qui ondulent, des symétries, des parties au-dessus ou en dessous des axes,... Nous allons définir des notions permettant de décrire rigoureusement tout cela.

2.1 Parité

Définition & Propriété 1

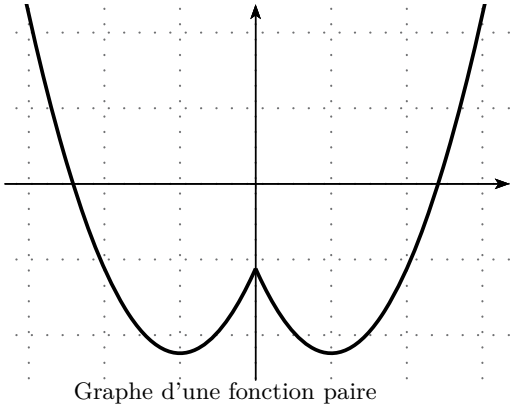
- *Une fonction f est dite* ***paire*** *si, pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$,* $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.
  La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- *Une fonction f est dite* ***impaire*** *si, pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$,* $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.
  La représentation graphique d'une fonction impaire dans tout repère est symétrique par rapport à l'origine.

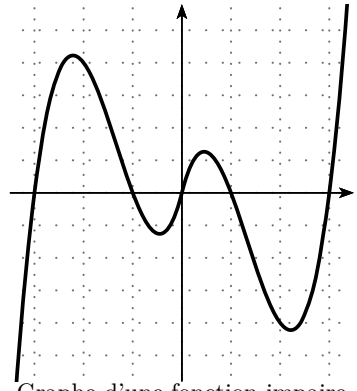
Démonstration : • Si f est paire et si $y_0 = f(x_0)$, les points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées $M(x_0, y_0)$ et $M'(-x_0, y_0)$ appartiennent tous deux la courbe $\mathscr{C}_f$ puisque l'on a aussi $y_0 = f(-x_0)$.

• Si f est impaire et si $y_0 = f(x_0)$, les points symétriques par rapport à l'origine $M(x_0, y_0)$ et $M'(-x_0, -y_0)$ appartiennent tous deux la courbe $\mathscr{C}_f$ puisque l'on a aussi $-y_0 = f(-x_0)$. □

Exemples :
◦ La fonction $f : x \mapsto 5x^2 - 6$ est paire : $f(-x) = 5(-x)^2 - 6 = 5x^2 - 6 = f(x)$.
◦ La fonction $g : x \mapsto -7x^3 + 4x$ est impaire :
$g(-x) = -7(-x)^3 + 4(-x) = 7x^3 - 4x = -(-7x^3 + 4x) = -g(x)$.
◦ Comme la plupart des fonctions, $h : x \mapsto x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire :
$h(-1) = 0 \neq \pm 2 = h(1)$.

Le fait de savoir si une fonction est paire ou impaire permet de réduire l'ensemble d'étude. En effet, les propriétés de symétrie nous permettent de déduire sur $\mathbb{R}^-$ des informations obtenues sur $\mathbb{R}^+$.


Graphe d'une fonction paire


Graphe d'une fonction impaire

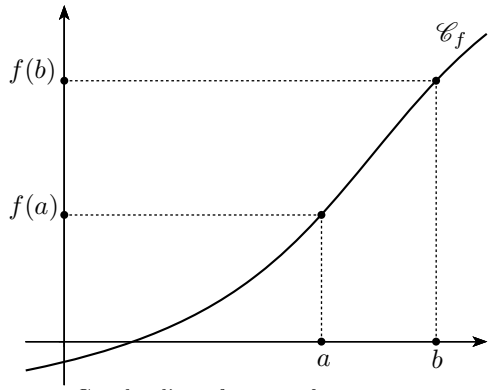
Exercice 5 Par lecture graphique, étudier la parité de la fonction de l'exercice 2 p. 141.

Exercice 6 Étudier la parité des fonctions suivantes : $f(x) = 3x^2 - 5$, $g(x) = 2x - 7x^5$, $h(x) = \frac{-3x}{x^2-5}$, $k(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$, $\ell(x) = 4x^2 - \frac{5}{x}$.

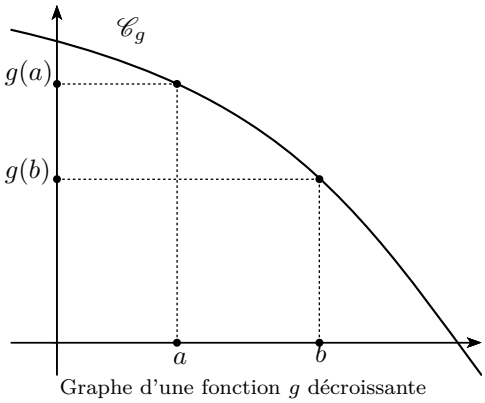
2.2 Variations

Définition 4 *Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I.*

- *f est croissante sur I* *ssi* *f conserve l'ordre sur I*
  ssi $\forall a$ *et* $b \in I$, $a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
- *f est décroissante sur I* *ssi* *f inverse l'ordre sur I*
  ssi $\forall a$ *et* $b \in I$, $a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$.
- *f est monotone sur I* *si* *f est croissante sur I ou décroissante sur I.*



Graphe d'une fonction f croissante



Graphe d'une fonction g décroissante

Dire qu'une fonction f est croissante signifie que lorsque la variable augmente, son image augmente. Graphiquement, cela se traduit par le fait que sa courbe « monte » lorsqu'on la parcourt de gauche à droite.

Dire qu'une fonction f est décroissante signifie que lorsque la variable augmente, son image diminue. Graphiquement, cela se traduit par le fait que sa courbe « descend » lorsqu'on la parcourt de gauche à droite.

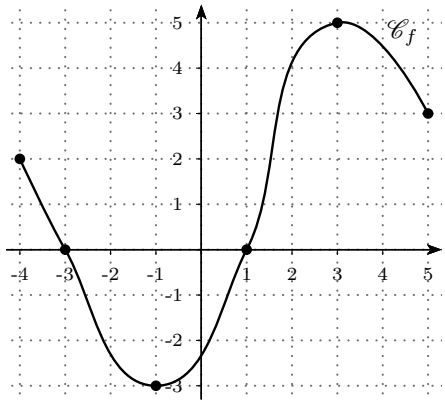
Exemples : ◦ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $a < b \iff 3a < 3b \iff 3a - 5 < 3b - 5 \iff f(a) < f(b)$.
La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et en effet, sa représentation est une droite qui « monte ».

◦ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x + 1$ et $u, v \in \mathbb{R}$.
On a $u < v \iff -2u > -2v \iff -2u + 1 > -2v + 1 \iff g(u) > g(v)$.
La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}$ et en effet, sa représentation est une droite qui « descend ».
Nous le savions déjà : ces fonctions étant affines, il suffit de connaître le signe de leur coefficient directeur.

Exercice 7 Sans utiliser le test du coefficient directeur, démontrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 7x - 9$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto 3 - 4x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Décrire les variations de f, c'est déterminer les intervalles de monotonie de f. Les résultats sont généralement présentés dans un tableau de variation.

Exemple : La fonction f définie sur $[\,-4\,;5\,]$ par le graphe ci-dessous admet, par lecture graphique, le tableau de variation suivant. On y ajoute parfois les racines de la fonction lorsqu'elles sont connues.



x	-4		-1		3		5
$f(x)$	2	↘	-3	↗	5	↘	3

Remarque : Une fonction n'est pas forcément monotone, même « par morceaux » c.-à-d. sur des sous-intervalles.
Observer, par exemple, le cas de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 8 Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de la fonction de l'exercice 2 en page 141.

Exercice 9 La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $I =]\,-\infty\,;-3\,[$.
3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [\,-5\,;-4\,[$.

Exercice 10 Dans chacun des cas, étudier les variations de la fonction sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

$f(x) = -3x^2 + 7$

$g(x) = \sqrt{5x} - 4$

$h(x) = 7 - 3\sqrt{2x+1}$

$k(x) = -6 - \dfrac{4}{x+5}$

2.3 Extremums

Définition 5 *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.*

- *f atteint en a un maximum sur I si $\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(a)$.*
- *f atteint en a un minimum sur I si $\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a)$.*
- *f admet un extremum en a sur I si f admet un maximum ou un minimum en a sur I.*

Le maximum d'une fonction, s'il existe, est donc la plus grande valeur atteinte, la plus grande des images.

Le minimum d'une fonction, s'il existe, est donc la plus petite valeur atteinte, la plus petite des images.

Ainsi, un extremum d'une fonction est une valeur atteinte par la fonction.

Exemple : Pour la fonction f donnée par le graphe en page 144, on a, par lecture graphique,

- le maximum de la fonction f est atteint en $x = 3$ et vaut $f(3) = 5$.
- le minimum de la fonction f est atteint en $x = -1$ et vaut $f(-1) = -3$.

Exercice 11 Par lecture graphique, préciser les extremums de la fonction de l'exercice 2 en page 141.

2.4 Signe

Il est souvent utile (et demandé) de déterminer le signe d'une fonction c.-à-d. de déterminer les ensembles où la fonction est positive et ceux où elle est négative. Autrement dit, il faut résoudre les inéquations $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.
Les résultats sont généralement présentés dans un *tableau de signes*.
Voici, par lecture graphique, celui de la fonction donnée par le graphe de la page 144.

x	-4		-3		1		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Remarque importante : Ce n'est pas parce qu'une fonction est croissante qu'elle est positive, ni le contraire. Il n'y a pas de lien direct entre les variations et le signe d'une fonction.

Exercice 12 Par lecture graphique, dresser le tableau de signe de la fonction de l'exercice 2 en page 141.

2.5 Exercices

Exercice 13

1. Construire le tableau de variation d'une fonction f sachant que f est définie sur $[\,-3\,;5\,]$, f est strictement croissante sur $[\,-3\,;1\,]$ et strictement décroissante sur $[\,1\,;5\,]$, l'image de 1 est 4, un antécédent de 2 est 5 et le minimum de f est -1.
2. Tracer ensuite une courbe compatible pour cette fonction.
3. Comparer $f(-2)$ et $f(0)$, $f(3)$ et $f(4)$, $f(-1)$ et $f(2)$, $f(-3)$ et $f(3)$.

Exercice 14

1. Tracer la représentation graphique d'une fonction f admettant le tableau de variations suivant.

x	-3	-2	-1	0.2	2.5	4
$f(x)$	6	0	-1.5	0	4	0

2. Tracer le graphe d'une fonction g définie sur $[\,-2\,;4\,]$, croissante sur $[\,-2\,;0\,]$ et sur $[\,2\,;4\,]$, décroissante sur $[\,0\,;2\,]$, telle que $g(1)=5$, $g(4)=6$, admettant un maximum valant 7, un minimum valant -2 et s'annulant exactement une fois.

Exercice 15 On définit les trois fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$, $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x+1$ et $h : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2-4$.

1. Dresser leur tableau de variation par lecture graphique sur la calculatrice.
2. Déterminer à la calculatrice le ou les extremum(s) de la fonction f sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^+$ et enfin sur $[\,2\,;5\,]$.
3. Déterminer à la calculatrice les racines de f, g et h puis vérifier par le calcul.
4. Déterminer à la calculatrice les coordonnées des intersections des trois graphes.

Exercice 16 On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ telle que $f(0)=3$ et $f(1)=2$.

1. Peut-on en déduire les variations de f ?
2. L'expression de f est de la forme $f(x)=\dfrac{a}{x+b}$ où a et b sont deux réels. Déterminer a et b.
3. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

3 Fonctions définies sur $\mathbb{N}$

Il peut arriver que la variable ne prenne que des valeurs entières. On dit alors que la variable est *discrète*, en opposition à *continue*, à valeurs réelles. C'est le cas de phénomènes récurrents comme, par exemple, lorsque l'on étudie le taux d'humidité

dans une pièce tous les matins à la même heure (études journalières), le nombre de morsures de loups-garous les soirs de pleine lune (phénomène survenant tous les 29 jours) ou le prix de la tonne de cacahuètes au premier janvier (observations annuelles). Des situations non strictement périodiques aussi nécessitent des variables entières comme la quantité de friandises consommée après chaque séance de sport, le nombre de chatons par portée de Michka ou l'intensité du cri de joie à l'obtention de la moyenne au devoir de mathématiques. Ce sont des phénomènes non périodiques mais récurrents et discrets (au sens mathématiques et non auditif).

Lorsque la variable est discrète, entière, on la note généralement n et les fonctions de n sont notées u, v,... Nous conservons la notation $u(n)$ pour l'image mais on utilisera plus tard u_n. En revanche, lorsqu'un exercice est contextualisé, il est préférable pour la compréhension d'utiliser des noms en adéquation avec la situation.

Puisqu'elle est définie sur $\mathbb{N}$, le graphe d'une telle fonction n'est plus constitué de courbes continues mais bien de points totalement isolés, d'abscisses entières, sans rien les reliant a priori. On peut parfois trouver une fonction qui les joint mais ce n'est pas toujours le cas et il faut bien s'imaginer une suite de points séparés.

Exercice 17 Quelle chaleur !

1. Chaque année au mois d'août, la température dans mon grenier, mon lieu de villégiature favori, augmente de six dixièmes de degré. Définir une fonction donnant la température des combles pour une année donnée.
2. Chaque année au mois de janvier, la température dans ma cave, mon lieu de repos préféré, augmente de 2 %. Définir une fonction donnant la température de la cave pour une année donnée.
3. Peuvent-elles s'écrire toutes les deux au moyen d'une fonction de variable réelle ?

Exercice 18 Dangereux chewing-gums

Clotaire mâche avec obstination chaque jour un peu plus de chewing-gums et bien évidemment, cela a des conséquences sanitaires.

1. Sachant qu'il mâche tous les jours deux gommes de plus que la veille et que cela lui fait perdre quotidiennement 3 % de ses capacités cognitives, définir deux fonctions donnant l'une, le nombre de gommes mâchées un jour donné, l'autre, l'état de ses capacités cognitives.
2. Quand donc aura-t-il perdu la moitié de ses capacités cognitives actuelles ?
3. (a) Peut-on connaître le nombre de gommes qu'il mâchera aujourd'hui ?
   (b) Il y a deux semaines, Clotaire a mangé 5 gommes. Combien en mangera-t-il aujourd'hui ?

4 Problèmes et exercices

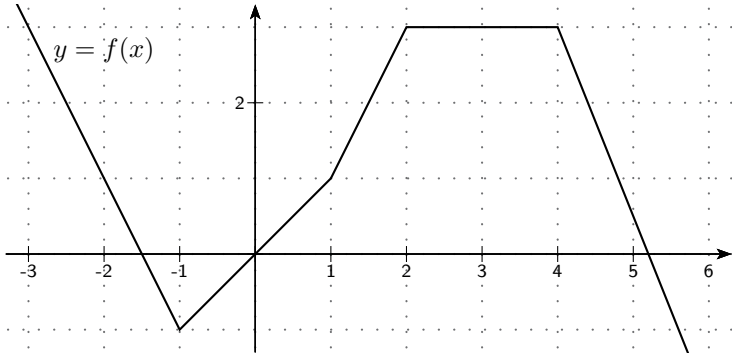


Exercice 19 A function is a process from a set of values called the domain to a set of values called the range. Each number x in the domain is called the input and is associated with a single value $f(x)$ of the range. The number $y = f(x)$ is called the output or the image of x and x is called a preimage under f of the value $y = f(x)$.

1. Function defined by a table of values :
   Sketch a graph of the function f partially defined by the following table of values. Did you all draw the same graph ? Why ?

x	-4	$-1,5$	0	1	$2,6$	6
$f(x)$	7	-1	-1	3	$5,5$	$-3,1$

2. Function defined by a graph :
   The following diagram shows the graph of a function f.
   What is the domain of f ? What is the image of -2 ? Find the preimages of -1, 1 and 3.

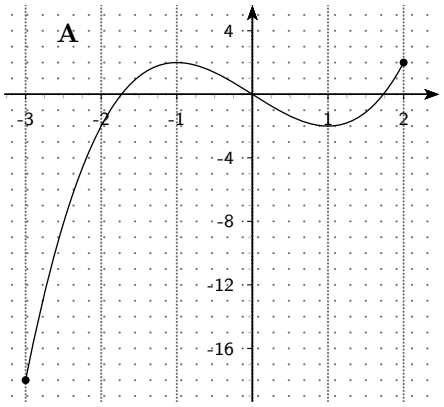


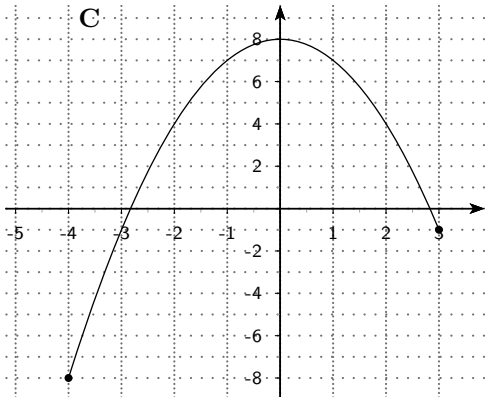
3. Function given by an algebraic formulae : Let f be the function $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.
   Find the preimages of 0, $\frac{1}{2}$, -1, $\sqrt{2}$ and 1.

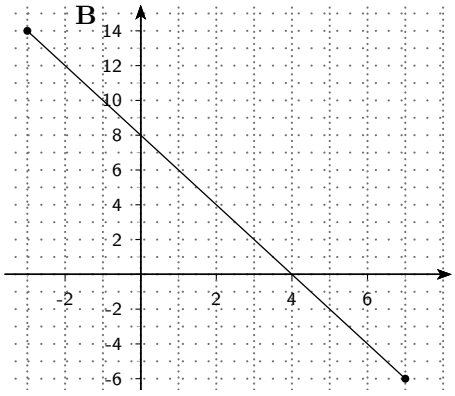
Exercice 20 Par lecture graphique et pour chacune des fonctions représentées ci-après,

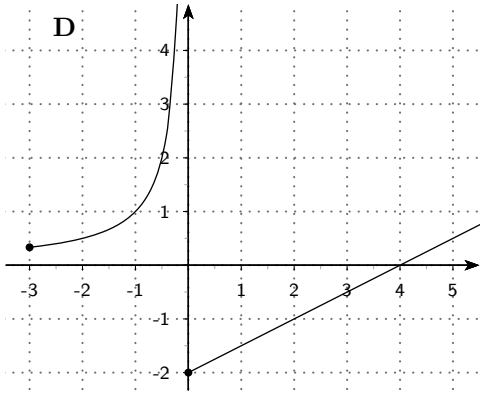
1. déterminer l'ensemble de définition,
2. déterminer, lorsque cela est possible, les images de -2, 0, 3 et 5 puis les antécédents de -2, 0, 1 et 8,
3. dresser le tableau de variations,
4. dresser le tableau de signes,
5. déterminer les extremums.

Résoudre graphiquement les inéquations $A(x) > 0$, $B(x) < 2$, $C(x) \geqslant -4$, $D(x) \geqslant 0$, $C(x) < 8$ et $D(x) \leqslant -2$. Vérifier la compatibilité des solutions avec les tableaux de variations dressés.









Exercice 21 Christian est au 8e ciel : Roxane lui a souri. Dire qu'il y a quatre jours, il était au 8e dessous mais il a suffit d'un *panaché* pour lui obtenir ses faveurs. Pourtant, dans trois jours, il sera à nouveau moins une qu'il ne commette un acte irréparable. Il devra la quitter et partir à la guerre. En reviendra-t-il ? Se reverront-ils ? Les lettres sauveront-elles cet amour ?

Parmi les quatre représentations de l'exercice précédent, laquelle modélise le mieux cette situation ? Justifier.

Parmi les trois fonctions suivantes, laquelle est alors représentée ? Justifier.

$f(x) = 8 - 3x$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 8$ $\qquad$ $h(x) = \frac{5x+3}{\sqrt{4-7x}}$

Exercice 22 (∫) On considère la fonction f définie sur $[-2\,;4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \in [-2\,;1] \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \in]1\,;4] \end{cases}$$

1. Écrire un programme Python qui permette de calculer $f(x)$ en fonction de x.
2. Construire un tableau de valeurs avec un pas de $0,5$ puis construire la courbe représentative de f sur $[-2\,;4]$.
3. Que se passe-t-il si l'on modifie les intervalles de définition en $[-2\,;0]$ et $]0\,;4]$? ...en $[-2\,;3]$ et $]3\,;4]$?

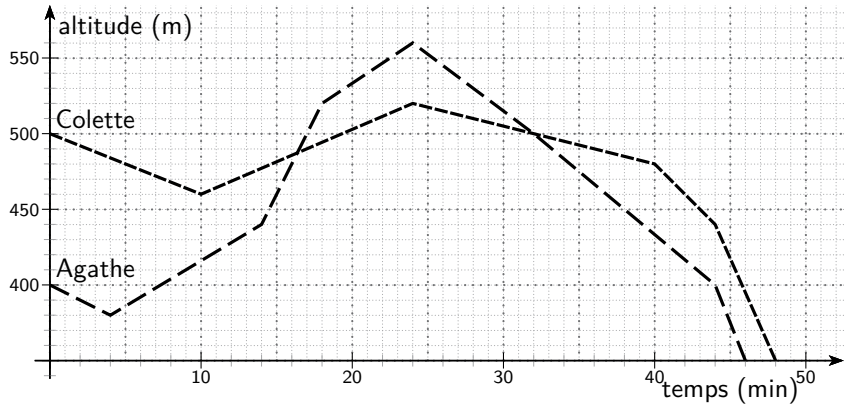
Exercice 23 f est la fonction définie sur $[-2\,;6]$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

1. Tracer la courbe de f à l'écran d'une calculatrice.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ puis vérifier par le calcul.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 24 Balade aérienne

Colette et Agathe évoluent en deltaplane. Les courbes ci-dessous permettent de lire leur altitude en fonction du temps. On note $g(t)$ l'atitude de Colette à l'instant t et $f(t)$ celle d'Agathe.

Les réponses seront données avec la précision permise par le graphique.



1. (a) De quelle altitude s'élance Colette ? et Agathe ?
   (b) À quelle altitude sont-elles lorsqu'elles se posent au sol ?
2. (a) Combien de temps a duré le vol de Colette ? et celui d'Agathe ?
   (b) Quel est l'ensemble de définition de g ? de f ?
3. (a) Quelle est l'altitude de Colette 20 minutes après son envol ? Que vaut $g(20)$?
   (b) Lire sur le graphique $g(8)$, $f(20)$ et $f(40)$.
   (c) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant :

t	0	4	10	32	40	44		
$f(t)$								540
$g(t)$							520	500

4. Dresser les tableaux de variations de f et de g par lecture graphique.
5. (a) Compléter : « Le maximum de la fonction f est obtenu pour $t =$ ..... et vaut ..... »
   (b) Quelle signification concrète donne-t-on à la phrase précédente ?
6. Il est arrivé qu'Agathe et Colette aient, au même moment, la même altitude.
   (a) Comment ce fait se traduit-il pour les fonctions f et g ? et sur le graphique ?
   (b) Préciser les instants où cela s'est produit et l'altitude qu'elles avaient alors.
7. Donner une interprétation concrète de l'inéquation $f(t) \geqslant g(t)$ puis la résoudre graphiquement.

Exercice 25 ⟨∫⟩ L'objectif de cet exercice d'obtenir un programme permettant de déterminer l'extremum d'une fonction donnée sur un intervalle donné.
Nous allons travailler sur le maximum mais l'algorithme du minimum est similaire.

1. Toutes les fonctions admettent-elles un maximum sur un intervalle donné ?
2. On définit la fonction f par $f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 15x + 3$.
   (a) Tracer le graphe de f à la calculatrice afin de déterminer un intervalle pertinent pour la recherche d'un maximum.
   (b) On a commencé à écrire le programme suivant qui permettra de trouver une valeur du maximum de f sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-n} près d'un antécédent de ce maximum.

```
1| def f(x) :
2|     return( ... )
3| def MaxFonction(a,b,n) :
4|     x0=a
5|     max=a
6|     x=a
7|     while x< ... :
8|         x=x+10**(-n)
9|         if f(x) > ... :
10|            max= ...
11|            x0= ...
12|    return( ... , ... )
```

   Compléter la ligne 2.
   Quelle valeur x ne doit pas dépasser ? Compléter la ligne 7.
   Quels sont les rôles des variables `x0` et `max` ? Compléter les lignes 9 à 12.
   Tester ce programme et trouver les mêmes valeurs qu'à la calculatrice.

Exercice 26 Course tragique

Une course de taxi est facturée selon la règle suivante : une prise en charge de 2,50 € au départ puis 1,20 € par kilomètre parcouru. Le chauffeur commence à prendre racine alors qu'affluent trois clientes.

1. (a) Bérénice doit parcourir 5 km.
   Quel est le montant de la course ? Quel est le prix moyen par kilomètre ?
   (b) Mêmes questions si elle parcourt 12 km.
2. Soit x le nombre de kilomètres parcourus en taxi.
   (a) Exprimer en fonction de x le montant $f(x)$ de la course.
   (b) Quelle est la nature de la fonction f ? Préciser ses variations.
3. On appelle $g(x)$ le prix moyen par kilomètre parcouru.
   Montrer que $g(x) = 1,2 + \dfrac{2,5}{x}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. (a) Phèdre souhaite emprunter ce taxi au prix moyen du kilomètre de 1,30 €.
   Calculer la longueur de son trajet ainsi que le montant de sa facture.
   (b) Iphigénie veut aussi utiliser ce taxi. Elle exige que son trajet lui revienne à 1,20 € le kilomètre. Que penser de cette exigence ?

Exercice 27 Patator

Au 1er juin, un producteur de patates peut récolter 1200 kg de tubercules et les vendre 1 € le kilogramme. S'il attend, sa récolte augmente quotidiennement de 60 kg mais le prix de vente baisse de 0,02 € par kilogramme et par jour.

1. Combien touchera le producteur s'il vend toute sa récolte le 1er juin ?
2. Combien touchera-t-il s'il attend un jour ? s'il attend 5 jours ? 10 jours ?
3. On suppose que le producteur attend n jours, $n \in [\,0\,;50\,]$.
   (a) Exprimer en fonction de n le nombre de kilogrammes récoltés puis le prix de vente au kilogramme.
   (b) Montrer que la recette totale en euros est alors de :
   $R(n) = -1,2n^2 + 36n + 1200$.
4. (a) Tracer le graphe de la fonction R sur la calculatrice et déterminer graphiquement la recette maximale.
   Illustrer succinctement cette lecture graphique ainsi que les suivantes.
   (b) À quelle date la recette sera-t-elle à nouveau de 1200 € ? A-t-il intérêt à attendre plus de 30 jours ?
5. Dresser le tableau de variations de la fonction R par lecture graphique.
6. Afin de récolter les tubercules, le producteur loue une *dépatateuse* pour 22 € par jour dès le 1er juin.
   (a) Exprimer en fonction de n le montant $L(n)$ de la location puis tracer son graphe dans la même fenêtre.
   (b) Déterminer graphiquement le nombre maximum de jours qu'il peut attendre s'il veut réaliser un bénéfice.

Exercice 28 Dans un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre 10 cm, on trace deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ centrés sur un même diamètre de $\mathscr{C}$ et tels que les trois cercles soient tangents deux à deux en des points distincts. On désigne par x le diamètre de $\mathscr{C}_1$ et par f la fonction qui à x associe la somme des aires des deux disques délimités par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

1. Faire une figure.
2. Quel est l'ensemble de définition de f ? Donner l'expression algébrique de $f(x)$.
3. Tracer le graphe de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.
4. Conjecturer l'existence d'un minimum de la fonction f et la valeur en laquelle il est atteint.
5. Vérifier que $f(x) = \frac{\pi}{2}(x-5)^2 + \frac{25\pi}{2}$ et en déduire le minimum de f.
   Réaliser la figure dans ce cas.

Hâtez-vous vers les pages 279 et 283 et faites donc les devoirs 10 et nos 11.

Corrigé des exercices

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ définie par $f(x)=x^2-6x+9$ de graphe $\mathscr{C}_f$.

1. On a $f(1)=1^2-6\times1+9=4$ donc $A(1;4)\in\mathscr{C}_f$ et $C(1;5)\notin\mathscr{C}_f$, $f(2)=2^2-6\times2+9=1$ donc $B(2;1)\in\mathscr{C}_f$, $f(3)=0$ donc $E(3;2)\notin\mathscr{C}_f$, $f(-1)=16$ donc $F(-1;16)\in\mathscr{C}_f$.
   Par ailleurs, on a bien $(-2)^2-6(-2)+9=25$ mais $-2\notin[-1;+\infty[$ donc $D(-2;25)\notin\mathscr{C}_f$.
2. On a $f(0)=0^2-6\times0+9=9$ donc $G(0;9)\in\mathscr{C}_f$
   et $f(4)=4^2-6\times4+9=1$ donc $H(4;1)\in\mathscr{C}_f$.
   $f(x)=0\iff x^2-6x+9=0\iff(x-3)^2=0\iff x-3=0\iff x=3$ et $K(3;0)$ est le seul point de $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée nulle.
   On a $f(x)=-3\iff x^2-6x+9=-3\iff(x-3)^2=-3$ ce qui est impossible donc $\mathscr{C}_f$ ne contient pas de point d'ordonnée -3.

Exercice 2 Par lecture graphique,

(a) $\mathscr{D}_f=[-5;5[$,

(b) $f(-5)=4$, $f(0)=-1$, $f(2)=1$, $f(5,3)$ n'existe pas,

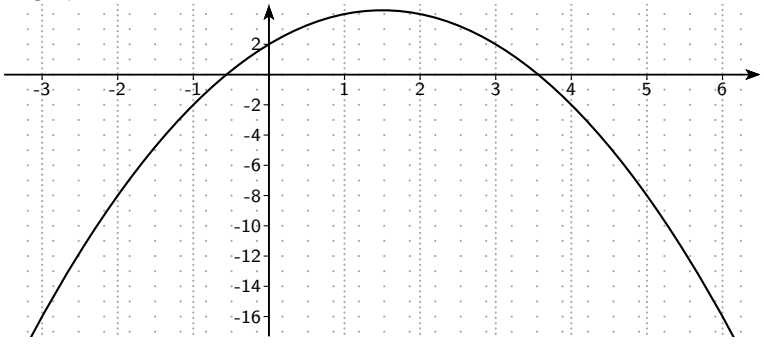
(c) Antécédents par f de $3.5:-4.8$, $-1:-3$ et 0, $-3:-1$, $0:-3.5$, 0.2 et 3, $3:-4.6$, $1:-4$, 0.3, 2 et 4.2, 4.2 n'en n'admet pas.

(d) Voici un tableau de valeurs de f :

x	-5	$-4,8$	$-4,6$	-4	$-3,5$	-3	-1	0	2	3
$f(x)$	4	$3,5$	3	1	0	-1	-3	-1	1	0

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+3x+2$.

1. 2. et 3. On ne doit pas relier les points à la règle car la fonction f n'est pas affine, même entre deux de ses points, aussi proches qu'ils soient.
4. On obtient le graphe suivant :



Exercice 4 Ensembles de définition

- $a(x) = \frac{8x-16}{3} = \frac{8}{3}x - \frac{16}{3}$ est une fonction affine définie sur $\mathscr{D}_a = \mathbb{R}$.
- $b(x) = \sqrt{6-2x}$: le radicande $6-2x$ doit être positif ou nul.
  $6 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow 6 \geqslant 2x \Leftrightarrow x \leqslant \frac{6}{2} = 3$ et $\mathscr{D}_b =]-\infty\,;3\,]$.
- $c(x) = \frac{2}{4-7x}$: le dénominateur $4-7x$ ne doit pas s'annuler.
  $4-7x = 0 \Leftrightarrow -7x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$ et $\mathscr{D}_c = \mathbb{R}\backslash\{\frac{4}{7}\} =]-\infty\,;\frac{4}{7}\,[\cup]\,\frac{4}{7}\,;+\infty\,[$.
- $d(x) = \frac{\sqrt{3x-6}}{(x-1)(x-3)}$: le radicande $3x-6$ doit être positif ou nul et le dénominateur $(x-1)(x-3)$ ne doit pas s'annuler. $3x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x \geqslant 6 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{6}{3} = 2$
  et $(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$ ou $x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$ donc $\mathscr{D}_d = [\,2\,;3\,[\cup]\,3\,;+\infty\,[$.
- $e(x) = \frac{x-7}{\sqrt{3-x}}$: le radicande $3-x$ doit être positif ou nul et le dénominateur $\sqrt{3-x}$ ne doit pas s'annuler.
  $3 - x > 0 \Leftrightarrow 3 > x \Leftrightarrow x < 3$ et $\mathscr{D}_e =]-\infty\,;3\,[$.
- $f(x) = \frac{3x-1}{x^3-8}$: le dénominateur x^3-8 ne doit pas s'annuler. $x^3 - 8 = 0$
  $\iff x^3 = 8 = 2^3 \iff x = 2$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty\,;2\,[\cup]\,2\,;+\infty\,[$.
- $g(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2x+8}}$: le radicande $2x+8$ doit être positif ou nul et le dénominateur $\sqrt{2x+8}$ ne doit pas s'annuler. $2x + 8 > 0 \Leftrightarrow 2x > -8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{2} = -4$ et $\mathscr{D}_g =]-4\,;+\infty\,[$.
- $h(x) = \sqrt{2x^3+54}$: le radicande $2x^3+54$ doit être positif ou nul.
  $2x^3 + 54 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x^3 \geqslant -54 \Leftrightarrow x^3 \geqslant -\frac{54}{2} = -27 = (-3)^3 \Leftrightarrow x \geqslant -3$ et $\mathscr{D}_h = [\,-3\,;+\infty\,[$.

Activité *De manière informelle, on peut dire que, par lecture graphique, le graphe de la fonction f de l'exercice 2 « descend » puis « monte » puis « redescend » puis « remonte » lorsqu'on le parcourt de gauche à droite (variations de f). Il croise trois fois l'axe des abscisses : en -3.5, 0.2 et 3 (racines de f).*
Il est situé au-dessus de l'axe des abscisses, puis en dessous puis au-dessous à nouveau (signe de f : $+$, $-$, $+$). Il n'est pas symétrique (non parité de f). Il admet des points « hauts », $(-5\,;4)$ et $(1\,;2)$ (pas $(5\,;3)$), et « bas », $(-1\,;-3)$ et $(3\,;0)$ (extremums de f sur certains intervalles).

Exercice 5 Par lecture graphique, le graphe de la fonction f de l'exercice 2 n'admet ni l'origine pour centre de symétrie, ni l'axe des abscisses pour axe de symétrie donc la fonction f est ni paire, ni impaire.

Exercice 6 Parité

- On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5 = f(x)$ donc f est paire.
- On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = 2(-x) - 7(-x)^5 = -2x + 7x^5 = -(2x - 7x^5) = -g(x)$ donc g est impaire.
- On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = \frac{-3(-x)}{(-x)^2-5} = -\frac{-3x}{x^2-5} = -h(x)$ donc h est impaire.
- On a $k(1) = 2 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 1 = 2 - 5 + 1 = -2$ et
  $k(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 1 = -2 - 5 + 1 = -6$.
  $k(-1) \neq \pm k(1)$ donc k est ni paire, ni impaire.

- On a $\ell(5) = 4 \times 5^2 - \frac{5}{5} = 99$ et $\ell(-5) = 4(-5)^2 - \frac{5}{-5} = 101$.
  $\ell(-5) \neq \pm\ell(5)$ donc ℓ est ni paire, ni impaire.

Exercice 7 Soient a, $b \in \mathbb{R}$.

- On a $a < b \overset{\times 7}{\iff} 7a < 7b \overset{-9}{\iff} 7a - 9 < 7b - 9 \iff f(a) < f(b)$ et f est strict^{nt} croissante sur $\mathbb{R}$.
- On a $a < b \overset{\times(-4)}{\iff} -4a > -4b \overset{+3}{\iff} 3 - 4a > 3 - 4b \iff g(a) > g(b)$ et g est strict^{nt} décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Par lecture graphique, voici le tableau de variations de la fonction f de l'exercice 2 :

x	-5		-1		1		3		5
f	4	↘	-3	↗	2	↘	0	↗	3

Exercice 9 La fonction f est définie par $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

1. Le dénominateur $x + 3$ ne devant pas s'annuler, la fonction f est définie pour $x \neq -3$: $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\} =]-\infty\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$.
2. Soient a, $b \in]-\infty\,;-3[$. On a $a < b < -3 \iff a + 3 < b + 3 < 3 - 3 = 0$
   $\overset{1/\searrow}{\Longrightarrow} \frac{1}{a+3} > \frac{1}{b+3}$ et f est décroissante sur l'intervalle $I =]-\infty\,;-3[$.
3. Ainsi, $x \in [-5\,;-4[\Longrightarrow f(x) \in]f(-4)\,;f(-5)] =]-1\,;-\frac{1}{2}]$.

Exercice 10 Soient a, $b \in [0\,;+\infty[$.

- On a $0 \leqslant a < b \overset{\cdot^2 \nearrow \mathbb{R}^+}{\iff} a^2 < b^2 \overset{\times(-3)}{\iff} -3a^2 > -3b^2$
  $\overset{+7}{\iff} -3a^2 + 7 > -3b^2 + 7 \iff f(a) > f(b)$.
  f inverse l'ordre strict sur $\mathbb{R}^+$, f est strict^{nt} décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
- On a $0 \leqslant a < b \overset{\times 5}{\iff} 0 \leqslant 5a < 5b \overset{\sqrt{\cdot} \nearrow \mathbb{R}^+}{\iff} \sqrt{5a} < \sqrt{5b}$
  $\overset{-4}{\iff} \sqrt{5a} - 4 < \sqrt{5b} - 4 \iff g(a) < g(b)$.
  g conserve l'ordre strict sur $\mathbb{R}^+$, g est strict^{nt} croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- On a $0 \leqslant a < b \overset{2\cdot+1 \nearrow \mathbb{R}^+}{\iff} 1 \leqslant 2a + 1 < 2b + 1 \overset{\sqrt{\cdot} \nearrow \mathbb{R}^+}{\iff} \sqrt{2a+1} < \sqrt{2b+1}$
  $\overset{\times(-3)}{\iff} -3\sqrt{2a+1} > -3\sqrt{2b+1} \overset{+7}{\iff} 7 - 3\sqrt{2a+1} > 7 - 3\sqrt{2b+1}$
  $\iff h(a) > h(b)$.
  h inverse l'ordre strict sur $\mathbb{R}^+$, h est strict^{nt} décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
- On a $0 \leqslant a < b \overset{+5}{\iff} 5 \leqslant a + 5 < b + 5 \overset{1/\searrow \mathbb{R}^+}{\iff} \frac{1}{a+5} > \frac{1}{b+5} \overset{\times(-4)}{\iff} \frac{-4}{a+5} < \frac{-4}{b+5}$
  $\overset{-6}{\iff} -6 - \frac{4}{a+5} < -6 - \frac{4}{b+5} \iff k(a) < k(b)$.
  k conserve l'ordre strict sur $\mathbb{R}^+$, k est str^{nt} $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11 Par lecture graphique, la fonction f de l'exercice 2 admet, sur $[-5\,;5[$, un minimum en $x = -1$ valant $f(-1) = -3$ et un maximum en $x = -5$ valant $f(-5) = 4$. Ce sont des extremums que l'on dit *globaux*.

Pour aller plus loin, f admet sur des ensembles restreints ce que l'on appelle des extremums *locaux* : en $x = 3$, f admet un minimum local valant $f(3) = 0$ et en $x = 1$, f admet un maximum local valant $f(1) = 2$.
En revanche, f n'est pas définie en 5 donc elle ne peut y admettre d'extremum, ni local, ni global.

Exercice 12 Par lecture graphique, voici le tableau de signe de la fonction f de l'ex.2 :

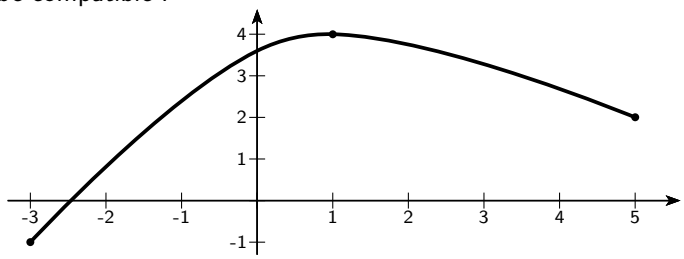
x	-5		-3.5		0.2		3		5
f		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Exercice 13

1. Voici le tableau demandé :

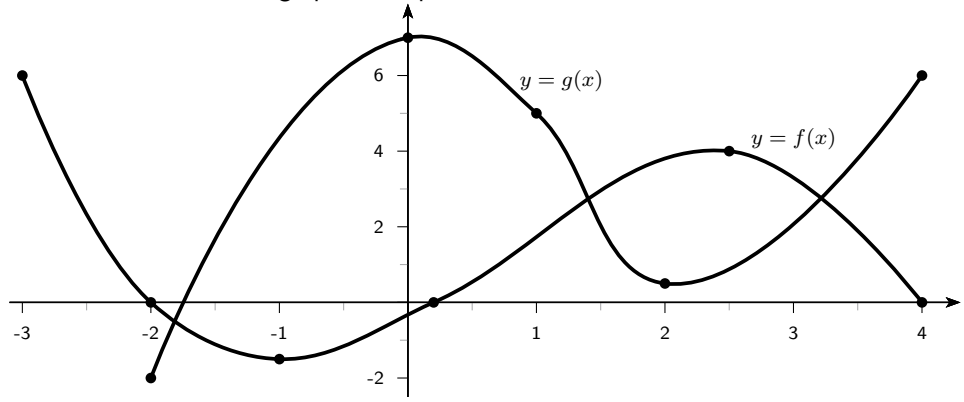
x	-3		1		5
f	-1	↗	4	↘	2

2. Voici une courbe compatible :



3. f étant croissante sur $[\,-2\,;0\,]$, elle conserve l'ordre et l'on a $f(-2) \leqslant f(0)$.
   f étant décroissante sur $[\,3\,;4\,]$, elle inverse l'ordre et l'on a $f(3) \geqslant f(4)$.
   f n'étant pas monotone sur $[\,-1\,;2\,]$, on ne peut comparer $f(-1)$ et $f(2)$.
   f admettant un minimum en $x = -3$ uniquement, on a $f(-3) \leqslant f(3)$.

Exercice 14 Voici des graphes compatibles :



Exercice 15 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+1$ et $h(x)=x^2-4$.
Par lecture graphique :

1. f et h sont croissantes sur $]-\infty\,;0\,]$, décroissantes sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et g est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^+$, f admet un minimum en 0 valant $0^2=0$ et n'admet pas de maximum. Sur $[\,2\,;5\,]$, f admet un minimum en 2 valant $2^2=4$ et un maximum en 5 valant $5^2=25$.
3. On a $f(0)=g(-\frac{1}{2})=h(-2)=h(2)=0$ pour seules racines.
4. On a $\mathscr{C}_f\cap\mathscr{C}_g=\{(-0,41\,;0,17\,),(\,2,41\,;5,83\,)\}$, $\mathscr{C}_f\cap\mathscr{C}_h=\varnothing$ et $\mathscr{C}_g\cap\mathscr{C}_h=\{(-1,45\,;-1,9\,),(\,3,45\,;7,9\,)\}$.

Exercice 16 f est définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et telle que $f(0)=3$ et $f(1)=2$.

1. On ne pourrait en déduire les variations de la fonction f que si on la savait affine, ce qui n'est pas le cas.
2. On a alors $\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{0+b}=3\\ \frac{a}{1+b}=2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}a=3b\\ \frac{3b}{1+b}=2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}3b=2(1+b)\\ a=3b\end{array}\right.$
   $\iff\left\{\begin{array}{l}3b-2b=2\times1\\ a=3b=3\times2=6\end{array}\right.$ et $f(x)=\frac{6}{x+2}$.
3. Soient u, $v\in\mathbb{R}^+$. On a $0\leqslant u<v\Longrightarrow 0<u+2<v+2\overset{1/\searrow}{\Longrightarrow}\frac{1}{u+2}>\frac{1}{v+2}$
   $\Longrightarrow\frac{6}{u+2}>\frac{6}{v+2}\Longrightarrow f(u)>f(v)$: f est décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 17 Quelle chaleur !

1. Soit n le nombre d'années qui s'écouleront depuis cette année et soit $g(n)$ la température moyenne qu'il fera dans mon grenier au mois d'août dans n années. Puisque cette température augmente de $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ de degré par an, on peut écrire que $g(n+1)=g(n)+\frac{3}{5}$. Dans n années, elle aura augmenté de $\frac{3}{5}\times n$ et l'on a $g(n)=g(0)+\frac{3}{5}n$, où $g(0)$ est la température moyenne de mon grenier au mois d'août de cette année.
2. Si $c(n)$, la température moyenne de ma cave au mois de janvier, augmente de 2 % par an, on peut écrire $c(n+1)=(1+\frac{2}{100})c(n)=1,02c(n)$. Dans n années, on aura multiplié par $1,02^n$ et l'on a $c(n)=1,02^nc(0)$, où $c(0)$ est la température moyenne de ma cave au mois de janvier de cette année.
3. Si l'on peut aisément transformer $g(n)=g(0)+\frac{3}{5}n$ en une fonction (affine) de variable réelle $g(x)=g(0)+\frac{3}{5}x$, il n'en est pas de même pour $c(n)$ puisqu'il nous est difficile de donner un sens à une puissance non entière (il faudra pour cela attendre la terminale, dans le cas positif). Se restreindre à une variable entière nous est donc parfois nécessaire.

Exercice 18 Dangereux chewing-gums

1. Soit n le nombre de jours passés depuis le début de l'observation de Clotaire. On désigne par $M(n)$ le nombre de gommes qu'il mâche et $E(n)$ l'état de ses capacités cognitives, le jour n.
   D'après l'énoncé, on a :
   $M(n+1)=M(n)+2$ et $E(n+1)=(1-\frac{3}{100})E(n)=0,97E(n)$.

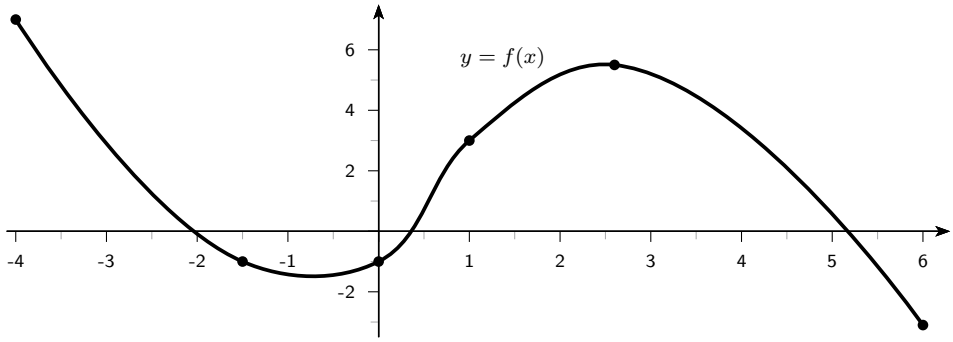
2. Puisque l'on multiplie quotidiennement par $0,97$, on a $E(n) = 0,97^n E(0)$ et l'on cherche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0,97^n \leqslant \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. La calculatrice nous donne $0,97^{23} < \frac{1}{2} < 0,97^{22}$.
Clotaire aura donc perdu plus de la moitié de ses capacités cognitives actuelles dans 23 jours.

3. (a) Puisque l'on ajoute 2 gommes par jour, on peut écrire $M(n) = M(0) + 2n$ mais il nous faut connaître la valeur de référence pour calculer $M(n)$.

   (b) On a $M(0) = 5$ donc $M(14) = 5 + 2 \times 14 = 33$ gommes mâchées aujourd'hui.

Exercice 19

1. You didn't draw the same graph because there is an infinite number of possibilities.



2. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $f(-2) = 1$, $f(-1) = f(5.6) = -1$, $f(-2) = f(1) = f(4.8) = 1$ and $f(-3) = f(\alpha) = 3$ for all $\alpha \in [\,2\,;4\,]$.

3. Let f be the function $f(x) = \frac{x}{x-1}$. We have :
$f(x) = 0 \iff \frac{x}{x-1} = 0 \iff x = 0$,
$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \times x = 1 \times (x-1) \Leftrightarrow 2x - x = -1 \Leftrightarrow x = -1$,
$f(x) = -1 \iff \frac{x}{x-1} = -1 \iff x = -(x-1) \iff x + x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$,
$f(x) = \sqrt{2} \iff \frac{x}{x-1} = \sqrt{2} \iff x = \sqrt{2}(x-1) \iff x - x\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
$\iff x(1-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \iff x = \frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$
and $f(x) = 1 \iff \frac{x}{x-1} = 1 \iff x = x - 1 \iff 0 = -1$: no preimage.

Exercice 20 Par lecture graphique,

1. $\mathscr{D}_A = [\,-3\,;2\,]$, $\mathscr{D}_B = [\,-3\,;7\,]$, $\mathscr{D}_C = [\,-4\,;3\,]$ et $\mathscr{D}_D = [\,-3\,;+\infty\,[$.

2. On a $A(-2) = -2$, $A(0) = 0$, $A(3)$ et $A(5)$ n'existent pas, $B(-2) = 12$, $B(0) = 8$, $B(3) = 2$ et $B(5) = -2$, $C(-2) = 4$, $C(0) = 8$, $C(3) = -1$ et $C(5)$ n'existe pas, $D(-2) = 0,5$, $D(0) = -2$, $D(3) = -0,5$ et $D(5) = 0,5$.
On a $-2 = A(-2) = A(1) = B(5) = C(-3,2) = D(0)$,
$0 = A(-1,7) = A(0) = A(1,7) = B(4) = C(-2,8) = C(2,8) = D(4)$,
$1 = A(-1,5) = A(-0,3) = A(1,8) = B(3,5) = C(-2,7) = C(2,7)$
$= D(-1) = D(6?)$
et $8 = B(0) = C(0) = D(-0,...?)$, aucun antécédent par A.

3. Tableaux de variations :

x	-3		-1		1		2
A	-18	↗	2	↘	-2	↗	2

x	-3		7
B	14	↘	-6

x	-4		0		3
C	-8	↗	8	↘	-1

x	-3		0		$+\infty$
D	0.3	↗	$\|$	↘	-2

4. Tableaux de signes :

x	-3		-1.7		0		1.7		2
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-3		4		7
$B(x)$		$+$	0	$+$	

x	-4		-2.8		2.8		3
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	-3		0		4		$+\infty$
$D(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

5. A admet un minimum en $x = -3$ valant $A(-3) = -18$ et un maximum en $x = -1$ et en $x = 2$ valant $A(-1) = A(2) = 2$.
   B admet un minimum en $x = 7$ valant $B(7) = -6$ et un maximum en $x = -3$ valant $B(-3) = 14$.
   C admet un minimum en $x = -4$ valant $C(-4) = -8$ et un maximum en $x = 0$ valant $C(0) = 8$.
   D admet un minimum en $x = 0$ valant $D(0) = -2$, n'admet pas de maximum.

Graphiquement, $A(x) > 0 \iff x \in]-1,7\,;0[\cup]1,7\,;2]$,
$B(x) < 2 \iff x \in]3\,;7]$, $C(x) \geqslant -4 \iff x \in [-3,5\,;3]$,
$D(x) \geqslant 0 \iff x \in [-3\,;0[\cup [4\,;+\infty[$, $C(x) < 8 \iff x \in [-4\,;0[\cup]0\,;3]$
et $D(x) \leqslant -2 \iff x \in \{0\}$ ce qui est compatible avec les tableaux précédents.

Exercice 21 L'énoncé suggère que le moral de Christian peut être modélisé par une fonction croissante entre -4 et 0 en passant de -8 à 8 puis décroissante entre 0 et 3 en passant de 8 à -1 : seule la représentation C le vérifie.

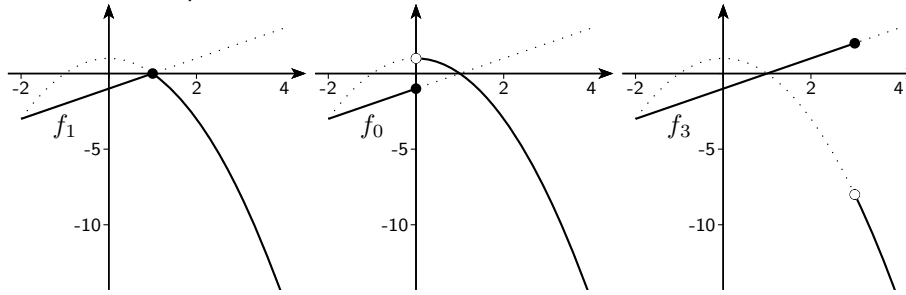
La fonction f est affine et donc représentée par une droite et la fonction h n'est pas définie en 1 par exemple. C'est donc la fonction $g(x) = -x^2 + 8$ qui est représentée par la magnifique parabole C.

Ceci vous donne un très bon prétexte pour relire *Cyrano de Bergerac*, n'est-ce pas ?

Exercice 22 $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \in [-2\,;1] \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \in]1\,;4] \end{cases}$

1.
```
def fonctionf(x):
    if -2<= x<= 1 :
        f=x-1
        return f
    else :
        if 1<x<=4 :
            f=-x**2+1
            return f
        else :
            print("f n'est pas définie en ", x)
```

2. Voici les trois représentations, suivant l'endroit de la césure.



3. Si l'on modifie les intervalles de définition en $[-2\,;0]$ et $]0\,;4]$ ou en $[-2\,;3]$ et $]3\,;4]$, on s'aperçoit que la fonction est toujours définie mais que son graphe n'est plus en un seul « morceau ». On dit alors que la fonction n'est pas *continue* (cf. classe de terminale).

Exercice 23 f est la fonction définie sur $[-2\,;6]$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

1. et 2. On observe sur la magnifique parabole obtenue à la calculatrice que $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 4$ et effectivement $x^2 - 4x = x(x-4)$.
3. Graphiquement, $f(x) > 0 \iff x \in [-2\,;0[\cup]4\,;6]$, lorsque la courbe est située « au-dessus » de l'axe des abscisses.

Exercice 24 Balade aérienne

1. (a) Par lecture graphique, on observe que Colette s'élance d'une altitude de 500 mètres et Agathe, d'une altitude de 400 m.
   (b) Elles se posent toutes deux à une altitude de 350 m.
2. (a) Colette a volé pendant 48 minutes et Agathe, 46 min.

(b) g est définie sur $[0;48]$ et f sur $[0;46]$.

3. (a) Après 20 minutes de vol, l'altitude de Colette était de $g(20) = 500$ m.

   (b) On lit $g(8) \simeq 465$ m, $f(20) = 540$ m et $f(40) = 440$ m.

   (c) On a 2 mm$\leftrightarrow$ 1 min en abscisse et 1 mm$\leftrightarrow$5 m en ordonnée. D'où le tableau :

t	0	4	10	32	40	44	24	20
$f(t)$	400	380	405	500	440	400	560	540
$g(t)$	500	480	460	500	480	440	520	500

4. On obtient les tableaux de variations suivants par lecture graphique.

x	0		4		24		46
f	400	↘	380	↗	560	↘	350

x	0		10		24		48
g	500	↘	460	↗	520	↘	350

5. (a) Le maximum de la fonction f est obtenu pour $t = 24$ et vaut 560.

   (b) Cela signifie que l'altitude maximale atteinte par Agathe est de 560 mètres et qu'elle y était après 24 minutes de vol.

6. (a) Colette et Agathe ont la même altitude au même moment lorsque, pour un certain temps t_0, $f(t_0) = g(t_0)$ c-à-d. lorsque les graphes des fonctions f et g se croisent.

   (b) On observe sur le graphique que cela s'est produit après 16 et 32 minutes de vol, à des altitudes respectives de 485 et 500 mètres.

7. L'inéquation $f(t) \geqslant g(t)$ traduit l'assertion « À cet instant, Agathe est à une altitude plus élevée que Colette ». Résoudre cette inéquation, c'est donc déterminer à quels moments Agathe était plus haut que Colette.
   Résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) \geqslant g(t)$, c'est trouver les instants t où le graphe de f est au-dessus du graphe de g.
   On lit $f(t) \geqslant g(t) \iff t \in [16\,;32]$. Agathe était donc à une altitude plus élevée que Colette entre la seizième et la trente-deuxième minute de vol.

Exercice 25 Algorithme du maximum

1. Non, toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement un maximum sur un intervalle donné. Par exemple, la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'en admet pas sur $]\,0\,;1\,]$ ni sur $]-\infty\,;-1\,]$. Pour garantir l'existence d'un maximum, on peut exiger que la fonction soit *continue* sur un intervalle fermé mais cela dépasse un peu notre champs d'étude.

2. (a) Sur la calculatrice, il semble que la fonction donnée par $f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 15x + 3$ admette un maximum sur l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$.

(b) On cherche un maximum sur $[\,a\,;b\,]$ donc le nombre x ne doit pas dépasser b.
La variable `max` correspond au maximum « pour l'instant » atteint et `x0` correspond à son antécédent trouvé.
Avec MaxFonction(-1,1,2) on retrouve un maximum de f atteint en $x_0 \simeq 0,43$ et valant $f(x_0) \simeq 6,07$.

```
def f(x) :
    return(4*x**3-20*x**2+15*x+3)
def MaxFonction(a,b,n) :
    x0=a
    max=a
    x=a
    while x< b :
        x=x+10**(-n)
        if f(x) > max :
            max= f(x)
            x0= x
    return(x0 , max)
```

Exercice 26 Course tragique

1. (a) Les 5 km de la course de Bérénice seront facturés $2,50+5\times 1,20=8,50$€ pour un prix moyen de $\frac{8,5}{5}=1,70$€/km.
   (b) Pour 12 km de course, Bérénice paiera $2,50+12\times 1,20=16,90$€ pour un prix moyen de $\frac{16,9}{12}\simeq 1,41$€/km.
2. (a) Le montant de la course, en euros, est $f(x)=1,2x+2,5$.
   (b) f est une fonction affine, de coeff. dir. $1,2>0$ donc elle est croissante.
3. On a $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{1,2x+2,5}{x}=\frac{1,2x}{x}+\frac{2,5}{x}=1,2+\frac{2,5}{x}$.
   La fonction inverse étant décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $2,5$ étant positif, $\frac{2,5}{x}$ tout comme $g(x)=1,2+\frac{2,5}{x}$ le sont aussi.
4. (a) On a $g(x)=1,3 \iff 1,2+\frac{2,5}{x}=1,3 \iff \frac{2,5}{x}=0,1 \iff x=\frac{2,5}{0,1}=25$.
   Pour avoir un prix moyen de $1,30$€/km, Phèdre devra parcourir 25 km et sa course coûtera $f(25)=1,2\times 25+2,5=32,50$€.
   (b) On a $g(x)=1,2 \iff 1,2+\frac{2,5}{x}=1,2 \iff \frac{2,5}{x}=0$ ce qui est impossible. Cette exigence de la part d'Iphigénie est donc insensée.

Exercice 27 Patator

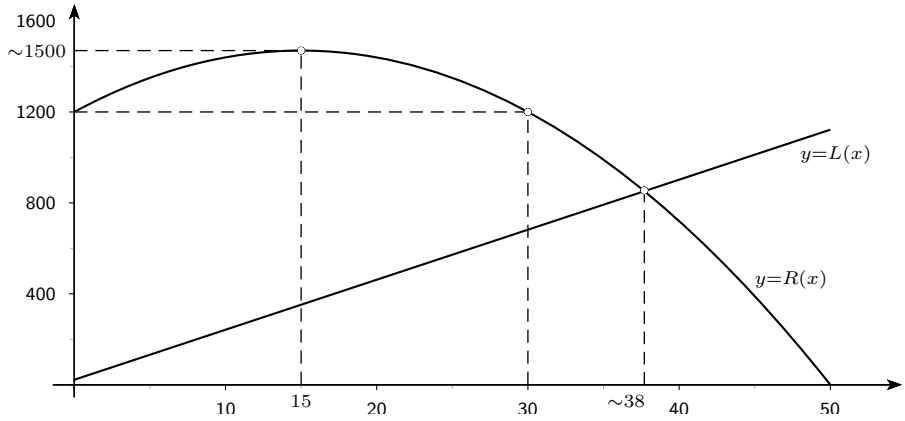
1. S'il vend sa récolte au 1er juin, le producteur aura $1200\,\text{kg}\times 1\,€/\text{kg}=1200$€.
2. S'il attend un jour, il aura $(1200+60)\,\text{kg}\times(1-0,02)\,€/\text{kg}=1234,80$€.
   S'il attend cinq jours, il aura $(1200+5\times 60)\,\text{kg}\times(1-5\times 0,02)\,€/\text{kg}=1350$€.
   S'il attend cinq jours, il aura $(1200+10\times 60)\,\text{kg}\times(1-10\times 0,02)\,€/\text{kg}=1440$€.
3. (a) S'il attend n jours, il récoltera $1200+60n\,\text{kg}$
   qu'il pourra vendre $1-0,02n$€ chacun.
   (b) La recette sera alors de $R(n)=(1200+60n)\times(1-0,02n)$
   $R(n)=1200-1200\times 0,02n+60n-60n\times 0,02n=-1,2n^2+36n+1200$€.
4. (a) On observe sur le graphe de la page suivante que la recette sera maximale au bout de 15 jours environ et sera alors d'environ 1500€.
   (b) Graphiquement, la recette sera à nouveau de 1200€ au bout de 30 jours puis lui sera inférieure. Il n'a donc pas intérêt à attendre plus de 30 jours.

5. Par lecture graphique, on a le tableau de variations suivant.

x	0		15		50
R	1200	↗	1500	↘	0

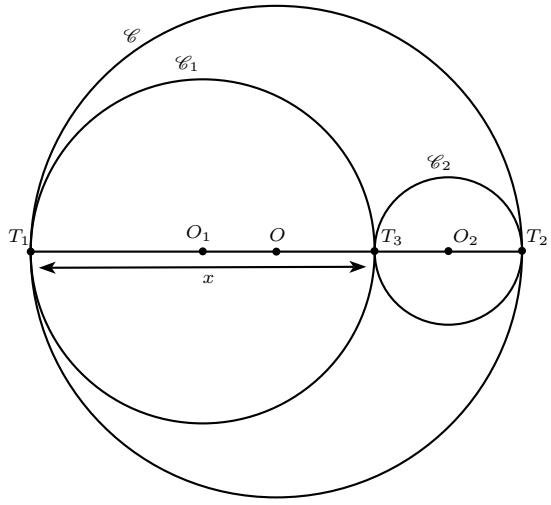
6. (a) Au 1er juin, on a $n = 0$ et $L(0) = 22$; au 2 juin, on a $n = 1$ et $L(1) = 22 \times 2 = 44$...
Après n jours d'attente, le coût de la location est de $L(n) = 22(n + 1)$.

   (b) On réalise un bénéfice lorsque la recette est supérieure au coût. Graphiquement, la représentation graphique de la fonction R est située au-dessus de celle de L (*i.e.* $R(x) \geqslant L(x)$) lorsque $x \leqslant 38$. Le producteur peut donc attendre jusqu'à 38 jours s'il veut réaliser un bénéfice.



Exercice 28

1. La seule possibilité est celle-ci :



CORRIGÉS

2. Puisque $\mathscr{C}$ est de diamètre 10, $\mathscr{D}_f =]\,0\,;10\,[$ et l'aire d'un disque de diamètre d étant $\frac{\pi d^2}{4}$, on a
$f(x) = \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}(10-x)^2 = \frac{\pi}{4}(x^2 + x^2 - 20x + 100) = \frac{\pi}{2}(x^2 - 10x + 50)$.
3. et 4. On observe à la calculatrice une parabole en "$\cup$" de sommet d'abscisse 5 : f semble atteindre son minimum pour $x = 5$.
5. On a bien, pour tout $x \in]\,0\,;10\,[$,
$\frac{\pi}{2}(x-5)^2 + \frac{25\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(x^2 - 10x + 25) + \frac{25\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(x^2 - 10x + 25 + 25)$
$= \frac{\pi}{2}(x^2 - 10x + 50) = f(x)$.
Puisqu'un carré est positif, $f(x) \geqslant \frac{25\pi}{2}$
et $f(x)$ est minimal lorsque $\frac{\pi}{2}(x-5)^2 = 0$ *i.e.* $x = 5$.
Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont alors de même diamètre.

Chapitre X

INÉQUATIONS & TABLEAUX DE SIGNES

EXERCICES

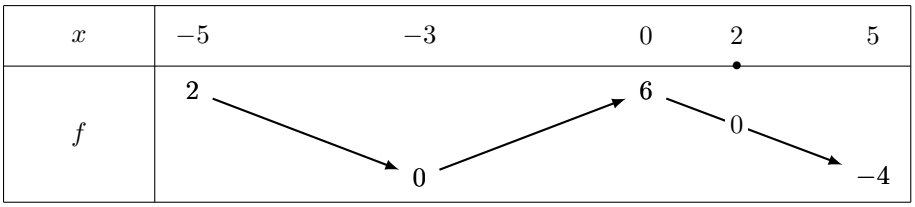
Sommaire

Exercices **165**
Corrigé des exercices 169

Ce chapitre est essentiellement « technique ». Nous effectuons donc principalement des exercices.

Exercice 1 Rappeler la règle des signes pour un produit et pour un quotient.

Exercice 2 Une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$ admet ce tableau de variations.



1. Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.
2. Résoudre dans $[-5\,;5]$ les inéquations suivantes :

   (a) $f(x) > 0$ (c) $f(x) \geqslant 6$ (e) $f(x) \geqslant -8$

   (b) $f(x) \leqslant 0$ (d) $f(x) < 6$ (f) $f(x) > 10$

Exercice 3

1. Dans la même fenêtre de la calculatrice, représenter sur l'intervalle $[-3\,;3]$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives $y = x^2 - 4$ et $y = -x - 2$.

2. Déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $x^2 - 4 > -x - 2$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.
   (b) Déterminer algébriquement les solutions de l'inéquation $x^2 - 4 > -x - 2$.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

(a) $x + 1 \geqslant 3$ (c) $5x + 2 > -1$ (e) $2 - 5x \geqslant \dfrac{x}{3} + 2$

(b) $4x - 3 \geqslant 1$ (d) $3x - 5 < 2x + 3$ (f) $x^2 - 7x \geqslant 0$

Exercice 5

1. Étudier le signe des expressions suivantes : $3x - 1$ et $6 - 2x$.
2. En déduire le tableau de signes du produit : $(3x - 1)(6 - 2x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3x - 1)(6 - 2x) \leqslant 0$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

(a) $(4x - 2)(7 - 5x) > 0$ (c) $\dfrac{3}{x-2} - 4 \leqslant 0$

(b) $\dfrac{x-4}{x+2} \leqslant 0$ (d) $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{x-2} \leqslant 0$



Exercice 7 Claudius says to Hamlet : "If you want to solve the inequation $\frac{2x-1}{x+1} \geqslant 1$, it's easy. Just multiply each member by $x+1$ and then solve $2x-1 \geqslant x+1$." Hamlet disagrees with his sworn enemy. What about you ?

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes puis vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

(a) $(x - 4)(3 - x) \leqslant 0$
(b) $(-2x + 3)(5 + x) > 0$
(c) $3x(3x - 5) < 0$
(d) $-(x + 1)^2(2x - 1) \leqslant 0$
(e) $-2x(x - 1)(4 - x) \leqslant 0$
(f) $x^2(7 - x)(1 - 3x) > 0$
(g) $\dfrac{x+3}{5x-1} \geqslant 0$
(h) $\dfrac{-5x}{2x-7} \geqslant 0$
(i) $\dfrac{9-2x}{3x+1} < 0$
(j) $-\dfrac{1-x^2}{7-x} \leqslant 0$
(k) $x^2 - 4 \geqslant x + 2$
(l) $1 - 2x + x^2 \leqslant x - 1$

Exercice 9

1. (a) Montrer que $u^2 + 6u - 16 = (u + 3)^2 - 25$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $u(u + 6) \geqslant 16$.
2. (a) Montrer que $v^2 - 8v + 17 = (v - 4)^2 + 1$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $v(v - 8) < -17$.

Exercice 10 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. M est un point du segment $[AC]$. Soient $N \in [BC]$ et $P \in [AB]$ tels que $MNPA$ soit un rectangle.

1. Déterminer les valeurs de $CM = \ell$ pour lesquelles le périmètre du rectangle $MNPA$ est supérieur à 7.
2. Démontrer que l'aire du rectangle $MNPA$ est inférieure ou égale à 3.

Exercice 11 La phrase suivante est-elle vraie ? « La somme d'un réel strictement positif et de son inverse est toujours supérieure ou égale à 2. »

Exercice 12 Déterminer l'ensemble des réels dont le carré est supérieur ou égal à leur double.

Exercice 13 On prend une feuille de papier de largeur ℓ et de longueur L. En enroulant la feuille sur sa longueur, on obtient un cylindre et en l'enroulant sur sa largeur, on en obtient un autre. Lequel des deux a le plus grand volume ? Justifier.

Exercice 14 Gaspard, Melchior et Balthazar ont dévoré un nombre entier de délicieuses galettes. Gaspard en a mangé moins de deux fois plus que Melchior qui en a savouré plus d'une fois et demi moins que Balthazar. Raisonnable, Melchior n'en a pas dégusté plus d'une demi.
De combien de galettes se sont-ils repus ?

Exercice 15 L'entreprise CPaBo fabrique des jouets en plastique horribles et chers : 120€ l'unité. On note $C(q)$ le coût total de production, en euros, en fonction du nombre q de jouets fabriqués hebdomadairement. On estime qu'il est donné par

$$C(q) = 2q^2 + 10q + 900 \quad \text{pour } 0 < q < 80.$$

Étonnamment, tous les jouets fabriqués sont vendus.

1. Exprimer la recette totale $R(q)$ en fonction de q.
2. Vérifier que le bénéfice total est donné par $B(q) = -2(q^2 - 55q + 450)$, puis que la forme factorisée de $B(q)$ est $B(q) = -2(q - 10)(q - 45)$.
3. Déterminer algébriquement le nombre de jouets que l'entreprise CPaBo doit produire chaque semaine pour que cette production soit rentable.
4. Tracer les fonctions C et R dans le repère orthogonal (x de 0 à 65, y de 0 à 11000) puis vérifier graphiquement le résultat précédent.
5. On note $M(q)$ le coût moyen de production d'un jouet plastique en fonction de la quantité q produite hebdomadairement.
   (a) Montrer que $M(q) = 2q + 10 + \dfrac{900}{q}$.
   (b) Tracer à la calculatrice la courbe représentative de la fonction M et la droite d'équation $y = 120$.
   (c) Déterminer graphiquement leur position relative et interpréter le résultat.

Exercice 16 Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ et soit M un point quelconque du segment $[AB]$.
On construit les points R et Q tels que $BMRQ$ soit un carré.
Soient maintenant le point N de la demi-droite $[MR)$ et le point P tels que $MAPN$ soit un carré.
Le but de l'exercice est de trouver les positions de M telles que la surface constituée par les deux carrés soit supérieure ou égale à 10.
On note x la distance AM.

1. Faire une figure.
2. (a) À quel intervalle appartient le réel x ?
   (b) Écrire une inéquation traduisant le problème posé.
   (c) Démontrer que le problème revient à résoudre l'inéquation $2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0$.
3. Représenter la fonction $2x^2 - 8x + 6$ sur l'intervalle $]\,0\,;4\,[$ et déterminer graphiquement les solutions au problème posé. Expliciter votre démarche.
4. (a) Développer le produit $(2x - 6)(x - 1)$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0$.
   (c) Conclure.

À la page 287, vous irez et le devoir n° 12, vous ferez.

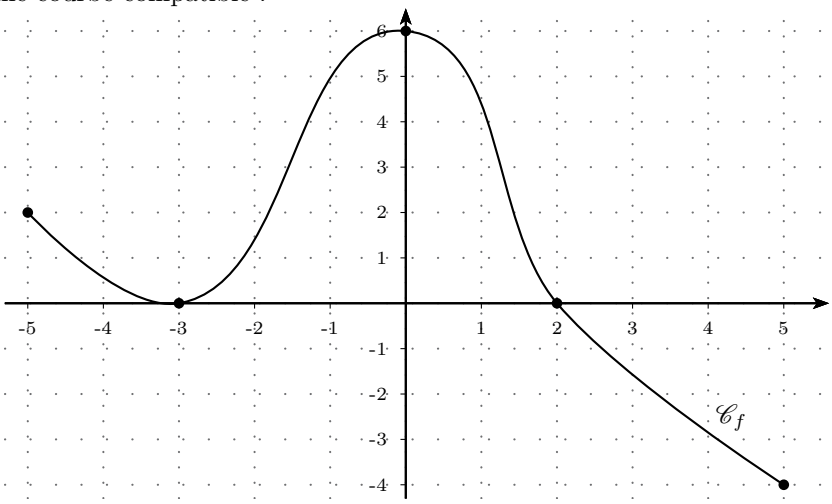
Corrigé des exercices

Inéquations & Tableaux de signes

Exercice 1 Pour un produit ou un quotient,
« les amis (+) de mes amis (+) sont mes amis (+),
les amis (+) de mes ennemis (−) sont mes ennemis (−),
les ennemis (−) de mes amis (+) sont mes ennemis (−) et
les ennemis (−) de mes ennemis (−) sont mes amis (+) ».

Exercice 2

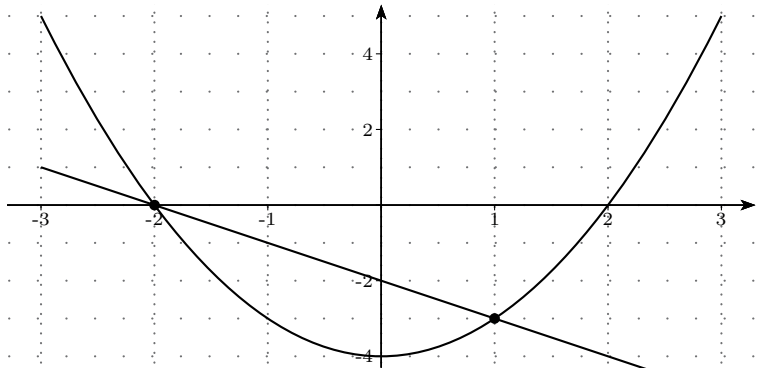
1. Voici une courbe compatible :



2. (a) $f(x) > 0 \iff x \in [-5\,;-3\,[\cup]-3\,;2\,[$.
   (b) $f(x) \leqslant 0 \iff x \in \{-3\} \cup [\,2\,;5\,]$.
   (c) $f(x) \geqslant 6 \iff x \in \{0\}$.
   (d) $f(x) < 6 \iff x \in [-5\,;0\,[\cup]\,0\,;5\,]$.
   (e) $f(x) \geqslant -8$ n'a pas de solution.
   (f) $f(x) > 10$ n'a pas de solution.

Exercice 3

1. Voici les graphes obtenus :



2. Graphiquement, on a $x^2-4>-x-2$ lorsque la parabole est « au-dessus » de la droite *i.e.* sur $]-\infty\,;-2\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$.
3. (a) Pour tout réel x, on a bien $(x-1)(x+2)=x^2+2x-x-2=x^2+x-2$.
   (b) Ainsi, $x^2-4>-x-2 \iff x^2-4+x+2>0 \iff x^2+x-2>0$
   $\iff (x-1)(x+2)>0$ et $x-1>0 \iff x>1$,
   $x+2>0 \iff x>-2$ d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et $x^2-4>-x-2 \iff x\in\,]-\infty\,;-2\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$.

Exercice 4

(a) $x+1\geqslant 3 \iff x\geqslant 3-1=2$

(b) $4x-3\geqslant 1 \iff 4x\geqslant 1+3=4 \iff x\geqslant \frac{4}{4}=1$

(c) $5x+2>-1 \iff 5x>-1-2=-3 \iff x>-\frac{3}{5}$

(d) $3x-5<2x+3 \iff 3x-2x<3+5 \iff x<8$

(e) $2-5x\geqslant \frac{x}{3}+2 \iff -5x-\frac{x}{3}\geqslant 2-2 \iff \frac{-15-1}{3}x\geqslant 0 \iff x\leqslant 0\times(-\frac{3}{16})=0$

(f) $x^2-7x\geqslant 0 \iff x(x-7)\geqslant 0 \iff x$ et $x-7$ de même signe
$\iff x\in\,]-\infty\,;0\,]\cup[\,7\,;+\infty\,[$.

Exercice 5

1. $3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$ et $6-2x>0 \Leftrightarrow 6>2x \Leftrightarrow x<\frac{6}{2}=3$.
2. D'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$6-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x-1)(6-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Ainsi, $(3x-1)(6-2x) \leqslant 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right] \cup [\,3\,;+\infty\,[$.

Exercice 6

(a) $(4x-2)(7-5x)>0$: $4x-2>0 \iff 4x>2 \iff x>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $7-5x>0 \iff -5x>-7 \iff x<\frac{7}{5}$ d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{5}$		$+\infty$
$4x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$7-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4x-2)(7-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

et $(4x-2)(7-5x)>0 \iff x \in \left]\frac{1}{2}\,;\frac{7}{5}\right[$.

(b) $\frac{x-4}{x+2} \leqslant 0$: $x-4>0 \iff x>4$ et $x+2>0 \iff x>-2$ d'où :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\frac{x-4}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

et $\frac{x-4}{x+2} \leqslant 0 \iff x \in]\,-2\,;4\,]$.

(c) $\frac{3}{x-2}-4=\frac{3}{x-2}-\frac{4(x-2)}{x-2}=\frac{3-4x+8}{x-2}=\frac{11-4x}{x-2}$: $x-2>0 \iff x>2$ et $11-4x>0 \iff 11>4x \iff x<\frac{11}{4}$ d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		2		$\frac{11}{4}$		$+\infty$
$11-4x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\frac{11-4x}{x-2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

et $\frac{3}{x-2}-4 \leqslant 0 \iff x \in]\,-\infty\,;2\,[\cup \left[\,\frac{11}{4}\,;+\infty\,\right[$.

(d) $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x-2}=\frac{2(x-2)-3(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{5-x}{(x-2)(x-3)}$: $5-x>0 \iff x<5$, $x-2>0 \iff x>2$ et $x-3>0 \iff x>3$ d'où le tableau suivant.

CORRIGÉS

x	$-\infty$		2		3		5		$+\infty$
$5-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$\frac{5-x}{(x-2)(x-3)}$		$+$		$-$		$+$	0	$-$	

et $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2} \leqslant 0 \iff x \in \left]2\,;3\right[\cup \left[5\,;+\infty\right[$.

Exercice 7 As Hamlet, I disagree with Claudius because $x+1$ can be negative so the inequation switches when multiplied by $x+1$. I'd rather compare to 0 :
$\frac{2x-1}{x+1} \geqslant 1 \iff \frac{2x-1}{x+1} - 1 \geqslant 0 \iff \frac{(2x-1)-(x+1)}{x+1} \geqslant 0 \iff \frac{x-2}{x+1} \geqslant 0$
and a table of sign gives the result.

Exercice 8

(a) $(x-4)(3-x) \leqslant 0$: $x-4=0 \iff x=4$, affine croissante et $3-x=0 \iff x=3$, affine décroissante d'où :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-4)(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

et $(x-4)(3-x) \leqslant 0 \iff x \in \left]-\infty\,;3\right] \cup \left[4\,;+\infty\right[$.

(b) $(-2x+3)(5+x) > 0$: $-2x+3=0 \iff x=\frac{3}{2}$, affine décroissante et $5+x=0 \iff x=-5$, affine croissante d'où :

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$5+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+3)(5+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

et $(-2x+3)(5+x) > 0 \iff x \in \left]-5\,;\frac{3}{2}\right[$.

(c) $3x(3x-5)<0$: $3x=0 \Leftrightarrow x=0$, affine croissante et $3x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$, affine croissante d'où le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(3x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et $3x(3x-5)<0 \iff x \in]0\,;\,\frac{5}{3}[$.

(d) $-(x+1)^2(2x-1) \leqslant 0$: $x+1=0 \iff x=-1$, $(x+1)^2 \geqslant 0$ et $2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}$, affine croissante d'où :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-(x+1)^2(2x-1)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

et $-(x+1)^2(2x-1) \leqslant 0 \iff x \in \{-1\} \cup \left[\,\frac{1}{2}\,;+\infty\,\right[$.

(e) $-2x(x-1)(4-x) \leqslant 0$: $-2x=0 \iff x=0$, affine décroissante, $x-1=0 \iff x=1$, affine croissante et $4-x=0 \iff x=4$, affine décroissante d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-2x(x-1)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

et $-2x(x-1)(4-x) \leqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;\,0] \cup [\,1\,;\,4\,]$.

(f) $x^2(7-x)(1-3x) > 0$: $x^2 = 0 \iff x = 0$ et $x^2 \geqslant 0$, $7-x = 0 \iff x = 7$, affine décroissante et $1-3x = 0 \iff x = \frac{1}{3}$ affine décroissante d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		7		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$7-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x^2(7-x)(1-3x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

et $x^2(7-x)(1-3x) > 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,\frac{1}{3}\right[\cup \left]7\,;\,+\infty\right[$.

(g) $\dfrac{x+3}{5x-1} \geqslant 0$: $x+3 = 0 \iff x = -3$, affine croissante et la valeur interdite $5x-1 = 0 \iff x = \frac{1}{5}$, affine croissante d'où le tableau :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+3}{5x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

et $\dfrac{x+3}{5x-1} \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,-3\right] \cup \left]\frac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$.

(h) $\dfrac{-5x}{2x-7} \geqslant 0$: $-5x = 0 \iff x = 0$, affine décroissante et la valeur interdite $2x-7 = 0 \iff x = \frac{7}{2}$, affine croissante d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-5x}{2x-7}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

et $\dfrac{-5x}{2x-7} \geqslant 0 \iff x \in \left[0\,;\,\frac{7}{2}\right[$.

(i) $\dfrac{9-2x}{3x+1} < 0$: $9-2x=0 \iff x=\frac{9}{2}$, affine décroissante et la valeur interdite $3x+1=0 \iff x=-\frac{1}{3}$, affine croissante d'où le tableau suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$9-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{9-2x}{3x+1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

et $\dfrac{9-2x}{3x+1} < 0 \iff x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{9}{2}\,;+\infty\right[$.

(j) $-\dfrac{1-x^2}{7-x} \leqslant 0 \iff \dfrac{(1+x)(1-x)}{x-7} \leqslant 0$: $1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$, affine croissante, $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$, affine décroissante et la valeur interdite $x-7=0 \Leftrightarrow x=7$, affine croissante d'où le tableau suivant.

x	$-\infty$		-1		1		7		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{(1+x)(1-x)}{x-7}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

et $-\dfrac{1-x^2}{7-x} \leqslant 0 \iff x \in [-1\,;1] \cup]7\,;+\infty[$.

(k) $x^2-4 \geqslant x+2 \iff (x-2)(x+2)-(x+2) \geqslant 0 \iff (x-2-1)(x+2) \geqslant 0 \iff (x-3)(x+2) \geqslant 0$: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$, affine croissante et $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$, affine croissante d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et $x^2-4 \geqslant x+2 \iff x \in]-\infty\,;-2] \cup [3\,;+\infty[$.

CORRIGÉS

(l) $1-2x+x^2 \leqslant x-1 \iff (1-x)^2+1-x \leqslant 0 \iff (1-x)(1-x+1) \leqslant 0$
$\iff (1-x)(2-x) \leqslant 0$: $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$, affine décroissante et $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$, affine décroissante d'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1-x)(2-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et $1-2x+x^2 \leqslant x-1 \iff x \in [\,1\,;\,2\,]$.

Exercice 9

1. (a) On a $(u+3)^2-25 = u^2+2u\times 3+3^2-25 = u^2+6u-16$.
   (b) $u(u+6) \geqslant 16 \iff u^2-6u-16 \geqslant 0 \iff (u+3)^2-25 \geqslant 0$
   $\iff (u+3-5)(u+3+5) \geqslant 0 \iff (u-2)(u+8) \geqslant 0$.
   $u-2=0 \Leftrightarrow u=2$, aff.crois. et $u+8=0 \Leftrightarrow u=8$, aff.crois.

u	$-\infty$		-8		2		$+\infty$
$u-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$u+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$(u-2)(u+8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et $u(u+6) \geqslant 16 \iff x \in\,]-\infty\,;-8\,] \cup [\,2\,;+\infty\,[$.

2. (a) On a $(v-4)^2+1 = v^2-8v+16+1 = v^2-8v+17$.
   (b) On a $v(v-8) < -17 \iff v^2-8v+17 < 0 \iff (v-4)^2+1 < 0$
   $\iff (v-4)^2 < -1$ ce qui est impossible car un carré est positif ou nul. L'ensemble solution est donc $\varnothing$.

Exercice 10 On pose $x = PN = 4-\ell$ et $y = MN$.
Le théorème de Thalès donne $\dfrac{y}{3} = \dfrac{\ell}{4}$ donc $y = \frac{3}{4}\ell$.

1. $\mathscr{P} = 2(x+y) = 2(4-\ell+\frac{3}{4}\ell) = 8-\frac{1}{2}\ell$
   et $\mathscr{P} > 7 \iff -\frac{1}{2}\ell > 7-8 = -1 \iff \ell < 2$: $\mathcal{S} = [\,0\,;2\,[$.
2. $\mathscr{A} = xy = \frac{3}{4}\ell(4-\ell) \leqslant 3 \Leftrightarrow \ell(4-\ell) \leqslant 3\times\frac{4}{3} = 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant \ell^2-4\ell+4 = (\ell-2)^2$: toujours vrai et $\mathcal{S}' = [\,0\,;4\,]$.

Exercice 11 Soit $x > 0$. On a
$x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2 \iff \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{2x}{x} \iff \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} \geqslant 0 \iff \dfrac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$
ce qui est vrai car le numérateur et le dénominateur sont positifs.

Exercice 12 On cherche à déterminer l'ensemble des réels x tels que $x^2 \geqslant 2x$.
On a $x^2 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x \geqslant 0 \iff x(x-2) \geqslant 0$.
Puisque ces deux fonctions affines sont croissantes ($1 > 0$), on a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des réels recherchés est donc l'intervalle $]-\infty\,;0\,] \cup [\,2\,;+\infty\,[$.

Exercice 13 Le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon r est donné par la formule $\mathcal{V} = \pi r^2.h$ et si p est le périmètre d'un cercle, $r = \frac{p}{2\pi}$ est son rayon.
Le cylindre de hauteur L et dont le disque est de périmètre ℓ a donc pour volume
$\mathcal{V}_{(h=L)} = \pi \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 .L = \frac{\ell L}{4\pi}\ell$.
De même, l'autre cylindre, de hauteur ℓ, a pour volume $\mathcal{V}_{(h=\ell)} = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 .\ell = \frac{\ell L}{4\pi}L$.
Résolvons donc l'inéquation suivante :
$\mathcal{V}_{(h=\ell)} - \mathcal{V}_{(h=L)} > 0 \iff \frac{\ell L}{4\pi}L - \frac{\ell L}{4\pi}\ell > 0 \iff \frac{\ell L}{4\pi}(L-\ell) > 0 \iff L - \ell > 0$
puisque $\frac{\ell L}{4\pi} > 0$.
Ainsi, le cylindre dont la hauteur est la largeur de la feuille a un volume supérieur à celui dont la hauteur est la longueur de la feuille.

Exercice 14 On a $g+m+b \geqslant 2$, $g \leqslant 2m$, $m \geqslant \frac{b}{1,5}$, et $m \leqslant \frac{1}{2}$.
Donc $2 \leqslant g + m + b \leqslant 2m + m + 1,5m = 4,5m \leqslant 4,5 \times \frac{1}{2} = 2,25$
et $g + m + b = 2$ galettes.

Exercice 15 Le coût total de production, en euros, en fonction du nombre q de jouets fabriqués hebdomadairement est donné par
$C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ pour $0 < q < 80$.

1. Les jouets étant vendus 120 € l'unité, la recette totale, en euros, est $R(q) = 120q$.

2. Le bénéfice total est donné par la différence entre la recette et le coût de production donc : $B(q) = R(q) - C(q) = 120q - (2q^2 + 10q + 900) = -2q^2 + 110q - 900$
$B(q) = -2(q^2 - 55q + 450)$.
De plus, $-2(q-10)(q-45) = -2(q^2-45q-10q+450) = -2(q^2-55q+450) = B(q)$.

3. La production de jouets est rentable si le bénéfice est positif. On doit donc résoudre l'inéquation $B(q) > 0$. En utilisant la forme factorisée de B, on obtient le tableau suivant.

CORRIGÉS

q	0		10		45		80
-2		$-$		$-$		$-$	
$q-10$		$-$	0	$+$		$+$	
$q-45$		$-$		$-$	0	$+$	
$B(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

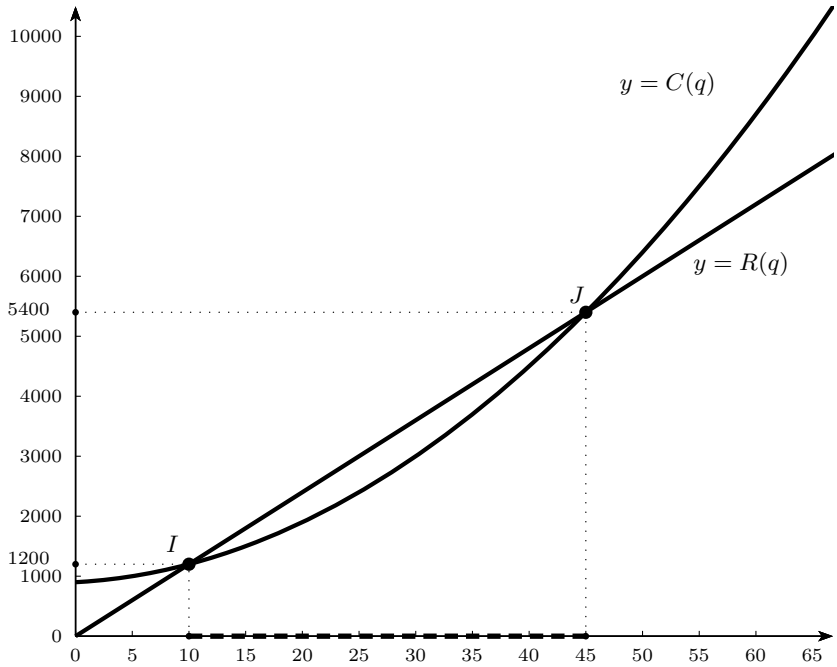
Ainsi, $B(q) > 0 \iff q \in]\,10\,;45\,[$. Pour que sa production soit rentable, l'entreprise CPaBo doit fabriquer entre 10 et 45 jouets par semaine.

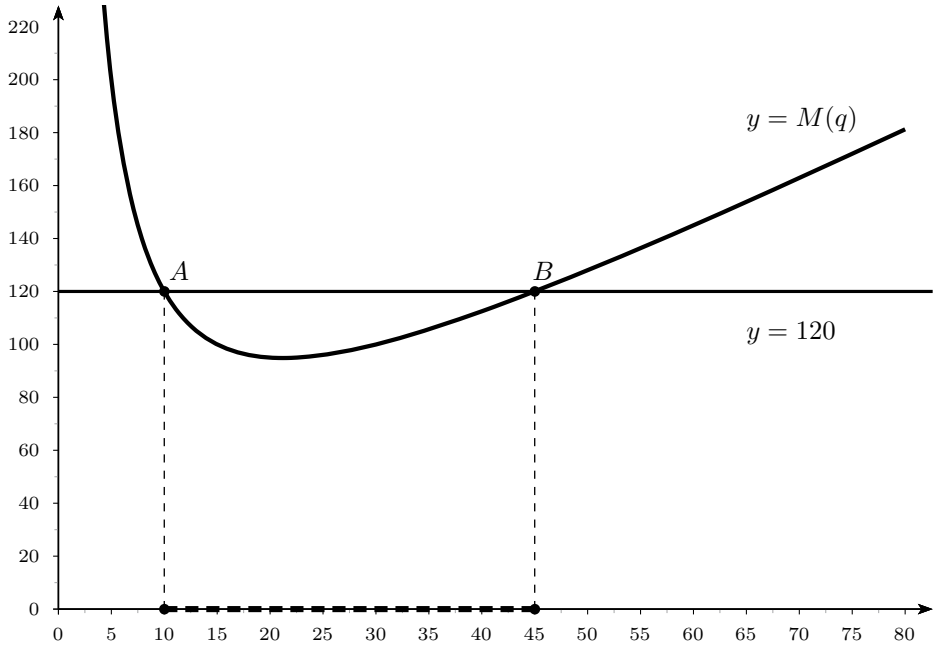
4. Le bénéfice est positif si et seulement si $R(q) > C(q)$. Graphiquement, la courbe de la fonction R doit être située au-dessus de la courbe de la fonction C. On observe sur le graphique que cela correspond bien à l'intervalle $]\,10\,;45\,[$.

5. (a) Le coût moyen de production est le quotient du coût total par le nombre d'objets fabriqués.
   Ainsi, $M(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{2q^2+10q+900}{q} = \dfrac{2q^2}{q}+\dfrac{10q}{q}+\dfrac{900}{q} = 2q+10+\dfrac{900}{q}$.

   (b) Le graphique est tracé en fin d'exercice.

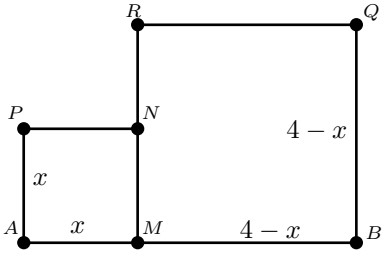
   (c) On observe que la courbe représentative de M est située en dessous de la droite $y = 120$ entre les points A et B d'abscisses respectives 10 et 45.
   Ceci signifie que le coût moyen de production des jouets est inférieur à 120€, son prix de vente, lorsque l'entreprise CPaBo en fabrique entre 10 et 45.
   On retrouve ainsi les valeurs pour lesquelles la fabrication est rentable.





Exercice 16

1.



2. (a) Puisque $M \in [AB]$ et $AB = 4$, on a $x = AM \in]\,0\,;4\,[$.

   (b) Puisque $BM = AB - AM = 4 - x$, les carrés $BMRQ$ et $MAPN$ ont pour aire x^2 et $(4-x)^2$ respectivement.
   On cherche donc les valeurs de x telles que la somme des deux aires soit supérieure ou égale à 10 c.-à-d. $x^2 + (4-x)^2 \geqslant 10$.

   (c) On a $x^2 + (4-x)^2 \geqslant 10 \iff x^2 + 4^2 - 2 \times 4x + x^2 - 10 \geqslant 0 \iff 2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0$.

3. On cherche les points de la représentation de la fonction $2x^2 - 8x + 6$ situés au-dessus de l'axe des abscisses. Graphiquement, on lit $2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0$ pour $x \in]\,0\,;1\,] \cup [\,3\,;4\,[$.

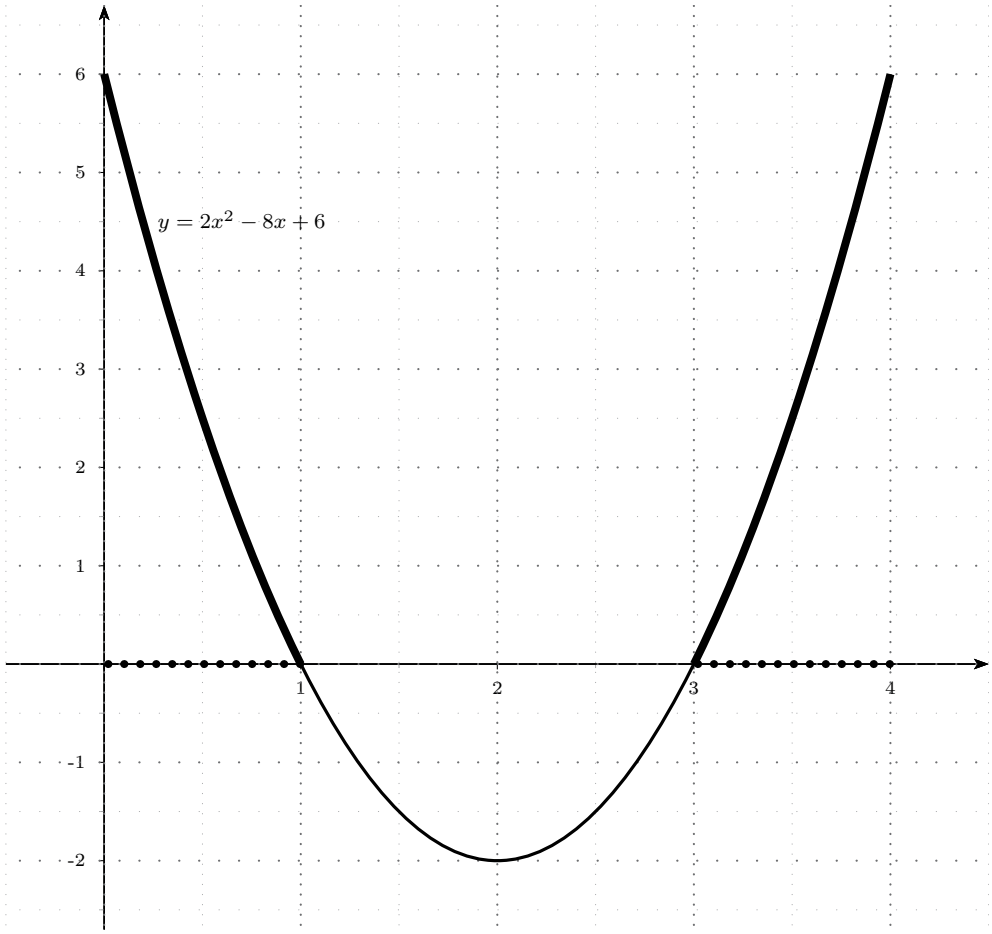
4. (a) On a $(2x-6)(x-1) = 2x^2 - 2x - 6x + 6 = 2x^2 - 8x + 6$.

   (b) Ainsi, $2x^2 - 8x + 6 \geqslant 0 \iff (2x-6)(x-1) \geqslant 0$. Puisque $2x - 6$ est affine croissante ($2 > 0$) et s'annule en 3 et $x - 1$ est affine croissante ($1 > 0$) et s'annule en 1, on a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-6)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $(2x-6)(x-1) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty\,;1] \cup [\,3\,;+\infty[$.

(c) Puisque x doit varier entre 0 et 4, la somme des aires des deux carrés sera supérieure ou égale à 10 lorsque $x \in]\,0\,;1\,] \cup [\,3\,;4\,[$.



Chapitre XI

PROBABILITÉS

Sommaire

Introduction 181
1 Événements d'une expérience aléatoire 182
1.1 Expérience aléatoire, issue, univers 182
1.2 Événements d'une expérience aléatoire 182
1.3 Opérations sur les événements 183
2 Probabilités 184
2.1 Probabilité d'un événement 184
2.2 Probabilités et fréquences 185
3 Calculs de probabilités 185
3.1 Équiprobabilité 185
3.2 Probabilités et opérations 186
3.3 Arbres pondérés 186
Exercices 188
Corrigé des exercices 193

Introduction

La notion de « risque », préalable à l'étude des probabilités, n'est apparue qu'au XIIe siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux. Le véritable début de la théorie date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654. Ceux-ci commencent à élaborer les bases du traitement mathématique des probabilités autour de l'étude de jeux de hasard mais bien que considérés comme les fondateurs du traitement des probabilités, ils ne publient rien de leurs travaux. Vient ensuite Thomas Bayes (1702 - 1761), mathématicien britannique qui a grandement contribué à l'élaboration du concept de conditionnalité. Ce n'est qu'au XIXe siècle qu'apparaît ce qui peut être considéré comme la théorie moderne des probabilités et il faudra attendre 1933 pour que sorte un ensemble de méthodes et d'exemples divers et que les probabilités deviennent une véritable théorie axiomatisée.

Les jeux de hasard sont l'application la plus naturelle des probabilités mais de nombreux autres domaines s'appuient ou se servent des probabilités : statistiques, économie, finance, aide à la décision, imagerie médicale, physique (quantique ou non), évaluation des risques, mouvements aléatoires,...

1 Événements d'une expérience aléatoire

1.1 Expérience aléatoire, issue, univers

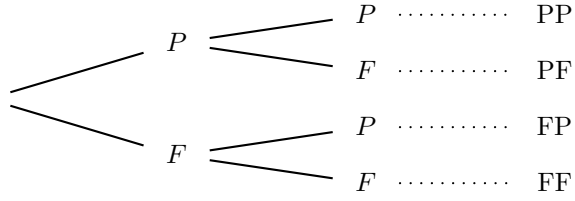
Définition 1 *Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat est dû au hasard. On connaît généralement l'ensemble des résultats possibles mais on ignore lequel de ces résultats sortira.*
*Un résultat possible d'une telle expérience est appelé une **issue** ou une **éventualité** et l'ensemble de toutes les issues (de tous les résultats possibles) est appelé l'**univers** de l'expérience aléatoire.*
*En général, l'univers se note Ω (« oméga »). Le nombre de résultats possibles (d'issues, d'éléments de Ω) est appelé le **cardinal** de l'univers et il est noté $Card(\Omega)$ (ou $\#(\Omega)$).*

L'univers associé à une expérience aléatoire se présente souvent dans un tableau ou un arbre de choix.

Exemples :

- On lance un dé cubique dont on lit la face supérieure.
  L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $Card(\Omega) = 6$.
- On lance une pièce deux fois de suite pour un jeu de Pile ou Face et l'on note les résultats obtenus dans l'ordre d'apparition.
  L'univers est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$ et $Card(\Omega) = 4$.
  Voici un tableau et un arbre de choix pour cette dernière expérience.

	P	F
P	PP	PF
F	FP	FF



1.2 Événements d'une expérience aléatoire

Définition 2 *Un **événement** A d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble (une partie) de son univers Ω : $A \subset \Omega$.*
Le nombre d'éléments de A est appelé le cardinal de A, noté $Card(A)$ (ou $\#(A)$).
On dit qu'une issue réalise l'événement A si elle appartient à A.

Cas particuliers :

L'univers Ω est un événement dit **certain** : toutes les issues le réalisent.

L'ensemble vide $\varnothing$ est un événement dit **impossible** : aucune issue ne le réalise.

Une issue d'une expérience aléatoire est aussi appelée un **événement élémentaire**.

Exemples :

- On lance un dé cubique dont on lit la face supérieure.
  Soit l'événement A : « Le résultat est un nombre pair ».
  $A = \{2; 4; 6\}$ et $Card(A) = 3$.
  Soit l'événement B : « Le résultat est un multiple de 3 ».
  $B = \{3; 6\}$ et $Card(B) = 2$.
- On lance une pièce deux fois de suite pour un jeu de Pile ou Face et l'on note les résultats dans l'ordre d'apparition.
  Soit l'événement C : « Pile sort en premier ».
  $C = \{PP; PF\}$ et $Card(C) = 2$.
  Soit l'événement D : « Les deux résultats sont identiques ».
  $D = \{PP; FF\}$ et $Card(D) = 2$.

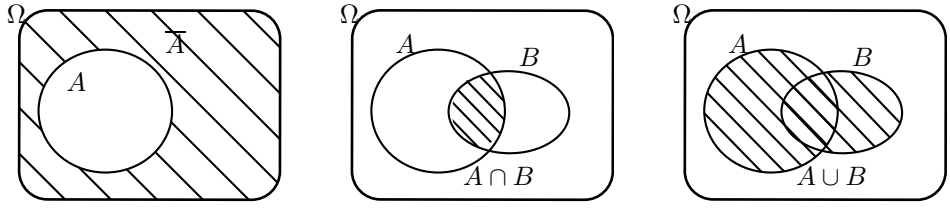
1.3 Opérations sur les événements

Définition 3 *Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire.*

*L'événement **contraire** de A est constitué des issues de Ω qui ne réalisent pas A. On le note $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

*L'**intersection** des événements A et B est constituée des éventualités qui sont à la fois dans A **et** dans B. On la note $\boldsymbol{A \cap B}$ (« A inter B » ou « A et B »).*

*La **réunion** des événements A et B est constituée des éventualités qui font partie d'au moins un des événements A **ou** B. On la note $\boldsymbol{A \cup B}$ (« A union B » ou « A ou B »).*



Exemples : Pour les exemples précédents, on peut décrire les événements suivants :

- $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$ « Le résultat est un nombre impair. »
  $\overline{B} = \{1; 2; 4; 5\}$ « Le résultat n'est pas un multiple de trois. »
  $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$ « Le résultat est pair ou multiple de trois. »
  $A \cap B = \{6\}$ « Le résultat est pair et multiple de trois. »
- $\overline{C} = \{FP; FF\}$ « Face sort en premier. »
  $\overline{D} = \{PF; FP\}$ « Les deux résultats sont différents. »

$C \cup D = \{PP; PF; FF\}$ « Pile en premier ou les deux résultats identiques. »
$C \cap D = \{PP\}$ « Pile sort en premier et les deux résultats sont identiques. »

Définition 4
Si $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$, *on dit que les événements* A *et* B *sont* ***incompatibles****.*

Par exemple, les événements A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

2 Probabilités

Soit une expérience aléatoire d'univers associé fini $\Omega = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.

2.1 Probabilité d'un événement

Définition 5 *Définir une* ***loi de probabilité*** P *sur* Ω*, c'est associer à chaque issue* x_i *un réel* p_i *de l'intervalle* $[0\,;1]$ *tel que la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.*

$$P : x_i \mapsto p_i \quad \textit{tel que} \quad \boldsymbol{0 \leqslant p_i \leqslant 1} \quad \textit{et} \quad \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{i=n}} \boldsymbol{p_i = 1}.$$

Le nombre p_i *est appelé* ***probabilité de l'événement élémentaire*** x_i *et l'on note* $p_i = P(\{x_i\})$.
La ***probabilité d'un événement*** *est la somme des probabilités de toutes les issues qui le réalisent :*

$$\textit{Si} \quad A = \{x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_m}\} \quad \textit{alors} \quad P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m}.$$

Une loi de probabilité sur un univers fini est généralement présentée sous forme de **tableau**.

Exemple : Un dé cubique truqué suit la loi suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

1. Justifions que ceci définit bien une loi de probabilité.
   On a bien $p_i \in [0\,;1]$ et $\sum p_i = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 + 0,2 + 0,1 = 1$.
2. Calculons la probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair ».
   $P(A) = P(\{2; 4; 6\}) = p_2 + p_4 + p_6 = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4$.
3. Calculons la probabilité de l'événement B : « obtenir un multiple de 3 ».
   $P(B) = P(\{3; 6\}) = p_3 + p_6 = 0,3 + 0,1 = 0,4$

Remarque : On a toujours • $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$ et • $\boldsymbol{P(\varnothing) = 0.}$

2.2 Probabilités et fréquences

Propriété 1 *Loi des grands nombres*
Lorsque l'on répète ***un grand nombre de fois*** *et de manière indépendante une même expérience aléatoire d'univers* Ω *et de loi de probabilité* P*, la* ***fréquence*** *obtenue pour* ***chaque issue est très proche*** *de la* ***probabilité*** *de cette issue.*

Autrement dit, la distribution des fréquences (empirique) dans des échantillons de taille N se rapproche de la loi de probabilité (théorique) lorsque N devient grand.

Cette propriété peut servir à valider une loi de probabilité : on reproduit l'expérience et l'on observe si les fréquences sont proches ou non des probabilités annoncées. Elle peut aussi être utile pour la construction d'un modèle (une loi de probabilité) de l'expérience. Par exemple, la loi de probabilité du dé truqué précédent a certainement été obtenue en lançant un très grand nombre de fois ce dé afin d'en déterminer la distribution des fréquences et de l'identifier à une loi.

3 Calculs de probabilités

3.1 Équiprobabilité

Définition 6 *Lorsque tous les événements élémentaires de l'univers ont la même probabilité, on dit que l'on est dans une situation d'****équiprobabilité****.*

Par convention, les expressions telles que « dés bien équilibrés », « tirage au hasard », « boules indiscernables au toucher »,... indiquent que le modèle choisi est d'équiprobabilité, qu'aucune issue n'est privilégiée.

Propriété 2 *Dans une situation d'équiprobabilité, si* $Card(\Omega) = n$ *alors chaque éventualité a pour probabilité* $\frac{1}{n}$.

Exemples : On reprend les exemples de la première partie.

- On lance un dé **non truqué** à six faces. On est bien en situation d'équiprobabilité et la probabilité d'apparition de chaque face est $\frac{1}{6}$.
- On lance une pièce **bien équilibrée** deux fois de suite pour un jeu de Pile ou Face et l'on note les résultats dans l'ordre d'apparition. On est bien en situation d'équiprobabilité et la probabilité d'apparition de chaque issue est $\frac{1}{4}$.

Propriété 3 *Dans une situation* ***équiprobable****, la probabilité d'un événement quelconque* A *est :*

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{cardinal(A)}{cardinal(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

Démonstration : En effet, si A contient m éventualités de probabilité $\frac{1}{n}$ chacune, $P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$. □

Exemple : Dans le cas d'un dé cubique non truqué, on note F : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ». On a $P(F) = P(\{3;4;5;6\}) = \frac{\#(F)}{\#(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

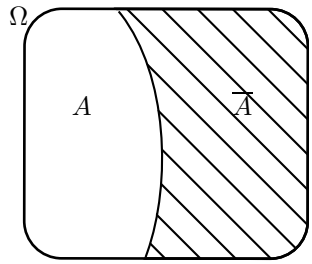
Remarque : Attention, si les situations d'équiprobabilité sont usuelles dans les exercices, ce n'est pas toujours le cas, et encore moins dans la vie courante.

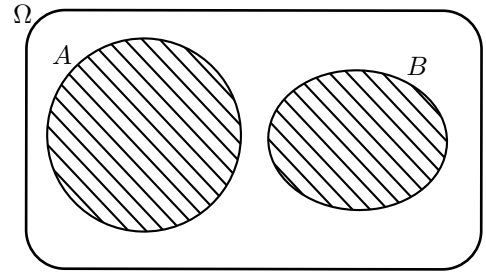
3.2 Probabilités et opérations

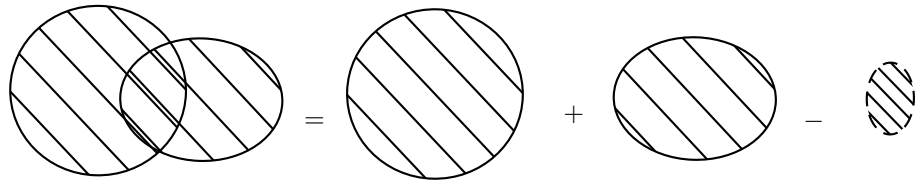
Propriété 4 *Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire de loi de probabilité P. On a :*

- $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A).}$
- *Si A et B sont incompatibles,* $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$
- *En général,* $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).}$

Justifications : Observer les figures suivantes.







Exemples : ◦ Dans l'exemple du dé cubique non truqué précédent , on a l'événement $\overline{F}$: « Le résultat est strictement inférieur à 3 » et $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

◦ Dans l'exemple du dé truqué précédent (p. 184), on a
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,4 - P(\{6\}) = 0,7$.

3.3 Arbres pondérés

Lorsque l'on présente l'univers dans un arbre de choix, il est souvent utile de placer sur les branches de cet arbre les probabilités associées à chacun des choix. On dit que l'arbre est « pondéré » ou que l'on a construit un « arbre de probabilité ».

Propriété 5 *Dans un arbre de probabilité,*

- *la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 ;*
- *la probabilité de chaque issue est égale au produit des probabilités de chaque branche du chemin menant à cette issue.*

Exemple : Anatole joue à pile ou face avec une vieille pièce de monnaie bien déséquilibrée comme lui.
Le côté pile a deux fois plus de chance d'apparaître que le côté face.

1. Déterminer la loi de probabilité pour un unique lancer de cette pièce.
2. Anatole lance deux fois de suite cette pièce et note les résultats obtenus dans l'ordre d'apparition.
   (a) Construire un arbre de choix afin de déterminer l'univers de cette expérience.
   (b) Pondérer cet arbre.
   (c) Déterminer la probabilité de chacune des issues.
   (d) Déterminer la probabilité qu'Anatole obtienne au moins une pile.
   (e) Déterminer la probabilité qu'Anatole obtienne exactement une face.
3. Vérifier les résultats en page 193.

Exercices

PROBABILITÉS

Exercice 1 Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{a; b; c; d; e\}$ et soient les événements $X = \{b; e\}$ et $Y = \{c; d; e\}$. Lister les issues réalisant les événements suivants.

1. $\overline{X}$
2. $X \cap Y$
3. $X \cup Y$
4. $X \cup \overline{Y}$
5. $\overline{X \cap Y}$
6. $\overline{X \cup Y}$
7. $\overline{X \cap \overline{Y}}$
8. $\overline{\overline{X} \cup Y}$

Exercice 2 On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée et l'on note les résultats obtenus dans leur ordre d'apparition.

1. Déterminer l'ensemble des issues possibles.
2. Déterminer les événements suivants puis calculer leur probabilités :

   A : « on obtient pile au second lancer »

   B : « on obtient exactement deux piles »

   C : « on n'obtient aucune pile »

   D : « on obtient au moins une pile »

   E : « on obtient plus de piles que de faces ».
3. On s'intéresse aux événements F_i : « obtenir face pour la première fois au i^{e} lancer ».

   (a) Déterminer la probabilité de F_1, F_2 et F_3.

   (b) A-t-on $p(F_1) + p(F_2) + p(F_3) = 1$? Expliquer.

Exercice 3 Un club de vacances comprend cent touristes.
Un sondage donne les résultats ci-dessous.

	Bronzés	Pâles
Pratiquent le ski	48	12
Ne pratiquent pas le ski	16	24

1. On choisit un quidam lambda au hasard parmi les touristes. Quelle est la probabilité :
   - qu'il soit bronzé ?
   - qu'il soit pâle ?
   - qu'il pratique le ski ?
   - qu'il ne pratique pas le ski ?
2. Le touriste choisi est bronzé. Quelle est la probabilité qu'il pratique le ski ?
3. Le touriste choisi pratique le ski. Quelle est la probabilité qu'il soit bronzé ?

Exercice 4 On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « La carte est un as », C : « La carte est une figure rouge »,

B : « La carte est un carreau », D : « La carte n'est pas une figure ».

Décrire par une phrase puis calculer la probabilité des événements suivants :

$\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cap D$, $B \cup D$, $\overline{B \cup D}$, $\overline{B \cap D}$, $C \cap D$, $C \cup D$, $\overline{C \cup D}$.

Exercice 5

A. On lance deux dés cubiques bien équilibrés et l'on note la somme des deux nombres obtenus.

1. À l'aide d'un tableau, décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la loi de probabilité qui modélise cette expérience ?
3. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit inférieur ou égal à 4 ?
4. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit strictement supérieur à 4 ?
5. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit un nombre premier ?

B. Même exercice en notant cette fois uniquement le plus grand des nombres lus sur les faces supérieures.

C. Même exercice en notant cette fois le produit des deux nombres lus sur les faces supérieures (si vous en avez le courage).

Exercice 6

Un sac vermillon contient trois boules indiscernables au toucher étiquetées L, C et P.
Un sac rubis contient deux boules indiscernables au toucher étiquetées A et I.
Un sac bordeaux contient deux boules indiscernables au toucher étiquetées F et C.
On tire, au hasard et dans cet ordre, une boule du sac vermillon, puis une du sac rubis et enfin une du sac bordeaux. On obtient ainsi un « mot » de trois lettres.

1. À l'aide d'un arbre de choix, déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.
2. En déduire la probabilité de tirer le mot « PAF ».
3. On compte ensuite le nombre de lettres « C » dans le mot obtenu. Quelle est la nouvelle loi de probabilité ?

Exercice 7

1. Deux événements E et F sont tels que $P(E) = 0,35$; $P(\overline{F}) = 0,4$ et $P(E \cap F) = 0,1$. Calculer $P(F)$ et $P(E \cup F)$.
2. Deux événements E et F sont tels que $P(E) = 0,34$; $P(E \cup F) = 0,65$ et $P(E \cap F) = 0,23$. Calculer $P(F)$.
3. Deux événements E et F sont tels que $P(E) = 0,47$; $P(E \cup F) = 0,65$ et $P(F) = 0,36$. Calculer $P(E \cap F)$.
4. E et F sont deux événements incompatibles tels que $P(E) = 0,5$ et $P(F) = 0,24$. Calculer $P(\overline{E \cup F})$.

Exercice 8 Dés pipés

1. Un dé cubique est pipé : la probabilité d'apparition des faces et les nombres marqués sur ces faces sont proportionnels. Déterminer la loi de probabilité d'un lancer de dé.
2. Un autre dé est aussi pipé : la probabilité d'apparition des faces et les nombres marqués sur ces faces sont cette fois-ci inversement proportionnels. Déterminer la loi de probabilité d'un lancer de ce dé.

Exercice 9 L'animateur du club *Math Max* du lycée Henry Matisse de La Fare-en-Dole interroge, dans un certain ordre, quatre de ses membres : Agathe, Bérénice, Célestin et Daisy. Il doit donc établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de listes possibles.
2. On suppose que l'examinateur tire la liste de noms au hasard.
   Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E : « Bérénice est interrogée en premier ».
   - F : « Célestin est interrogé en dernier ».
   - G : « Daisy est interrogée avant Bérénice ».
3. Décrire par une phrase les événements $E \cap F$ et $E \cup F$ puis en calculer la probabilité.

Exercice 10 Colette a mis un grand nombre de dragées dans une boîte, les unes contenant des amandes, les autres n'en contenant pas :

- 30% des dragées contiennent une amande ;
- 40% des dragées avec amandes sont bleues, les autres sont roses ;
- 75% des dragées sans amandes sont bleues, les autres sont roses.

Colette choisit au hasard une dragée dans la boîte.
On considère les événements A : « la dragée choisie contient une amande »
et B : « la dragée choisie est bleue ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Décrire l'événement $A \cap B$ par une phrase puis calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité de l'événement B.
4. Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase puis calculer sa probabilité.
5. Quel est le pourcentage de dragées roses ne contenant pas d'amande dans la boîte ?

Exercice 11 ⟆ La fonction `random()` du module `random` permet d'obtenir un nombre choisi au hasard (ou presque) dans l'intervalle $[\,0\,;1\,[$, la fonction `randint(a,b)` donne un entier au hasard dans $[\,a\,;b\,]$ et la fonction `int()` renvoie la partie entière d'un nombre : les nombres après la virgule sont tronqués.
Simuler, de plusieurs manières différentes si possible :

(a) le choix d'un nombre au hasard dans $[\,0\,;4\,[$,

(b) le choix d'un nombre au hasard dans $[\,7\,;8\,[$,

(c) le choix d'un entier au hasard dans $[\,0\,;10\,[$,

(d) le lancer d'un dé cubique bien équilibré,

(e) le choix d'un entier pair entre 0 et 10,

(f) le lancer d'un pièce de monnaie bien équilibrée,

(g) le lancer d'un pièce de monnaie déséquilibrée.

Exercice 12 Dans une urne opaque, on sait qu'il y a un très grand nombre de billes blé, or ou canari. On tire au hasard une bille dans l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On ne connaît pas la loi de probabilité mais on a réalisé l'expérience un grand nombre de fois et l'on propose trois lois. Justifier qu'une seule de ces trois lois est compatible avec l'expérience aléatoire.

	Nombre d'expériences réalisées			
	1000	2000	5000	10000
Nombre de billes blé obtenues	344	613	1658	3332
Nombre de billes or obtenues	384	997	2546	5005
Nombre de billes canari obtenues	272	380	796	1663

Couleur	blé	or	canari
Loi n° 1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Loi n° 2	0,3	0,5	0,2
Loi n° 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Exercice 13 Une entreprise possède trois usines de fabrication de trucs : la première est située à Boulogne, la deuxième à Genève et la troisième à Lorient. Un contrôleur qualité s'intéresse au nombre de trucs, défectueux ou non, produits en mai dans chacune des trois usines. Il a relevé les données dans le tableau suivant.

1. Compléter le tableau ci-dessous.
2. On prend un truc au hasard dans la production du mois de mai et l'on considère les événements :
   B : « le truc provient de l'usine de Boulogne » ;
   G : « le truc provient de l'usine de Genève » ;
   L : « le truc provient de l'usine de Lorient » ;
   D : « le truc est défectueux ».
   (a) Calculer les probabilités des événements B et D.
   (b) Définir par une phrase l'événement $B \cap D$ puis calculer sa probabilité.
   (c) Calculer $P(B \cup D)$.
3. Quelle usine semble la plus efficace en terme de qualité de production ? Argumenter.

	Défecteux	En bon état	Total
Usine de Boulogne	160		3360
Usine de Genève			1266
Usine de Lorient	154		
Total	380	7900	

Exercice 14 Vocabulary and Definition

Complete with the following words : subset, mutually exclusive, impossible event, universal space, exhaustive events, complementary event, outcomes, elementary event, equally likely.

1. In a random experimentation, Ω is called the ..... . Ω is the set of all possible ..... .
2. An outcome of Ω is an ..... . An event A is a ..... of Ω.
3. When an event A can never happen at the same time as the event B, the events A and B are said to be ..... .
4. When A and B are two mutually exclusive events, then $A \cap B$ is ..... and $P(A \cap B) =$ ....
5. When several events A_1, A_2, ..., A_n are such that every elementary event is at least in one of them, they are called ..... . Then, we have $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n =$ .... .
6. When A and B are two exhaustive events, then $A \cup B =$ ..... and $P(A \cup B) =$ ... .
7. When two events A and B have the same probability, they are said to be ..... .
8. When an outcome doesn't realize an event A, it is said to realize the..... .
9. If A is an event, the ..... of A is written $\overline{A}$ (read as A bar). If $\overline{A}$ occurs, then A doesn't. $A \cup \overline{A} =$ ...., $A \cap \overline{A} =$ ...., $P(\overline{A}) =$ ..... .

Exercice 15 A card is taken at random from a pack of 52 playing cards.

1. What is the probability that it is the ace of diamond ?
2. What is the probability that it is a club ?
3. What is the probability that it is not a spade ?
4. What is the probability that it is an ace ?
5. What is the probability that it is a king ?
6. What is the probability that it is an ace or a king ?
7. What is the probability that it is not an ace ?
8. What is the probability that it is a king or not an ace ?
9. What is the probability that it is not a king nor an ace ?

Exercice 16 Clotaire sait qu'il va subir trois devoirs surveillés cette semaine mais il ne sait ni de quoi ni quand. Étant mardi soir, il ne lui reste plus que trois jours. Pour enfin préparer celui de mathématiques éventuel, il se demande s'il est plus probable qu'il en ait un par jour ou qu'il n'en ait pas vendredi. Peux-tu l'aider ?
Tu pourras nommer A, B, C les trois devoirs à venir.

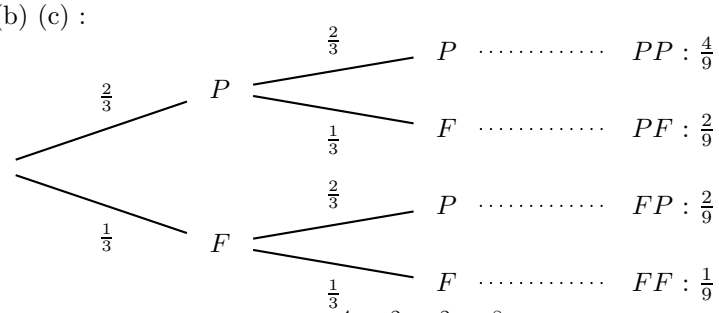
Moonwalkez jusqu'aux pages 291 et 295 et réalisez les devoirs n°s 13 et 14.

Corrigé des exercices

PROBABILITÉS

Exemple de la page 187 : Anatole est bien déséquilibré.

1. On doit avoir $p = 2f$ et $p + f = 1$ donc $3f = 1$ et $f = \frac{1}{3}$, $p = \frac{2}{3}$.
2. (a) (b) (c) :



(d) On a $P(\{PP; PF; FP\}) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9} = 1 - P(\{FF\})$.

(e) On a $P(\{PF; FP\}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.

Exercice 1 $\Omega = \{a; b; c; d; e\}$, $X = \{b; e\}$ et $Y = \{c; d; e\}$

1. $\overline{X} = \{a; c; d\}$
2. $X \cap Y = \{e\}$
3. $X \cup Y = \{b; c; d; e\}$
4. $X \cup \overline{Y} = \{a; b; e\}$
5. $\overline{X \cap Y} = \{a; b; c; d\}$
6. $\overline{X \cup Y} = \{a\}$
7. $\overline{X \cap \overline{Y}} = \{a; c; d; e\}$
8. $\overline{\overline{X} \cup Y} = \{b\}$

Exercice 2

1. On a $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$.
2. Puisque la pièce est bien équilibrée et les lancers indépendants, on a
   $p(A) = p(PPP; PPF; FPP; FPF) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,
   $p(B) = p(PPF; PFP; FPP) = \frac{3}{8}$,
   $p(C) = p(FFF) = \frac{1}{8}$,
   $p(D) = p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
   et $p(E) = p(PPP; PPF; PFP; FPP) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
3. On a $p(F_1) = P(FPP; FPF; FFP; FFF) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,
   $p(F_2) = p(PFP; PFF) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ et $p(F_3) = p(PPF) = \frac{1}{8}$.
   On a $p(F_1) + p(F_2) + p(F_3) \neq 1$ car on peut ne pas avoir de face.

Exercice 3

1. On désigne par B, $\overline{B}$, S et $\overline{S}$ les événements correspondants et l'on a
   $P(B) = \frac{48+16}{100} = \frac{16}{25}$, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{9}{25}$,
   $P(S) = \frac{48+12}{100} = \frac{3}{5}$ et $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = \frac{2}{5}$.

CORRIGÉS

2. Avec la notation des probabilités conditionnelles (cf. première), on a $P_B(S) = \frac{48}{48+16} = \frac{3}{4}$.

3. Avec la notation des probabilités conditionnelles (cf. première), on a $P_S(B) = \frac{48}{48+12} = \frac{4}{5}$.

Exercice 4 On a $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{3\times 2}{52} = \frac{3}{26}$ et $P(D) = \frac{52-3\times 4}{52} = \frac{10}{13}$.
$\overline{B}$: la carte n'est pas un carreau. $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$.
$A \cap B$: la carte est l'as de carreau. $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.
$A \cup B$: la carte est un as ou un carreau.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4+13-1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.
$B \cap C$: la carte est une figure de carreau. $P(B \cap C) = \frac{3}{52}$.
$B \cap D$: la carte est carreau mais pas une figure. $P(B \cap D) = \frac{13-3}{52} = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$.
$B \cup D$: la carte est un carreau ou n'est pas une figure.
$P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{13+40-10}{52} = \frac{43}{52}$.
$\overline{B \cup D} = \overline{B} \cap \overline{D}$: la carte est une figure mais pas de carreau.
$P(\overline{B \cup D}) = 1 - P(B \cup D) = 1 - \frac{43}{52} = \frac{9}{52}$.
$\overline{B \cap D} = \overline{B} \cup \overline{D}$: la carte n'est pas un carreau ou est une figure.
$P(\overline{B \cap D}) = 1 - P(B \cap D) = 1 - \frac{10}{52} = \frac{42}{52}$.
$C \cap D$: la carte est une figure rouge qui n'est pas une figure. $P(C \cap D) = P(\varnothing) = 0$.
$C \cup D$: la carte est une figure rouge ou n'est pas une figure.
$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{6+40}{52} = \frac{23}{26}$.
$\overline{C \cup D} = \overline{C} \cap \overline{D}$: la carte est une figure noire. $P(\overline{C \cup D}) = 1 - P(C \cup D) = 1 - \frac{23}{26} = \frac{3}{26}$.

Exercice 5

A. 1.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. Le dé étant bien équilibré, les cases du tableau précédent sont équiprobables et l'on a alors la loi suivante :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

3. On a $P(S \leqslant 4) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

4. On a $P(S > 4) = P(\overline{S \leqslant 4}) = 1 - P(S \leqslant 4) = \frac{5}{6}$.

5. On a $P(S\ premier) = p_2 + p_3 + p_5 + p_7 + p_{11} = \frac{1+2+4+6+2}{36} = \frac{5}{12}$.

B. 1.

Max	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

2. Le dé étant bien équilibré, les cases du tableau précédent sont équiprobables et l'on a alors la loi suivante :

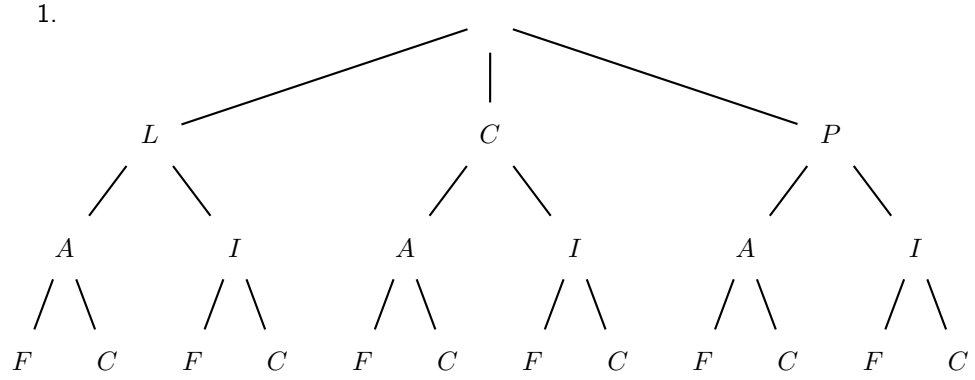
m_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

3. On a $P(M \leqslant 4) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.
4. On a $P(M > 4) = P(\overline{M \leqslant 4}) = 1 - P(M \leqslant 4) = \frac{5}{9}$.
5. On a $P(M\ premier) = p_2 + p_3 + p_5 = \frac{3+5+9}{36} = \frac{17}{36}$.

C. Pour la règle du produit, on procède de manière analogue en étant patient car il y a beaucoup plus d'issues.

Exercice 6

1.



2. On a $P(PAF) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.
3. Soit X le nombre de C dans le mot. On a la loi :
$P(X = 0) = \frac{2}{3}\frac{2}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{1}{3}\frac{2}{2}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{2}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2},\ P(X = 2) = \frac{1}{3}\frac{2}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Exercice 7

1. On a $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - 0,4 = 0,6$
et $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0,35 + 0,6 - 0,1 = 0,85$.
2. On a $P(F) = P(E \cup F) + P(E \cap F) - P(E) = 0,65 + 0,23 - 0,34 = 0,54$.
3. On a $P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F) = 0,47 + 0,36 - 0,65 = 0,18$.
4. On a $P(\overline{E \cup F}) = 1 - P(E \cup F) = 1 - [P(E) + P(F) - P(E \cap F)]$
$= 1 - 0,5 - 0,24 + 0 = 0,26$.

CORRIGÉS

Exercice 8

1. Le tableau suivant est de proportionnalité.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Ainsi, $p_i = i \times p_1$ et puisque l'on a une loi de probabilité,

$$1 = \sum_1^6 p_i = \sum_1^6 i \times p_1 = \frac{6(6+1)}{2} p_1 \quad \text{d'où} \quad p_1 = \tfrac{1}{21} \quad \text{et} \quad p_i = \tfrac{i}{21}.$$

2. Cette fois-ci, c'est le tableau suivant qui est de proportionnalité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{p_i}$	$\frac{1}{p_1}$	$\frac{1}{p_2}$	$\frac{1}{p_3}$	$\frac{1}{p_4}$	$\frac{1}{p_5}$	$\frac{1}{p_6}$

D'où $\frac{1}{p_i} = \frac{i}{p_1}$ et $1 = \sum_1^6 p_i = \sum_1^6 \frac{p_1}{i} = p_1 \frac{60+30+20+15+12+10}{60}$

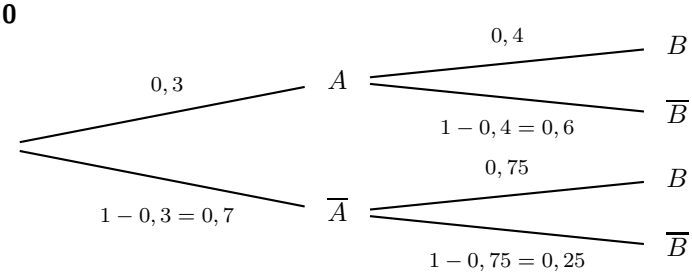
et $p_1 = \frac{60}{147} = \frac{20}{49}$, $p_i = \frac{20}{49i}$.

Exercice 9 Club *Math Max*

1. On a $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ listes possibles.
2. On a $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{4}$ et $P(G) = \frac{1}{2}$.
3. $E \cap F$: Bérénice est interrogée en premier et Célestin en dernier.
   $P(E \cap F) = \frac{3}{24} = \frac{1}{12}$.
   $E \cup F$: Bérénice est en premier ou Célestin en dernier.
   $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{6+6-2}{24} = \frac{5}{12}$.

Exercice 10

1.



2. $A \cap B$ est « la dragée choisie par Colette est bleue et contient une amande ».
   $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.
3. On a $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,12 + (1 - 0,3) \times 0,75 = 0,645$.
4. $A \cup B$ est l'événement « la dragée choisie par Colette est bleue ou contient une amande », de probabilité :
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,645 - 0,12 = 0,825$.
5. $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = (1 - 0,3)(1 - 0,75) = 0,175$ $\Big(= P(\overline{(A \cup B)}) = 1 - P(A \cup B)\Big)$.

Exercice 11 Les programmes suivants simulent :

(a) le choix d'un nombre au hasard dans $[\,0\,;4\,[$: `4*random()`

(b) le choix d'un nombre au hasard dans $[\,7\,;8\,[$: `random()+7`

(c) le choix d'un entier au hasard dans $[\,0\,;10\,[$:
`int(10*random())` ou `randint(0,9)`

(d) le lancer d'un dé cubique bien équilibré :
`int(6*random()+1)` ou `randint(1,6)`

(e) le choix d'un entier pair entre 0 et 10 :
`2*randint(0,5)` ou `2*int(6*random())`

(f) le lancer d'un pièce de monnaie bien équilibrée :
`randint(0,1)` ou `int(random()+0.5)`

(g) le lancer d'un pièce de monnaie déséquilibrée : `int(random()+0.2)`

Exercice 12 La « loi des grands nombres » affirme que les fréquences obtenues sont proches des probabilités des issues pour N grand. En regardant la colonne des 10 000 tirages, on obtient $f_b \simeq 0,33$, $f_o \simeq 0,5$ et $f_c \simeq 0,16$ donc seule la loi n° 3 est compatible avec cette expérience aléatoire.

Exercice 13

1.

	Défecteux	En bon état	Total
Boulogne	160	3200	3360
Genève	66	1200	1266
Lorient	154	3500	3654
Total	380	7900	8280

2. Puisque l'on prend un truc au hasard dans la production du mois de mai, on est en situation d'équiprobabilité et l'on peut appliquer la formule $\frac{\#\ cas\ favorables}{\#\ cas\ possibles}$.
   (a) On a $P(B) = \frac{3360}{8280} \simeq 0,406$ et $P(D) = \frac{380}{8280} \simeq 0,046$.
   (b) L'événement $B \cap D$ est « le truc vient de Boulogne et il est défectueux ».
   $P(B \cap D) = \frac{160}{8280} \simeq 0,019$.
   (c) On a $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{3360+380-160}{8280} = \frac{3580}{8280} \simeq 0,432$.
3. On a $\frac{160}{3360} \simeq 0,048$, $\frac{66}{1266} \simeq 0,052$ et $\frac{154}{3654} \simeq 0,042$ donc l'usine de Lorient semble la plus efficace en termes de qualité de production.

Exercice 14 Vocabulary and Definition

1. In a random experimentation, Ω is called the *universal space*. Ω is the set of all possible *outcomes*.
2. An outcome of Ω is an *elementary event*. An event A is a *subset* of Ω.
3. When an event A can never happen at the same time as the event B, the events A and B are said to be *mutually exclusive*.
4. When A and B are two mutually exclusive events, then $A \cap B$ is *the impossible event* and $P(A \cap B) = 0$.
5. When several events A_1, $A_2, \ldots$, A_n are such that every elementary event is at least in one of them, they are called *exhaustive events*.
   Then, we have $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

6. When A and B are two exhaustive events, then $A \cup B = \Omega$ and $P(A \cup B) = 1$.
7. When two events A and B have the same probability, they are said to be *equally likely*.
8. When an outcome doesn't realize an event A, it is said to realize the *complementary event*.
9. If A is an event, the *complementary event* of A is written $\overline{A}$ (read as A bar). If $\overline{A}$ occurs, then A doesn't. $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exercice 15 A card is taken at random from a pack of 52 cards. Hence, the outcomes are equally likely.

1. $P(ace\ of\ diamond) = \frac{1}{52}$
2. $P(club) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
3. $P(\overline{spade}) = 1 - P(spade) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
4. $P(ace) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
5. $P(king) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
6. $P(ace\ or\ king) = P(ace) + P(king) = \frac{2}{13}$.
7. $P(\overline{ace}) = 1 - P(ace) = \frac{12}{13}$.
8. $P(king\ or\ \overline{ace}) = P(\overline{ace}) = \frac{12}{13}$.
9. $P(\overline{king}\ and\ \overline{ace}) = \frac{52-4-4}{52} = \frac{11}{13}$.

Exercice 16 Il y a 3 jours possibles pour le devoir A, 3 jours pour le B et 3 pour le C donc 27 possibilités au total qui sont toutes équiprobables.
Pour qu'il y ait exactement un devoir par jour, il y a trois jours possibles pour le devoir A, reste alors 2 jours possibles pour le B puis un seul pour le C donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilités et la probabilité qu'il y ait un devoir par jour est de $\frac{6}{27}$.
Pour qu'il n'y ait pas de devoir le vendredi, il y a deux jours possibles pour le A, deux jours pour le B et deux pour le C donc $2^3 = 8$ possibilités et la probabilité qu'il n'y ait pas de devoir le vendredi est donc de $\frac{8}{27}$.

Chapitre XII

DROITES DU PLAN

Sommaire

1 Introduction 199
2 Vecteurs directeurs et équations cartésiennes d'une droite 200
2.1 Vecteurs directeurs d'une droite 200
2.2 Équations cartésiennes d'une droite 201
3 Équation réduite d'une droite 203
4 Positions relatives de droites 207
4.1 Droites parallèles 207
4.2 Droites sécantes et systèmes linéaires 209
Corrigé des exercices 212

EXERCICES

Nous poursuivons dans ce chapitre la caractérisation des éléments du plan au moyen des coordonnées cartésiennes. Après avoir étudié le cas des points et des milieux de segments, nous mettons en équation les droites du plan à partir de la notion de vecteurs qui semble effectivement bien adaptée pour décrire l'alignement des points.

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère (O, I, J) quelconque (mais souvent tracé orthogonal).

1 Introduction

En guise d'introduction et de rappels, voici une activité sur les relations entre les vecteurs, les coordonnées des points et leur appartenance à certaines droites.

Exercice 1

A. 1. (a) Placer les points $A\,(\,2\,;\,0\,)$, $B\,(\,2\,;\,-1\,)$ et $C\,(\,2\,;\,4\,)$.
Justifier qu'ils sont alignés.

(b) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$. Que remarque-t-on ?

(c) La droite (AB) est-elle la représentation d'une fonction de x ?

2. Soit $M\,(\,x\,;\,y\,)$ un point du plan.
   (a) Quelle condition sur les coordonnées de M permet d'affirmer que M appartient à la droite (AB) ?
   (b) Quelle condition sur les composantes de $\overrightarrow{AM}$ permet d'affirmer que M appartient à la droite (AB) ?
   (c) Réciproquement, si $M \in (AB)$, ces conditions sont-elles vérifiées ? Justifier.
   (d) Établir l'*équation* de la droite (AB).
3. (a) Tracer les droites d'équation $\quad x = -1, \quad x = \frac{7}{2} \quad$ et $\quad x = 0.$
   (b) Donner une équation de la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $D\,(\,d\,;\,0\,)$.

B. 1. On considère une droite (PQ) où $P\,(\,4\,;\,-1\,)$ et $Q\,(\,0\,;\,5\,)$.
   (a) Déterminer la fonction affine f telle que : $f(4) = -1$ et $f(0) = 5$.
   Quel est son graphe ?
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées pour qu'un point $M\,(\,x\,;\,y\,)$ appartienne à (PQ).
   (c) Les points $R\,(\,1\,;\,3,5\,)$ et $S\,(\,-2\,;\,7,5\,)$ appartiennent-ils à la droite (PQ) ?
   (d) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{QS}$.
   Que remarque-t-on ?
   (e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le vecteur $\overrightarrow{PM}$ pour que M appartienne à (PQ).
   En déduire, en utilisant le déterminant, une autre équation de la droite (PQ).
2. Soit $P\,(\,x_P\,;\,y_P\,)$ et $Q\,(\,0\,;\,b\,)$ deux points du plan où x_P, y_P, $b \in \mathbb{R}$ et $x_P \neq 0$.
   (a) Soit la fonction $\quad g : x \in \mathbb{R} \longmapsto g(x) = \dfrac{y_P - b}{x_P}\,x + b.$
   Vérifier que $\quad g(x_P) = y_P \quad$ et $\quad g(0) = b.$
   (b) Quelle est la nature de la fonction g ? En déduire sa représentation graphique.

2 Vecteurs directeurs et équations cartésiennes d'une droite

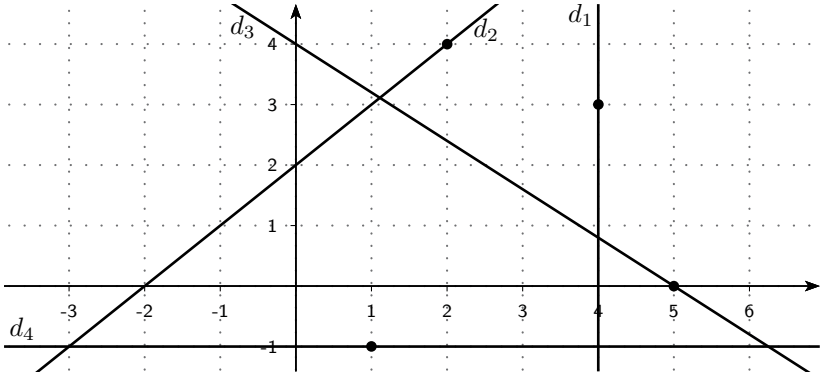
2.1 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 1 *Soit $\mathscr{D}$ une droite et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan.*
On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur *de la droite $\mathscr{D}$ s'il existe deux points A et B de $\mathscr{D}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.*

Une droite possède ainsi une infinité de vecteurs directeurs, tous ceux formés par deux points distincts de cette droite, tous ceux qui ont cette droite pour direction.
On peut alors définir une droite par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.

Propriété 1 *Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan.*
Un point M appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
On notera $(A\,;\,\vec{u})$ une telle droite.

Exercice 2 Par lecture graphique, définir les quatre droites suivantes.



Propriété 2 *Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ sont parallèles (peut-être confondues) ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires non nuls :*
$$\mathscr{D}_{\vec{u}} // \mathscr{D}_{\vec{v}} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires non nuls.}$$

Dém. : Ce sont des conséquences immédiates des propriétés des vecteurs. □

Exercice 3 Soient $A(2\,;-3)$, $B(-1\,;4)$ et $C(5\,;-7)$ trois points du plan.

1. Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de la droite (AB).
2. Donner les coordonnées de deux points de la parallèle à (AB) en C.

2.2 Équations cartésiennes d'une droite

L'exercice 1 nous a fait remarquer le résultat suivant.

Théorème 1

- *Toute droite du plan admet une équation, dite* équation cartésienne, *de la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.*
- *Toute équation cartésienne $ax+by+c=0$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$, définit une droite du plan.*
- *La droite d'équation cartésienne $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ admet $\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}}$ pour vecteur directeur.*

Ainsi, un point appartient à une droite *ssi* ses coordonnées vérifient une équation de cette droite :
$$P(x_P\,;y_P)\in\mathscr{D}\colon ax+by+c=0 \iff ax_P+by_P+c=0.$$
Attention, l'équation cartésienne n'est pas unique. En effet, si $ax+by+c=0$ alors $2ax+2by+2c=0$.

EXERCICES

Démonstration : L'idée principale est que $M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

• Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par le point $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et soit $M\,(\,x\,;\,y\,)$ un point du plan.

$M \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ colin. $\iff \det\left(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{u}\right)=0$

$\iff \beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0 \iff \beta\,x-\alpha\,y+(\alpha y_A-\beta x_A)=0$

et $(\,\beta\,;\,-\alpha\,)\neq(\,0\,;\,0\,)$ car $\overrightarrow{u}$ est directeur donc non nul.

• Soient a, b et c trois réels tels que $(\,a\,;\,b\,)\neq(\,0\,;\,0\,)$ et soient $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et $M\,(\,x_M\,;\,y_M\,)$ deux points du plan vérifiant l'équation $ax+by+c=0$. Il en existe nécessairement : par exemple $\left(\,0\,;\,-\frac{c}{b}\,\right)$ si $b\neq 0$, $\left(\,-\frac{c}{a}\,;\,0\,\right)$ si $b=0$.

Posons $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ $(\neq\overrightarrow{0})$. On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\ y_M-y_A\end{pmatrix}$ et

$\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u})=(x_M-x_A)a-(-b)(y_M-y_A)=ax_M+by_M-(ax_A+by_A)=c-c=0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires et le point M est bien sur la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ passant par A. □

Exercice 4 Soit (d) la droite d'équation $2x+3y-7=0$.

1. Donner les coordonnées de trois points de la droite (d).
2. Déterminer l'ordonnée du vecteur directeur de (d) d'abscisse 1.
3. Déterminer l'abscisse du vecteur directeur de (d) d'ordonnée 1.
4. Le vecteur de composantes $\begin{pmatrix}1/2\\ -1/3\end{pmatrix}$ dirige-t-il la droite (d) ?

Exercice 5

1. Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point $A\,(\,-3\,;\,7\,)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\ -5\end{pmatrix}$.
2. Même question pour $A\left(\,-\frac{3}{2}\,;\,-1\,\right)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$.

Exercice 6 Déterminer de deux manières différentes une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A\,(\,-2\,;\,3\,)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$.

Exercice 7 Soient $A\,(\,1\,;\,-3\,)$, $B\,(\,-2\,;\,4\,)$ et $C\,(\,1\,;\,5\,)$ trois points du plan.
Déterminer de deux manières différentes (composantes d'un vecteur directeur ou c) une équation cartésienne des droites (AB), (AC) et de la parallèle à (AB) en C.

Exercice 8 Soient les droites d'équation cartésienne $\mathscr{D}_1 : 2x+3y-5=0$, $\mathscr{D}_2 : 3x-2=0$ et $\mathscr{D}_3 : 4y-5=0$.

1. Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de chacune d'entre elles.
2. Comment les traceriez-vous dans le repère ?

Exercice 9 Déterminer graphiquement une équation cartésienne des droites de la figure de la page 201.

Exercice 10 Ⓢ En vous aidant de la démonstration précédente, écrire une fonction Python (cf. *Algo à gogo* en page 317) donnant les coefficients d'une équation cartésienne de la droite passant par deux points $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et $B\,(\,x_B\,;\,y_B\,)$.

Exercice 11
Le repère est orthonormé et l'on considère les points $A\,(\,2\,;\,0\,)$, $B\,(\,1\,;\,3\,)$ et $C\,(\,7\,;\,5\,)$.

1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon AB. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en B.

Exercice 12 Soit (d) la droite d'équation $4x - y + 3 = 0$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (d).
2. Donner une équation cartésienne de la parallèle à (d) en $A\,(\,2\,;\,-2\,)$.

Exercice 13 Aux États-Unis d'Amérique, l'unité de mesure des températures est le degré Fahrenheit, noté °F. L'eau gèle à 0°C et à 32°F. Elle bout à 100°C, ce qui correspond à 212°F. Ces deux unités sont liées par une fonction affine et l'on souhaite représenter la fonction qui, à une température en °C, associe une température en °F.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite.
2. En déduire une équation cartésienne.
3. (a) Il fait 17°C aujourd'hui à La Fare-en-Dole. Combien cela fait-il en °F ?
   (b) Il faisait 103°F au Far Hole hier. Combien cela fait-il en °C ?

EXERCICES

3 Équation réduite d'une droite

On rappelle qu'une droite peut être soit parallèle à l'axe des ordonnées, soit sécante à cet axe et qu'elle est, dans ce dernier cas, la représentation graphique d'une fonction affine. Contrairement à l'équation cartésienne, l'équation réduite oblige à différencier ces deux cas mais elle est souvent plus pratique à l'usage.

Propriété 3
Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ *avec* $(\,a\,;\,b\,) \neq (\,0\,;\,0\,)$.

- *Si* $\boldsymbol{b \neq 0}$, *alors $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, admet une unique équation réduite de la forme* $\boldsymbol{y = mx + p}$ *et a* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ *pour vecteur directeur.*
  m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}$.
- *Si* $\boldsymbol{b = 0}$, *alors $\mathscr{D}$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, admet une unique équation réduite de la forme* $\boldsymbol{x = \lambda}$ *et a* $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ *pour vecteur directeur.*

Cela signifie qu'un point $A(x_A ; y_A)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$: $y = mx + p$ *ssi* $y_A = m\,x_A + p$
et qu'un point $B(x_B ; y_B)$ appartient à la droite $\mathscr{D}'$: $x = \lambda$ *ssi* $x_B = \lambda$.

Démonstration :

Si $b \neq 0$, alors $ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ qui est l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées puisque x peut varier, de la forme $y = mx + p$ pour $m = -\frac{a}{b}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix} = -\frac{1}{b}\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est alors directeur d'après le théorème 1.

Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $ax + by + c = 0 \iff ax + c = 0 \iff x = -\frac{c}{a}$ qui est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
Le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{a}\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} = \frac{1}{a}\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est alors directeur.

L'unicité de telles équations est donnée par le coefficient 1 sur y ou sur x selon le cas. □

Remarques : Il est intéressant de retrouver aisément certains points de ces droites.

- Les points $A(0\,;p)$ et $B(1\,;m+p)$ appartiennent tous deux à la droite d'équation réduite $y = mx + p$ donc le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\m+p-p\end{pmatrix} = \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.
- Les points $P(\lambda\,;0)$ et $Q(\lambda\,;1)$ appartiennent tous deux à la droite d'équation réduite $x = \lambda$ donc le vecteur $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\lambda-\lambda\\1-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 14

1. Déterminer l'équation réduite des droites suivantes :
   $\mathscr{D}_1 : 2x - 3y - 5 = 0$, $\mathscr{D}_2 : 7x + 2 = 0$, $\mathscr{D}_3 : -4y + 12 = 0$, $\mathscr{D}_4 : 3x - 3y = 0$.
2. Déterminer une équation cartésienne des droites $\mathscr{D}_5 : y = 3x - 4$, $\mathscr{D}_6 : x = 2$ et $\mathscr{D}_7 : y = -1$.
3. Les points $A(1\,;-1)$ et $B(2\,;3)$ appartiennent-ils aux droites $\mathscr{D}_1$ à $\mathscr{D}_7$?
4. Déterminer un vecteur directeur des droites $\mathscr{D}_1$ à $\mathscr{D}_7$.

Exercice 15 Soit $\mathscr{D}_a$ la droite d'équation cartésienne $(a-1)x - 2y + 3 = 0$ où a est un réel. Déterminer a pour que $\mathscr{D}_a$ passe par le point $P(-3\,;5)$. Donner alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}_a$.

Exercice 16 La droite $\mathscr{D}$ a pour équation réduite $y = \frac{1}{2} - 3x$.

1. Les points $A(150{,}5\,;-451)$, $B(-73{,}25\,;219{,}5)$ et $C(120{,}5\,;-361)$ appartiennent-ils à la droite $\mathscr{D}$?
2. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{D}$ d'abscisse $7{,}5$ et celles du point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-2{,}5$.

Exercice 17 GeoGebra Dans une fenêtre GeoGebra, tracer des axes gradués allant de -5 à 5, créer trois curseur m, p et c allant de -4 à 4, tracer les droites d'équation réduite $y = mx + p$ et $x = c$ puis déplacer les curseurs et en observer l'effet sur les droites.

Propriété 4 *Si $\mathscr{D}$ admet pour équation $y = mx + p$,*

- *le point $(0\,;p)$ appartient à $\mathscr{D}$;*
- *pour tous points distincts $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ appartenant à $\mathscr{D}$,*

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Démonstration : • $m \times 0 + p = p$ donc $(\,0\,;\,p\,)$ vérifie l'équation de $\mathscr{D}$.

• $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{(mx_B+p)-(mx_A+p)}{x_B - x_A} = \dfrac{m(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = m$ □

Exercice 18 Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $U(4;1)$ et $V(0;3)$.

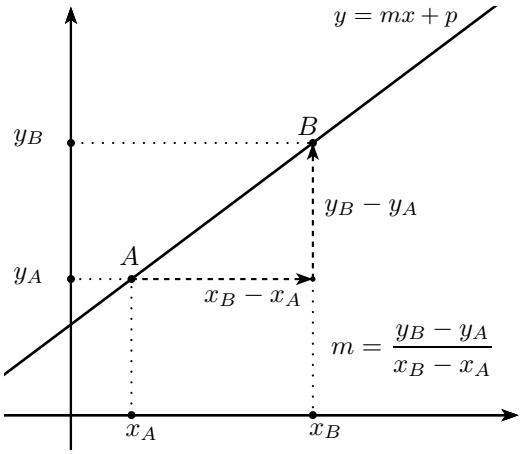
Exercice 19 On considère les points $P\,(\,3\,;\,-1\,)$ et $Q\,(\,-1\,;\,9\,)$.

1. Justifier que la droite (PQ) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
2. Justifier que le couple $(\,m\,;\,p\,)$ est solution du système d'équations :
$$\begin{cases} 3m + p = -1 \\ -m + p = 9. \end{cases}$$
3. Résoudre ce système de deux manières différentes puis donner l'équation réduite de la droite (PQ).

Exercice 20 On considère les points $A\,(\,1\,;\,5\,)$, $B\,(\,-2\,;\,4\,)$, $C\,(\,1\,;\,4\,)$ et $D\,(\,-3\,;\,5\,)$. Déterminer de manières différentes l'équation réduite des droites (AB), (BC), (AC) et (OD).

Exercice 21 Let $A\,(\,21\,;\,7\,)$ be in a rectangular coordinate (O, I, J).
What is the equation of the line (OA) ?
How many points with integer coordinates are there on the line between O and A ?

Interprétation graphique :



Lorsque l'on est sur la droite, si les abscisses augmentent de 1 alors les ordonnées augmentent de m (diminuent si $m < 0$) :

$$x_B - x_A = 1 \implies y_B - y_A = m.$$

Le nombre m mesure donc l'accroissement des ordonnées par rapport à l'accroissement des abscisses. On parle souvent de *taux d'accroissement*.

Intuitivement, on comprend bien que plus la droite sera « verticale », plus m sera grand, et réciproquement.

Cas particuliers :

- Si $p = 0$, la droite passe par l'origine du repère et elle est la représentation graphique d'une fonction linéaire.
- Si $m = 0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses et elle est la représentation graphique d'une fonction constante.

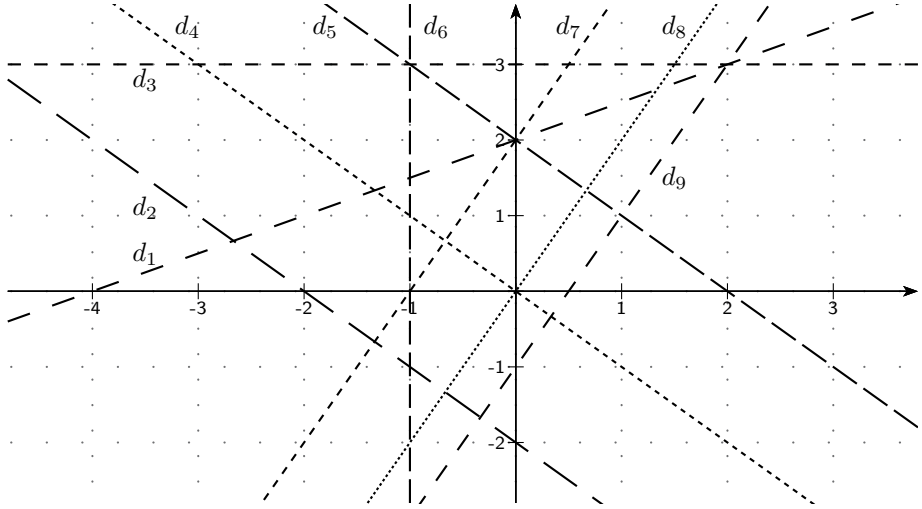
Astuce : Si $m \neq 0$, la droite d'équation $y = mx + p$ passe toujours par les deux points $\boldsymbol{(0\,;p)}$ et $\left(\boldsymbol{-\dfrac{p}{m}\,;0}\right)$. En effet, $m \times (-\frac{p}{m}) + p = -p + p = 0$.

Exercice 22 Déterminer graphiquement les équations réduites des droites de la figure de la page 201.

EXERCICES

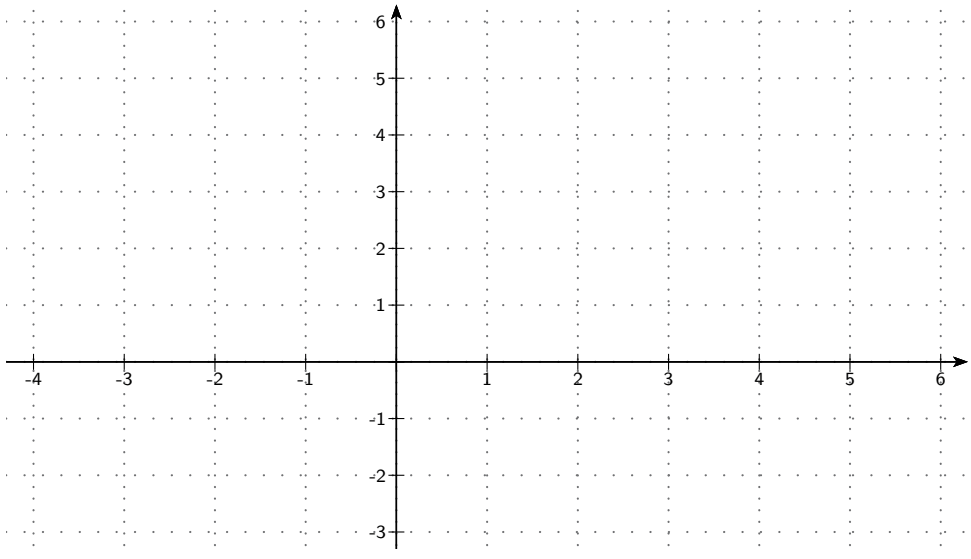
Exercice 23 Associer chaque droite du graphique ci-dessous à son équation.

(a) $y = 3$	(d) $y = 2x - 1$	(g) $x + 1 = 0$
(b) $y = 2 - x$	(e) $y = 2x$	(h) $x + y = 0$
(c) $y = \frac{1}{2}x + 2$	(f) $y = -x - 2$	(i) $y = 2x + 2$



Exercice 24 Dans le repère suivant, tracer les droites d'équation réduite suivantes :

$\mathscr{D}_1 : y = 2x - 2$	$\mathscr{D}_5 : y = \frac{2}{3}x - 2$
$\mathscr{D}_2 : 3x - y + 2 = 0$	$\mathscr{D}_6 : y + 1 = 0$
$\mathscr{D}_3 : y = 5 - 2x$	$\mathscr{D}_7 : x + 2 = 0$
$\mathscr{D}_4 : y = -x + 3$	$\mathscr{D}_8 : y = -\frac{5}{4}x$



Exercice 25 Déterminer l'équation réduite des droites suivantes :

Δ_1 coupe l'axe des ordonnées en 7 et a un coefficient directeur égal à -2.

Δ_2 coupe l'axe des abscisses en 2 et l'axe des ordonnées en 6.

Δ_3 passe par le point de coordonnées $(7\,;-4)$ et son coefficient directeur vaut -3.

Δ_4 passe par le point de coordonnées $(-5\,;15)$ et coupe l'axe des ordonnées en 10.

Δ_5 passe par le point de coordonnées $(6\,;10)$ et coupe l'axe des abscisses en 4.

Δ_6 passe par les points de coordonnées $(3\,;4)$ et $(-1\,;4)$.

Δ_7 passe par les points de coordonnées $(1\,;3)$ et $(1\,;-4)$.

Δ_8 passe par les points de coordonnées $(6\,;-5)$ et $(0\,;2)$.

Δ_9 passe par les points de coordonnées $(-4\,;2)$ et $(5\,;1)$.

Exercice 26 Représenter dans le plan l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant les conditions suivantes.

(a) $y > 2$

(b) $x \leqslant -4$

(c) $y \geqslant 3x - 1$

(d) $y < 4 - x$

(e) $5x + 4y - 3 < 0$

(f) $2x - 3y - 5 \geqslant 0$

(g) $\begin{cases} -3x + 2y + 4 \leqslant 0 \\ 4x - 5y + 3 > 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 8 - 2x \leqslant 4 \\ 6x + 3y - 9 > 0 \end{cases}$

EXERCICES

4 Positions relatives de droites

4.1 Droites parallèles

Propriété 5 *Soient a, b, c, a', b' et $c' \in \mathbb{R}$ tels que $(a\,;b)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$. Les droites d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles ssi $(a\,;b)$ et $(a'\,;b')$ sont proportionnels ssi $ab'-a'b=0$.*

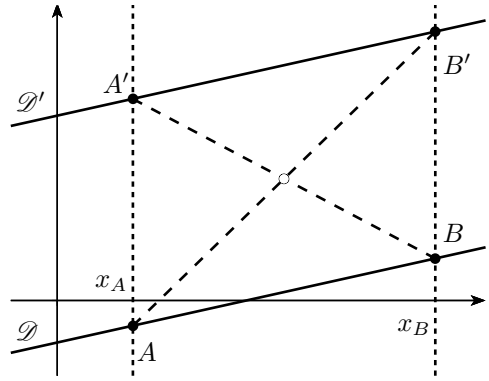
Démonstration : Cela découle de la condition de colinéarité des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$. □

Remarquons que le parallélisme ne dépend pas du paramètre c.

Exercice 27 Les droites $\mathscr{D} : 2x-y+3=0$ et $\mathscr{D}' : -4x+2y+1=0$ sont-elles parallèles ? Et les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'' : 2x+3y+2=0$?
Déterminer l'équation réduite de ces trois droites.

Propriété 6 *Une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=mx+p$ et une droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y=m'x+p'$ sont **parallèles** si et seulement si elles ont le **même coefficient directeur** :* $\mathscr{D} \,//\, \mathscr{D}' \iff \boldsymbol{m=m'}$.

Démonstration : Une première avec les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ colinéaires *ssi* $1\times m' - m\times 1 = 0$.
Une seconde plus géométrique. Soient A et B deux points distincts de la droite $\mathscr{D}$. Les droites parallèles à l'axe des ordonnées en A et B coupent la droite $\mathscr{D}'$ en A' et en B'. Ainsi, $x_A = x_{A'}$ et $x_B = x_{B'}$ $(*)$.



On a $\mathscr{D} \,//\, \mathscr{D}' \iff ABB'A'$ parallélogramme

$\iff$ $[AB']$ et $[A'B]$ ont même milieu $\iff \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_A + x_{B'}}{2} = \dfrac{x_{A'} + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_{B'}}{2} = \dfrac{y_{A'} + y_B}{2} \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{l} x_B - x_A = x_{B'} - x_{A'} \\ y_B - y_A = y_{B'} - y_{A'} \end{array} \right. \overset{(*)}{\iff} \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} \iff m = m'.$ □

Remarques : • Deux droites d'équation $x = c$ et $x = c'$ n'ont pas de coefficient directeur mais sont toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées et sont donc parallèles entre elles.

• Le parallélisme ne dépend donc pas de l'ordonnée à l'origine mais du coefficient directeur. Ceci est à rapprocher du fait le parallélisme ne dépend pas du paramètre c pour les équations cartésiennes.

Exercice 28 Déterminer l'équation de la droite $\mathscr{D}'$ passant par $Q\,(\,2\,;\,1\,)$ et parallèle à la droite $\mathscr{D} : y = -3x + 5$.
Le point $P\,(\,-1\,;\,8\,)$ appartient-il à $\mathscr{D}'$?

Exercice 29 On se donne, sans les tracer, les droites d'équation : $d_1 : y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x$, $d_2 : x = -\frac{7}{2}$, $d_3 : y = 3x$, $d_4 : y = 3x - 2$ et $d_5 : y = 2$.
Compléter les phrases suivantes en justifiant les réponses.

(a) La droite .... passe par l'origine du repère.

(b) La droite .... est parallèle à l'axe des abscisses.

(c) La droite .... est parallèle à l'axe des ordonnées.

(d) Les droites .... et .... sont parallèles.

(e) La droite .... passe par le point $A\left(\,\frac{2}{3}\,;\,0\,\right)$.

(f) La droite .... passe par le point $B\left(\,-\frac{7}{2}\,;\,2\,\right)$.

Corollaire Soient A, B et C trois points d'abscisses différentes.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont même coefficient directeur.

Démonstration : Ceci découle de la lecture de la propriété précédente. □

Exercice 30 Les points $A(1;-1)$, $B(3;5)$ et $C(4;8)$ sont-ils alignés ?

Avec tout ce que l'on sait, la propriété suivante est évidente mais parfois utile.

Propriété 7

• *Deux droites d'équation* $ax + by + c = 0$ *et* $ax + by + c' = 0$ *sont distinctes ssi* $c \neq c'$.

• *Deux droites d'équation* $y = mx + p$ *et* $y = mx + p'$ *sont distinctes ssi* $p \neq p'$.

4.2 Droites sécantes et systèmes linéaires

Les contraposées (cf. *En toute logique* p. 339) des propriétés 5 et 6 précédentes donne les résultats suivants.

Propriété 8 *Soient* a, b, c, a', b' *et* $c' \in \mathbb{R}$ *tels que* $(a\,;b)$ *et* $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$.
Les droites d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ *et* $a'x+b'y+c'=0$ *sont sécantes ssi* $ab'-a'b \neq 0$.
Dans ce cas, le couple des coordonnées du point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *est l'unique couple solution du système :* $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0. \end{cases}$

Propriété 9 *Deux droites* $\mathscr{D} : y = mx + p$ *et* $\mathscr{D}' : y = m'x + p'$ *sont sécantes si et seulement si* $m \neq m'$.
Dans ce cas, le couple des coordonnées du point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *est l'unique couple solution du système :* $\begin{cases} y=mx+p \\ y=m'x+p'. \end{cases}$

Afin de résoudre de tels systèmes, on peut user de différentes méthodes. D'abord, regarder s'il n'y a pas de solutions évidentes et de simplifications utiles. On peut alors procéder :

• soit par substitution : exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une des équations puis remplacer cette expression dans l'autre afin de se ramener à une équation à une seule inconnue que l'on sait très bien résoudre,

• soit par combinaison linéaire : ajouter ou soustraire des multiples des équations afin d'annihiler l'une des inconnues et se ramener à une équation à une seule inconnue.

Exercice 31 Dans chaque cas, préciser si les droites sont sécantes ou parallèles et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection le cas échéant.

(a) $\mathscr{D}_1 : y = 3x - 1$ et $\mathscr{D}_2 : y = x - 2$

(b) $\mathscr{D}_3 : y = -3x + 9$ et $\mathscr{D}_4 : y = 4x - 5$

(c) $\mathscr{D}_5 : x = 7$ et $\mathscr{D}_6 : x = -3$

(d) $\mathscr{D}_7 : y = 2$ et $\mathscr{D}_8 : y = 2x$

(e) $\mathscr{D}_9 : y = -1$ et $\mathscr{D}_{10} : y = 3$

(f) $\mathscr{D}_{11} : y = 2x - 3$ et $\mathscr{D}_{12} : y = 4 - x$

(g) $\mathscr{D}_{13} : 2x - 3y + 5 = 0$ et $\mathscr{D}_{14} : 6y - 4x + 1 = 0$

(h) $\mathscr{D}_{15} : 3x - 5y - 1 = 0$ et $\mathscr{D}_{16} : 2x + 3y - 7 = 0$

EXERCICES

Exercice 32 Tracer les droites de l'exercice précédent dans un repère et vérifier les réponses graphiquement.

Exercice 33 Résoudre les systèmes d'équations suivants en variant les méthodes.

(a) $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x + 2y + 2 = 0 \\ -5x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -2a + 7b = 2 \\ 5a - 4b - 1 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x - 12y + 9 = 0 \\ -2x + 8y - 5 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -6x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 3\alpha + 4\beta - 1 = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + 4 = 0 \end{cases}$

Exercice 34 On considère le système (S) : $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - y - 5 = 0. \end{cases}$

1. Résoudre algébriquement le système (S).
2. Transformer chaque équation en équation réduite de droite.
3. Résoudre graphiquement le système (S).

Exercice 35 Soient les droites d'équations $(d) : x + ay + b = 0$ et $(d') : x + by + a = 0$ où a et b sont des réels.

1. À quelle condition sur a et b les droites (d) et (d') sont-elles sécantes ?
2. Quelles sont alors les coordonnées de leur point d'intersection ?

Exercice 36 Soient $A\,(\,2\,;\,1\,)$, $B\,(\,-3\,;\,2\,)$ et $C\,(\,7\,;\,3\,)$ trois points du plan repéré.

1. Déterminer l'équation réduite de la médiane du triangle ABC issue de A puis de celle de issue de B.
2. En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.
3. Déterminer alors l'équation de la troisième médiane du triangle ABC.

Exercice 37 Soit m un réel et soit (d_m) la droite d'équation $2mx-(m-1)y-1=0$.

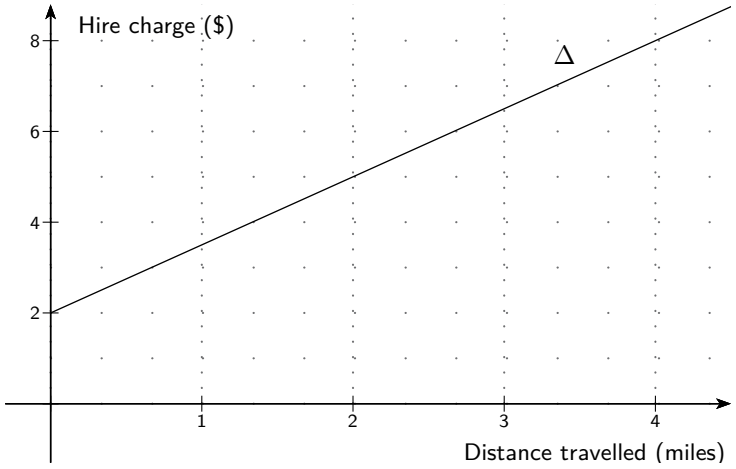
1. Pour quelle valeur de m la droite (d_m) passe-t-elle par le point $A\,(\,-1\,;\,1\,)$? Donner alors une équation de la droite correspondante.
2. Pour quelle valeur de m le vecteur $\overrightarrow{u}\,\binom{3}{12}$ est-il directeur de la droite (d_m) ? Donner alors une équation de (d_m).
3. La droite (d_m) peut-elle être parallèle à la droite (D) d'équation $5x-4y+7=0$? Donner une équation de (d_m) le cas échéant.

Exercice 38 À la boulangerie, Tom achète deux croissants et quatre pains au chocolat pour 6,5 euros. Dans la même boulangerie, Jerry a dépensé 4 euros pour un pain au chocolat et trois croissants. Spike souhaite acheter neuf croissants et sept pains au chocolat. Combien va-t-il dépenser ?

Exercice 39 Un représentant de commerce a le choix entre deux contrats pour son salaire mensuel :
Contrat $\mathcal{A}$: un fixe de 1400 € plus 4 % du montant de ses ventes.
Contrat $\mathcal{B}$: un fixe de 800 € plus 10 % du montant de ses ventes.

1. Justifier que pour le contrat $\mathcal{A}$, son salaire, noté $A(x)$, en fonction du montant x de ses ventes est donné par $A(x) = 0,04x + 1400$.
2. Exprimer de même son salaire pour le contrat $\mathcal{B}$.
3. Représenter graphiquement les droites associées aux deux salaires dans un repère adapté.
4. Déterminer graphiquement à partir de quel montant de vente le contrat $\mathcal{B}$ est le plus avantageux.
5. Retrouver algébriquement ce résultat.

Exercice 40



This graph shows the cost of a taxi journey.

1. How much will a 3 mile journey cost ?
2. What is the gradient of the line ?
3. What is the intercept with the cost axis ?
4. Write an equation for the cost of a journey C, in terms of the distance d.
5. Work out the value of the equation when $d = 3$.

Filez droit à la page 299 faire le devoir n° 15.

Corrigé des exercices

DROITES DU PLAN

Exercice 1

A. 1. (a) Les points $A\,(\,2\,;\,0\,)$, $B\,(\,2\,;\,-1\,)$ et $C\,(\,2\,;\,4\,)$ sont alignés car ils sont sur la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(\,2\,;\,0\,)$, par définition des coordonnées.

(b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Ces trois vecteurs sont d'abscisse nulle.

(c) Puisque la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées, elle ne peut être la représentation d'une fonction : 2 aurait alors plusieurs (et même une infinité) d'images.

2. (a) Si l'abscisse d'un point M égale 2, alors il appartient à la droite (AB).

(b) On a $M \in (AB)$ *ssi* $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ colinéaires *ssi* $x_{\overrightarrow{AM}} = 0$.

(c) Réciproquement, si $M \in (AB)$, alors son abscisse est la même que celle de A car ils se projettent tous deux en $(\,2\,;\,0\,)$ parallèlement à l'axe des ordonnées. Ainsi, l'abscisse de M vaut aussi 2.

(d) Ainsi, l'*équation* de la droite (AB) est $x = 2$.

3. (a) Les droites d'équation $x = -1$, $x = \frac{7}{2}$ et $x = 0$ sont les parallèles à l'axe des ordonnées passant respectivement par les points $(\,-1\,;\,0\,)$, $\left(\,\frac{7}{2}\,;\,4\,\right)$ et $(\,0\,;\,-2\,)$ par exemple.

(b) De même, la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $D\,(\,d\,;\,0\,)$ a pour équation $x = d$.

B. 1. (a) On cherche a et b tels que $4a + b = -1$ et $0a + b = 5$ donc $b = 5$ et $4a = -1 - b = -6$ d'où $a = -\frac{3}{2}$ et $f(x) = -\frac{3}{2}x + 5$ de représentation la droite (PQ).

(b) Ainsi, un point $M\,(\,x\,;\,y\,) \in (PQ) \iff f(x) = y \iff y = -\frac{3}{2}x + 5$.

(c) On a $f(1) = -\frac{3}{2} \times 1 + 5 = 3,5$ donc $R \in (PQ)$
et $f(-2) = -\frac{3}{2}(-2) + 5 = 2 \neq 7,5$ donc $S \notin (PQ)$.

(d) On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix} -6 \\ 8,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QS}\begin{pmatrix} -2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont colinéaires tandis que $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{QS}$ ne le sont pas.

(e) On a $M\,(\,x\,;\,y\,) \in (PQ)$ *ssi* $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ colinéaires
ssi $6(x-4)-(-4)(y+1) = 0 \iff 6x+4y-20 = 0 \iff 3x+2y-10 = 0$.

2. (a) On a $g(x_P) = \frac{y_P - b}{x_P}\,x_P + b = y_P - b + b = y_P$ et $g(0) = \frac{y_P - b}{x_P} \times 0 + b = b$.

(b) De la forme $\alpha x + \beta$ pour $\alpha = \frac{y_P - b}{x_P}$ et $\beta = b$, la fonction g est affine et sa représentation graphique est une droite, celle passant par les points P et Q d'après la question précédente.

Exercice 2 Par lecture graphique, la droite d_1 est dirigée par le vecteur $\binom{0}{2}$ et passe par le point $(4\,;3)$, la droite d_2 est dirigée par le vecteur $\binom{-3}{-3}$ et passe par le point $(2\,;4)$, la droite d_3 est dirigée par le vecteur $\binom{-5}{4}$ et passe par le point $(5\,;0)$ et la droite d_4 est dirigée par le vecteur $\binom{3}{0}$ et passe par le point $(1\,;-1)$.

Exercice 3 Soient $A(2\,;-3)$, $B(-1\,;4)$ et $C(5\,;-7)$ trois points du plan.

1. Le vecteur $\overrightarrow{BA}\binom{3}{-7}$ dirige la droite (AB).
2. Le point $C(5\,;-7)$ et le point D tels que $\overrightarrow{CD}\binom{x_D-5}{y_D+7} = \overrightarrow{BA}\binom{3}{-7}$ appartiennent à la parallèle en C à (AB) et $D(3+5=8\,;-7-7=-14)$.

Exercice 4 $(d) : 2x + 3y - 7 = 0$.

1. $\left(0\,;\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{2}\,;0\right)$ et $(2\,;1) \in (d)$ par exemple.
2. $\overrightarrow{u}\binom{-3}{2}$ dirige (d) donc $-\frac{1}{3}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}\binom{1}{-\frac{2}{3}}$ aussi.
3. $\overrightarrow{u}\binom{-3}{2}$ dirige (d) donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}\binom{-\frac{3}{2}}{1}$ aussi.
4. $-3 \times (-\frac{1}{3}) - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\binom{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}}$ sont colin. et dirigent (d).

Exercice 5

1. $\overrightarrow{AM}\binom{x+3}{y-7}$ et $\overrightarrow{u}\binom{4}{-5}$ colin. $\Leftrightarrow 4(y-7)-(-5)(x+3)=0 \iff 5x+4y-13=0$
2. $\overrightarrow{u}\binom{-3}{2}$ dirige $(A;\overrightarrow{u})$: on prend $b=3$ et $a=2$.
   $A \in (A;\overrightarrow{u}) \Rightarrow 2\times(-\frac{3}{2})+3\times(-1)+c=0 \Rightarrow c=6$.
   D'où l'équation : $2x+3y+6=0$.

Exercice 6 • Puisque le vecteur $\overrightarrow{u}\binom{2}{5}$ dirige $\mathscr{D}$, elle admet pour équation $-5x+2y+c=0$ et puisque $A(-2\,;3) \in \mathscr{D}$, $-5(-2)+2\times 3+c=0 \Longrightarrow c=-16$ d'où $\mathscr{D}: -5x+2y-16=0$.

• $M \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM}\binom{x+2}{y-3}$ et $\overrightarrow{u}\binom{2}{5}$ colinéaires $\iff 5(x+2)-2(y-3)=0$ et $\mathscr{D}: 5x-2y+16=0$.

Exercice 7 • On a $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{7}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{0}{8}$ donc
$(AB): -7x-3y+c=0$ et $A \in (AB) \Longrightarrow -7\times 1-3(-3)+c=0 \Longrightarrow c=-2$:
$(AB): -7x-3y-2=0$,
$(AC): -8x+0y+d=0$ et $A \in (AC) \Longrightarrow -8\times 1+d=0 \Longrightarrow d=8$:
d'où $(AC): -8x+8=0$ ou $x-1=0$
et la parallèle à (AB) en C, $\mathscr{D}: -7x-3y+e=0$ et $C \in \mathscr{D} \Longrightarrow -7\times 1-3\times 5+e=0$
$\Longrightarrow e=22$: $\mathscr{D}: -7x-3y+22=0$.

• $M(x\,;y) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}\binom{x-1}{y+3}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{7}$ colinéaires
$\iff 7(x-1)-(-3)(y+3)=0 \iff 7x+3y+2=0$.

CORRIGÉS

$M(x\,;y) \in (AC) \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ colinéaires
$\iff 8(x-1)-0(y+3)=0 \iff 8x-8=0 \iff x-1=0.$
$M(x\,;y) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ colinéaires
$\iff 7(x-1)-(-3)(y-5)=0 \iff 7x+3y-22=0.$

Exercice 8 $\mathscr{D}_1 : 2x+3y-5=0$, $\mathscr{D}_2 : 3x-2=0$ et $\mathscr{D}_3 : 4y-5=0$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}_1$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}_2$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}_3$.
2. La droite $\mathscr{D}_1$ passe par le point $(1\,;1)$ par exemple et « monte » de 2 lorsque l'on « recule » de 3, la droite $\mathscr{D}_2$ passe par le point $\left(\frac{2}{3}\,;4\right)$ par exemple et elle est parallèle à l'axe des ordonnées, la droite $\mathscr{D}_3$ passe par le point $\left(-2\,;\frac{5}{4}\right)$ par exemple et elle est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 9 Par lecture graphique, $d_1 = (\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},(4\,;3))$ donc $d_1 : -2x+0y+c=0$
et $-2\times 4+0+c=0$ d'où $d_1 : -2x+8=0 \iff x-4=0$,
$d_2 = (\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},(2\,;4))$ donc $d_2 : x-y+d=0$ et $2-4+d=0$
d'où $d_2 : x-y+2=0$,
$d_3 = (\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix},(5\,;0))$ donc $d_3 : 4x+5y+e=0$ et $4\times 5+0+e=0$
d'où $d_3 : 4x+5y-20=0$
et $d_4 = (\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},(1\,;-1))$ donc $d_4 : 0x+y+f=0$ et $0-1+f=0$
d'où $d_4 : y+1=0$.

Exercice 10 La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et passe par le point $A(x_A\,;y_A)$. D'après la démonstration du théorème précédent, (AB) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec
$a=\beta=y_B-y_A$, $b=-\alpha=x_A-x_B$
et $c=\alpha y_A-\beta x_A=(x_B-x_A)y_A-(y_B-y_A)x_A=x_By_A-x_Ay_B$.
D'où la fonction Python suivante donnant les coefficients d'une équation cartésienne de la droite (AB) :

```
def EquationCartésienneAB(xA,yA,xB,yB) :
    a=yB-yA
    b=xA-xB
    c=xB*yA-xA*yB
    return(a,b,c)
```

Exercice 11

1. Dans le repère orthonormé, on a $AB^2=(1-2)^2+3^2=10$,
   $BC^2=(7-1)^2+(5-3)^2=40$ et $AC^2=(7-2)^2+5^2=50$.
   La réciproque de Pythagore affirme que le triangle BAC est rectangle en B.
2. La tangente à $\mathscr{C}$ en B est la perpendiculaire en B à (AB) c.-à-d. $(BC)=(B;\overrightarrow{BC})$.
   $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ donc on peut prendre $b=-6$ et $a=2$.
   $B(1\,;3)$ donc $2\times 1-6\times 3+c=0 \iff c=16$.
   La tangente a pour équation cartésienne : $2x-6y+16=0$ ou $x-3y+8=0$.

Exercice 12 $(d) : 4x - y + 3 = 0.$

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ dirige (d) « $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ ».
2. La parallèle à (d) en $A(2\,;-2)$ est dirigée par $\overrightarrow{u}$ et s'écrit $4x - y + c = 0$ avec $4 \times 2 - (-2) + c = 0$ d'où l'équation $4x - y - 10 = 0.$

Exercice 13

1. $(0\,;32)$ et $(100\,;212) \in \mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}100\\180\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}$.
2. Prenons $b = -100$ et $a = 180.$ On a $180 \times 0 - 100 \times 32 + c = 0$ et $c = 3200.$ D'où l'équation $180x - 100y + 3200 = 0$ *i.e.* $9x - 5y + 160 = 0.$
3. Si $x = 17°\text{C},$ alors $y = \frac{9\times 17+160}{5} = 62,6°\text{F}$
et si $y = 103°\text{F},$ alors $x = \frac{5\times 103-160}{9} \simeq 39,4°\text{C}.$

Exercice 14

1. $\mathscr{D}_1 : 2x - 3y - 5 = 0 \iff y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3},$ $\mathscr{D}_2 : 7x + 2 = 0 \iff x = -\frac{2}{7},$
$\mathscr{D}_3 : -4y + 12 = 0 \iff y = 3,$ $\mathscr{D}_4 : 3x - 3y = 0 \iff y = x.$
2. $\mathscr{D}_5 : y = 3x - 4 \iff 3x - y - 4 = 0,$ $\mathscr{D}_6 : x = 2 \iff x - 2 = 0$ et
$\mathscr{D}_7 : y = -1 \iff y + 1 = 0.$
3. $A(1\,;-1)$: $2-3(-1)-5 = 0$ donc $A \in \mathscr{D}_1,$ $1 \neq -\frac{2}{7}$ donc $A \notin \mathscr{D}_2,$ $-1 \neq 3$ donc $A \notin \mathscr{D}_3,$ $-1 \neq 1$ donc $A \notin \mathscr{D}_4,$ $3 \times 1 - 4 = -1$ donc $A \in \mathscr{D}_5,$ $1 \neq 2$ donc $A \notin \mathscr{D}_6,$ $-1 + 1 = 0$ donc $A \in \mathscr{D}_7.$
$B(2\,;3)$: $2 \times 2 - 3 \times 3 - 5 \neq 0$ donc $B \notin \mathscr{D}_1,$ $2 \neq -\frac{2}{7}$ donc $B \notin \mathscr{D}_2,$ $-4 \times 3 + 12 = 0$ donc $B \in \mathscr{D}_3,$ $3 \neq 2$ donc $B \notin \mathscr{D}_4,$ $3 \times 2 - 3 - 4 \neq 0$ donc $B \notin \mathscr{D}_5,$ $2 - 2 = 0$ donc $B \in \mathscr{D}_6,$ $3 + 1 \neq 0$ donc $B \notin \mathscr{D}_7.$
4. D'après les équations cartésiennes, $\mathscr{D}_1$ est dirigée par $\binom{3}{2},$ $\mathscr{D}_2$ est dirigée par $\binom{0}{1},$ $\mathscr{D}_3$ est dirigée par $\binom{1}{0},$ $\mathscr{D}_4$ est dirigée par $\binom{1}{1},$ $\mathscr{D}_5$ est dirigée par $\binom{1}{3},$ $\mathscr{D}_6$ est dirigée par $\binom{0}{1},$ $\mathscr{D}_7$ est dirigée par $\binom{1}{0}.$

Exercice 15
$P(-3\,;5) \in \mathscr{D}_a : (a-1)x - 2y + 3 = 0 \iff (a-1)(-3) - 2 \times 5 + 3 = 0$
$\iff -3a - 4 = 0 \iff a = -\frac{4}{3}$
et $\mathscr{D}_{-4/3} : (-\frac{4}{3} - 1)x - 2y + 3 = 0 \iff -\frac{7}{3}x - 2y + 3 = 0 \iff 7x + 6y - 9 = 0$ est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-6\\7\end{pmatrix}.$

Exercice 16 La droite $\mathscr{D}$ a pour équation réduite $y = \frac{1}{2} - 3x.$

1. On a $\frac{1}{2} - 3 \times 150,5 = -451,$ $\frac{1}{2} - 3(-73,25) = 220.25,$ $\frac{1}{2} - 3(120,5) = -361$ donc $A \in \mathscr{D},$ $B \notin \mathscr{D}$ et $C \in \mathscr{D}.$
2. On a $\frac{1}{2} - 3 \times 7,5 = -22$ donc le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse $7,5$ est $D(7,5\,;-22).$
On a $\frac{1}{2} - 3x = -2,5 \iff -3x = -2,5 - \frac{1}{2} \iff x = 1$ donc le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-2,5$ est $E(1\,;-2,5).$

Exercice 17 Tout comme dans l'exercice 1 p. 58, on observe graphiquement que :
· lorsque c varie, la droite d'équation $x = c$ se déplace de gauche à droite,
· lorque p varie, la droite d'équation $y = mx + p$ se déplace parallèlement de haut en bas,
· lorsque m varie, l'inclinaison de la droite d'équation $y = mx + p$ change et un point reste

fixe : celui sur l'axe des ordonnées ; la droite est « montante » pour $m > 0$, « descendante » pour $m < 0$ et « horizontale » pour $m = 0$.

Exercice 18 On cherche deux réels m et p tels que
$\left\{ \begin{array}{l} 4m+p=1 \\ 0m+p=3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} p=3 \\ 4m=1-3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} p=3 \\ m=-\frac{1}{2} \end{array} \right.$ et la droite (UV) a pour équation réduite $y=-\frac{1}{2}x+3$.

Sinon, $p=3$ car V est l'intersection de la droite (UV) avec l'axe des ordonnées et $m=\frac{y_U-y_V}{x_U-x_V}=\frac{1-3}{4-0}=-\frac{1}{2}$.

Exercice 19 On considère les points $P\,(\,3\,;\,-1\,)$ et $Q\,(\,-1\,;\,9\,)$.

1. Les points P et Q n'ayant pas même abscisse, ils sont distincts et la droite (PQ) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$.
2. Les points P et Q appartenant à cette droite, leurs coordonnées doivent vérifier son équation et l'on doit donc avoir $\left\{ \begin{array}{l} 3m+p=-1 \\ -m+p=9. \end{array} \right.$
3. • $\left\{ \begin{array}{l} 3m+p=-1 \\ -m+p=9. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} p=9+m \\ 3m+(9+m)=-1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 4m=-1-9 \\ p=9+m \end{array} \right.$
$\iff \left\{ \begin{array}{l} m=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2} \\ p=9-\frac{5}{2}=\frac{13}{2} \end{array} \right.$ par substitution.
• $\left\{ \begin{array}{l} 3m+p=-1 \\ -m+p=9 \end{array} \right. \overset{(L1)-(L2)}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} (3m+p)-(-m+p)=(-1)-(9) \\ -m+p=9 \end{array} \right.$
$\iff \left\{ \begin{array}{l} 4m=-10 \\ p=9+m \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} m=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2} \\ p=9-\frac{5}{2}=\frac{13}{2} \end{array} \right.$ par combinaison linéaire.
La droite (PQ) a donc pour équation réduite : $y=-\frac{5}{2}x+\frac{13}{2}$.

Exercice 20 On considère les points $A\,(\,1\,;\,5\,)$, $B\,(\,-2\,;\,4\,)$, $C\,(\,1\,;\,4\,)$ et $D\,(\,-3\,;\,5\,)$. Nous allons déterminer les équations des droites par *combinaison linéaire*, par *substitution* ou directement et en vérifiant au préalable si les abscisses des points sont différentes.

• (AB) par comb. lin. : $\left\{ \begin{array}{l} 1a+b=5 \\ -2a+b=4 \end{array} \right. \overset{(L1)-(L2)}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} (a+b)-(-2a+b)=(5)-(4) \\ a+b=5 \end{array} \right.$
$\iff \left\{ \begin{array}{l} 3a=1 \\ b=5-a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a=\frac{1}{3} \\ b=5-\frac{1}{3}=\frac{14}{3} \end{array} \right.$ et $(AB) : y=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$.

• (BC) par sub. : $\left\{ \begin{array}{l} -2a+b=4 \\ 1a+b=4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} b=4+2a \\ a+b=4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a+4+2a=4 \\ b=4+2a \end{array} \right.$
$\iff \left\{ \begin{array}{l} 3a=0 \\ b=4+2\times 0=4 \end{array} \right.$ et $(BC) : y=4$. Cela se voyait, non ?

• (AC) doit passer par deux points d'abscisse 1 donc son équation est $x=1$.

• (OD) $(x_O \neq x_D)$: $m_{(OD)}=\frac{y_D-y_O}{x_D-x_O}=-\frac{5}{3}$ et $O \in (OD)$ donc $p=0$ d'où $(OD) : y=-\frac{5}{3}x$.

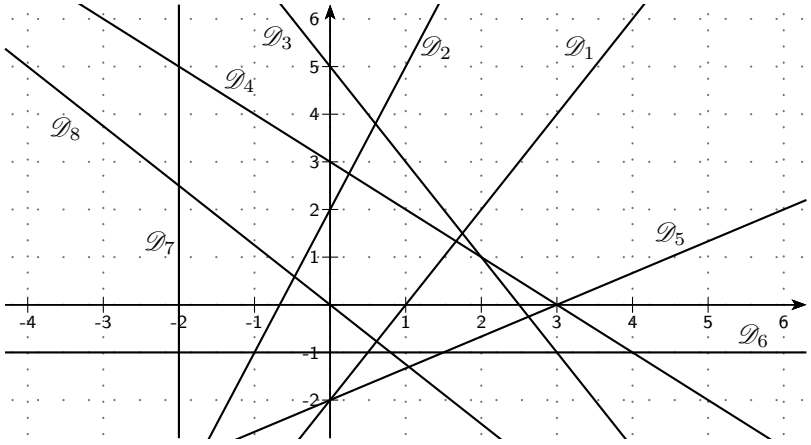
Exercice 21 Since $O\,(\,0\,;\,0\,)$ and $A\,(\,21\,;\,7\,)$ belong to (OA), we must have :
$\left\{ \begin{array}{l} 0m+p=0 \\ 21m+p=7 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} p=0 \\ m=\frac{7}{21}=\frac{1}{3} \end{array} \right.$ and $(OA) : y=\frac{1}{3}x$.

Let $M\,(\,x\,;\,y\,) \in [OA]$ with integer coordinates : $x \in \mathbb{N}$ and $y=\frac{1}{3}x \in \mathbb{N}$. Hence, x must be a multiple of 3 less than 21 : 0, 3, 6, 9,... or 21 and there are 8 possibilities.

Exercice 22 Graphiquement, $d_1 : x = 4$, $d_4 : y = -1$, $d_2 : y = x + 2$ (ordonnée à l'origine 2, « monte » de 1 lorsque x augmente de 1) et $d_3 : y = -\frac{4}{5}x + 4$ (ordonnée à l'origine 4, « descend » de 4 lorsque x augmente de 5).

Exercice 23 Par lecture graphique, en observant les ordonnées à l'origine et certaines pentes pour les différencier, on obtient $d_1 : y = \frac{1}{2}x + 2$, $d_2 : y = -x - 2$, $d_3 : y = 3$, $d_4 : x + y = 0$, $d_5 : y = -x + 2$, $d_6 : x + 1 = 0$, $d_7 : y = 2x + 2$, $d_8 : y = 2x$ et $d_9 : y = 2x - 1$.

Exercice 24 Pour tracer une droite, il suffit de placer deux points. Par exemple, $(0\,;p)$ et $\left(-\frac{p}{m}\,;0\right)$ lorsque $m \neq 0$, ou alors l'un des deux et l'on utilise le coefficient directeur : si x augmente de 1, y varie de a. On obtient alors le graphique suivant :



Exercice 25

$\Delta_1 : y = -2x + 7.$	$\Delta_4 : y = -x + 10.$	$\Delta_7 : x = 1.$
$\Delta_2 : y = -3x + 6.$	$\Delta_5 : y = 5x - 20.$	$\Delta_8 : y = -\frac{7}{6}x + 2.$
$\Delta_3 : y = -3x + 17.$	$\Delta_6 : y = 4.$	$\Delta_9 : y = -\frac{1}{9}x + \frac{14}{9}.$

Exercice 26 L'ensemble des points $M\,(\,x\,;\,y\,)$ vérifiant ces conditions est ici décrit de manière informelle dans un repère orthogonal usuel.

(a) $y > 2$: ensemble des points situés strictement au-dessus de la droite $y = 2$.

(b) $x \leqslant -4$: ensemble des points situés au gauche de la droite $x = 4$ ou sur celle-ci.

(c) $y \geqslant 3x - 1$: ensemble des points situés au-dessus de la droite $y = 3x - 1$ ou sur celle-ci.

(d) $y < 4 - x$: ensemble des points situés strictement en dessous de la droite $y = 4 - x$.

(e) $5x + 4y - 3 < 0 \iff y < -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$: ensemble des points situés strictement en dessous de la droite $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$.

(f) $2x - 3y - 5 \geqslant 0 \iff y \leqslant \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$: ensemble des points situés en dessous de la droite $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ (ou sur celle-ci).

(g) $\left\{\begin{array}{l} -3x + 2y + 4 \leqslant 0 \\ 4x - 5y + 3 > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y \leqslant \frac{3}{2}x - 2 \\ y < \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} \end{array}\right.$: ensemble des points situés en dessous

CORRIGÉS

de la droite $y = \frac{3}{2}x - 2$ ou sur celle-ci et strictement en dessous de la droite $y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$.

(h) $\begin{cases} 8 - 2x \leqslant 4 \\ 6x + 3y - 9 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 2 \\ y > -2x + 3 \end{cases}$: ensemble des points situés à droite de la droite $x = 2$ ou sur celle-ci et strictement au-dessus de la droite $y = 3 - 2x$.

Exercice 27 Puisque $2 \times 2 - (-1)(-4) = 0$, les couples $(2\,;-1)$ et $(-4\,;2)$ sont proportionnels et les droites $\mathscr{D} : 2x - y + 3 = 0$ et $\mathscr{D}' : -4x + 2y + 1 = 0$ sont parallèles.
Puisque $2 \times 3 - 2(-1) \neq 0$, les couples $(2\,;-1)$ et $(2\,;3)$ ne sont pas proportionnels et les droites $\mathscr{D} : 2x - y + 3 = 0$ et $\mathscr{D}'' : 2x + 3y + 2 = 0$ ne sont pas parallèles.
On a $\mathscr{D}\colon y = 2x + 3$, $\mathscr{D}'\colon y = 2x - \frac{1}{2}$ et $\mathscr{D}''\colon y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

Exercice 28 Parallèle à $\mathscr{D} : y = -3x + 5$, $\mathscr{D}'$ est de la forme $y = mx + p$ et a le même coefficient directeur, $m = -3$. Passant par $Q(2\,;1)$, on doit avoir $-3 \times 2 + p = 1$ donc $p = 7$ et l'équation réduite recherchée est $y = -3x + 7$.
Puisque $-3x_P + 7 = -3 \times (-1) + 7 = 10 \neq 8 = y_P$, $P(-1\,;8) \notin \mathscr{D}'$.

Exercice 29

(a) La droite d_3 passe par l'origine du repère ($p = 0$).

(b) La droite d_5 est parallèle à l'axe des abscisses ($m = 0$).

(c) La droite d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées ($x = ...$).

(d) Les droites d_3 et d_4 sont parallèles (même coefficient directeur).

(e) La droite d_4 passe par le point $A\left(\frac{2}{3}\,;0\right)$ (calcul d'image).

(f) Les droites d_1, d_2 et d_5 passent par le point $B\left(-\frac{7}{2}\,;2\right)$ (calcul d'image et lecture des coordonnées).

Exercice 30 A, B et C n'ayant pas même abscisse, les droites sont de la forme $y = mx + p$. $m_{(AB)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-1)}{3-1} = 3$ et $m_{(AC)} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{8-(-1)}{4-1} = 3$.
Ayant même coefficient directeur, les droites (AB) et (AC) sont parallèles et les points A, B et C sont alignés.

Exercice 31

(a) $\mathscr{D}_1 : y = 3x - 1$ et $\mathscr{D}_2 : y = x - 2$ sont sécantes ($3 \neq 1$) en un point tel que $y = 3x - 1 = x - 2 \Longrightarrow 2x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$ et $y = 3(-\frac{1}{2}) - 1 = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$: $I_a\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2}\right)$.

(b) $\mathscr{D}_3 : y = -3x + 9$ et $\mathscr{D}_4 : y = 4x - 5$ sont sécantes ($3 \neq 4$) en un point tel que $y = -3x + 9 = 4x - 5 \Longrightarrow (4 + 3)x = 9 + 5 \Longrightarrow 7x = 14 \Longrightarrow x = \frac{14}{7} = 2$ et $y = -3 \times 2 + 9 = 4 \times 2 - 5 = 3$: $I_b = (2\,;3)$.

(c) $\mathscr{D}_5 : x = 7$ et $\mathscr{D}_6 : x = -3$ sont parallèles (à l'axe des ordonnées).

(d) $\mathscr{D}_7 : y = 2$ et $\mathscr{D}_8 : y = 2x$ sont sécantes ($0 \neq 2$) en un point tel que $y = 2 = 2x \Longrightarrow x = 1$ et $y = 2 = 2 \times 1$: $I_d(1\,;2)$.

(e) $\mathscr{D}_9 : y = -1$ et $\mathscr{D}_{10} : y = 3$ sont parallèles (à l'axe des abscisses).

(f) $\mathscr{D}_{11} : y = 2x - 3$ et $\mathscr{D}_{12} : y = 4 - x$ sont sécantes ($2 \neq -1$) en un point tel que $y = 2x - 3 = 4 - x \Longrightarrow 3x = 7 \Longrightarrow x = \frac{7}{3}$ et $y = 2\frac{7}{3} - 3 = 4 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$: $I_f\left(\frac{7}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$.

(g) $\mathscr{D}_{13}\colon 2x-3y+5=0 \iff y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ et $\mathscr{D}_{14}\colon 6y-4x+1=0 \iff y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$ sont strictement parallèles car elles ont même coefficient directeur et des ordonnées à l'origine différentes.

(h) $\mathscr{D}_{15}\colon 3x-5y-1=0 \iff y=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$
et $\mathscr{D}_{16}\colon 2x+3y-7=0 \iff y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ sont sécantes $(\frac{3}{5}\neq-\frac{2}{3})$ en un point tel que $\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3} \implies \frac{9+10}{15}x=\frac{35+3}{15} \implies x=\frac{38}{19}=2$ et $y=\frac{3}{5}\times 2-\frac{1}{5}=1 (=-\frac{2}{3}\times 2+\frac{7}{3})$: $I_h\,(\,2\,;\,1\,)$.

Exercice 32 Je vous laisse vérifier graphiquement par vous-même en appliquant la méthode de l'exercice 24.

Exercice 33 Résolvons les systèmes par combinaison linéaire ou par substitution.

(a) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ 3x-y+5=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=2x-3 \\ 3x-(2x-3)+5=0 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} x+8=0 \\ y=2x-3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-8 \\ y=2\times(-8)-3=-19. \end{array}\right.$
$\mathscr{S}_a=\{(\,-8\,;\,-19\,)\}$

(b) $\left\{\begin{array}{l} 4x+2y+2=0 \\ -5x-3y+4=0 \end{array}\right. \overset{3(L1)+2(L2)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} 3(4x+2y+2)+2(-5x-3y+4)=0+0 \\ 3y=-5x+4 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x+14=0 \\ y=\frac{1}{3}(-5x+4) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{-14}{2}=-7 \\ y=\frac{1}{3}(-5\times(-7)+4)=\frac{39}{3}=13. \end{array}\right.$
$\mathscr{S}_b=\{(\,-7\,;\,13\,)\}$

(c) $\left\{\begin{array}{l} -2a+7b=2 \\ 5a-4b-1=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2a=7b-2 \\ 5a-4b-1=0 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} a=\frac{1}{2}(7b-2) \\ 5\,\frac{1}{2}(7b-2)-4b-1=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \frac{35}{2}b-5-4b-1=0 \\ a=\frac{7}{2}b-1 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} \frac{27}{2}b=6 \\ a=\frac{7}{2}b-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=6\,\frac{2}{27}=\frac{4}{9} \\ a=\frac{7}{2}\frac{4}{9}-1=\frac{5}{9}. \end{array}\right.$ $\mathscr{S}_c=\{(\,\frac{5}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,)\}$

(d) $\left\{\begin{array}{l} 3x-12y+9=0 \\ -2x+8y-5=0 \end{array}\right. \overset{2(L1)+3(L2)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} 2(3x-12y+9)+3(-2x+8y-5)=0 \\ 2x=8y-5 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} 6x-24y+18-6x+24y-15=0 \\ x=\frac{1}{2}(8y-5) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 0x+0y+3=0 \\ x=4y-\frac{5}{2}. \end{array}\right.$
$\mathscr{S}_d=\varnothing$

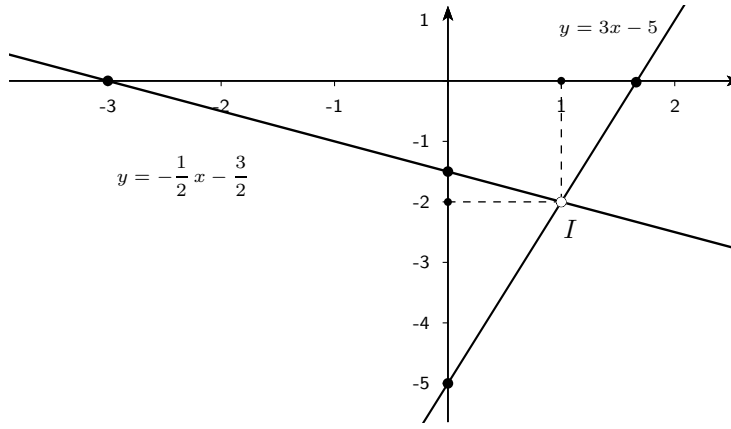
(e) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y+5=0 \\ -6x+3y-15=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=2x+5 \\ -6x+3(2x+5)-15=0 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} 0x+0=0 \\ y=2x+5. \end{array}\right.$ $\mathscr{S}_e=\{(\,x\,;\,y\,)\;/\;y=2x+5\}$

(f) $\left\{\begin{array}{l} 3\alpha+4\beta-1=0 \\ 2\alpha+5\beta+4=0 \end{array}\right. \overset{5(L1)-4(L2)}{\iff} \left\{\begin{array}{l} 5(3\alpha+4\beta-1)-4(2\alpha+5\beta+4)=0-0 \\ 5\beta=-2\alpha-4 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} 15\alpha+20\beta-5-8\alpha-20\beta-16=0 \\ \beta=\frac{1}{5}(-2\alpha-4) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 7\alpha=21 \\ \beta=\frac{1}{5}(-2\alpha-4) \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l} \alpha=\frac{21}{7}=3 \\ \beta=\frac{1}{5}(-2\times 3-4)=-\frac{10}{5}=-2. \end{array}\right.$ $\mathscr{S}_f=\{(\,3\,;\,-2\,)\}$

CORRIGÉS

Exercice 34 On considère le système (S) : $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 3x-y-5=0. \end{cases}$

1. On a $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 3x-y-5=0 \end{cases} \overset{(L1)+2(L2)}{\iff} \begin{cases} (x+2y)+2(3x-y)+3-2\times 5=0 \\ y=3x-5 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 7x=7 \\ y=3x-5 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=3\times 1-5=-2 \end{cases}$ et $\mathscr{S}=\{(1\,;-2)\}$.
2. On a $\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 3x-y-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y=-x-3 \\ y=3x-5 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathscr{D}_1 \ : \ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \\ \mathscr{D}_2 \ : \ y=3x-5. \end{cases}$
3. Après avoir tracé les deux droites en appliquant la méthode de l'exercice 24, on observe que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ se croisent bien en $I\,(1\,;-2\,)$.



Exercice 35

1. (d) et (d') sont sécantes *ssi* leur vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-a\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-b\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires *ssi* $a\neq b$.
2. On a $\alpha+a\beta+b=0$ et $\alpha+b\beta+a=0 \Longrightarrow \alpha+a\beta+b=\alpha+b\beta+a$
$\iff a\beta-b\beta=a-b \overset{a\neq b}{\iff} \beta=1$ et $\alpha=-b-a\beta$: $I\,(-a-b\,;1\,)$.

Exercice 36 Soient $A\,(2\,;1\,)$, $B\,(-3\,;2\,)$ et $C\,(7\,;3\,)$ trois points du plan repéré.

1. Soit I le milieu du segment $[BC]$. On a $x_I=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-3+7}{2}=2$ et $y_I=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$ donc $I\left(2\,;\frac{5}{2}\right)$ et la médiane de ABC issue de A est la droite (AI).
Puisque $x_A=x_I=2$, cette médiane a pour équation $(AI):x=2$.
Soit J le milieu du segment $[AC]$. On a $x_J=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2+7}{2}=\frac{9}{2}$ et $y_J=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+3}{2}=2$ donc $J\left(\frac{9}{2}\,;2\right)$ et la médiane de ABC issue de B est la droite (BJ).
Puisque $y_A=y_J=2$, cette médiane a pour équation $(BJ):y=2$.
2. Le centre de gravité G du triangle ABC est à l'intersection de ses médianes donc $G\in(AI)\cap(BJ)$ et ses coordonnées vérifient l'équation de ces droites. Ainsi, $x_G=2$ et $y_G=2$ d'où $G\,(2\,;2\,)$.
3. La troisième médiane est alors la droite (CG). Puisque $x_C\neq x_G$, elle est de la forme $y=mx+p$. On a $m=\frac{y_C-y_G}{x_C-x_G}=\frac{3-2}{7-2}=\frac{1}{5}$ et (CG) :

$y = \frac{1}{5}x + p$. Comme $G \in (CG)$, $y_G = \frac{1}{5}x_G + p$ donc $p = 2 - \frac{1}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$.
La troisième médiane du triangle ABC admet donc pour équation $y = \frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$.

Exercice 37 $(d_m) : 2mx - (m-1)y - 1 = 0$ de vecteur directeur $\overrightarrow{v_m}\binom{m-1}{2m}$

1. $A(-1\,;1) \in (d_m) \iff 2m \times (-1) - (m-1) \times 1 - 1 = 0 \iff -3m = 0$
   $\iff m = 0$ et $(d_0) : y - 1 = 0$.
2. $\overrightarrow{u}\binom{3}{12}$ dirige (d_m) *ssi* il est colin. à $\overrightarrow{v_m}\binom{m-1}{2m} \iff 3 \times 2m - 12(m-1) = 0$
   $\iff -6m + 12 = 0 \iff m = 2$ et $(d_2)\colon 4x - y - 1 = 0$.
3. $(d_m)//(D) \iff \overrightarrow{v_m}\binom{m-1}{2m}$ et $\binom{4}{5}$ colin. *ssi* $4 \times 2m - 5(m-1) = 0$
   $\iff 3m + 5 = 0 \iff m = -\frac{5}{3}$
   et $(d_{-\frac{5}{3}})\colon -\frac{10}{3}x + \frac{8}{3}y - 1 = 0 \iff 10x - 8y + 3 = 0$.

Exercice 38 Si c est le prix d'un croissant et p celui d'un pain au chocolat, on a

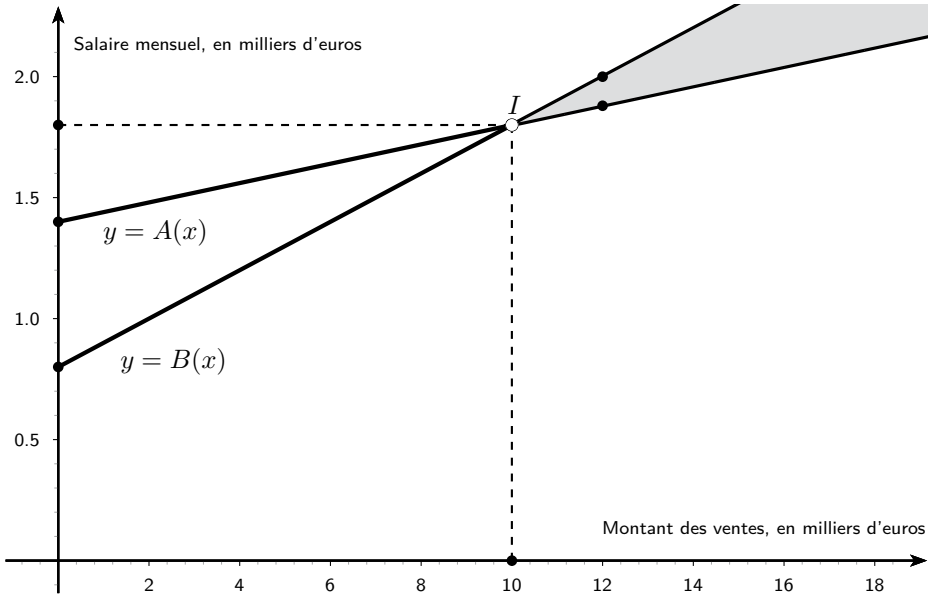
$$\begin{cases} 2c + 4p = 6,5 \\ 3c + p = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 4 - 3c \\ 2c + 4(4 - 3c) = 6,5 \end{cases} \iff \begin{cases} -10c + 16 = 6,5 \\ p = 4 - 3c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = \frac{-9,5}{-10} = 0,95 \\ p = 4 - 3 \times 0,95 = 1,15 \end{cases}$$

Spike dépensera $9 \times 0,95 + 7 \times 1,15 = 16,60$ €.

Exercice 39

1. 4% de x € de vente valent $\frac{4}{100} \times x = 0,04\,x$ auxquels on ajoute les 1400 € de part fixe. On obtient alors un salaire de $A(x) = 0,04\,x + 1400$ que l'on représente par la droite d'équation $y = 0,04\,x + 1400$.
2. De façon analogue, le salaire mensuel du contrat $\mathcal{B}$ est donné, en euros, par $B(x) = 0,1\,x + 800$.
3. La droite $y = A(x)$ passe par les points $(0\,;1400)$ et $(12000\,;1880)$ et la droite $y = B(x)$ par $(0\,;800)$ et $(12000\,;2000)$ par exemple.



CORRIGÉS

4. Graphiquement, le contrat $\mathcal{B}$ est plus avantageux lorsque la droite $y = B(x)$ est située au-dessus de la droite $y = A(x)$ (la zone grisée) c.-à-d. lorsque le montant des ventes mensuelles dépasse 10 000 €.
5. On a $B(x) \geqslant A(x) \iff 0,1x + 800 \geqslant 0,04x + 1400$
$\iff 0,1x - 0,04x \geqslant 1400 - 800 \iff x \geqslant \dfrac{600}{0,06} = 10\,000.$
On a alors $y = 0,1 \times 10000 + 800 = 1800$ et $0,04 \times 10000 + 1400 = 1800$ € de salaire mensuel.

Exercice 40

1. Since $T\,(\,3\,;\,6.5\,)$ seems to be on Δ, a 3 mile journey should cost \$6.5.
2. $A\,(\,4\,;\,8\,)$ and $B\,(\,0\,;\,2\,) \in \Delta$ so the gradient of the line is $\frac{8-2}{4-0} = \frac{3}{2}$.
3. The intercept with the cost axis is $B\,(\,0\,;\,2\,)$.
4. Then, the cost of a journey C, in terms of the distance d, is $C(d) = \frac{3}{2}d + 2$.
5. We have $C(3) = \frac{3}{2} \times 3 + 2 = 6.5$ as we previously said.

Chapitre XIII

STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Sommaire

Introduction 224
1 Vocabulaire 224
2 Indices de position 226
2.1 Mode d'une série statistique 226
2.2 Médiane d'une série statistique 226
2.3 Moyenne d'une série statistique 227
3 Indices de dispersion 228
3.1 Étendue d'une série statistique 228
3.2 Quartiles d'une série statistique 228
3.3 Écart-type d'une série statistique 229
4 Bilan 230
4.1 Diagrammes en boîtes 230
4.2 Remarques générales 230
4.3 Avec la calculatrice 231
5 Exercices 231
Corrigé des exercices 235

Le but des statistiques descriptives est de présenter une masse de données sous forme lisible, puis si possible, de la résumer par quelques nombres caractéristiques, les *indices*, afin de l'interpréter et l'analyser.

Cette discipline se retrouve dès les premiers écrits de l'Humanité dans des comptages de bestiaux. Au XIXe s., de superbes graphiques et illustrations sont créés, les premiers recensements de population sont effectués. Au siècle suivant, les statistiques s'industrialisent, parfois au service de l'effort de guerre. Il est désormais clair que la capacité de compréhension, de traitement et de présentation des données est un enjeu majeur du XXIe s.

Introduction

Trois groupes d'élèves de seconde du lycée Henri Matisse situé au centre de la ravissante bourgade de La Fare-en-Dole ont obtenu les résultats suivants à un même devoir de mathématiques. Comparez ces résultats.

Groupe α : 3 – 4 – 5 – 7 – 7 – 9 – 10 – 11 – 11 – 12 – 12 – 13 – 15 – 16 – 18.

Groupe β : 3 – 3 – 4 – 4 – 5 – 7 – 8 – 9 – 9 – 11 – 13 – 14 – 16 – 18 – 19 – 20.

Groupe γ : 4 – 5 – 6 – 7 – 7 – 7 – 8 – 8 – 9 – 9 – 10 – 11 – 13 – 14 – 17 – 19 – 20.

1 Vocabulaire

Les exemples étudiés s'appuieront souvent sur les données suivantes.

Âge On a demandé leur âge aux élèves du lycée Henri Matisse de La Fare-en-Dole. Voici ce que l'on a obtenu :

Âge (en années)	15	16	17	18	19	20
Nombre d'élèves	24	112	143	130	78	33

Salaire Voici la répartition des salaires mensuels des employés d'une fabrique de crayons de couleur :

Salaire mensuel (en €)	$[900\,;1100[$	$[1100\,;1300[$	$[1300\,;2000[$	$[2000\,;3000[$	$[3000\,;4000]$
Nombre de salariés	5	9	24	15	2

• La **population** désigne l'ensemble des personnes ou objets ou éléments sur lesquels porte l'étude statistique.

• L'ensemble des données recueillies s'appelle la **série statistique**. Elle énumère certaines propriétés des individus de la population, appelées **caractères**. Ce caractère sera dit **quantitatif** lorsque ses valeurs seront numériques et **qualitatif** sinon, comme la couleur des cheveux, le fait d'aimer ou non les brocolis, celui d'être un nombre entier ou non, etc. On appelle **modalité** l'ensemble de toutes les valeurs prises par le caractère.

Si le caractère est quantitatif, on peut effectuer des calculs et mesurer alors différents « indices » comme la moyenne, l'étendue,... On peut parfois « quantifier » un caractère qualitatif afin de pouvoir calculer les indices statistiques correspondants. Par exemple, on notera une réponse "1" si l'individu aime les brocolis et "0" sinon plutôt que "oui" et "non". Les caractères que nous considèrerons seront généralement quantitatifs.

Âge La population est l'ensemble des élèves du lycée Henri Matisse et le caractère quantitatif étudié est leur âge.

Salaire La population est l'ensemble des salariés de l'entreprise et le caractère quantitatif étudié est leur salaire.

• L'**effectif total** N d'une série statistique est le nombre total d'éléments de la population.

• L'**effectif d'une valeur** du caractère est le nombre d'éléments de la population ayant cette valeur pour caractère.

On présente alors souvent les données sous la forme d'un tableau :

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_i	...	x_p
Effectif du caractère	n_1	n_2	...	n_i	...	n_p

où les valeurs x_i sont rangées en ordre croissant si elles sont numériques, où n_i est l'effectif de la valeur x_i et où p est le nombre de valeurs différentes (*i.e.* la modalité est $\{x_1\,;\,x_2\,;\,\ldots\,;\,x_p\}$).

On a alors $\boldsymbol{N = n_1 + n_2 + ... + n_i + ... + n_p = \sum_{i=1}^{i=p} n_i}$.

Il arrive que le caractère puisse prendre un nombre important de valeurs différentes (le nombre d'habitants des différentes agglomérations d'un pays, le prix des différents articles d'un magasin,...) ou même qu'il puisse prendre *a priori* toutes les valeurs d'un intervalle (la taille d'un individu, le temps d'un parcours,...). On dit dans ce dernier cas que le caractère est continu ; sinon, on dit qu'il est discret. Il est alors préférable de regrouper ces valeurs dans des intervalles que l'on appelle des **classes**. On perd alors en précision mais on gagne en lisibilité (cf. Salaire).

• La **fréquence d'une valeur** du caractère est le quotient de l'effectif de la valeur par l'effectif total.

C'est un nombre compris entre 0 et 1 que l'on écrit parfois sous forme de pourcentage.

On a $\boldsymbol{f_i = \frac{n_i}{N}} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$ et la somme de toutes les fréquences vaut 1.

Ainsi, $\boldsymbol{f_1 + ... + f_p = \sum_{i=1}^{i=p} f_i = 1}$.

Âge L'effectif total est de $24 + 112 + 143 + 130 + 78 + 33 = 520$ élèves.

L'effectif de la valeur 18 est de 130 élèves et sa fréquence est de $\frac{130}{520} = 0,25$.

Cela signifie que 130 élèves, c.-à-d. 25 % des élèves, du lycée Henri Matisse de La Fare-en-Dole sont âgés de 18 ans.

Salaire Les salaires étant certainement différents, ils ont été regroupés en classes donnant des ordres de grandeurs et non des valeurs exactes, le tableau reste ainsi lisible.

L'effectif total est de $5 + 9 + 24 + 15 + 2 = 55$ salariés.

L'effectif de la classe $[\,1100\,;1300\,[$ est de 9 salariés et sa fréquence est de $\frac{9}{55} \simeq 0,164$.

Cela signifie que 9 salariés, c.-à-d. environ 16,4 % des salariés, de cette entreprise ont un salaire mensuel compris entre 1100 € et 1300 €.

Nous étudierons par la suite des caractères uniquement quantitatifs ou quantifiés. Nous pourrons alors calculer certains nombres, des « indices », caractéristiques de la série statistique. Ces indices seront tous dans l'univers des valeurs de la série. Pour nos exemples, ce seront donc des âges et des salaires et non des effectifs ou des fréquences.

2 Indices de position

2.1 Mode d'une série statistique

• Le **mode** d'une série statistique est la valeur du caractère de plus grand effectif. Si les valeurs sont réparties en classes, on parle de **classe modale**. Il arrive qu'une série ait plusieurs modes.

Âge Le mode de cette série est de 17 ans.

Salaire La classe modale de cette série est $]\,1300\,;2000\,]$.

2.2 Médiane d'une série statistique

• La **médiane** d'une série statistique, notée Me, est une valeur du caractère telle qu'au moins 50 % des éléments de la population ont une valeur du caractère inférieure ou égale à Me, et qu'au moins 50 % des éléments ont une valeur du caractère supérieure ou égale à Me.

En général, la médiane et la moyenne sont deux nombres différents.

En pratique, pour déterminer une médiane, nous classerons d'abord toutes les valeurs par ordre croissant, *p.o.c.*, sans oublier les répétitions si $n_i \geqslant 2$. Ensuite, si l'effectif total N est impair, la médiane sera la valeur de rang $\dfrac{N+1}{2}$ et si N est pair, la médiane sera la moyenne entre les valeurs des rangs $\dfrac{N}{2}$ et $\dfrac{N}{2}+1$.

Exemples : ◦ Soit la série statistique 2 7 7 9 11

L'effectif total $N = 5$ est impair donc la médiane est la $\frac{5+1}{2} = 3^e$ valeur p.o.c. : $Me = 7$. En effet, au moins 50 % des valeurs sont inférieures ou égales à 7 et au moins 50 % des valeurs sont supérieures ou égales à 7.

◦ Soit la série statistique 7 31 34 42 51 87

L'effectif total $N = 6$ est pair donc la médiane est la moyenne entre la $\frac{6}{2} = 3^e$ et la $3+1 = 4^e$ valeur p.o.c. : $Me = \frac{34+42}{2} = 38$ et, effectivement, au moins 50 % des valeurs sont inférieures ou égales à 38 et au moins 50 % des valeurs sont supérieures ou égales à 38.

Lorsque la série est présentée dans un tableau d'effectifs cumulés, il n'est pas nécessaire « d'étaler » les valeurs. On cherche la valeur médiane directement dans le tableau en repérant la valeur ayant le « numéro » désiré. De même, si l'on a le tableau des fréquences cumulées, il suffit de prendre la valeur qui « contient » la fréquence cumulée 50 %.

Âge $N = 520$ est pair donc la médiane est entre la $\frac{520}{2} = 260^{\text{e}}$ et la 261e valeur p.o.c. : $Me_{\hat{\text{A}}} = 17$ ans.

Salaire $N = 55$ est impair donc la médiane est la $\frac{55+1}{2} = 28^{\text{e}}$ valeur p.o.c. : $Me_S = 1\,650$ € (on peut aussi choisir une classe médiane : $[\,1300\,;2000\,[$).

Exercice 1 VouF ?
L'âge médian dans le monde est 29 ans. Gaston a 32 ans. Quelles affirmations est-il possible d'en déduire ?

(a) Au moins la moitié des personnes dans le monde sont moins âgées que Gaston.

(b) La moitié des personnes dans le monde sont plus âgées que Gaston.

(c) Gaston a vécu plus longtemps que 50 % des personnes vivantes.

(d) La population mondiale est en moyenne plus jeune que Gaston.

(e) L'âge cumulé du chat et de la mouette est supérieur à celui de Gaston.

Exercice 2 VouF ?

(a) La médiane peut être un nombre négatif.

(b) Si la médiane est nulle alors toutes les données sont égales.

(c) La médiane ne prend pas en compte les valeurs extrêmes de la série.

(d) Si l'on ajoute ou retranche un même nombre à toutes les valeurs de la série, la médiane n'est pas modifiée.

(e) Si l'on multiplie (ou divise) par 2 toutes les valeurs de la série, alors la médiane aussi.

2.3 Moyenne d'une série statistique

• La **moyenne** d'une série statistique, notée $\overline{x}$, est le quotient de la somme de toutes les valeurs, avec répétitions, par l'effectif total. Si l'on a le tableau des effectifs ou des fréquences de la série, on parle de moyenne pondérée, les coefficients sont les *poids*, et l'on a :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{n_1\, x_1 + \ \ldots\ + n_p\, x_p}}{\boldsymbol{n_1 + \ \ldots\ + n_p}} = \boldsymbol{f_1\, x_1 + \ \ldots\ + f_p\, x_p}.$$

Remarque : La moyenne est le nombre qui, substitué à chaque valeur de la série, redonne la même somme. C'est la valeur qu'auraient chacun des membres de l'ensemble s'ils étaient tous identiques sans changer la dimension globale de l'ensemble.

Âge On a $\overline{x_{\hat{\text{A}}}} = \frac{24\times15+112\times16+143\times17+130\times18+78\times19+33\times20}{24+112+143+130+78+33} \simeq 17,4$ ans.

Lorsque les valeurs sont regroupées en classes, on prend les centres des classes pour effectuer les calculs. On considère alors que toutes les valeurs de la classe valent exactement la valeur centrale.

Salaire On a $\overline{x_S} = \frac{5\times1000+9\times1200+24\times1650+15\times2500+2\times3500}{5+9+24+15+2} \simeq 1\,816$ €.

Exercice 3 Sur ses trois premiers devoirs de mathématiques, Clotaire a 8 de moyenne. Son professeur, sévère mais juste, en a prévu deux supplémentaires.

1. Peut-il avoir actuellement une note médiane de 10 ?
2. Peut-il encore espérer obtenir 13 de moyenne ce trimestre ?
3. Quelles notes doit-il viser pour obtenir au moins 11 de moyenne ce trimestre ?

Si, dans sa grande mansuétude, votre professeur double toutes les notes puis leur ajoute deux, vous savez bien qu'il en sera de même pour la moyenne de la classe. La propriété de linéarité de la moyenne suivante traduit exactement ce fait.

Propriété 1 *Soient a et b deux nombres réels. Si une série de valeurs $\{x_i\}_{\{1\leqslant i\leqslant p\}} = \{x_1; ...; x_p\}$ a pour moyenne $\overline{x}$, alors la série de valeur $\{ax_i + b\}\}_{\{1\leqslant i\leqslant p\}} = \{ax_1 + b; ...; ax_p + b\}$ a pour moyenne $a\overline{x} + b$.*

Démonstration : On a $\overline{ax+b} = \frac{n_1(ax_1+b)+\ldots+n_p(ax_p+b)}{n_1+\ldots+n_p}$

$$\overline{ax+b} = \frac{an_1x_1+\ldots+an_px_p+n_1b+\ldots+n_pb}{n_1+\ldots+n_p} = \frac{a(n_1x_1+\ldots+n_px_p)}{n_1+\ldots+n_p} + \frac{(n_1+\ldots+n_p)b}{n_1+\ldots+n_p}$$
$$= a\frac{n_1x_1+\ldots+n_px_p}{n_1+\ldots+n_p} + \frac{n_1+\ldots+n_p}{n_1+\ldots+n_p}b = a\overline{x} + b. \qquad \square$$

Exercice 4 VouF ?

(a) La moyenne peut être un nombre négatif.

(b) Si la moyenne est nulle alors toutes les données sont égales.

(c) La moyenne ne prend pas en compte les valeurs extrêmes de la série.

(d) Si l'on ajoute ou retranche un même nombre à toutes les valeurs de la série, la moyenne n'est pas modifiée.

(e) Si l'on multiplie (ou divise) par 2 toutes les valeurs, alors la moyenne aussi.

3 Indices de dispersion

3.1 Étendue d'une série statistique

• L'**étendue** d'une série statistique, notée e, est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série. $\boldsymbol{e = x_p - x_1}$

Âge On a $e_{\hat{A}} = 20 - 15 = 5$ ans. *Salaire* On a $e_S = 4000 - 900 = 3\,100$ €.

3.2 Quartiles d'une série statistique

• Le **premier quartile**, noté Q_1, d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des éléments ont une valeur du caractère inférieure ou égale à Q_1.

• Le **dernier quartile**, noté Q_3, d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des éléments ont une valeur du caractère inférieure ou égale à Q_3.

• L'**intervalle interquartile** est l'intervalle $[\,\boldsymbol{Q_1\,;\,Q_3}\,]$; il contient environ la moitié des éléments.

• L'**écart interquartile** est la différence entre le troisième et le premier quartile : $\boldsymbol{IQ = Q_3 - Q_1}$.

Âge On a $\frac{N}{4} = 130$ donc le premier quartile est la 130e valeur p.o.c. : $Q_1 = 16$ ans. On a $\frac{3N}{4} = 390$ donc le troisième quartile est la 390e valeur p.o.c. : $Q_3 = 18$ ans et l'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 2$ ans.

Salaire On a $\frac{N}{4} = 13,75$ donc le premier quartile est supérieur à la 14e valeur p.o.c. : $Q_1 = 1\,300$ €. On a $\frac{3N}{4} = 41,25$ donc le dernier quartile est supérieur à la 42e valeur p.o.c. : $Q_3 = 3\,000$ € et l'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 1\,700$ €.

Exercice 5 VouF ?

(a) Le troisième quartile est toujours positif.

(b) On a toujours $Med > Q_1$.

(c) L'écart interquartile est un nombre positif.

(d) La médiane est dans l'intervalle interquartile.

(e) Le premier quartile est inférieur ou égal à l'écart interquartile.

3.3 Écart-type d'une série statistique

- L'**écart-type** de la série de valeurs $\{x_1; ...; x_p\}$ est le nombre positif défini par

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + \ \ldots\ + n_p(x_p - \overline{x})^2}{n_1 + \ \ldots\ + n_p}}}.$$

L'écart-type mesure un écart moyen entre les valeurs et la moyenne de la série. Il s'exprime dans la même unité que les valeurs de la série. Lorsqu'il y a suffisamment de valeurs et qu'il n'y a pas d'effet de seuil, environ deux tiers des valeurs, avec répétitions, se situent dans l'intervalle $[\,\overline{x} - \sigma\,; \overline{x} + \sigma\,]$.

Âge

$\sigma_{\text{Â}} = \sqrt{\frac{24(15-17,4)^2+112(16-17,4)^2+143(17-17,4)^2+130(18-17,4)^2+78(19-17,4)^2+33(20-17,4)^2}{24+112+143+130+78+33}}$

$\sigma_{\text{Â}} \simeq 1,3$ ans et l'intervalle $[\,17,4-1,3\,; 17,4+1,3\,]$ contient $\frac{273}{520} \simeq 53\,\%$ des élèves.

Lorsque les valeurs sont regroupées en classes, on prend les centres des classes pour effectuer les calculs.

Salaire

$\sigma_S = \sqrt{\frac{5(1000-1816)^2+9(1200-1816)^2+24(1650-1816)^2+15(2500-1816)^2+2(3500-1816)^2}{5+9+24+15+2}}$

$\sigma_S \simeq 604$ € et l'intervalle $[\,1816-604\,; 1816+604\,]$ contient $\frac{36}{55} \simeq 65\,\%$ des salariés.

Exercice 6 VouF ?

(a) L'écart-type peut être un nombre négatif.

(b) Si l'écart-type est nul alors toutes les données sont égales.

(c) L'écart-type ne prend pas en compte les valeurs extrêmes de la série.

(d) Si l'on ajoute ou retranche un même nombre à toutes les valeurs de la série, l'écart-type n'est pas modifié.

(e) Si l'on multiplie (ou divise) par 2 toutes les valeurs de la série, alors l'écart-type aussi.

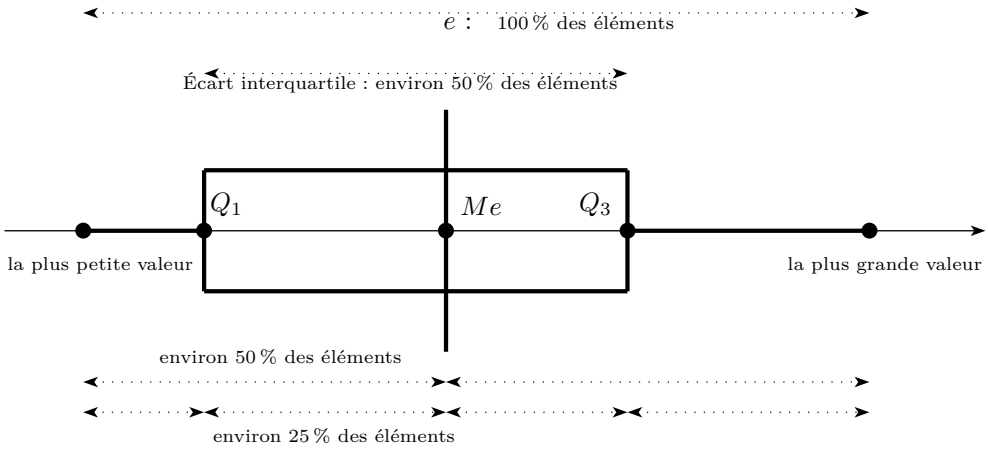
(f) Si l'on multiplie toutes les valeurs de la série par -2, alors l'écart-type est multiplié par -2.

4 Bilan

Nous avons donc plusieurs indices à notre disposition pour décrire, résumer, analyser,... une série statistique à caractère quantitatif.

4.1 Diagrammes en boîtes

Pour présenter certains de ces indices, on utilise souvent un diagramme en boîte ou « à moustaches ».



Par ailleurs, l'intervalle $[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma\,]$ contient environ deux tiers des valeurs généralement.

Exercice 7 VouF ?

Dans un diagramme en boîte,

(a) si l'on ajoute 10 à toutes les valeurs de la série, alors la longueur de la boîte augmente ;

(b) si l'on ajoute 10 uniquement à la valeur maximale de la série, alors la longueur de la boîte augmente ;

(c) la médiane se trouve toujours au milieu de la boîte ;

(d) on peut lire la moyenne de la série ;

(e) un diagramme en boîte peut ne pas avoir de « moustache ».

4.2 Remarques générales

Nous savons désormais déterminer le mode, la moyenne, la médiane, l'étendue, les quartiles et l'écart-type d'une série statistique pour un caractère quantitatif. Ces indices sont tous des valeurs (atteintes ou non) du caractère.

Nous avons vu que le mode, la moyenne et la médiane étaient des indices de position : ils situent la série sur l'axe réel. Plus précisément, la moyenne et la médiane renseignent sur la « tendance centrale » de la série.

L'étendue, les quartiles, l'écart interquartile et l'écart-type sont des indices de dispersion : ils mesurent la répartition des valeurs de la série autour des caractères de position.

La moyenne, l'étendue et l'écart-type sont sensibles aux valeurs extrêmes alors que la médiane et les quartiles sont eux peu sensibles aux valeurs extrêmes. En effet, si l'on modifie la plus grande valeur par exemple, ces derniers ne varieront pas.

La moyenne prend en compte toutes les valeurs de la série et possède de plus des propriétés algébriques que ne possède pas la médiane.

4.3 Avec la calculatrice

Voici comment procéder avec une [TI] . L'accès se fait avec la touche [stats] .
• Edit. pour entrer les valeurs dans la colonne L1 et les éventuels effectifs dans la colonne L2.
• Calc : Stats 1-Var puis [2nde] [1]
ou, en cas d'effectifs associés, [2nde] [1] [,] [2nde] [2] .
On obtient alors la moyenne $\overline{x}$, l'écart-type σx, la médiane Med, les quartiles $Q1$ et $Q3$, l'effectif total n (bien utile pour vérifier que l'on a bien entré toute la série) en se déplaçant avec les flèches.
• Pour obtenir une représentation du nuage et/ou le diagramme en boîte, il faut sélectionner et paramétrer le « Graph 1, 2 ou 3 » du menu [f(x)] .

5 Exercices

Exercice 8 Les notes à un devoir de mathématiques, donné à deux groupes d'une même classe, sont les suivantes :

Groupe A : 6 6 8 10 10 10 11 11 12 12 13 13 15 15 16
Groupe B : 6 6 6 6 7 9 10 11 14 14 14 19 19 20

1. Pour chacun des deux groupes :
   (a) Déterminer les étendue, mode, moyenne, médiane, quartiles, écart interquartile et écart-type puis tracer leur diagramme en boîte.
   (b) Vérifier vos résultats au moyen du mode Stat de votre calculatrice.
   (c) Calculer la moyenne de la classe constituée des élèves des groupes A et B.
2. Comparer les notes des deux groupes.
3. Le professeur s'est encore trompé en recomptant les points de la meilleure copie du groupe A : c'est en fait un 19. Quels indices sont modifiés ? De combien ?
4. Afin d'obtenir une moyenne qui lui sied, ce professeur réalise comme d'habitude une tambouille artisanale. Cette fois-ci, il décide de diminuer toutes les notes de 20 % puis d'octroyer 4 points à tous. Cela est-il possible ? Si oui, calculer les nouvelles moyennes de ces groupes ?

Exercice 9 Compléter la série suivante par deux valeurs afin que son étendue, sa moyenne et sa médiane valent toutes 7 : 5 6 7 9 11

Exercice 10 Le tableau suivant recense les admissions à l'hôpital de La Fare-en-Dole consécutives à des accidents dus aux chewing-gums au cours de l'année dernière.

Âge \ Sexe	Hommes	Femmes	Total
9 ans et moins	160	183	343
10 à 14 ans	694	312	
15 à 19 ans	229	47	
20 à 34 ans	174		301
35 ans et plus		76	149
Total			

1. Compléter le tableau.
2. Parmi les personnes hospitalisées suite à un accident de chewing-gum, déterminer le pourcentage d'hommes.
3. Parmi l'ensemble des personnes hospitalisées, quelle est la fréquence des hommes âgés d'au moins 20 ans ?
4. (a) Parmi les hommes hospitalisés, déterminer le pourcentage de ceux âgés de moins de 20 ans.
   (b) En déduire, parmi les hommes hospitalisés, le pourcentage de ceux âgées d'au moins 20 ans.
5. On s'intéresse aux personnes hospitalisées âgées de 20 à 34 ans.
   (a) Y a-t-il relativement plus d'hommes que de femmes parmi cette population ?
   (b) Pour autant, la tranche d'âge 20-34 ans est-elle plus « à risque » pour les hommes ?

Exercice 11 Voici les notes obtenues par trois camarades lors d'un stage de survie. Elles sont déjà rentrées dans une feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C	D	E
1		**Mission 1**	**Mission 2**	**Mission 3**	*Moyennes*
2	*Coefficients*	1,3	0,5	2	
3	**Frodon**	13	17	16	
4	**Gandalf**	18	12	19	
5	**Aragorn**	18	16	10	
6	*Moyennes*				

1. Que rentrer dans la case E2 afin d'avoir la somme des coefficients ?
2. (a) Que rentrer dans la case B6 afin d'avoir la moyenne des notes obtenues lors de la mission 1 ?
   (b) Que se passe-t-il lors de la recopie à droite de cette case ?
3. (a) Que rentrer dans la case E3 afin d'avoir la moyenne pondérée des notes obtenues par Frodon ?
   (b) Modifier cette commande afin d'obtenir les moyennes des autres camarades par copie vers le bas.
4. Que rentrer dans la case E6 ?
5. Observer et comparer les différents résultats.

Exercice 12
Le tableau ci-contre donne la moyenne du temps de sommeil quotidien des habitants de deux cités voisines.

	La Fare-en-Dole	Villeneuve-la-Vieille
Jeunes	8 h / 75 %	8,5 h / 40 %
Moins jeunes	6 h / 25 %	6,5 h / 60 %

1. Interpréter les différentes cases.
2. Calculer le temps de sommeil moyen des habitants de chacune des deux bourgades.
3. Comparer ces deux moyennes. Pourtant, les jeunes et les moins jeunes de La Fare-en-Dole ne dorment-ils pas chacun moins que ceux de Villeneuve-la-Vieille ?
4. Peut-on calculer la moyenne du temps de sommeil des jeunes sur l'ensemble des deux bourgades ?

Exercice 13 VouF ? Justifier.

(a) Pour que deux séries statistiques aient la même moyenne, il suffit qu'elles aient la même médiane.

(b) Pour que deux séries statistiques aient la même moyenne, il faut qu'elles aient la même médiane.

(c) Quelle que soit la série statistique, la moyenne et la médiane sont égales.

(d) Il existe une série statistique de moyenne et de médiane égales.

(e) Quelle que soit la série statistique, la moyenne appartient à l'intervalle $[\,Q_1\,;Q_3\,]$.

Exercice 14 Deux élèves, lassés d'attendre leurs copies de mathématiques, ont fait une enquête et ont obtenus les résultats suivants.

Professeur Tournedos : temps d'attente médian 46 jours, écart interquartile : 90 jours.

Professeur Parasol : temps d'attente médian 44 jours, écart interquartile : 10 jours.

Ces élèves se rencontrent et pestent. Dupont s'exclame : « Avec mon professeur, un devoir est rendu rapidement et l'autre, il faut attendre trois mois. » Dupond vocifère : « Avec le mien, il faut toujours attendre un mois et demi ! » De quels professeurs parlent-il ?

Exercice 15 ⓢ Nous allons étudier une fonction Python qui nous donnera la valeur de différents indices d'une série statistique que l'on aura préalablement entrée dans une *liste* en écrivant `L=[2,5,1,17]` par exemple. Les différents termes s'appellent `L[0]`, `L[1]`, ... et la commande `len(L)` en donne la longueur. Pour de plus amples informations sur les listes Python, vous pouvez regarder le cahier *Algo à gogo* en page 317.
Colette a écrit un programme Python en page suivante mais, comme d'habitude, elle l'a barbouillé de pâte à la noisette.

1. Que produit la fonction `So` ?
2. Compléter la ligne 7 pour que la fonction `Mo` retourne la moyenne de la série `L`.
3. Compléter la ligne 13 pour que la fonction `EcT` retourne l'écart-type de la série `L`.
4. On remarque que la fonction `Mo` est appelée de multiples fois dans `EcT`. Comment faire pour *soulager* la machine ?
5. Compléter la fonction `IntME` afin qu'elle retourne le pourcentage des valeurs de la série `L` appartenant à un fameux intervalle.

6. Transformer la boucle `while` en boucle `for` dans la fonction `IntME`.
7. Exécuter la fonction `SMEI` pour les listes `A=[0,1]`, `B=[1,2,3]`, `C=[2,4,6,8,10,12]`, `D=[3,4,6,8,10,11]` et `E=[3,5,6,7,9,11,13,19,20]`. Que remarque-t-on ?

```
1  def So(L) :
2      S=0
3      for i in range(len(L)) :
4          S=S+L[i]
5      return S

6  def Mo(L) :
7      m=...
8      return m

9  def EcT(L) :
10     c=0
11     for i in range(len(L)) :
12         c=c+(L[i]-Mo(L))**2
13     e=...
14     return e
```

```
15 def IntME(L) :
16     m=Mo(L)
17     e=EcT(L)
18     k=0
19     i=0
20     while i < len(L) :
21         if (L[i]>=m-e) and
       ...:
22             k=...
23         i=i+1
24     p=k*100/len(L)
25     return ...

26 def SMEI(L) :
27     return So(L), Mo(L), EcT(L),
       IntME(L)
```

Sautez à présent vers les pages 303 et 305 et faites les devoirs n°s 16 et 17.

Corrigé des exercices

STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Exemple introductif : Pour les trois groupes, on obtient les indices suivants : $\overline{x}_\alpha = \overline{x}_\beta = \overline{x}_\gamma = 10.2$, $Med_\alpha = 11$, $Med_\beta = Med_\gamma = 9$. Avec ces indices statistiques, nous pouvons dire que les élèves des trois groupes ont en moyenne les mêmes résultats. En revanche, les résultats des groupes β et γ sont moins bons car au moins la moitié ne sont pas à la moyenne. Si l'on calcule de nouveaux indices, $Q_{1,\alpha} = Q_{1,\gamma} = 7$, $Q_{1,\beta} = 4$, $Q_{3,\alpha} = Q_{3,\gamma} = 13$, $Q_{3,\beta} = 14$, $IQ_\alpha = IQ_\gamma = 6$, $IQ_\beta = 10$, on observe de plus que les résultats du groupe β sont beaucoup moins homogènes, plus dispersés que ceux des autres groupes.

Exercice 1 L'âge médian dans le monde est 29 ans. Gaston a 32 ans.

(a) Au moins la moitié des personnes dans le monde sont moins âgées que Gaston : Vrai, $Med \leqslant G$.

(b) La moitié des personnes dans le monde sont plus âgées que Gaston : Faux, $G \geqslant Med$.

(c) Gaston a vécu plus longtemps que 50 % des personnes vivantes : Vrai, $Med \leqslant G$.

(d) La population mondiale est en moyenne plus jeune que Gaston : Faux, on ne sait rien de l'âge moyen.

(e) L'âge cumulé du chat et de la mouette est supérieur à celui de Gaston : cela paraît improbable tout de même, à moins qu'il ne s'agisse d'âge mental.

Exercice 2 VouF Médian

(a) La médiane peut être un nombre négatif : Vrai, par exemple si toutes les valeurs le sont.

(b) Si la médiane est nulle alors toutes les données sont égales : Faux, $\{-2; 2\}$ par exemple.

(c) La médiane ne prend pas en compte les valeurs extrêmes de la série : Vrai, elle ne prend pas en compte leur valeur mais le fait qu'elles soient extrêmes. Par exemple, $\{-2; 2\}$ et $\{-10; 10\}$ ont même médiane.

(d) Si l'on ajoute ou retranche un même nombre à toutes les valeurs de la série, la médiane n'est pas modifiée : Faux, $\{-2; 2\}$ et $\{-2+5; 2+5\}$ n'ont pas même médiane.

(e) Si l'on multiplie (ou divise) par 2 toutes les valeurs de la série, alors la médiane aussi : Vrai, mais on se souvient que la médiane n'est pas toujours unique. Par exemple, 3 est une valeur médiane de $\{1; 5\}$ et de $\{2; 10\}$ même si l'on choisit généralement 6 pour cette dernière série.

Exercice 3

1. S'il a eu 10, 10 et 4, sa note médiane est 10 et sa moyenne $\frac{10\times2+4}{3} = 8$ donc la réponse est : Oui.
2. Pour avoir 13 de moyenne sur les cinq devoirs, il faut que la somme de toutes ses notes soit de $5\times13 = 65$. Or, la somme de ses notes est actuellement de $3\times8 = 24$. Il lui manque donc $65-24 = 41$ points sur deux devoirs ce qu'il ne pourra obtenir. La réponse est donc : Non.
3. Pour avoir une moyenne d'au moins 11, la somme de ses notes doit être supérieure à $5\times11 = 55$ et il lui faut donc plus de $55-24 = 31$ points sur les deux derniers devoirs ce qui fait donc une moyenne d'au moins $\frac{31}{2} = 15,5$ sur ceux-ci. Connaissant Clotaire, cela n'est pas gagné.

Exercice 4 VouF Moyen

(a) La moyenne peut être un nombre négatif : Vrai, par exemple si toutes les valeurs le sont.

(b) Si la moyenne est nulle alors toutes les données sont égales : Faux, $\{-2;2\}$ par exemple.

(c) La moyenne ne prend pas en compte les valeurs extrêmes de la série : Faux, $\{1;2;3\}$ et $\{1;2;9\}$ n'ont pas même moyenne.

(d) Si l'on ajoute ou retranche un même nombre à toutes les valeurs de la série, la moyenne n'est pas modifiée : Faux, $\{-2;2\}$ et $\{-2+5;2+5\}$ n'ont pas même médiane.

(e) Si l'on multiplie (ou divise) par 2 toutes les valeurs de la série, alors la moyenne aussi : Vrai.

Exercice 5 VouF Quartile

(a) Le troisième quartile est toujours positif : Faux, si toutes les valeurs sont négatives par exemple.

(b) On a toujours $Med > Q_1$: Faux, on peut avoir $Med = Q_1$.

(c) L'écart interquartile est un nombre positif : Vrai car $IQ = Q_3 - Q_1$ et $Q_1 \leqslant Q_3$.

(d) La médiane est dans l'intervalle interquartile : Vrai car $Q_1 \leqslant Med \leqslant Q_3$.

(e) Le premier quartile est inférieur ou égal à l'écart interquartile : Faux, $\{5;6;7\}$ par exemple.

Exercice 6 VouF Écart-type

(a) L'écart-type peut être un nombre négatif : Faux puisque c'est la racine carrée d'un nombre positif.

(b) Si l'écart-type est nul alors toutes les données sont égales : Vrai. Tous les nombres $(x_i-\overline{x})^2$ doivent alors être nuls et donc toutes les valeurs x_i doivent être égales à leur moyenne $\overline{x}$.

(c) L'écart-type ne prend pas en compte les valeurs extrêmes de la série : Faux. Bien au contraire, plus les valeurs sont extrêmes, plus le carré de leur écart à la moyenne est grand et donc plus elles rentrent en compte dans le calcul de σ.

(d) Si l'on ajoute ou retranche un même nombre à toutes les valeurs de la série, l'écart-type n'est pas modifié : Vrai, puisque l'on ajoute ajoute ou retranche ce même nombre à la moyenne, les écarts ne sont pas modifiés.

(e) Si l'on multiplie(ou divise) par 2 toutes les valeurs de la série, alors l'écart-type aussi : Vrai puisque l'on effectue la même opération sur la moyenne et l'on peut donc factoriser par 2^2. Pour finir, $\sqrt{2^2} = 2$.

(f) Si l'on multiplie toutes les valeurs de la série par -2, alors l'écart-type aussi : Faux, par $\sqrt{(-2)^2} = 2$.

Exercice 7 VouF Boîtes

(a) Si l'on ajoute 10 à toutes les valeurs de la série, alors la longueur de la boîte augmente : Faux, elle est juste décalée de 10 sur l'axe.

(b) Si l'on ajoute 10 uniquement à la valeur maximale de la série, alors la longueur de la boîte augmente : Faux, seule la moustache de droite rallonge.

(c) La médiane se trouve toujours au milieu de la boîte : Faux, elle se trouve dans la boîte mais pas nécessairement au milieu.

(d) On peut lire la moyenne de la série : Faux, mais on peut parfois la rajouter.

(e) Un diagramme en boîte peut ne pas avoir de « moustache » : Vrai, lorsque $Q_1 = Med = Q_3$.

Exercice 8

1. On a $e_A = 16 - 6 = 10$, $Mod_A = 10$, $\overline{x}_A = \frac{6+6+8+...+16}{15} = 11,2$, $Q_{1,A} = 10$ (4e valeur p.o.c.), $Med_A = 11$ (8e valeur p.o.c.), $Q_{3,A} = 13$ (12e valeur p.o.c.), $IQ_A = 13 - 10 = 3$ et $\sigma_A \simeq 2,9$.
   On a $e_B = 20 - 6 = 14$, $Mod_B = 6$, $\overline{x}_B = \frac{6+6+...+20}{14} = 11,5$, $Q_{1,B} = 6$ (4e valeur p.o.c.), $Med_B = 10,5$ (entre 7e et 8e valeur p.o.c.), $Q_{3,B} = 14$ (11e valeur p.o.c.), $IQ_B = 14 - 6 = 8$ et $\sigma_B \simeq 5$.
   La moyenne de la classe est d'environ $\overline{x}_{A,B} = \dfrac{15\overline{x}_A + 14\overline{x}_B}{15+14} = 11,2$ comme ce que l'on pouvait attendre de deux groupes ayant la même moyenne.
2. Les deux groupes ont des moyennes et des médianes similaires, elles ont donc même tendance centrale. En revanche, leur étendue et, plus important, leur écart interquartiles sont bien différents : le groupe A est beaucoup plus homogène que le groupe B.
3. Le 16 étant la note maximale (et unique) du groupe A, seuls les indices sensibles aux valeurs extrêmes sont modifiés : mêmes mode, médiane, quartiles et IQ. L'étendue augmente de 3 $(19 - 16)$, la moyenne est augmentée de $\frac{3}{15} = 0,2$ et l'écart-type doit être recalculé.
4. Si le professeur multiplie les notes par $0,8$ puis leur rajoute 4, il en sera de même pour les moyennes : $\overline{x}'_A = 0,8\overline{x}_A + 4 = 0,8 \times 11,4 + 4 \simeq 13,1$ et $\overline{x}'_B = 0,8\overline{x}_B + 4 = 0,8 \times 11,4 + 4 \simeq 13$. Cela est possible car les valeurs extrêmes restent dans le domaine $[\,0\,;20\,]$: $0,8 \times 20 + 4 = 20$ et $0,8 \times 6 + 4 = 8,8$.

Exercice 9 Si la médiane doit rester égale à 7, on doit rajouter une valeur supérieure ou égale à 7 et une inférieure ou égale à 7. Pour que l'étendue soit de 7, on doit rajouter soit 4 soit 12. Pour que la moyenne soit de 7, il faut que la somme de toutes les valeurs égale $7 \times 7 = 49$. On a déjà une somme de 38 donc il nous faut deux nombres dont la somme égale 11. On ne peut rajouter 12 et les entiers recherchés sont donc 4 et $11 - 4 = 7$.

Exercice 10 Accidents de chewing-gum

1. Voici le tableau complet :

Âge \ Sexe	Hommes	Femmes	Total
9 ans et moins	160	183	343
10 à 14 ans	694	312	**1006**
15 à 19 ans	229	47	**276**
20 à 34 ans	174	**127**	301
35 ans et plus	**73**	76	149
Total	**1330**	**745**	**2075**

2. On a $\frac{1330}{2075} \simeq 0,64$. Parmi les personnes hospitalisées suite à un accident de chewing-gum, 64 % sont des hommes.
3. Parmi l'ensemble des personnes hospitalisées, la fréquence des hommes âgés d'au moins 20 ans est de $\frac{174+73}{2075} = \frac{247}{2075}$.
4. (a) On a $\frac{160+694+229}{1330} \simeq 0,81$. Parmi les hommes hospitalisés, 81 % sont âgés de moins de 20 ans.
   (b) Donc, parmi les hommes hospitalisés, $100 - 81 = 19\,\%$ sont âgés d'au moins 20 ans.
5. On s'intéresse aux personnes hospitalisées âgées de 20 à 34 ans.
   (a) $174 > 127$ donc il y a plus d'hommes que de femmes parmi cette population.
   (b) Pour autant, $\frac{174}{1330} \simeq 13\,\% < 17\,\% \simeq \frac{127}{745}$ et cette tranche d'âge est moins à risque pour les hommes que pour les femmes.

Exercice 11 Stage de survie

1. Afin d'avoir la somme des coefficients dans la case E2, il faut y entrer $= B2 + C2 + D2$ ou $= SOMME(B2 : D2)$.
2. (a) Afin d'avoir la moyenne des notes obtenues la mission 1 dans la case B6, il faut y entrer $= SOMME(B3 : B5)/3$.
   (b) Lors de la recopie à droite de cette case, les "B" se changent en "C" puis en "D" et l'on alors obtient la moyenne aux autres missions.
3. (a) Afin d'avoir la moyenne pondérée des notes obtenues par Frodon dans la case E3, il faut y entrer $= (B3 * B2 + C3 * C2 + D3 * D2)/E2$.
   (b) Afin de recopier vers le bas cette formule, il convient de fixer la ligne 2 et éviter qu'ils se changent en 3 puis 4. On y met donc des "$" devant chacun d'entre eux : $= (B3 * B\$2 + C3 * C\$2 + D3 * D\$2)/E\$2$.
4. Dans la case E6, on souhaite obtenir la moyennes des moyennes pondérées. On peut donc y entrer $= (E3 + E4 + E5)/3$ ou $(B6 * B2 + C6 * C2 + D6 * D2)/E2$.

5. Voici le tableau complété :

	A	B	C	D	E
1		**Mission 1**	**Mission 2**	**Mission 3**	*Moyennes*
2	*Coefficients*	1,3	0,5	2	**3,8**
3	**Frodon**	13	17	16	**15,11**
4	**Gandalf**	18	12	19	**17,74**
5	**Aragorn**	18	16	10	**13,53**
6	*Moyennes*	**16,33**	**15**	**15**	**15,46**

On s'aperçoit qu'Aragorn a la moyenne globale la plus faible bien qu'il ait brillament réussi la première mission mais celle-ci a un poids bien moins important que la troisième mission qu'il a plutôt ratée. Gandalf n'a pas réussi la deuxième mission mais celle-ci a un coefficient faible et sa moyenne générale reste excellente.

Exercice 12

1. 75 % des farendoliens sont jeunes et dorment 8 h par nuit tandis que les 25 % restants sont moins jeunes et dorment 6 h. 40 % des villeneuvieillois sont jeunes et dorment 8 h30 par nuit tandis que les 60 % restants sont moins jeunes et dorment 6 h30.
2. $\overline{S_F} = \frac{75\times 8+25\times 6}{100} = 7,5 = 7\,\text{h}30$ et $\overline{S_V} = 0,4\times 8,5+0,6\times 6,5 = 7,3 = 7\,\text{h}18$.
3. Ainsi, bien que les jeunes et les moins jeunes de La Fare-en-Dole dorment chacun moins que ceux de Villeneuve-la-Vieille, on dort moins à Villeneuve-la-vieille qu'à La Fare-en-Dole. En effet, la part des jeunes, ceux qui dorment plus, est bien moins importante à Villeneuve qu'à La Fare.
4. On ne peut pas calculer la moyenne du temps de sommeil des jeunes sur l'ensemble des deux bourgades car on ne connaît pas la population globale de ces cités. L'une pourrait en effet être bien plus peuplée que l'autre.

Exercice 13 VouF Médian moyen

(a) Pour que deux séries statistiques aient la même moyenne, il suffit qu'elles aient la même médiane : Faux. $\{1;2;3\}$ et $\{1;2;4\}$ ont même médiane mais pas même moyenne, par exemple.

(b) Pour que deux séries statistiques aient la même moyenne, il faut qu'elles aient la même médiane : Faux. $\{1;2;3\}$ et $\{0;1;5\}$ ont même moyenne mais pas même médiane, par exemple.

(c) Quelle que soit la série statistique, la moyenne et la médiane sont égales : Faux. Voir les deux exemples précédents, par exemple.

(d) Il existe une série statistique de moyenne et de médiane égales : Vrai, $\{1;2;3\}$ par exemple.

(e) Quelle que soit la série statistique, la moyenne appartient à l'intervalle $[\,Q_1\,;Q_3\,]$. Faux. $\{0;1;2;3;24\}$: $Q_1 = 1$, $Q_3 = 3$ et $\overline{x} = 6$.

Exercice 14 Dupont a le Professeur Tournedos car il est peu étonnant d'attendre entre $46-45 = 1$ et $46+45 = 91$ jours. Dupond, lui, a le Professeur Parasol car il est d'usage d'attendre entre $44-5 = 39$ et $44+5 = 49$ jours.

Exercice 15 Python statistique

1. La fonction `So` calcule la somme de toutes les valeurs de la série `L`.
2. Pour que la fonction `Mo` retourne la moyenne de la série `L`, la ligne 7 doit être : `m=So(L)/len(L)`.
3. Pour que la fonction `EcT` retourne l'écart-type de la série `L`, la ligne 13 doit être : `e=sqrt(c/len(L))`.
4. Pour *soulager* la machine dans la fonction `EcT`, on peut affecter une variable `m=Mo(L)` et faire les calculs en appelant `m` et non plus `Mo(L)`.
5. Pour que la fonction `IntME` retourne le pourcentage des valeurs de la série `L` appartenant à l'intervalle $[\overline{x}-\sigma\,;\overline{x}+\sigma\,]$,
   la ligne 21 doit être `if (L[i]>=m-e) and (L[i]<=m+e) :`
   la ligne 22 `k=k+1`
   et la ligne 25 `return p`.
6. Pour transformer la boucle `while` en boucle `for` dans `IntME`, il faut remplacer les lignes 19 à 23 par :

```
19|   for i in range(len(L)) :
20|      if (L[i]>=m-e) and (L[i]<=m+e) :
21|         k= k+1
```

7. `SMEI([0,1])` retourne `(1, 0.5, 0.5, 100.0)`,
   `SMEI([1,2,3])` retourne `(6, 2.0, 0.82, 33.33)`,
   `SMEI([2,4,6,8,10,12])` retourne `(42, 7.0, 3.42, 66.67))`,
   `SMEI([3,4,6,8,10,11])` retourne `(42, 7.0, 2.94, 33.33)` et
   `SMEI([3,5,6,7,9,11,13,19,20])` retourne `(93, 10.33, 5.68, 66.67)`.
   On remarque que la proportion des deux tiers dans cet intervalle n'est pas garantie, qu'il y a des effets de seuil, par exemple entre `C` et `D`.

Chapitre XIV

ÉCHANTILLONNAGE

Sommaire

1 Échantillons 241
2 Fluctuation d'échantillonnage 242
3 Exercices 244
Corrigé des exercices 246

Vous vous baladez nonchalamment sur une plage caraïbéenne, sifflotant la ballade de la mer salée, et découvrez soudain un vestige du temps de la flibuste : là, à vos pieds, étincelle une pièce en cuivre et ancestrale, marquée du sceau de Rambo II, obscur monarque taciturne. Après avoir bien vérifié que ses côtés étaient distincts et vous être réjoui de cette époustouflante découverte, vous la lancez cent fois et comptez le nombre de faces du souverain obtenues. Si vous avez cent faces, vous vous dites certainement que cette belle pièce est vraiment déséquilibrée, tout comme l'individu qui y est représenté. De même, si vous en obtenez 90 ou 80. Mais à partir de combien de faces obtenues vous dites-vous que cette pièce est tout aussi bien équilibrée que vous et que seul le hasard fait que vous n'en avez pas obtenu exactement cinquante ? 70 faces ? 60 ? 55 ? Nous allons donner un cadre permettant une telle prise de décision.

Un échantillon est un ensemble d'individus extraits d'une population étudiée. Dans quelle mesure est-il représentatif de cette population ? Si l'on connaît les caractéristiques de la population étudiée, peut-on prévoir celles de l'échantillon ? Si l'on mesure les caractéristiques de l'échantillon, peut-on en déduire celles de la population entière ? Voici les questions auxquelles nous allons tenter de répondre.

1 Échantillons

Lancer 50 fois un dé cubique ou jeter 50 fois une pièce de monnaie. Voici deux situations où l'on répète 50 fois la même expérience de manière indépendante. Si l'on note la liste des résultats, on dit que l'on réalise un échantillon de taille 50.

• Un **échantillon de taille** n est la liste des résultats obtenus par n répétitions indépendantes de la même expérience.
Ces situations correspondent souvent à des tirages avec remise. Toutefois, lorsque la population étudiée comporte un grand nombre d'éléments, on peut considérer que les répétitions restent indépendantes même si l'on effectue des tirages sans remise. Par exemple, lorsque l'on observe 50 personnes prises au hasard parmi la population d'une grande ville et que l'on note la couleur de leurs yeux ou lorsque l'on cueille 50 pommes d'un verger et que l'on note leur calibre, on peut considérer que l'on réalise un échantillon de taille 50.

Âge On reprend l'exemple des 520 élèves du lycée de la Fare-en-Dole du chapitre des statistiques précédent (cf. p. 224), on en interroge 30 pris au hasard et l'on note leur âge. On obtient un échantillon de taille 30 si l'on considère que 520 est très grand par rapport à 30 ou si l'on s'autorise à interroger plusieurs fois le même élève.

Exercice 1 Donner un exemple d'échantillon de taille 12 que l'on pourrait obtenir en :

(a) lançant un dé à six faces,

(b) tirant avec remise dans une urne contenant des boules de teinte abricot, mandarine et carotte.

Exercice 2 Passe ou File

1. Écrire une fonction Python `PouF` simulant un échantillon de taille `n` d'une expérience de lancer d'une pièce bien équilibrée. On pourra se référer à l'exercice n° 11 p. 196.
2. La modifier pour déséquilibrer la pièce telle sorte que pile soit trois fois plus probable que face.
3. Écrire une fonction `QontPouF` comptabilisant le nombre de piles dans une telle simulation d'un échantillon de taille `n`.
4. La modifier en une fonction `FreqPouF` donnant la fréquence de piles dans un tel échantillon.

2 Fluctuation d'échantillonnage

• Lorsque l'on réalise une expérience, on appelle **probabilité d'apparition** (ou de réalisation) d'un événement la **fréquence** de cet événement **dans la population totale**.

Âge On sait que 25% des élèves sont âgés de 19 ans. La probabilité d'apparition de l'âge 19 parmi les élèves du lycée Henri Matisse de La Fare-en-Dole est donc de 0,25.

En revanche, la fréquence d'apparition d'un tel âge dans notre échantillon de taille 30 sera certainement différente. De même, si l'on réalise un autre échantillon, cette fréquence sera tout aussi certainement différente.
On dit que **la fréquence d'apparition dans un échantillon fluctue autour de la probabilité d'apparition dans la population**.

• Pour nous rassurer, nous nous remémorons une version informelle de la loi des grands nombres grâce à l'exercice suivant.

Exercice 3 (∫) Exécuter la fonction `FreqPouF` de l'exercice 2 pour des valeurs de plus en plus grandes de `n`. Qu'observe-t-on ?

Propriété *Loi des grands nombres*
Lorsque l'on répète ***un grand nombre de fois*** *et de manière indépendante une même expérience aléatoire d'univers* Ω *et de loi de probabilité* P*, la* ***fréquence*** *obtenue pour* ***chaque issue est très proche*** *de la* ***probabilité*** *de cette issue.*

Autrement dit, la distribution des fréquences (empirique) dans des échantillons de taille n se rapproche de la loi de probabilité (théorique) lorsque n devient grand. Plus précisément, on peut démontrer que dans la plupart des cas, on a la propriété informelle suivante.

Propriété *p désigne la probabilité de réalisation de l'expérience et f la fréquence de réalisation de cette expérience dans un échantillon de taille n. Lorsque n est grand, on a généralement* $\boldsymbol{|p-f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Autrement dit, l'écart entre la proportion théorique (p) et la fréquence observée dans l'échantillon (f) ne dépasse généralement pas $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Ceci est vrai *dans la plupart des cas*, c.-à-d. quand $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ et $n \geqslant 25$. Observons que *généralement* signifie ici que l'inéquation est vérifiée dans 95 % des cas :

Exercice 4 (∫) Écrire une fonction `EcartPouF` qui, dans `N` échantillons de taille `n`, retourne la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ à l'aide de la fonction `FreqPouF` de l'exercice 2. L'exécuter pour des valeurs de plus en plus grandes. Qu'observe-t-on ?

Cette propriété est très utile en pratique :

• D'un premier point de vue, si l'on connaît la probabilité p, la fréquence f appartient généralement à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, appelé **intervalle de fluctuation**.

Âge On a $p = 0,25$ et $n = 30$ est « grand » donc si l'on interroge 30 élèves, il y a de grandes chances que la part de ceux ayant 19 ans appartienne à l'intervalle $\left[0,25 - \frac{1}{\sqrt{30}} ; 0,25 + \frac{1}{\sqrt{30}}\right] \simeq [\,0,067 ; 0,43\,]$. Autrement dit, dans un échantillon de 30 élèves du lycée, il y a de grandes chances qu'il y en ait entre 2 et 13 ayant 19 ans.
En effet, $0,067 \times 30 = 2,01$ et $0,43 \times 30 = 12,9$.

Exercice 5 On joue à « pile ou face » avec une pièce de monnaie bien équilibrée. Déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence d'apparition de « pile » pour 100 lancers puis pour 400 lancers.

• Réciproquement, supposons que l'on ne connaisse pas *a priori* la probabilité p. On réalise un échantillon de taille n et l'on obtient une fréquence d'apparition f. La probabilité p appartient alors généralement à l'**intervalle de confiance** (ou fourchette de sondage) $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Exercice 6 On a interrogé 1 000 individus et 54 % d'entre eux ont affirmé qu'ils n'appréciaient pas les brocolis. Peut-on en déduire que la majorité des personnes n'aiment pas les brocolis ?

L'intervalle de fluctuation permet donc de prévoir, d'obtenir une approximation d'un résultat (f) d'une expérience à partir d'un modèle théorique (p).

L'intervalle de confiance permet lui de conjecturer un modèle théorique (p) à partir des résultats d'une expérience (f).

Ils fournissent aussi des aides à la décision. Par exemple, on réalise un échantillon sur une population où la probabilité p d'un caractère est connue et l'on obtient une fréquence d'apparition f pour cet échantillon :

- Si f appartient à l'intervalle de fluctuation, on dira que f et p sont compatibles et que seul le hasard explique l'écart entre f et p.
- En revanche, si f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, on considèrera que f et p ne sont pas compatibles. Il faudra alors chercher une autre explication que le hasard à cet écart entre f et p.

3 Exercices

Exercice 7 Deux fleuristes doivent livrer des compositions florales constituées uniquement de fleurs fuchsia et saumon, avec la condition suivante : *la couleur de chaque fleur doit être choisie au hasard, avec une même probabilité d'avoir une fleur fuchsia qu'une fleur saumon.*
Le premier fleuriste livre une composition de 100 fleurs dont 43 fuchsia.
Le second en livre 2500 dont 1150 fuchsia.

1. Calculer, dans chaque cas, la proportion de fleurs fuchsia.
   À première vue, lequel des deux fleuristes a le mieux respecté son contrat ?
2. Calculer l'intervalle de fluctuation dans chacun des deux cas puis conclure.

Exercice 8 Un sondage effectué auprès d'un échantillon de clients d'une chaîne de restauration bâclée révèle que 45 % préfèrent les glaces couleur chocolat et 55 % celles appelées vanille. Que peut-on conclure de ce sondage si l'on a interrogé 100 personnes ? et si l'on a interrogé 400 personnes ? et si l'on en a interrogé 1000 ?

Exercice 9 On a interrogé 1000 habitants de La Fare-en-Dole et 52 % ont affirmé aller danser le samedi soir. Peut-on en conclure que la majorité des farendoliens dansent ces soirs-là ?

Exercice 10 Dans une région où il y a autant de femmes que d'hommes, les entreprises sont tenues de respecter la parité. L'entreprise A emploie 100 personnes dont 43 femmes et l'entreprise B en emploie 2500 dont 1150 femmes.

1. (a) Calculer le pourcentage de femmes dans l'entreprise B.
   (b) Que vous inspire la comparaison des pourcentages de femmes dans les deux entreprises ?
2. Si respecter la parité revient à ne pas tenir compte du caractère homme-femme, on peut considérer l'ensemble des salariés d'une entreprise comme un échantillon prélevé au hasard de la population de cette région.
   (a) Déterminer des intervalles de fluctuation relatifs aux deux échantillons A et B.
   (b) Ces résultats confortent-ils votre première impression ?
3. Dans une autre région, une entreprise C emploie 400 salariés dont 217 femmes. Peut-on estimer qu'il y a plus de femmes que d'hommes dans cette région ?

Évadez-vous à présent vers la page 309 et faites le devoir n° 18.

Corrigé des exercices

ÉCHANTILLONNAGE

Exercice 1 Échantillon de taille 12

(a) Dé à six faces : 2, 3, 6, 6, 3, 1, 4, 5, 2, 1, 6, 5.

(b) Boules abricot, mandarine et carotte : A, A, C, M, C, M, A, M, M, C, A, A.

Exercice 2 à Exercice 4 Passe ou File

Voici les fonctions demandées avec la version bien équilibrée neutralisée par des $\#$.
La version déséquilibrée doit vérifier $P(face) + P(pile) = P(face) + 3P(face) = 1$ donc $P(Face) = \frac{1}{4}$ et $P(pile) = \frac{3}{4}$. Le décalage de $+0,75$ en ligne 6 fait que la commande donne un nombre aléatoire dans $[\,0,75\,;1,75\,[$ et il y a bien trois fois plus de chance qu'un tel nombre ait une partie entière égale à 1 qu'égale à 0.
On observe que plus `n` est grand, plus la fonction `FreqPouF` retourne un nombre proche de $0,75$ (ou $0,5$ selon la version).
Dans la fonction `EcartPouF`, il est essentiel que la boucle calcule à chaque fois une fréquence dans un nouvel échantillon et elle doit donc faire appel à `FreqPouF` à chaque passage. L'écart lui est fixe, il ne dépend que de `n` et l'on peut donc le calculer une bonne fois pour toutes. On observe assez rapidement que la fonction `EcartPouF` retourne une proportion supérieure à $0,95$. Essayer plusieurs `EcartPouF(50,50)` par exemple.

```
1  from math import sqrt
2  from random import *
3  def PouF(n) :
4     for i in range(n) :
5        # if randint(0,1)==0 :
6        if int(random()+0.75)==0 :
7           print("Face")
8        else :
9           print("Pile")
10
11 def QontPouF(n) :
12    q=0
13    for i in range(n) :
14       # if randint(0,1)==1 :
15       if int(random()+0.75)==1 :
16          q=q+1
17    return(q)
18
```

```
19| def FreqPouF(n) :
20|     q=0
21|     for i in range(n) :
22|         # if randint(0,1)==1 :
23|         if int(random()+0.75)==1 :
24|             q=q+1
25|     return(q/n)
26| def EcartPouF(N,n) :
27|     c=0
28|     e=1/sqrt(n)
29|     for i in range(N) :
30|         # if abs(FreqPouF(n)-0.5)<=e :
31|         if abs(FreqPouF(n)-0.75)<=e :
32|             c=c+1
33|     return(c/N)
```

Exercice 5 La pièce de monnaie est bien équilibrée donc $p = 0,5$ et un intervalle de fluctuation de la fréquence d'apparition de « pile » pour 100 lancers est
$I_{100} = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [\,0,4\,;0,6\,]$ (entre 40 et 60 « pile »)
et celui pour 400 lancers, $I_{400} = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [\,0,45\,;0,55\,]$
(entre $400 \times 0,45 = 180$ et $400 \times 0,55 = 220$ « piles »).

Exercice 6 On a $f = 0,54,$ et 1000 est grand donc un intervalle de confiance de la proportion des gens n'appréciant pas des brocolis est
$I_{brocolis} = \left[0,54 - \frac{1}{\sqrt{1000}}\,; 0,54 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [\,0,508\,;0,571\,].$
On peut donc penser que la majorité des individus n'apprécient pas les brocolis.

Exercice 7 Deux fleuristes doivent livrer des fleurs fuchsia et saumon

1. On a $f_1 = \frac{43}{100} = 0,43$ et $f_2 = \frac{1150}{2500} = 0,46$ donc, à première vue, le second fleuriste a mieux respecté son contrat que le premier.
2. On a $p = 0,5$ d'où les intervalles de fluctuation
   $I_1 = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{100}}\,; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [\,0,4\,;0,6\,]$
   et $I_2 = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{2500}}\,; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2500}}\right] = [\,0,48\,;0,52\,].$
   Puisque $f_1 \in I_1$ et $f_2 \notin I_2,$ c'est le premier fleuriste qui a le mieux respecté son contrat.

Exercice 8 On a $f = 0,45$ et $100 \leqslant 400 \leqslant 1000$ grands d'où les intervalles de confiance :
$I_{100} = \left[0,45 - \frac{1}{\sqrt{100}}\,; 0,45 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [\,0,35\,;0,55\,]$ qui ne contient pas $0,50,$
$I_{400} = \left[0,45 - \frac{1}{\sqrt{400}}\,; 0,45 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [\,0,4\,;0,5\,],$ $0,50$ est au bord
et $I_{1000} = \left[0,45 - \frac{1}{\sqrt{1000}}\,; 0,45 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [\,0,42\,;0,48\,]$ qui contient $0,50.$

CORRIGÉS

Donc,

• si l'on a interrogé 100 personnes, on ne peut conclure que la majorité des clients préfèrent les glace appelées vanille,

• si l'on a interrogé 400 personnes, on ne peut conclure que les clients préfèrent davantage les glaces appelées vanille

• et si l'on a interrogé 1000 personnes, on peut conclure qu'une stricte majorité de clients préfèrent les glaces appelées vanille.

Exercice 9 On a $f = 0,52$ et 1000 est grand donc un intervalle de confiance est $\left[0,52 - \frac{1}{\sqrt{1000}}\,;0,52 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] \simeq [\,0,488\,;0,552\,]$. On ne peut donc conclure que la majorité des farendoliens dansent les samedis soirs puisque p pourrait très bien être égal à $0,49$ par exemple.

Exercice 10

1. (a) On a $\frac{1150}{2500} = 0,46$ et l'entreprise B emploie 46 % de femmes.
   (b) Puisque 43 % < 46 %, il semble que l'entreprise B respecte bien plus la parité que l'entreprise A.
2. (a) Puisque l'ensemble des salariés de chacune des entreprises peut être considéré comme un échantillon de la population de cette région où il y a autant de femmes que d'hommes, on peut supposer que $p = 0,5$. Puisque $n_A = 100$ est grand, un intervalle de fluctuation relatif à l'entreprise A est
   $I_A = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n_A}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n_A}}\right] = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{100}}\,;0,5 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [\,0,4\,;0,6\,]$.
   Puisque $n_B = 2500$ est grand, un intervalle de fluctuation relatif à l'entreprise B est
   $I_B = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n_B}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n_B}}\right] = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{2500}}\,;0,5 + \frac{1}{\sqrt{2500}}\right]$
   $I_B = [\,0,48\,;0,52\,]$.
   (b) Puisque $f_A = 0,43 \in I_A$ et $f_B = 0,46 \notin I_B$, on peut penser que l'entreprise A respecte la parité, contrairement à l'entreprise B.
3. On a $n_C = 400$ grand et $f_C = \frac{217}{400} \simeq 0,543$, un intervalle de confiance de la proportion de femmes dans cette autre région est
   $I_C = \left[f_C - \frac{1}{\sqrt{n_C}}\,;f_C + \frac{1}{\sqrt{n_C}}\right] = \left[\frac{217}{400} - \frac{1}{\sqrt{400}}\,;\frac{217}{400} + \frac{1}{\sqrt{400}}\right]$
   $I_C \simeq [\,0,493\,;0,593\,]$.
   Puisque 0,5 > 0,493, on ne peut pas vraiment penser qu'il y a plus de femmes que d'hommes dans cette autre région.

DEVOIRS CORRIGÉS

Devoir n° 1

Le petit papier plat

Ce devoir est associé au chapitre I, *Les nombres réels*.

L'autre jour, en rentrant de l'école, on marchait tous les deux en prenant soin d'éviter les rainures du sol parce qu'on ne sait jamais et puis tout à trac, Alceste m'a proposé de partager ses derniers croissants. J'étais très étonné car il faut dire qu'Alceste ne partage jamais, jamais ses croissants, ni ses pains aux chocolat, ni ses brioches d'ailleurs. En plus, il a déjà tout mangé à cette heure-ci d'habitude et c'est pourquoi il est toujours pressé de rentrer pour se ravitailler. Bref, j'ai donc profité de l'aubaine et c'était vachement bon.

Rassasiés, nous sommes allés à l'arrière de l'automobile, dans le terrain vague, en rigolant d'Agnan qui s'est fait gronder par le Bouillon à la récré parce que Rufus lui a dit qu'il s'était disputé avec Eudes car Agnan ne voulait pas encore aider Clotaire au contrôle de géographie, c'est vrai quoi à la fin, et le Bouillon, lui, n'a rien compris mais il lui a quand même dit de bien le regarder dans les yeux.

Ensuite, on a failli s'ennuyer mais il nous restait les papiers d'emballage des croissants, tout translucides, imprégnés de beurre, sentant encore l'odeur appétissante de notre goûter et l'on a décidé de les plier le plus possible, sans s'arrêter, jusqu'à ce qu'ils aient une épaisseur d'au moins dix mètres ! Le premier arrivé est un champion.

Alceste pliait le sien toujours en trois et moi, j'ai décidé de le plier toujours en deux car je voulais gagner. En plus, il mettait deux secondes pour plier en trois alors que moi cela ne me prenait qu'une seconde. Bon, c'était pas facile avec ces papiers de 0,1 mm d'épaisseur mais heureusement qu'avec tout ce gras, on pouvait les plier indéfiniment, même quand il furent super-épais. Hé bien, figure-toi qu'on a réussi tous les deux !

Sais-tu qui a gagné ?

Corrigé du devoir n° 1

Le petit papier plat

Puisqu'Alceste plie son papier toujours en trois, son épaisseur (celle du papier, pas celle d'Alceste) triple à chaque étape.
Ayant au départ une épaisseur de 0,1 mm, après la première étape, le papier est épais de $3 \times 0,1 = 0,3$ mm, après deux étapes, il a une épaisseur de $3 \times 3 \times 0,1 = 0,9$ mm et après $n \in \mathbb{N}$ étapes, le papier d'Alceste a une épaisseur de $0,1 \times 3^n$ mm.
On cherche à partir de combien d'étapes le papier d'Alceste dépasse $10\,\text{m} = 10^4$ mm, ce qui revient à résoudre l'inéquation $\frac{1}{10} \times 3^n \geqslant 10^4$ *i.e.* $3^n \geqslant 10^5$.
À la calculatrice, on obtient $3^{10} < 10^5 \leqslant 3^{11}$.
Il faudra donc 11 étapes et donc $11 \times 2\,\text{s.} = 22$ secondes à Alceste pour que son pliage dépasse 10 mètres.

De façon analogue, le papier de Nicolas double d'épaisseur à chaque étape.
Après $n \in \mathbb{N}$ étapes, il a donc une épaisseur de $0,1 \times 2^n$ mm et l'on cherche n tel que $\frac{1}{10} \times 2^n \geqslant 10^4$ *i.e.* $2^n \geqslant 10^5$.
À la calculatrice, on obtient $2^{16} < 10^5 \leqslant 2^{17}$.
Il faudra donc 17 étapes et donc $17 \times 1\,\text{s.} = 17$ secondes à Nicolas pour que son pliage dépasse 10 mètres.

Nicolas est le champion !

Devoir n° 2

QUELLES MOYENNES ?

Ce devoir est associé au chapitre II, *Expressions algébriques*.

Soient x et y deux réels strictement positifs. Nous allons définir quatre moyennes différentes de ces nombres, toutes ayant un intérêt dans certains domaines.

- Vous connaissez certainement la moyenne arithmétique de ces deux nombres.
  Elle vaut $A = \ldots$
  Elle vérifie $A + A = \ldots$ et elle correspond au $\ldots$ du segment $[\,x\,;y\,]$.
- La moyenne géométrique de ces deux nombres est définie par $G = \sqrt{xy}$.
  Elle correspond au côté d'un carré de même aire qu'un $\ldots$ de côtés $\ldots$ et $\ldots$, d'où son nom.
- La moyenne harmonique de ces deux nombres est donnée par $H = \dfrac{2xy}{x+y}$.
  Elle correspond par exemple à la vitesse moyenne sur un trajet aller-retour à une vitesse x dans un sens et à une vitesse y dans l'autre.
- La moyenne quadratique de ces deux nombres est $Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.
  On peut ainsi calculer des moyennes sans que les valeurs positives et négatives ne se compensent. Elle est souvent utilisé en statistique.

1. Calculer ces différentes moyennes pour $x = 1$, $y = 2$ puis $x = 5$, $y = 3$ et enfin $x = 8$, $y = 8$.
2. Que vaut la moyenne quadratique du cosinus et du sinus d'un même angle ?
3. Trouver un lien algébrique entre A, G et H.
4. Montrer que H est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses de x et y.
5. Que se passe-t-il lorsque les nombres x et y sont égaux ?
6. On suppose désormais que $x \neq y$.
   Montrer que $A > H$. Indice : signe de la différence en réduisant au même dénominateur.
7. (a) En remarquant que $\sqrt{x}^2 = x$, justifier que $x - 2\sqrt{xy} + y > 0$.
   (b) Montrer alors que $A > G$.
8. (a) Déduire de la question 7a, l'inégalité $\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y} < 1$.
   (b) Montrer alors que $H < G$.
9. Montrer que $A < Q$. Indice : différence des carrés.
10. Supposons de plus que $x < y$. Justifier que $x < H$ et que $y > Q$.
11. Quelle suite d'inégalités a-t-on démontré ?

Corrigé du devoir n° 2

QUELLES MOYENNES ?

Soient x et y deux réels strictement positifs.

- La moyenne arithmétique de ces deux nombres est $\quad A = \dfrac{x+y}{2}$.
  Elle vérifie $A + A = \frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} = x + y$ et correspond au milieu du segment $[\,x\,;y\,]$.
- La moyenne géométrique de ces deux nombres est $\quad G = \sqrt{xy}$.
  Elle correspond au côté d'un carré de même aire qu'un rectangle de côtés x et y.
- La moyenne harmonique de ces deux nombres est $\quad H = \dfrac{2xy}{x+y}$.
- La moyenne quadratique de ces deux nombres est $\quad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

1. On a $\quad A(\,1\,;\,2\,) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \quad G(\,1\,;\,2\,) = \sqrt{2}, \quad H(\,1\,;\,2\,) = \dfrac{2\times1\times2}{1+2} = \frac{4}{3}$
   et $\quad Q(\,1\,;\,2\,) = \sqrt{\frac{1^2+2^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.
   On a $\quad A(\,5\,;\,3\,) = \frac{5+3}{2} = 4, \quad G(\,5\,;\,3\,) = \sqrt{15}, \quad H(\,5\,;\,3\,) = \dfrac{2\times5\times3}{5+3} = \frac{15}{4}$
   et $\quad Q(\,5\,;\,3\,) = \sqrt{\frac{5^2+3^2}{2}} = \sqrt{17}$.
   On a $\quad A(\,8\,;\,8\,) = \frac{8+8}{2} = 8, \quad G(\,8\,;\,8\,) = \sqrt{8^2} = 8, \quad H(\,8\,;\,8\,) = \dfrac{2\times8\times8}{8+8} = 8$
   et $\quad Q(\,8\,;\,8\,) = \sqrt{\frac{8^2+8^2}{2}} = \sqrt{8^2} = 8$.
2. On a $\quad Q(\,\cos(\alpha)\,;\,\sin(\alpha)\,) = \sqrt{\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. On a $\quad AH = \frac{x+y}{2} \times \frac{2xy}{x+y} = xy = G^2$.
4. On a $\quad \dfrac{1}{A\left(\frac{1}{x}\,;\,\frac{1}{y}\right)} = \dfrac{1}{\frac{1/x+1/y}{2}} = \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \dfrac{2}{\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}} = \dfrac{2xy}{x+y} = H(\,x\,;\,y\,)$.
5. Si $x = y > 0$, on a $\quad A = \frac{x+x}{2} = \frac{2x}{2} = x, \quad G = \sqrt{x^2} = x, \quad H = \frac{2x^2}{x+x} = \frac{x^2}{x} = x$
   et $\quad Q = \sqrt{\frac{x^2+x^2}{2}} = \sqrt{x^2} = x$: $\quad$ toutes ces moyennes sont égales à x.
6. Soient $x \neq y$. On a $\quad A - H = \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{2(x+y)} - \frac{4xy}{2(x+y)} = \frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{2(x+y)}$
   $A - H = \frac{x^2-2xy+y^2}{2(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{2(x+y)} > 0 \quad$ donc $\quad A > H$.
7. (a) On a $\quad x - 2\sqrt{xy} + y = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{xy} + \sqrt{y}^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 > 0$.
   (b) Ainsi, $\quad A - G = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{xy} + y) > 0 \quad$ et $\quad A > G$.
8. (a) D'après le 7a, on a $\quad x - 2\sqrt{xy} + y > 0 \Longrightarrow x + y > 2\sqrt{xy} \Longrightarrow 1 > \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$.

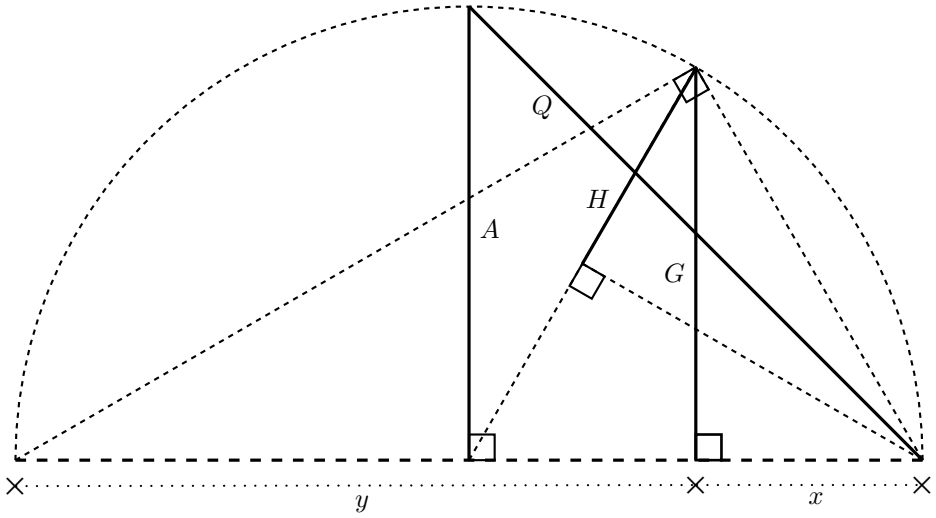
(b) Ainsi, $\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} < 1 \Longrightarrow \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \times \sqrt{xy} < 1 \times \sqrt{xy} \Longrightarrow \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} \Longrightarrow H < G.$

9. On a $Q^2 - A^2 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4}$
$Q^2 - A^2 = \frac{2(x^2+y^2)-(x^2+2xy+y^2)}{4} = \frac{2x^2+2y^2-x^2-2xy-y^2)}{4} = \frac{x^2-2xy+y^2}{4} = \frac{(x-y)^2}{4}$
donc $Q^2 - A^2 > 0$ c.-à-d. $Q^2 > A^2$ et $Q > A$.

10. Supposons désormais que $x < y$.
On a $x < y \Longrightarrow x + y < 2y \Longrightarrow 1 < \frac{2y}{x+y} \Longrightarrow x < \frac{2xy}{x+y} = H$
et $x < y \Longrightarrow x^2 < y^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 < 2y^2 \Longrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} < y^2$
$\Longrightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} < \sqrt{y^2} \Longrightarrow Q < y$ mais on ne pourra pleinement justifier ceci qu'après l'étude des fonctions carré et racine carrée.

11. On a ainsi démontré que, si $x < y$, alors $x < H < G < A < Q < y$
et si $x = y$, alors $H = G = A = Q = x$.

Voici une représentation géométrique des différentes moyennes. Vous pouvez démontrer tout ceci si vous le souhaitez.



CORRIGÉS

Devoir n° 3

TO BEE OR NOT TO BEE

Ce devoir est associé au chapitre III, *Géométrie et repérages cartésiens du plan.*

Exercice

Athos, la mouche, Porthos, la fourmi et Aramis, l'araignée, sont trois jeunes et courageuses amies. Elles n'ont peur que d'une seule chose : le dard d'Agnan, le frelon.

Confortablement installées en même sommet d'un parallélépipède rectangle vide de côtés 4 cm, 5 cm et 6 cm, elles l'aperçoivent soudain à l'horizon. Une pour toutes, toutes pour une, elles décident de se réfugier au sommet opposé, réputé pour son imprenable position.

En revanche, elles n'ont pas les mêmes atouts : si Athos peut se mouvoir dans l'air cristallin de cette belle matinée, Aramis est contrainte de se déplacer sur les faces glacées du solide, ce qui n'est rien comparé à Porthos qui elle, en est astreinte aux arêtes acérées.

Au terme d'une chevaleresque et éprouvante épopée, quelle distance chacune aura-t-elle parcourue, en supposant toutefois qu'elle n'emprunte pas de chemin de traverse ?

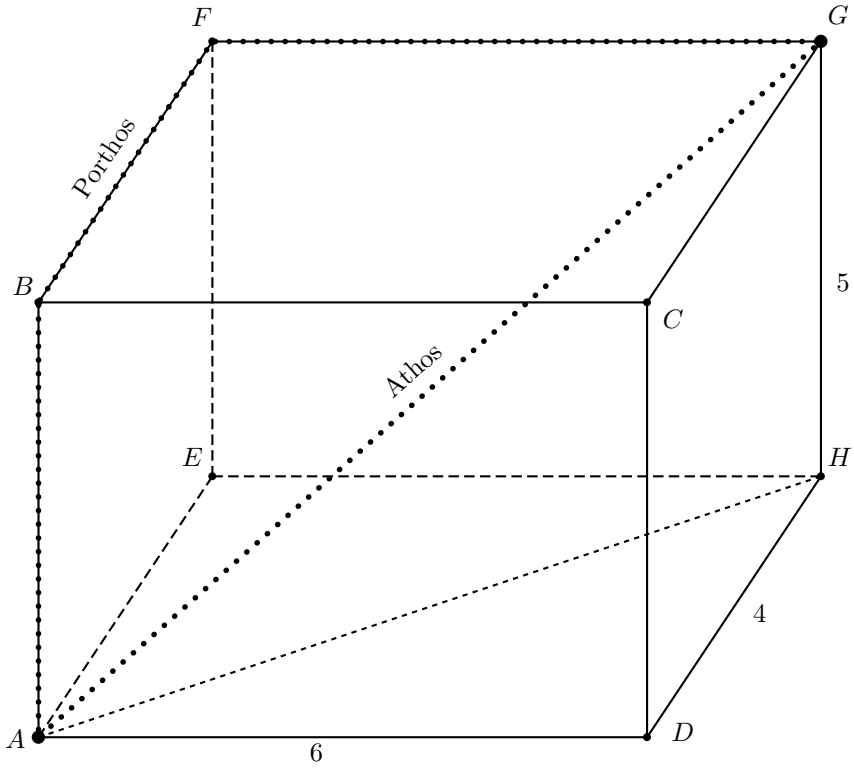
Bonus

Comme cadeau de rentrée, plutôt qu'une trousse azur, saumon ou citron, se faire offrir *Le Goût des Mathématiques*, ouvrage collectif de 128 toutes petites pages chez (Petit) Mercure de France. Tous y trouveront leur compte : vos parents puisque la somme dépensée est modique et vous puisque, même si l'on ne peut y mettre de crayons de couleur, c'est très divertissant.

Corrigé du devoir n° 3

TO BEE OR NOT TO BEE

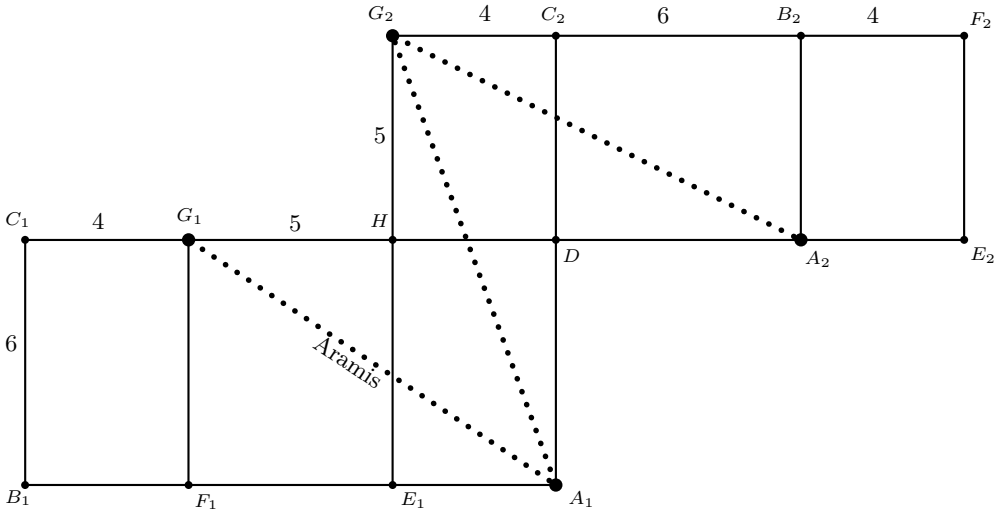
Nos trois jeunes et courageuses amies sont ainsi confortablement installées sur le sommet A du pavé droit et vide représenté ci-dessous lorsqu'elles aperçoivent Agnan et son terrible dard. Elles se précipitent alors vers l'imprenable sommet G.



• Puisque le chemin le plus court est la ligne droite, Athos vole directement et parcourt le segment $[AG]$. Le fameux théorème de Pythagore appliqué dans le triangle AGH, rectangle en H, nous permet d'affirmer qu'en appliquant le non moins célèbre théorème de Pythagore dans le triangle ADH, rectangle en D, nous avons $AG^2 = AH^2 + HG^2 = (AD^2 + DH^2) + HG^2 = 6^2 + 4^2 + 5^2 = 77$ d'où la distance parcourue par Athos : $d_{Athos} = \sqrt{77}\,\text{cm}$.

• Porthos, atreinte aux acérées arêtes doit, elle, nécessairement parcourir au moins une arête de longueur 4 cm, une de longueur 5 cm et une de 6 cm et elle suit avec concentration le chemin $[AB]$, $[BF]$ puis $[FH]$, de longueur
$d_{Porthos} = AB + BF + FG = 5 + 4 + 6 = 15\,\text{cm}$.

• Aramis se rend bien compte que sa tâche est plus ardue et construit le patron suivant afin de déterminer son chemin le plus court.



Elle applique trois fois le renommé théorème de Pythagore et obtient :

- $A_1{G_1}^2 = {A_1D}^2 + {DG_1}^2 = 6^2 + (4+5)^2 = 117.$
- $A_1{G_2}^2 = {A_1C_2}^2 + {C_2G_2}^2 = (6+5)^2 + 4^2 = 137.$
- $A_2{G_2}^2 = {A_2B_2}^2 + {B_2G_2}^2 = 5^2 + (6+4)^2 = 125.$

Aramis décide donc pertinemment de passer au plus court par les faces glacées $AEHD$ et $EFGH$ le long d'un chemin de longueur $d_{Aramis} = \sqrt{117}\,\text{cm}$.

Puisque $d_{Athos} < d_{Aramis} < d_{Porthos}$, c'est bien évidemment la mouche qui parcourra le chemin le plus court. En revanche, Porthos n'arrivera peut-être pas bonne dernière au sommet G : Aramis s'est en effet blessée et traîne laborieusement la patte. Par contre, si les trois amies se hâtent, il se pourrait bien qu'Agnan, trop confiant, s'en retourne avec son dard puisqu'il ne peut atteindre le point G.

Devoir n° 4

EULER (DE RIEN)

Ce devoir est associé au chapitre III, *Géométrie et repérages cartésiens du plan.*

Exercice

Vous disposez d'un beau triangle que vous nommez ABC,
vous dénommez I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$,
vous prénommez $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ les trois hauteurs,
vous surnommez respectivement H, G et O, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$,
vous donnez le nom D au point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A et
vous vous remémorez le fait que le centre de gravité d'un triangle est situé au deux tiers de la médiane depuis son sommet.

1. (a) Vous réalisez une jolie figure, au moyen de GeoGebra de préférence,
   (b) vous tracez la droite (OH),
   (c) puis vous émettez une conjecture surprenante.
2. (a) Vous déterminez la nature du triangle ACD et en déduisez un parallélisme avec la droite (BQ),
   (b) puis vous procédez de manière analogue pour démontrer que le quadrilatère $BDCH$ est un parallélogramme.
3. (a) Vous précisez à présent le milieu du segment $[DH]$,
   (b) puis vous déterminez le centre de gravité du triangle ADH.
4. Vous pouvez alors conclure en démontrant votre surprenante conjecture.

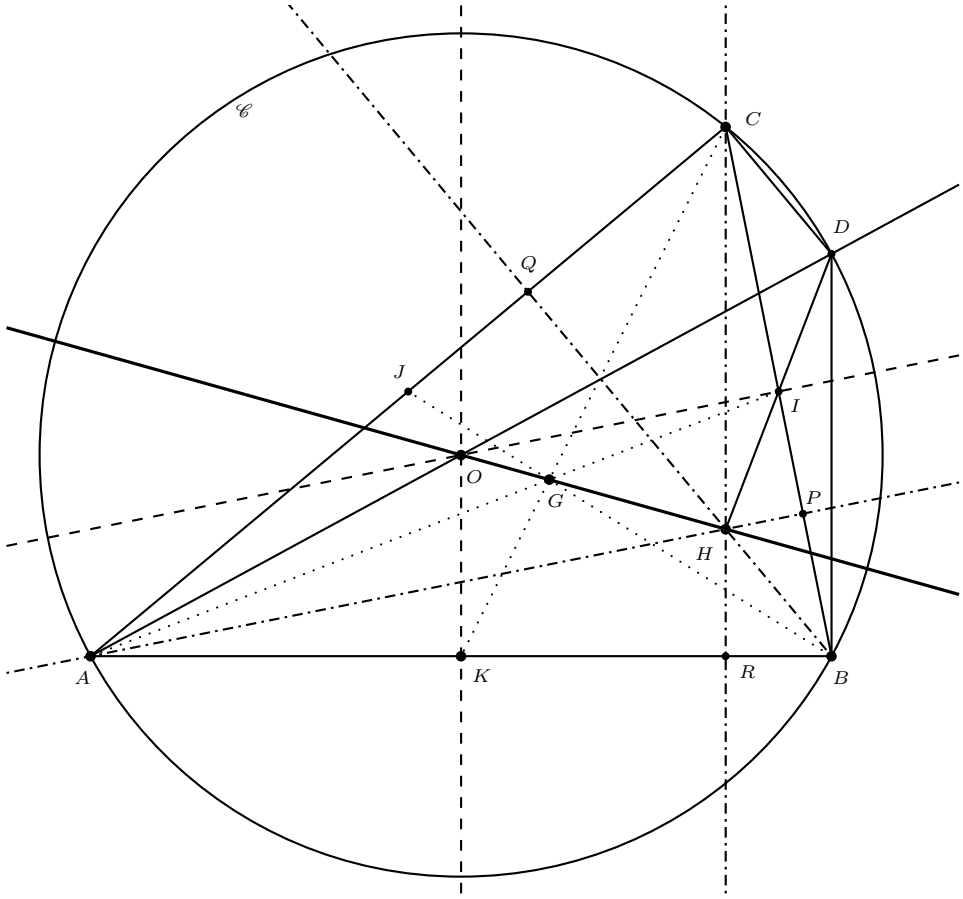
Bonus Let's play Jeopardy : Flatland
Hint : It's a book, not a song.

Corrigé du devoir n° 4

Euler (de rien)

Exercice

1. Vous réalisez une figure similaire à la suivante



et il vous semble bien que les points O, H et G sont alignés.

2. (a) Vous savez que le point C appartient au cercle $\mathscr{C}$ car celui-ci est circonscrit au triangle ABC. Puisque le segment $[AD]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$, vous pouvez affirmer que le triangle ACD est rectangle en C et que les droites (AC) et (DC) sont perpendiculaires. Avec la hauteur (BQ) perpendiculaire au côté $[AC]$, vous établissez que les droites (BQ) et (AC) sont parallèles.

   (b) En procédant de manière analogue dans le triangle ABD, vous démontrez que la droite (BD) et la hauteur (CR) sont parallèles.

H étant l'orthocentre du triangle ABC, $H = (BQ) \cap (CR)$ et vous remarquez alors que le quadrilatère $BDCH$ possède des côtés opposés parallèles deux à deux. C'est donc un parallélogramme, affirmez-vous !

3. (a) Vous vous souvenez que dans un parallélogramme, les diagonales se croisent en leur milieu donc le milieu du segment $[DH]$ est I, celui du segment $[BC]$.
   (b) Le centre de gravité étant aux deux tiers de la médiane depuis son sommet, vous pouvez dire que celui du triangle ADH est aux deux tiers de $[AI]$ en partant de A. Vous faites alors remarquer que le centre de gravité du triangle ABC est exactement au même endroit et affirmez que le centre de gravité de ADH est donc le point G.
4. Puisque le milieu du segment $[AD]$ est O, vous êtes certain que le centre de gravité G du triangle ADH est situé sur la droite (HO) et vous avez démontré votre surprenante conjecture.

Cette droite passant par les trois points remarquables O, H et G, et ce dans tout triangle, est appelée *droite d'Euler* du nom de l'immense mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783).

Bonus Flatland

Quel est le titre du livre publié en 1884 par Edwin Abbott Abbott dans lequel les personnages sont des figures géométriques – triangles isocèles, carrés, polygones, cercles... – qui, dans leur monde plat, en deux dimensions, sont très hiérarchisées et ont des coutumes et des croyances bien ancrées et où l'on crie à l'hérésie lorsqu'un modeste carré doté d'une conscience découvre la troisième dimension lors de l'apparition soudaine et invraisemblable d'une sphère, et qui, on l'aura compris, est tout à la fois critique de la rigidité de la société victorienne et texte fondateur de la science-fiction et aborde la question troublante de la possibilité d'une quatrième dimension spatiale et qui, bien que n'ayant pas de rapport avec un texte de Jacques Brel, vous est néanmoins conseillé avec insistance par votre professeur, d'autant plus qu'il ne coûte pas même trois euros chez Librio ?

Devoir n° 5

Hair Force

Ce devoir est associé au chapitre IV, *Premières fonctions de référence.*

Samson aime Dalila et Dalila pourrait bien l'aimer en retour mais elle trouve tout de même qu'il a les cheveux deux fois trop longs. Puisqu'il rechigne à les couper en une seule fois, elle se propose de les réduire de moitié en deux étapes, pile-poil. Il est vrai qu'elle n'a pas un poil dans la main.

1. Ayant un cheveu sur la langue, Dalila se demande : « Zi la première coupe les réduit de 20 pour zent, quel doit être le pourzentage de découpe des seveux de Zamzon au deuzième pazage ? »
   Qu'en penses-tu ?
2. Samson ne veut pas livrer sa tonsure en pâture et, afin de parer aux coups de ciseaux intempestifs, il note $x \in [\,0\,;1\,]$ le premier pourcentage de découpe, et $y \in [\,0\,;1\,]$ le second.
   (a) Justifie que $(1-x)(1-y) = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Déduis-en que $y = \dfrac{2x-1}{2x-2}$.
   (c) Vérifie alors que le résultat trouvé à la question 1 ne vient pas comme un cheveu sur la soupe.
3. Quitte à laisser penser qu'il coupe les cheveux en quatre, Samson souhaite que Dalila applique deux fois le même pourcentage lors des deux découpes. Prise à rebrousse-poil, Dalila trouve tout de même que ceci est un peu tiré par les cheveux mais l'amour et la capillarité l'attirent vers Samson. Alors, elle se gratte la tête et finit par trouver le pourcentage adéquat. Quel est-il ?
4. (a) Dans une fenêtre GeoGebra, trace le graphe des fonctions $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x-2}$ et $g(x) = x$ sur un intervalle approprié.
   (b) Samson est à bout de forces. Aide-le à retrouver graphiquement le résultat de la question 3.
5. Comment se terminera cette histoire échevelée ?

Corrigé du devoir n° 5

HAIR FORCE

1. Soit C la longueur de cheveux de Samson au début de cette aventure.
   Puisqu'une réduction de 20 % correspond à une multiplication par $1 - \frac{20}{100}$, la longueur n'est plus que de $0,8C$ après cette première coupe et elle sera de $(1-r) \times 0,8C$ après une deuxième découpe au taux r.
   S'il lui faut $0,5C$ après ces deux réductions, on doit avoir
   $(1-r)0,8C = 0,5C \iff 1 - r = \frac{0,5C}{0,8C} = \frac{5}{8} \iff r = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0,375.$
   Après une première réduction de 20 %, Dalila devra alors découper 37,5 % des cheveux restants.

2. (a) Si Dalila réduit C d'un taux x, il reste à Samson $(1-x)C$.
   Puis elle réduit d'un taux y et il reste alors $(1-y) \times (1-x)C$.
   Si elle souhaite les réduire de moitié, il faut bien que $(1-x)(1-y) = \frac{1}{2}$.

   (b) Ainsi, $(1-x)(1-y) = \frac{1}{2} \iff 1-x-y+xy = \frac{1}{2} \iff 2[1-x+y(x-1)] = 1$
   $\iff 2 - 2x + 2y(x-1) = 1 \iff 2y(x-1) = 1 - 2 + 2x$
   $\iff y = \frac{2x-1}{2(x-1)} = \frac{2x-1}{2x-2}$.

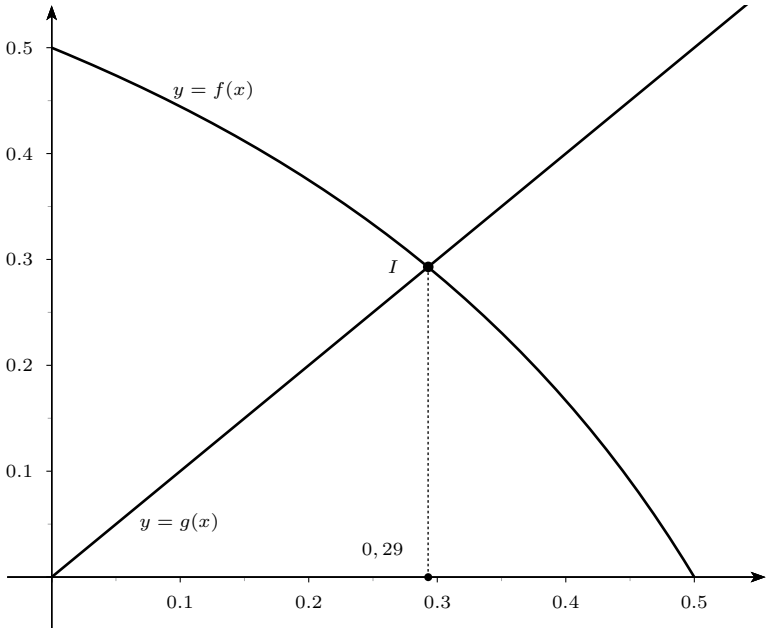
   (c) On a alors, pour $x = 0,2$, $\quad y = \frac{2\times0,2-1}{2\times0,2-2} = \frac{0,4-1}{0,4-2} = \frac{-0,6}{-0,16} = \frac{3}{8}$, tout comme la réponse 1.

3. Samson souhaite deux coupes telles que $y = x$. Dalila résout donc l'équation $(1-x)(1-x) = \frac{1}{2}$:
   $(1-x)(1-x) = \frac{1}{2} \iff (1-x)^2 = \frac{1}{2} \overset{1-x\geqslant 0}{\iff} 1 - x = \sqrt{\frac{1}{2}}$
   $\iff x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \simeq 0,293.$
   Dalila doit donc effectuer deux coupes au taux de réduction d'environ 29,3 % pour satisfaire Samson.

4. (a) Les graphes des fonctions f (associée au taux de réduction y) et g (associée au taux x) sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ sont tracés en page suivante.

   (b) On a l'égalité des taux x et y lorsque $f(x) = g(x)$ c.-à-d. à l'intersection des deux courbes, ce qui se produit lorsque $x = y \simeq 0,29$.

5. Samson finira par se laisser faire. Aveuglé par l'amour, épuisé par les calculs, il ne reprendra force qu'avec la repousse de ses cheveux mais ne reverra jamais sa belle. Il ne vécurent pas heureux, peu longtemps et n'eurent aucun enfant.
   Il semblerait qu'après avoir ouï cette aventure, Racine, les cheveux en bataille, se serait exclamé : "L'hair de rien, cette histoire est peu poilante ! J'en ai les cheveux dressés sur la tête et il s'en est fallu d'un cheveu que je me fisse des cheveux blancs."


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
$y = f(x)$
I
$y = g(x)$
$0,29$
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Devoir n° 6

LES MAINS SUR LA TABLE !

Ce devoir est associé au chapitre V, *Arithmétique*.

En préambule, rappelez-vous la notation décimale des nombres. Si n est un entier naturel, d son nombre de dizaines et u son nombre d'unités, comment s'exprime n en fonction de d et u ?

Vous savez certainement retrouver la table de neuf à l'aide de vos mains. Posez vos mains à plat, doigts en éventail. Numérotez-les avec un stylo indélébile ou mentalement, au choix, de un à dix et de gauche à droite. Pour trouver le produit par neuf d'un entier compris entre un et dix, il suffit de baisser, ou de lever suivant la position des mains, le doigt portant ce nombre, le nombre de doigts restants à gauche donne les dizaines du produit recherché et le nombre de doigts restants à droite en donne les unités.

Explicitez deux exemples puis démontrer en toute généralité cette propriété. Il vous sera certainement nécessaire de définir des variables n, g et d.

Voici maintenant une technique amusante pour retrouver les produits des nombres entiers de 5 à 10.

Apprenons d'abord à représenter un tel nombre sur une seule main : le nombre 5 est représenté par le poing fermé, 6 par quatre doigts repliés et un levé, 7 par deux doigts léves et trois repliés,... , jusqu'à 10 avec cinq doigts levés.
Pour multiplier deux nombres entiers entre 5 et 10, il suffit de les représenter ainsi avec ses deux mains, d'ajouter les nombres de doigts levés, cette somme donne le chiffre des dizaines du produit recherché, et de multiplier les nombres de doigts repliés, ce produit donne le chiffre des unités du produit recherché. Et voilà !

Explicitez trois exemples, dont 6×7, puis démontrer en toute généralité cette propriété. Il vous sera certainement nécessaire de définir des variables n_1, n_2, ℓ_1, ℓ_2, r_1 et r_2.

Testez maintenant ces deux techniques avec vos orteils.

Corrigé du devoir n° 6

LES MAINS SUR LA TABLE !

Si n s'écrit du dans le système décimal, alors $n = 10d + u$.

Exemple 3×9 : je plie le troisième doigt en partant de la gauche. Il m'en reste deux levés à gauche et sept à droite donc $3 \times 9 = 27$.

Exemple 7×9 : je plie le septième doigt en partant de la gauche. Il m'en reste six levés à gauche et trois à droite donc $7 \times 9 = 63$.

Si n est un entier compris entre 1 et 10, on appelle g le nombre de doigt à gauche du doigt n et d le nombre de doigts à droite du doigt n.
On a $g = n - 1$ et $d = 10 - n$
ainsi, $10g + d = 10(n-1) + (10-n) = 10n - 10 + 10 - n = 9n$.
Les doigts de gauche donnent donc bien les dizaines et ceux de droite, les unités.

Exemple 7×8 : 7 a deux levés et trois repliés, 8 a trois levés et deux repliés.
On a $2 + 3 = 5$ dizaines et $3 \times 2 = 6$ unités donc $7 \times 8 = 56$.

Exemple 10×9 : 10 a cinq levés et zéro replié, 9 a quatre levés et un replié.
On a $5 + 4 = 9$ dizaines et $0 \times 1 = 0$ unités donc $10 \times 9 = 90$.

Exemple 8×9 : 8 a trois levés et deux repliés, 9 a quatre levés et un replié.
On a $3 + 4 = 7$ dizaines et $2 \times 1 = 2$ unités donc $8 \times 9 = 72$.

Exemple 6×7 : 6 a un levé et quatre repliés, 7 a deux levés et trois repliés.
On a $1 + 2 = 3$ dizaines et $4 \times 3 = 12$ unités donc $7 \times 8 = 30 + 12 = 42$.

Si n est un entier compris entre 5 et 9, on nomme ℓ le nombre de doigts levés et r le nombre de doigts repliés dans une telle représentation.
On a $\ell = n - 5$ et $r = 10 - n$ donc $n = \ell + 5 = 10 - r$ et $\ell = 5 - r$.

Soient n_1 et n_2 deux entiers compris entre 5 et 9.
On a
$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= (10 - r_1)(10 - r_2) \\ &= 100 - 10r_1 - 10r_2 + r_1.r_2 \\ &= 10(10 - r_1 - r_2) + r_1.r_2 \\ &= 10(5 - r_1 + 5 - r_2) + r_1.r_2 \\ &= 10(\ell_1 + \ell_2) + r_1.r_2. \end{aligned}$$
La somme des doigts levés donne donc bien les dizaines et le produit des doigts repliés, les unités.

Je n'ai pas pu tester ces techniques avec mes orteils puisque j'ai rangé mes tongs.

Devoir n° 7

FONCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Ce devoir est associé au chapitre VI, *Nouvelles fonctions de référence*.

Exercice 1

1. Existe-t-il un cercle dont le périmètre égale l'aire du disque qu'il délimite ? Si oui, préciser le(les)quel(s).
2. Existe-t-il un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse égale l'aire ? Si oui, préciser ses dimensions.
3. Existe-t-il un cube dont le volume égale la longueur de la diagonale de l'une de ses faces ? Si oui, préciser ses dimensions.

Exercice 2

Soient Z et U deux points tels que $ZU > 1$, K le point de $[ZU]$ tel que $ZK = 1$ et O le point d'intersection d'un demi-cercle de diamètre $[ZU]$ et de la perpendiculaire à (ZU) en K.
Exprimer la longueur KO en fonction de KU.

Bonus

Puisque vous y pensez déjà, je vous conseille de rajouter une ligne au texto que vous allez envoyer au Père Noël : *Théorème vivant* de Cédric Villani. Vous pouvez aussi le trouver en bibliothèque, faire un 50-50 en le partageant avec votre voisine, l'emprunter à un ami, faire un appel sur les réseaux sociaux ou user de tout autre moyen caritatif et légal mais vous devez impérativement lire ce chef-d'œuvre au moins une fois dans votre vie.

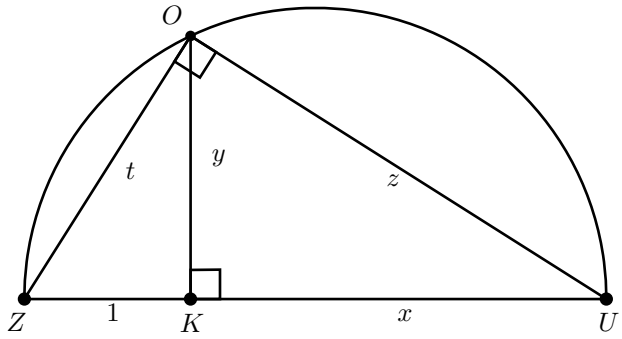
Corrigé du devoir n° 7

FONCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Exercice 1

1. On cherche $x > 0$ tel que $\quad 2\pi x = \pi x^2 \iff 2x = x^2 \iff 2 = x \quad$ car $x > 0$.
   Les cercles de rayon 2 sont ceux qui vérifient la propriété voulue.
2. Soient c la longueur des côtés adjacents à l'angle droit du triangle et h la longueur de son hypoténuse. L'aire de ce triangle vaut $\quad \frac{c\times c}{2} = \frac{1}{2}c^2 \quad$ et d'après ce bon vieux théorème de Pythagore, on a
   $h^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \iff h = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2} \quad$ car h et c sont positifs.
   On cherche donc c tel que $\quad \frac{1}{2}c^2 = c\sqrt{2} \iff \frac{c^2}{c} = 2\sqrt{2} \iff c = 2\sqrt{2}$
   et $\quad h = c\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4.$
3. Soient c la longueur des côtés du cube et d la longueur de la diagonale de l'une de ses faces.
   Le volume de ce cube vaut $\quad c^3 \quad$ et d'après ce bon vieux théorème de Pythagore, on a $\quad d^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \iff d = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2} \quad$ car d et c sont positifs.
   On cherche donc c tel que $\quad c^3 = c\sqrt{2} \iff \frac{c^3}{c} = \sqrt{2} \iff c^2 = \sqrt{2}$
   et $\quad c = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}.$

Exercice 2 Les trois triangles ZOK, KOU et ZOU sont rectangles, ce dernier étant inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés.
Le bon vieux théorème de Pythagore permet alors d'affirmer qu'avec les notations de la figure suivante, on a $\quad \begin{cases} t^2 = 1^2 + y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ (1+x)^2 = t^2 + z^2 \end{cases}$
donc $\quad (1+x)^2 = (1^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \iff 1 + 2x + x^2 = 1 + 2y^2 + x^2$
$\iff y^2 = x \overset{y>0}{\iff} y = \sqrt{x}$
et $\quad KO = \sqrt{KU}.$

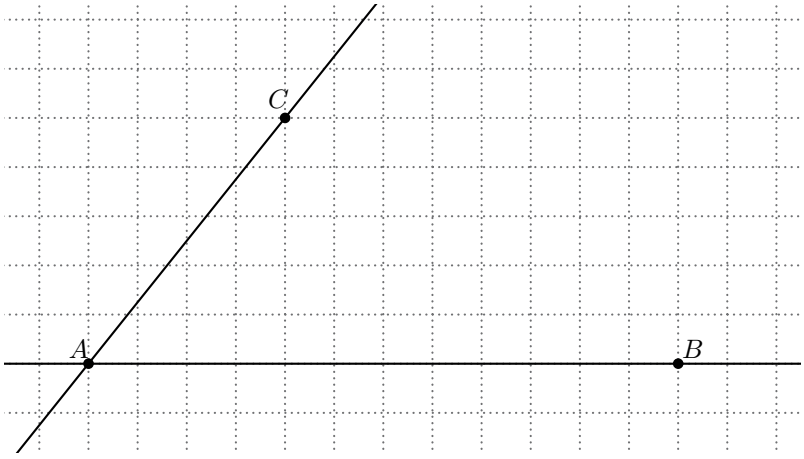


Devoir n° 8

SUIVEZ LES FLÈCHES

Ce devoir est associé au chapitre VII, *Vecteurs du plan.*

Soient A, B et C trois points non alignés formant le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right)$.

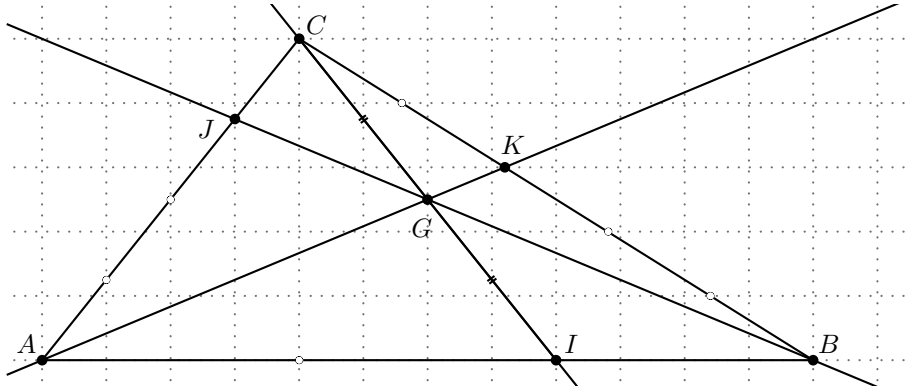


1. (a) En s'aidant du quadrillage, placer les points I, J, K et G tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{JA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, G est le milieu de $[IC]$.
   (b) Quelle conjecture peut-on émettre à propos des droites (AK), (BJ) et (CI) ?
2. (a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, I et J. Justifier.
   (b) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
3. (a) Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a ainsi $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}2/5\\3/5\end{pmatrix}$.
   (b) i. Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AG}$.
   ii. En déduire l'expression de $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a ainsi $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1/3\\1/2\end{pmatrix}$.
   (c) Déterminer le réel λ tel que $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AG}$ et en déduire l'alignement des points A, G et K.
4. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BJ}$ puis en déduire l'alignement des points B, G et J.
5. Démontrer la conjecture émise à la question 1b.
6. Calculer la distance CB dans le cas où le triangle ABC est isocèle rectangle en A avec $AC = 1$.

Corrigé du devoir n° 8

SUIVEZ LES FLÈCHES

1. (a)



Repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, $\quad\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\quad\overrightarrow{JA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\quad\overrightarrow{BK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ et G milieu de $[IC]$.

(b) Les droites (AK), (BJ) et (CI) semblent concourantes en G.

2. (a) $B(1\,;0)$ car $\overrightarrow{AB}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$, $\quad C(0\,;1)$ car $\overrightarrow{AC}=0\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$,
$I(2/3\,;0)$ car $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$, $\quad A(0\,;0)$ (origine),
$J(0\,;3/4)$ car $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{JA}=0\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

(b) $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{MI}}=\frac{1}{3}x_{\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{2}x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_{\overrightarrow{MI}}=\frac{1}{3}y_{\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{2}y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \iff \begin{cases} x_I-x_M=\frac{1}{3}(x_C-x_A)+\frac{1}{2}(x_B-x_A) \\ y_I-y_M=\frac{1}{3}(y_C-y_A)+\frac{1}{2}(y_B-y_A) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3}-x_M=\frac{1}{3}(0-0)+\frac{1}{2}(1-0) \\ 0-y_M=\frac{1}{3}(1-0)+\frac{1}{2}(0-0) \end{cases} \iff \begin{cases} x_M=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \\ y_M=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

et $\quad M\left(\frac{1}{6}\,;-\frac{1}{3}\right)$.

3. (a) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. $\quad$ On a ainsi $\quad\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}2/5\\3/5\end{pmatrix}$.

(b) i. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{AG}+(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GI})=2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{0}=2\overrightarrow{AG}$
car $G=$Milieu $[CI]$.

ii. D'où $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1/3\\1/2\end{pmatrix}$.

(c) On a $\quad\frac{2}{5}=\frac{6}{5}\times\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\times\frac{1}{2}\quad$ donc $\quad\overrightarrow{AK}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AG}\quad$ et $\quad\lambda=\frac{6}{5}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont donc colinéaires. Ainsi, les droites (AK) et (AG) sont parallèles et ont le point A en commun. Elles sont donc confondues.

4. On a $\begin{cases} x_{\overrightarrow{BJ}} = x_J - x_B = 0 - 1 = -1 \\ y_{\overrightarrow{BJ}} = y_J - y_B = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{\overrightarrow{BG}} = x_G - x_B = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \\ y_{\overrightarrow{BG}} = y_G - y_B = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $x_{\overrightarrow{BG}}.y_{\overrightarrow{BJ}} - x_{\overrightarrow{BJ}}.y_{\overrightarrow{BG}} = -1 \times \frac{1}{2} - \frac{-2}{3} \times \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ et les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires. Les droites (BG) et (BJ) sont donc parallèles et les points B, G et J alignés.

5. On a vu que les droites (AK) et (BJ) étaient sécantes en G, milieu du segment $[IC]$. Les droites (AK), (BJ) et (IC) sont donc concourantes en G.

6. Le triangle ABC étant isocèle rectangle en A avec $AC = 1$, le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est orthonormé et l'on a :
$CB = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}\,.$

CORRIGÉS

Devoir n° 9

BEAU ET FORT

Ce devoir est associé au chapitre VIII, *Pourcentages & Évolutions*.

Exercice

M. Dubeaufortaz est un fabricant de fromages ravi. Sa production a en effet augmenté cette année de 25 %. Mais le monde est cruel et cette hausse entraîne malheureusement une baisse drastique des prix : sa recette n'a pas augmenté.

Il faut préciser que cela fait trois années maintenant que sa production évolue de manière similaire et qu'il a tout de même fabriqué cette année 17 tonnes de fromages.

Il n'en reste pas moins qu'il est dépité par sa recette, d'autant plus qu'il est très fier de son produit classé en A.O.P. En effet, son fromage de caractère est composé d'eau et de « matière sèche » dont la partie « grasse » est ainsi répartie :

Pourcentage total de matière grasse : 24 %
Pourcentage de matière grasse dans la matière sèche : 75 %.

1. Quel a été le taux d'évolution du prix au kilogramme de ses fromages cette année ?
2. Quelle était sa production à la veille de ces trois prolifiques années ?
3. Quel est le pourcentage d'eau dans ses fromages ?

Bonus

Cette fois-ci, je vous exhorte à écouter les émissions d'Étienne Klein, les samedis après-midi sur France Culture :

www.franceculture.fr/emissions/la-conversation-scientifique.

La conversation scientifique est un moment de débats et d'échanges autour de la science mais aussi de la philosophie, la culture et les arts, l'histoire, la géographie, la nature,... et tout ceci est curieux, amusant, passionnant,... Bref, intelligent.

En effet, bien que physicien, Étienne Klein est quelqu'un de très bien : il pratique l'alpinisme.

Corrigé du devoir n° 9

BEAU ET FORT

M. Dubeaufortaz est un fabricant de fromages ravi.

1. On désigne par m la masse (en kg) de sa production de fromages l'année dernière, vendue au prix p (en €/kg) pour une recette r (en €) et par m', p', r' les valeurs pour cette année.
   On a $r = pm$, $r' = p'm'$ et d'après l'énoncé, $m' = (1 + \frac{25}{100})m = \frac{5}{4}m$, $r' = r$.
   Ainsi, $p'm' = pm$ et $p' = \frac{m}{m'}p = \frac{m}{\frac{5}{4}m}p = \frac{4}{5}p = 0,8p = (1 - \frac{20}{100})p$.
   Le prix de ses fromages a diminué de 20 % cette année.

2. Lors des trois dernières années, la production a augmenté de 25 % par an, c.-à-d. qu'elle a été multipliée par $1,25^3$ sur les trois ans (coefficient multiplicateur global). La production d'alors se retrouve donc en multipliant par l'inverse, le coefficient multiplicateur réciproque : $\frac{1}{1,25^3}.17 \simeq 8,7$.
   Sa production de fromages était de $8,7$ tonnes il y a trois ans.

3. On désigne par f, la masse d'un fromage, par o celle d'eau contenue dans le fromage, par s celle de matière sèche et par g celle de matière grasse.
   On a $f = s + o$ et d'après l'énoncé, $g = 0,24f$, $g = 0,75s$.
   D'où, $0,75s = 0,24(s+o) \iff 0,75s - 0,24s = 0,24o \iff s = \frac{0,24}{0,51}o = \frac{8}{17}o$.
   Ainsi, $f = s + o = (\frac{8}{17} + 1)o = \frac{25}{17}o$ donc $o = \frac{17}{25}f = 0,68f$ et les fromages contiennent 68 % d'eau.
   On peut aussi écrire $s = xf \Longrightarrow f = \frac{s}{x}$ et $g = 0,24f = 0,24\frac{s}{x} = 0,75s$ donne $x = \frac{0,24s}{0,75s} = 0,32$: la matière sèche représente 32 % de la masse du fromage donc l'eau, 68 %.

Devoir n° 10

Île héritée

Ce devoir est associé au chapitre IX, *Généralités sur les fonctions*.

Évariste est gallois et son cousin est Germain. Ensemble, ils héritent de leur grand-oncle Anatole de l'île circulaire de Sabos dans la mer Égée, au centre de laquelle un mémorable platane, lointain descendant de celui d'Hippocrate, ondule au souffle d'une brise légère, au soleil couchant.

Germain ne sait pas nager et préfère admirer le délicat chatoiement des feuilles au printemps. Évariste, lui, adore l'eau salée et n'a de cesse d'y plonger, palmes aux pieds, tuba et bouée. Ils souhaitent donc partager l'île équitablement tout en respectant les préférences de chacun et décident d'y tracer un cercle central délimitant leur domaine, les deux territoires devant idéalement être d'égale superficie.

Évariste nomme x le rayon (en m) du cercle central $\mathscr{C}$ et désigne par $f(x)$ la superficie (en m^2) de sa couronne littorale. Les deux cousins ont estimé la circonférence de l'île à environ 628 m.

1. Réaliser une fresque monumentale (ou une simple figure, au choix) représentant la situation.
2. (a) Justifier que x appartient à l'intervalle $[\,0\,;100\,]$.
   (b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   (c) Démontrer que $f(x)$ est décroissante sur $[\,0\,;100\,]$.
   (d) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère adapté et conséquent.
3. Déterminer algébriquement la valeur de x pour laquelle ni Évariste, ni Germain ne seront lésés et vérifier graphiquement le résultat obtenu.
4. Évariste, un peu fantasque et boudeur, a soudainement décidé de construire un enclos carré dont, par soucis de perspective, les quatre sommets affleurent le rivage. Puisque cela risque de perturber l'équilibre circulaire et d'empiéter sur son domaine, Germain refait alors les calculs du partage.
   (a) Réaliser une autre œuvre représentant la nouvelle situation.
   (b) Calculer la longueur ℓ du côté du carré d'Évariste.
   (c) Quelle est la valeur de x telle que le cercle central soit inscrit dans ce carré ? ...Tiens, tiens !

Corrigé du devoir n° 10

ÎLE HÉRITÉE

1., 2. (d) et 4. (a) Les œuvres et autres représentations sont en page suivante.

2. (a) L'île circulaire, de rayon R, a une circonférence de 628 m donc $2\pi R = 628$ et $R = \frac{628}{2\pi} \simeq 100$. Ainsi, l'île a un rayon d'environ 100 m et tout disque intérieur a un rayon compris entre 0 et 100.

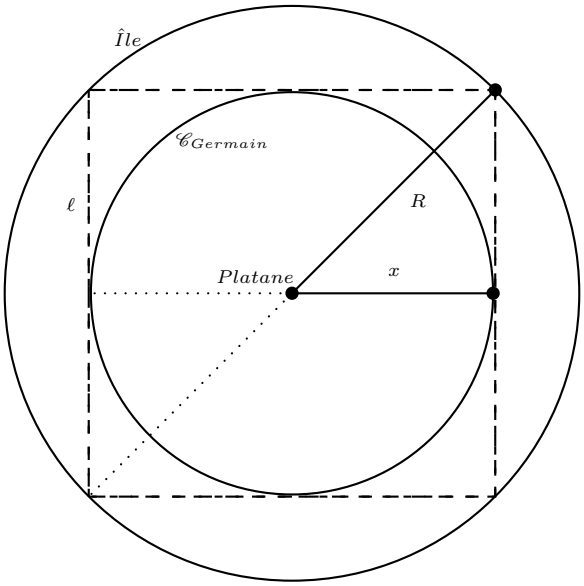
   (b) $f(x) = \mathcal{A}ire(couronne) = \mathcal{A}ire(île) - \mathcal{A}ire(disque\ central)$
   $= \pi \times 100^2 - \pi \times x^2 = \pi(10\,000 - x^2)$.

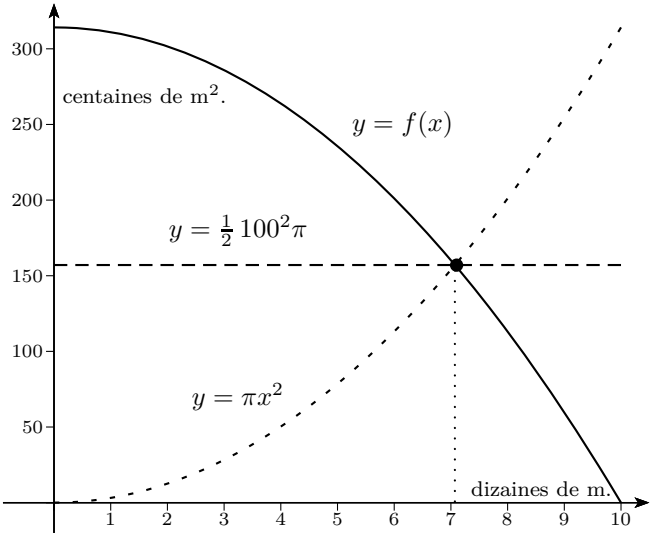
   (c) Soient a et $b \in [\,0\,;100\,]$.
   On a $0 \leqslant a < b \leqslant 100 \overset{x^2\nearrow}{\iff} a^2 < b^2 \overset{\times(-1)}{\iff} -a^2 > -b^2$
   $\iff 10000 - a^2 > 10000 - b^2 \iff \pi(10000 - a^2) > \pi(10000 - b^2)$
   $\iff f(a) > f(b)$: f est décroissante sur $[\,0\,;100\,]$.
   Sinon, la forme développée (et canonique) $f(x) = -\pi x^2 + 100^2\pi$ donne $a < 0$ et $\alpha = 0$: f est décroissante pour $x > 0$.

3. On cherche $x \geqslant 0$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}\mathcal{A}ire(île)$.
   $f(x) = \frac{1}{2}\mathcal{A}ire(île) \iff \pi(10000 - x^2) = \frac{1}{2}\pi 100^2 \iff x^2 = \frac{100^2}{2}$
   $\iff x = 50\sqrt{2} \simeq 71$ m.
   On peut aussi résoudre $f(x) = \mathcal{A}ire(disque\ central) \iff \pi(10000 - x^2) = \pi x^2$ qui donne le même résultat.
   Graphiquement, on cherche l'intersection de la courbe représentative de la fonction f, de la droite $y = \frac{100^2\pi}{2} = 5000\pi$ et de la courbe $y = \pi x^2$, aire du disque central.

4. (b) L'enclos carré est inscrit dans l'île circulaire donc sa diagonale mesure $2R \simeq 200$ et, grâce au bon vieux théorème de Pythagore, on a $(2R)^2 = \ell^2 + \ell^2$ donc $\ell = \sqrt{\frac{4R^2}{2}} = R\sqrt{2} = 100\sqrt{2} \simeq 141$ m.

   (c) Le cercle central étant inscrit dans le carré d'Évariste, son diamètre a même mesure que le côté du carré et donc son rayon vaut
   $x = \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}.100\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \simeq 71$ m.
   Tiens, tiens, l'équilibre n'est pas modifié mais cela n'empêchera certainement pas Germain de pester.


Île
$\mathscr{C}_{Germain}$
ℓ
R
Platane
x


centaines de m^2.
$y = f(x)$
$y = \frac{1}{2}\,100^2\pi$
$y = \pi x^2$
dizaines de m.
300
250
200
150
100
50
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Devoir n° 11

BELLE AUTOROUTE

Ce devoir est associé au chapitre IX, *Généralités sur les fonctions*.

Solal, qui habite Marseille, traverse souvent la France en automobile afin de retrouver Ariane, son amie vivant à Lille, avec qui il a certaines affinités.
Sur l'autoroute, le prix du péage est de 0,075 € par kilomètre. La société d'exploitation RaPiA — Réseau Privé Autoroutier — propose néanmoins à ses usagers un abonnement aux conditions suivantes :

- ⋆ achat d'une carte annuelle d'un coût de 66 €,
- ⋆ 30 % de réduction sur le prix du péage aux titulaires de la carte.

Solal, qui a peur en train, se demande à partir de quelle distance parcourue sur autoroute son intérêt est de s'abonner au RaPiA et de quelle réduction il bénéficiera alors.

1. Si Solal parcourt 10 000 km sur l'autoroute dans l'année, combien paiera-t-il sans abonnement ? avec l'abonnement ? Combien économisera-t-il alors en pourcentage ?
2. Solal définit deux fonctions f et g de la façon suivante :
   - $f(x)$ est le coût du péage pour un non-abonné parcourant x km dans l'année.
   - $g(x)$ est ce même coût pour un abonné.

   (a) Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

   (b) Représenter f et g dans un même repère orthogonal (1 cm pour 500 km en abscisse).

   (c) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $g(x) \leq f(x)$. Conclure.

3. D'après la question 1, si Solal parcourt 10 000 km dans l'année, le taux de réduction réel qui lui est offert par la carte RaPiA est inférieur à $0,3$ *i.e.* 30 %.
   Il note $t(x)$ le taux de réduction réel pour x km parcourus au cours d'une année d'abonnement.
   Solal, espérant entretenir ses affinités avec Ariane et donc effectuer plusieurs trajets dans l'année, suppose que $x \geq 3\,000$.

   (a) Sachant que $t(x) = \dfrac{g(x) - f(x)}{f(x)}$, montrer que $t(x) = \dfrac{880}{x} - 0,3$.

   (b) Démontrer que t est une fonction décroissante sur $[\,3\,000\,;+\infty[$.

   (c) Déterminer x pour que $t(x) < -0,25$ puis interpréter ce résultat.

(d) Solal peut-il obtenir du RaPiA une réduction supérieure ou égale à 30 % ? Justifier.

(e) Tracer la courbe $y = t(x)$ et la droite d'équation $y = -0,3$ sur la calculatrice. Qu'observe-t-on ?

4. Travaillant à la Société des Nations, quelle grande et douce métropole le Seigneur traverse-t-il pour rejoindre sa Belle ?

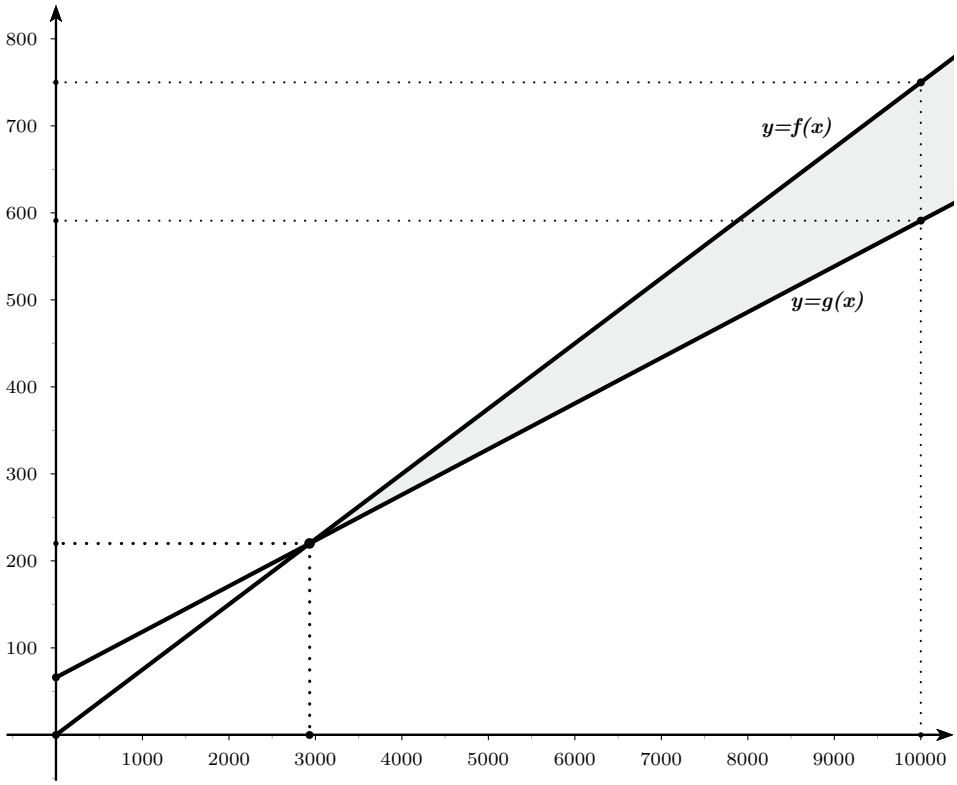
Corrigé du devoir n° 11

BELLE AUTOROUTE

1. Réduire de 30 % correspond à une multiplication par $1 - \frac{30}{100} = 0,7$ donc si Solal parcourt 10 000 km dans l'année, il paiera $0,075 \times 10\,000 = 750\,€$ sans abonnement et $66 + 750 \times 0,7 = 591\,€$ avec l'abonnement.
   Il économisera alors $750 - 591 = 159\,€$ qui correspondent à une réduction de $\dfrac{159}{750} = 0,212 = 21,2\,\%$ par rapport au tarif sans abonnement.
   On peut aussi écrire directement $\dfrac{591 - 750}{750} \times 100 \simeq -21,2\,\%$.

2. (a) $f(x) = 0,075\,x$ (0,075 par km).
   $g(x) = 0,7 \times 0,075x + 66 = 0,0525\,x + 66$ ($-30\,\%$ correspond à un coefficient de $1 - \frac{30}{100} = 0,7$).

   (b) Les fonctions affines f et g sont représentées par des droites passant par les points $(0\,;0)$, $(10\,000\,;750)$ et $(0\,;66)$, $(10\,000\,;591)$ par exemple.



CORRIGÉS

(c) On a $g(x) \leqslant f(x)$ lorsque la courbe $\mathscr{D}_g$ de g est en dessous de la courbe $\mathscr{D}_f$ de f, la zone grisée sur le graphique. On trouve graphiquement que cela correspond à $x \geqslant 2\,900$.

$$g(x) \leqslant f(x) \iff 0,0525x + 66 \leqslant 0,075x \iff 66 \leqslant 0,075x - 0,0525x$$
$$\iff \tfrac{66}{0,0225} \leqslant x \iff x \gtrsim 2\,933.$$

L'abonnement au RaPiA sera donc plus économique pour Solal s'il parcourt sur autoroute plus de 2 933 km dans l'année.

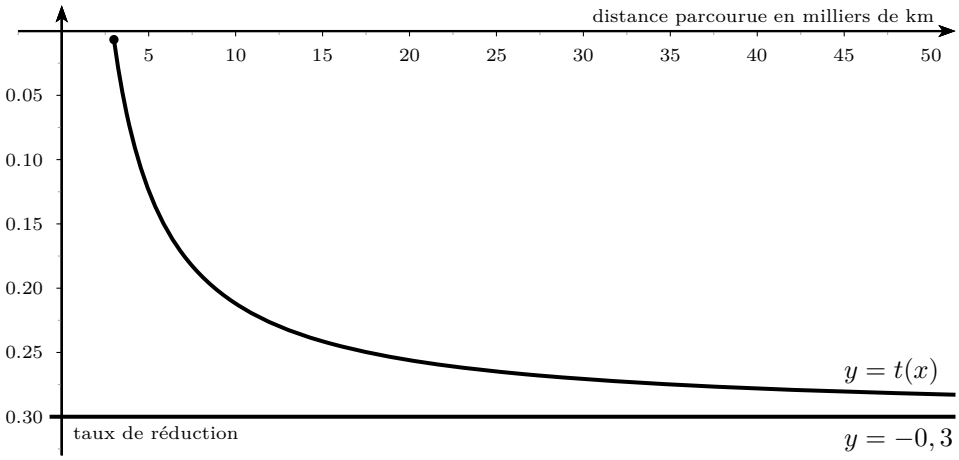
3. (a) On a $t(x) = \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} = \frac{0,0525x+66-0,075x}{0,075x} = \frac{66}{0,075x} - \dfrac{0,0225x}{0,075x} = \frac{880}{x} - 0,3.$

(b) Soient $a,\ b \in [\,3\,000\,;+\infty[$. Puisque la fonction inverse est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on a $0 < 3\,000 \leqslant a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \iff \frac{880}{a} > \frac{880}{b}$
$\iff \frac{880}{a} - 0,3 > \frac{880}{b} - 0,3 \iff t(a) > t(b)$
et la fonction t est décroissante sur $[\,3\,000\,;+\infty[$.

(c) Si $x > 3\,000$, $t(x) < -0,25 \iff \frac{880}{x} - 0,3 < -0,25$
$\iff \frac{880}{x} < 0,3 - 0,25 \iff x > \frac{880}{0,05} = 17\,600.$
Pour que Solal bénéficie d'une réduction supérieure à 25 % avec un abonnement au RaPiA, il faut qu'il parcoure au moins 17 600 km sur autoroute dans l'année.

(d) $t(x) \leqslant -0,3 \iff \frac{880}{x} - 0,3 \leqslant -0,3 \iff \frac{880}{x} \leqslant 0,3 - 0,3$
$\iff \frac{1}{x} \leqslant 0 = \frac{0}{880} \iff x < 0$ ce qui est impossible.
Solal ne peut donc pas obtenir du RaPiA une réduction supérieure ou égale à 30 %.

(e) La calculatrice donne les graphes suivants.



On s'aperçoit que la courbe de la fonction t s'approche de plus en plus de la droite $y = -0,3$ lorsque x augmente, sans jamais l'atteindre. On dit que la droite est asymptote à la courbe.
Concrètement, plus la distance parcourue par Solal augmentera, plus le taux de réduction sera proche de 30 % mais il ne lui sera jamais supérieur, ni égal.

4. Le Seigneur d'Albert Cohen traversait Genève pour rejoindre sa Belle puisque la Société des Nations y siégeait.

Devoir n° 12

QUE LA FORCE SURHUMAINE SOIT AVEC TOI

Ce devoir est associé au chapitre X, *Inéquations & Tableaux de signes*.

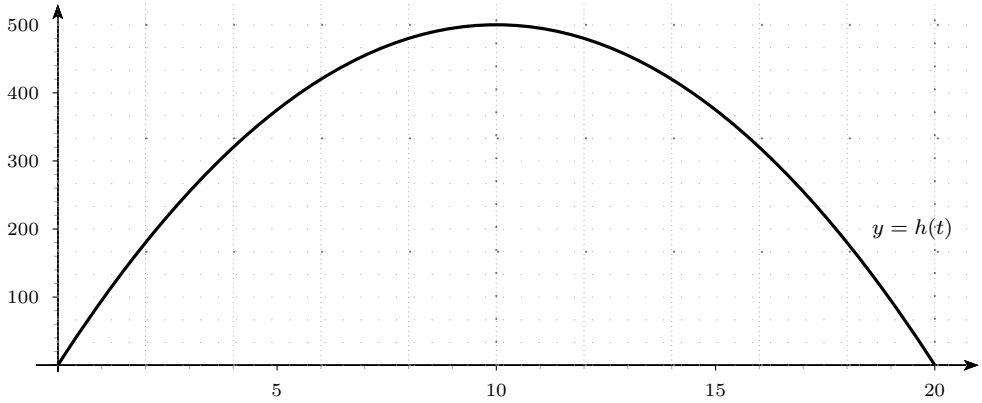
Exercice 1

Anakin a 35 ans et ses jumeaux Leia et Luke ont 2 ans. Auras-tu la force de trouver combien d'années il faudra attendre avant que l'âge d'Anakin soit inférieur ou égal au quadruple de celui de ses enfants ? Quel âge auront-ils alors ? Justifier tu devras.

Exercice 2

Obélix lance nonchalamment son menhir préféré. Après étude, il estime que la hauteur atteinte par son menhir, en décimètres, t secondes après le tir, est donnée par la formule $\quad h(t) = -5\,t^2 + 100\,t$.

1. (a) Factoriser l'expression de $h(t)$.
   (b) À quel instant le menhir retombe-t-il au sol ? Justifier.
2. On a tracé ci-dessous la parabole représentative de la fonction h sur l'intervalle $[\,0\,;20\,]$. Répondre, à l'aide de ce graphique, aux questions suivantes en explicitant la démarche employée.
   (a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le menhir et à quel instant cela se produit-il ?
   (b) Durant quelle période le menhir est-il à une hauteur supérieure ou égale à 32 m ?
3. (a) Vérifier que, $\quad \forall t \in [\,0\,;20\,], \quad h(t) - 320 = -5(t-16)(t-4)$.
   (b) Retrouver algébriquement le résultat de la question 2b.



EXERCICES

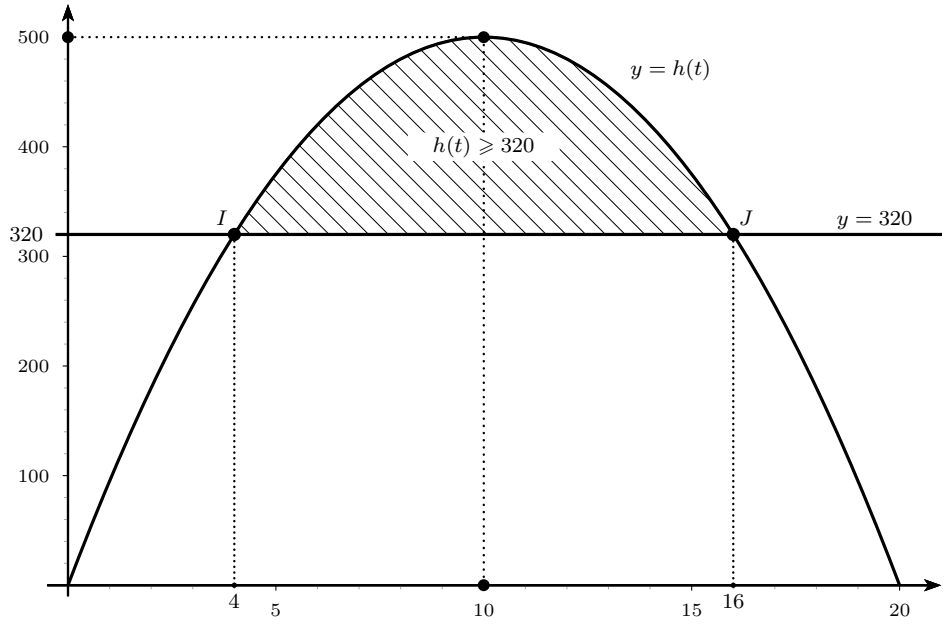
Corrigé du devoir n° 12

QUE LA FORCE SURHUMAINE SOIT AVEC TOI

Exercice 1 Dans n années, Anakin aura $(35+n)$ ans, Leia et Luke $(2+n)$ ans.
On a $(35+n) \leqslant 4\times(2+n) \iff 35+n \leqslant 8+4\,n \iff 35-8 \leqslant 4\,n-n$
$\iff 27 \leqslant 3\,n \iff n \geqslant \frac{27}{3} = 9$.
Il faudra donc attendre 9 ans avant que l'âge d'Anakin soit inférieur au quadruple de l'âge des jumeaux.
Dans 9 ans, Anakin aura $35+9=44$ ans soit le quadruple de l'âge de Leia et Luke, $2+9=11$ ans.

Exercice 2 La hauteur atteinte par le menhir lancé par Obélix, en décimètres, t secondes après le tir, est donnée par $h(t) = -5t^2+100t$.

1. (a) On a $h(t) = -5t^2+100t = -5\,t\times t - 5\,t\times(-20) = -5\,t\,(t-20)$.
   (b) Le menhir retombe au sol lorsque sa hauteur redevient nulle :
   $$h(t)=0 \iff -5\,t\,(t-20)=0 \iff t=0 \text{ ou } t=20.$$
   Le menhir retombe donc après 20 secondes de vol.
2. (a) Le sommet de la courbe correspond à la hauteur maximale atteinte par le menhir. Graphiquement, on voit que cette hauteur maximale est atteinte après 10 s et vaut 500 dm=50 m.



(b) Le menhir est à une hauteur supérieure ou égale à 32 m lorsque $h(t) \geqslant 320$. Graphiquement, la courbe représentative de la fonction h doit être située au-dessus de la droite $y = 320$.
Cela se produit entre les points I et J, la zone hachurée sur le graphe, c'est-à-dire lorsque $t \in [\,4\,;\,16\,]$.

3. (a) Soit $t \in [\,0\,;20\,]$. On a :
$$-5(t-16)(t-4) = -5(t^2 - 4\,t - 16\,t + 64) = -5t^2 + 5 \times 20\,t - 5 \times 64$$
$$= -5\,t^2 + 100\,t - 320 = h(t) - 320.$$

(b) Ainsi, $h(t) - 320 \geqslant 0 \iff -5(t-16)(t-4) \geqslant 0$ de tableau de signes :

t	$-\infty$		4		16		$+\infty$
-5		$-$		$-$		$-$	
$t-16$		$-$		$-$	0	$+$	
$t-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-5(t-16)(t-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $h(t) - 320 \geqslant 0 \iff t \in [\,4\,;\,16\,]$ et l'on retrouve le résultat graphique de la question 2b.

Devoir n° 13

Big Ben

Ce devoir est associé au chapitre XI, *Probabilités*.

Ça y est ! L'amer Michel et son frère Jacques sortent enfin un nouvel album après environ 3 années, 1 mois, 4 jours, 15 heures 9 minutes et 26,5 secondes d'obscur silence. Intitulé « Michel et Jacques sonnent », les fameux carillonneurs y font montre d'une généreuse maestria. Onze chansons différentes sont enregistrées sur ce disque que t'a offert une vieille tante canadienne. Ton lecteur de CD sélectionne au hasard une des onze chansons et une seule, cela est bien suffisant. Les chansons ont toutes la même probabilité d'être sélectionnées.
La durée de chacune d'elles étant inscrite sur la pochette, tu as dressé le tableau suivant :

Numéro de la chanson	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Durée en secondes	208	185	165	200	185	215	230	215	200	230	300

Les résultats seront donnés sous forme de fraction.

1. Quelle est la probabilité que la chanson n° 7, le tube « Trie leur ! », ta préférée, soit sélectionnée ?
2. (a) Détermine la probabilité de l'événement A : « la chanson sélectionnée a une durée supérieure ou égale à 210 secondes ».
   (b) Détermine la probabilité de l'événement B : « la chanson sélectionnée porte un numéro impair ».
3. Décris par une phrase les événements $\overline{A}$, $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calcule leur probabilité.
4. Il est vrai que tu as tapé dessus un peu fort. Il s'avère que ton lecteur lit désormais deux titres différents à la suite parmi les quatre premiers : « Bill et Jean », « ABC », « Noir ou Blanc » et « Tu n'es pas seul ». Tu t'intéresses alors à la durée totale d'écoute que tu vas subir.
   (a) Dresse un arbre de probabilité modélisant cette nouvelle situation.
   (b) Dresse un tableau à double entrée modélisant cette nouvelle situation.
   (c) Quelle est la probabilité que tu doives supporter au moins 389 secondes de cloches ?
5. Quelle est la probabilité que tu apprécies le double DVD live de la tournée monumentale organisée par leur label dans le Loir et Cher (moins que la Côte d'Azur tout de même), DVD que tu recevras pour ton prochain anniversaire si jamais tu n'obtiens pas la moyenne à ce devoir alors que tu espères rondement le dernier opus du groupe de xylophonistes *Les nones jaunes* ?

Corrigé du devoir n° 13

Big Ben

1. Étant en situation d'équiprobabilité, la chanson « Trie leur » a une probabilité $\dfrac{1}{11}$ d'être sélectionnée.

2. (a) L'événement A est constitué des issues n°s 6, 7, 8, 10 et 11.
   On a donc $\quad P(A) = \dfrac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \dfrac{5}{11}$.

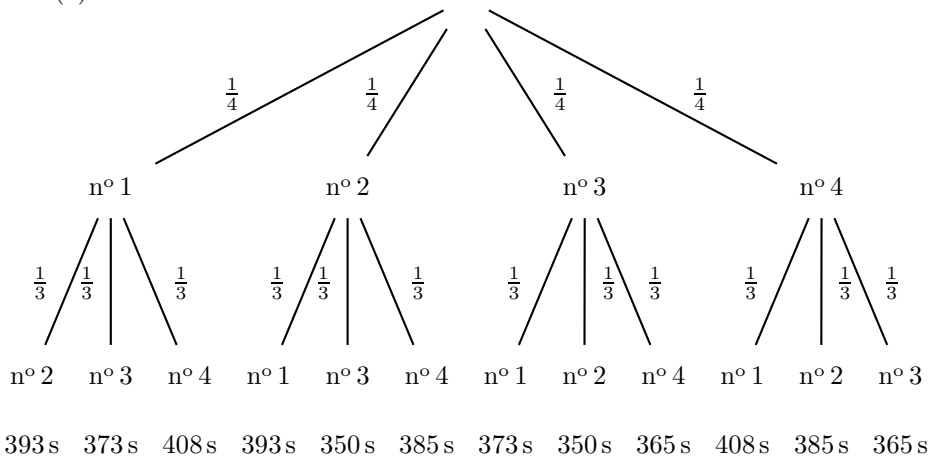
   (b) L'événement B est constitué des issues n°s 1, 3, 5, 7, 9 et 11.
   On a donc $\quad P(B) = \dfrac{\#(B)}{\#(\Omega)} = \dfrac{6}{11}$.

3. • $\overline{A}$ est l'événement : « la chanson sélectionnée a une durée strictement inférieure à 210 secondes ».
   On a $\quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{11} = \frac{11-5}{11} = \dfrac{6}{11}$.

   • $A \cap B$ est l'événement : « la chanson sélectionnée a une durée supérieure ou égale à 210 s et a un numéro impair ».
   Ainsi, $\quad A \cap B = \{7; 11\}$ $\quad$ et $\quad P(A \cap B) = \dfrac{\#(A \cap B)}{\#(\Omega)} = \dfrac{2}{11}$.

   • $A \cup B$ est l'événement : « la chanson sélectionnée a une durée supérieure ou égale à 210 s ou a un numéro impair ».
   On a $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{11} + \frac{6}{11} - \frac{2}{11} = = \dfrac{9}{11}$.

4. (a)



(b) Chaque case de ce tableau est équiprobable avec probabilité $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Durée totale	1	2	3	4
1		393	373	408
2	393		350	385
3	373	350		365
4	408	385	365	

(c) On a $P(Durée \geqslant 389\,\text{s}) = \dfrac{4 \text{ cases favorables}}{12 \text{ cases possibles}} = \dfrac{1}{3}$.

5. La probabilité que tu apprécies le double DVD live de la tournée monumentale est nulle mais ceci n'empêche pas que cela puisse tout de même arriver.

Devoir n° 14

NICOLABILITÉS

Ce devoir est associé au chapitre XI, *Probabilités*.

Exercice 1 Clotaire lance deux dés tétraédriques bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Afin de réviser ses tables de multiplications, il calcule le produit des deux nombres observés sur leur face inférieure.

1. Réaliser un tableau afin de déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Préciser la loi de probabilité de l'expérience.
3. Calculer la probabilité des événements suivants :
   I : « Le produit est impair ».
   H : « Le produit est supérieur ou égal à 8 ».
4. En déduire la probabilité que le produit soit pair.
5. Définir par une phrase l'événement $I \cap H$ puis calculer sa probabilité.
6. Définir par une phrase l'événement $I \cup H$ puis calculer sa probabilité de deux manières différentes.
7. Définir un événement de probabilité $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 Dans sa poche, Agnan a quatre billes bleues, trois billes rouges et deux billes jaunes, toutes indiscernables au toucher. Il en tire une, note sa couleur et la donne à la maîtresse. Il en tire ensuite une seconde, note sa couleur et la conserve bien précieusement contre lui.
L'univers de cette expérience aléatoire est donc
$\Omega = \{BB; BR; BJ; RB; RR; RJ; JB; JR; JJ\}$
où la première lettre désigne la couleur de la bille donnée à la maîtresse.

1. Réaliser un arbre probabiliste décrivant cette expérience aléatoire et préciser la probabilité de chaque branches. Justifier les résultats.
2. Préciser la loi de probabilité de cette expérience en justifiant quelques calculs.
3. Quelle est la probabilité que la bille conservée par Agnan soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins une bille jaune ait été tirée ?
5. Quelle est la probabilité qu'au plus une bille bleue ait été tirée ?
6. Le plus grand plaisir d'Agnan serait de tirer une bille de la même couleur que celle qu'il a donné à la maîtresse. Calculer la probabilité qu'Agnan soit heureux.

Corrigé du devoir n° 14

NICOLABILITÉS

Exercice 1

Clotaire lance deux dés tétraédriques et calcule le produit des deux nombres observés.

1.

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

L'univers de cette expérience est donc $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16\}$.

2. Les dés étant bien équilibrés, on peut appliquer la formule :
$p = \frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$.

Issues	1	2	3	4	6	8	9	12	16
Probas	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

On a bien $p_i \in [\,0\,;1\,]$ et $\sum p_i = 1$.

3. On a $P(I) = P(\{1; 3; 9\}) = \frac{1+2+1}{16} = \frac{1}{4}$
et $P(H) = P(\{8; 9; 12; 16\}) = \frac{2+1+2+1}{16} = \frac{3}{8}$.

4. « Le produit est pair » est l'événement $\overline{I}$ donc la probabilité que le produit soit pair est $P(\overline{I}) = 1 - P(I) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

5. $I \cap H$ est « le produit est impair **et** supérieur ou égal à 8 » : $I \cap H = \{9\}$ d'où $P(I \cap H) = P(\{9\}) = \frac{1}{16}$.

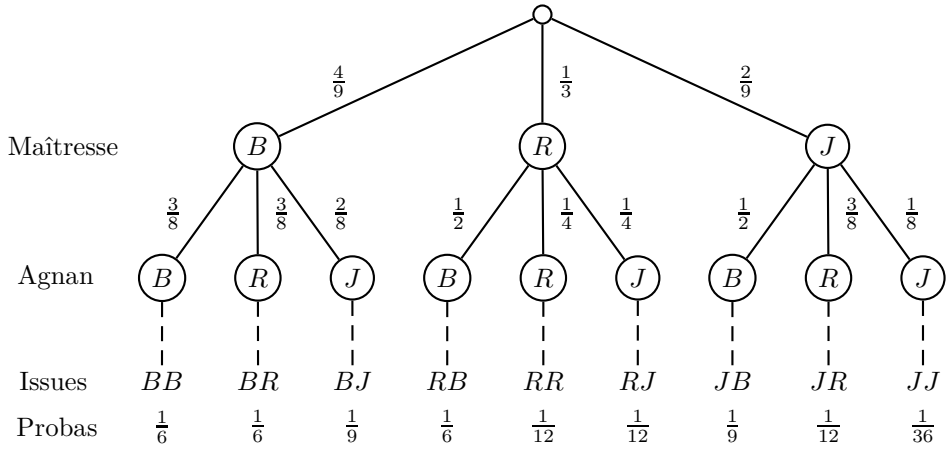
6. $I \cup H$ est « le produit est impair **ou** supérieur ou égal à 8 » : $I \cup H = \{1; 3; 8; 9; 12; 16\}$ d'où
$$P(I \cup H) = \frac{1+2+2+1+2+1}{16} = \frac{9}{16}\,.$$
Par ailleurs, $P(I \cup H) = P(I) + P(H) - P(I \cap H) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{4+6-1}{16} = \frac{9}{16}$.

7. Les événements suivants, par exemple, sont de probabilité $\frac{1}{2}$:
   - « Le produit est inférieur ou égal à 4 » $=\{1; 2; 3; 4\}$: $\frac{1+2+2+3}{16} = \frac{1}{2}$.
   - « Le produit est strictement supérieur à 5 » $=\{6; 8; 9; 12; 16\}$: $\frac{2+2+1+2+1}{16} = \frac{1}{2}$.
   - « Le produit est un multiple de 4 » $=\{4; 8; 12; 16\}$: $\frac{3+2+2+1}{16} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Agnan a quatre billes bleues, trois billes rouges et deux billes jaunes dans sa poche. Il en tire une, note sa couleur et la donne à la maîtresse. Il en tire ensuite une seconde et note sa couleur.

1.



• Au premier tirage, Agnan a neuf billes dans sa poche. Les probabilités concernant la première bille tirée sont données par le nombre de billes de la couleur divisé par neuf.
Par exemple, la probabilité que la bille de la maîtresse soit rouge est $\frac{3\,\text{rouges}}{9\,\text{billes}} = \frac{1}{3}$.

• Pour la bille d'Agnan, il ne reste plus que huit billes dans la poche et une de moins pour la couleur de la bille donnée à la maîtresse.
Par exemple, si la maîtresse a reçu une bille rouge, la probabilité que la bille d'Agnan soit rouge est alors $\frac{2\,\text{rouges restantes}}{8\,\text{billes restantes}} = \frac{1}{4}$.

2. Sur un arbre probabiliste, la probabilité d'une issue est le produit des probabilités des branches menant à cette issue. Par exemple,
$P(\{BR\}) = \frac{4\,\text{bleues}}{9\,\text{billes}} \times \frac{3\,\text{rouges}}{8\,\text{billes}} = \frac{1}{6}$.
On obtient ainsi la loi de probabilité précisée sur l'arbre ci-dessus.

3. L'événement « La bille d'Agnan est rouge » est constitué des issues BR, RR, JR et a donc pour probabilité $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

4. L'événement « Au moins une bille jaune a été tirée » est constitué des issues BJ, RJ, JB, JR, JJ et a donc pour probabilité
$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

5. L'événement « Au plus une bille bleue a été tirée » est l'événement contraire de « Au moins deux billes bleues ont été tirées ».
Il a donc pour probabilité $1 - P(\{BB\}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

6. La probabilité qu'Agnan soit heureux est
$P(\{BB; RR; JJ\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$.

CORRIGÉS

Devoir n° 15

Antoine, Octave & Cléo

Ce devoir est associé au chapitre XII, *Droites du plan.*

Les sympathiques hameaux de La Fare-en-Dole et Villeneuve-la-Vieille sont distants de 50 km.
À 8 h, Antoine part de La Fare-en-Dole dans son automobile. Il arrive à Villeneuve-la-Vieille à 8 h 50, prend son petit-déjeuner à l'Auberge du Lion d'Or une heure durant puis retourne chez lui à la même vitesse.
À 8 h 30, Octave part de Villeneuve-la-Vieille pour La Fare-en-Dole en roulant à $15\,\text{km.h}^{-1}$ sur sa bicyclette chromée.
Cléo souhaite assister à leur confrontation.
Les mouvements, contrairement aux esprits, sont supposés uniformes.

1. Conjecture graphique
   (a) Représenter graphiquement dans un repère (2 cm pour 30 min, 1 cm pour 5 km), en fonction de la durée du trajet d'Antoine, la distance qui sépare Antoine de La Fare-en-Dole ainsi que celle séparant Octave de la même bourgade.
   (b) Aider Cléo à déterminer graphiquement les instants où les deux rivaux se croisent et à quelle distance de La Fare-en-Dole cela se produit.
2. Solution algébrique
   (a) Déterminer les équations des droites tracées sur le graphique précédent en prenant pour origine des temps le départ d'Antoine.
   (b) Aider Cléo à déterminer algébriquement les instants où les deux rivaux se croisent et à quelle distance de La Fare-en-Dole cela se produit.
3. À l'issue de la confrontation, verra-t-on des lions dans les rues des cités ?

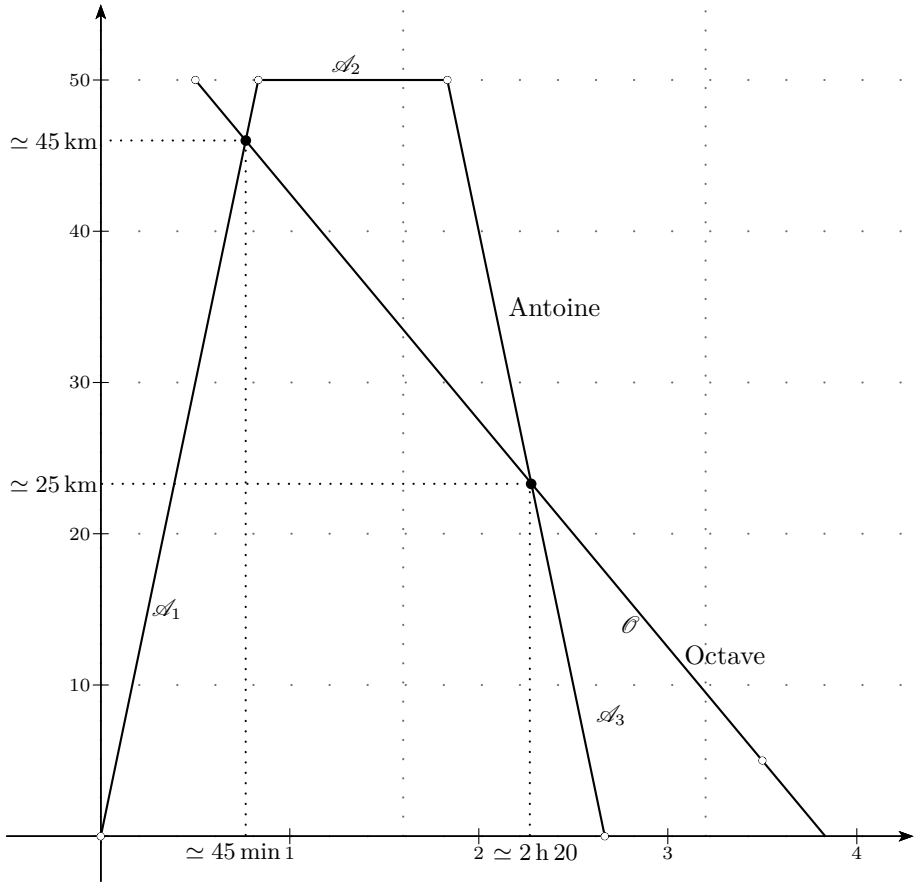
Corrigé du devoir n° 15

Antoine, Octave & Cléo

Les mouvements, contrairement aux esprits, sont supposés uniformes.

1. Conjecture graphique

   (a) À 8 h, Antoine est à La Fare-en-Dole et à 8 h 50, il en est à 50 km. Il repart à 9 h 50 et met encore 50 min pour y revenir.
   À 8 h 30, Octave est à 50 km de La Fare-en-Dole et 3 h après, il n'en est plus qu'à $50 - 3 \times 15 = 5$ km.



   (b) On observe graphiquement que les rivaux se croisent deux fois sur leur parcours : la première fois environ 45 min après le départ d'Antoine, c.-à-d. à 8 h 45, à environ 45 km de La Fare-en-Dole et la deuxième, environ 2 h 20 après son départ, c.-à-d. 10 h 20, à environ 25 km de la même bourgade.

2. Solution algébrique : attention à ne pas mélanger minutes et heures, durée et horaire.

   (a) Le parcours d'Antoine est représenté par trois segments et celui d'Octave par un seul, d'équations :

   - $\mathscr{A}_1$: $p = 0$ et $m = \frac{50\,\text{km}}{50\,min} = \frac{50\,\text{km}}{5/6\,\text{h}} = 60$ d'où $y = 60x$.
   - $\mathscr{A}_2$ est parallèle à l'axe des ordonnées d'où $y = 50$.
   - $\mathscr{A}_3$ passe par les points $\left(1\,\text{h} + 50\,\text{min} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}\,\text{h}\,;\,50\right)$ et $\left(\frac{11}{6} + \frac{5}{6} = \frac{16}{6}\,;\,0\right)$
     d'où $m = \frac{0-50}{\frac{16}{6} - \frac{11}{6}} = \frac{-50}{5/6} = -60$ et $0 = -60\frac{16}{6} + p \Longrightarrow p = 160$.
     Ainsi, $y = -60x + 160$.
   - $\mathscr{O}$: $m = -15$ et $(0,5\,;\,50) \in \mathscr{O}$ d'où
     $50 = -15 \times 0,5 + p$ et $p = 50 + 7,5 = 57,5$: $y = -15x + 57,5$.

   (b) Les segments $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{O}$ se croisent lorsque

   $$\left\{\begin{array}{l} y = 60x \\ y = -15x + 57,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = 60x \\ 60x = -15x + 57,5 \end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{l} y = 60x \\ 75x = 57,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{57,5}{75} \simeq 0,77\,h = 46\,\text{min} \\ y = 60x = 46\ \text{km}. \end{array}\right.$$

   Les segments $\mathscr{A}_3$ et $\mathscr{O}$ se croisent lorsque

   $$\left\{\begin{array}{l} y = -60x + 160 \\ y = -15x + 57,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -60x + 160 \\ -60x + 160 = -15x + 57,5 \end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{l} y = -60x + 160 \\ 160 - 57,5 = 45x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{102,5}{45} \simeq 2,27\,\text{h} \simeq 2\,\text{h}17\,\text{min} \\ y = -60x + 160 \simeq 23,3\ \text{km}. \end{array}\right.$$

   Ce qui correspond bien aux intersections trouvées graphiquement.

3. Octave apprenant la mort de son rival Antoine dans *Antony and Cleopatra* (Act 5 – Sc. 1 ; W.S., ∼1606) :

> *The breaking of so great a thing should make*
> *A greater crack : the round world*
> *Should have shook lions into civil streets,*
> *And citizens to their dens : the death of Antony*
> *Is not a single doom ; in the name lay*
> *A moiety of the world.*

> La chute d'un si grand homme aurait dû faire plus de bruit.
> La terre aurait dû lancer les lions dans les rues des cités,
> et les habitants des cités dans les antres des lions.
> La mort d'Antoine n'est pas le trépas d'un seul.
> Il y avait dans son nom la moitié de l'univers.
>
> (traduction d'André Gide)

Devoir n° 16

Ménagerie

Ce devoir est associé au chapitre XIII, *Statistiques descriptives*.

Exercice

Un élève attentif a répertorié dans le tableau ci-dessous le nombre d'interventions effectuées par son professeur de mathématiques afin de réclamer le silence au cours de chacune des 37 dernières séances.

Nombre d'interventions	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Nombre de séances	1	2	4	4	5	7	6	5	2	1
Effectifs cumulés croissants										

1. Interpréter la colonne « 19-7 ».
2. Compléter la dernière ligne du tableau.
3. Déterminer les indices suivants en justifiant les résultats :
   Étendue, Mode, Médiane, Q_1, Q_3, Moyenne et Écart-type.
4. Interpréter concrètement les paramètres obtenus.

Bonus

Agathe a plusieurs animaux dont un seul n'est pas un mammifère, exactement deux ne sont pas des lapins, exactement trois ne sont pas des ratons laveurs et exactement quatre ne sont pas des cacatoès. Quels sont-ils ?

Corrigé du devoir n° 16

MÉNAGERIE

Exercice

1. Le professeur de mathématiques a réclamé le silence à 19 reprises lors de 7 des 37 dernières séances.
2. Voici le tableau complété :

Nombre d'interventions	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Nombre de séances	1	2	4	4	5	7	6	5	2	1
Effectifs cumulés croissants	1	3	7	11	16	23	29	34	36	37

3. Étendue : $e = I_{max} - I_{min} = 23 - 14 = 9$ interventions.
   Mode = 19 interventions (I de plus grand effectif).
   Médiane : $N = 37$ donc la médiane est la $\frac{37+1}{2} = 19^{\text{e}}$ valeur p.o.c. :
   $Med = 19$ interventions.
   Q_1 : $\frac{37}{4} = 9,25$ donc le premier quartile est la 10e valeur p.o.c. :
   $Q_1 = 17$ interventions.
   Q_3 : $\frac{3}{4} \times 37 = 27,75$ donc le troisième quartile est la 28e valeur p.o.c. :
   $Q_3 = 20$ interventions.
   Moyenne : $\overline{x} = \frac{14\times1+15\times2+16\times4+17\times4+18\times5+19\times7+20\times6+21\times5+22\times2+23\times1}{1+2+4+4+5+7+6+5+2+1}$
   $\overline{x} \simeq 18,7$ interventions.
   Écart-type : $\sigma = \sqrt{\frac{1(14-18,7)^2+2(15-18,7)^2+4(16-18,7)^2+4(17-18,7)^2+\ldots+1(23-18,7)^2}{37}}$
   $\sigma \simeq 2,1$ interventions.
4. Sur les 37 dernières séances, l'amplitude du nombre d'interventions est de 9, le nombre d'interventions le plus fréquent est 19, pour au moins 50 % des séances et au plus 50 % des séances, le professeur est intervenu 19 fois, il est intervenu au maximum 17 fois dans au moins 25 % des séances et au maximum 20 fois dans au moins 75 % des séances, il est intervenu 18,7 fois en moyenne, à 2,1 interventions près en général.

Bonus

Il serait tentant de répondre qu'Agathe possède deux lapins, un raton laveur et un cacatoès mais cela ne convient pas à la dernière information. C'est donc que le non-mammifère n'est pas un cacatoès mais bien une tortue !

Devoir n° 17

DES CHIFFRES ET DES LETTRES

Ce devoir est associé au chapitre XIII, *Statistiques descriptives*.

Exercice 1

On mesure la quantité dans le sang d'une certaine molécule M sur un groupe de 100 individus souffrant d'une même maladie P.
Ces individus sont répartis au hasard en deux groupes :

- un groupe A de 50 individus qui ne reçoivent pas de traitement,
- un groupe B de 50 individus qui reçoivent un traitement.

La quantité de produit est mesurée en μg/L (microgramme par litre).

Partie A : Étude du groupe A

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus pour le groupe A.

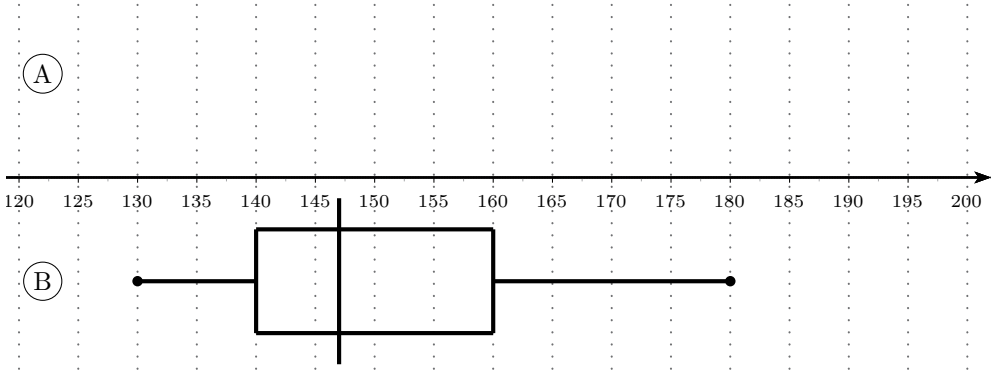
Quantité	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190
Effectifs	2	3	3	5	3	4	3	7	5	6	3	2	4
E.C.C.													

1. Compléter le tableau.
2. Pour quel pourcentage des individus du groupe A la quantité mesurée est-elle dans la plage $[130\,;160]$?
3. Déterminer le mode, l'étendue, la médiane et les quartiles de cette série statistique. Justifier.
4. Au moyen de la calculatrice, donner la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.
5. Sur la figure suivante, tracer le diagramme en boîte de cette série.

Partie B : Étude du groupe B

Les données recueillies par le groupe B ont été résumées dans le diagramme en boîte tracé en page suivante.

1. Quel semble être l'effet du traitement ?
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   « Au moins 50 % des individus du groupe B ont une quantité mesurée inférieure ou égale à 150 μg/L ».
   « Le traitement a un effet sur chacun des individus du groupe B ».
3. Donner une évaluation du pourcentage des individus du groupe B dont la quantité de molécule mesurée est dans la plage $[130\,;160]$. Justifier.
4. On estime qu'un individu ne souffre d'aucun symptôme si la quantité de molécule M dans le sang n'excède pas 160 μg/L. Prescririez-vous ce traitement aux patients atteints de la maladie P ?



Exercice 2

La répartition des exploitations agricoles françaises selon la superficie agricole utilisée (SAU) est donnée dans le tableau suivant, pour les deux années 2010 et 2013.

Année	2010	2013
Nombre d'exploitations	663 812	589 771
Moins de 20 ha	49 %	45 %
De 20 ha à moins de 50 ha	21 %	20 %
De 50 ha à moins de 100 ha	18 %	20 %
De 100 ha à moins de 200 ha	10 %	12 %
Plus de 200 ha	2 %	3 %

On prendra 250 ha pour centre de la dernière classe afin d'effectuer les calculs.

1. Interpréter la case « 12 % ».
2. Par simple lecture du tableau, conjecturer les valeurs des indices suivants. Justifier brièvement.

Année	Médiane	3e quartile	Moyenne	Écart-type
2010				
2013				

3. Calculer, en détaillant les calculs, la superficie agricole moyenne des exploitations en 2010 et en 2013.
4. Calculer, en détaillant les calculs, l'écart-type de chacune des séries 2010 et 2013.
5. Calculer la surface agricole utilisée globale de toutes les exploitations françaises en 2010 et en 2013.
6. Interpréter les résultats des questions 3, 4 et 5.

Corrigé du devoir n° 17

DES CHIFFRES ET DES LETTRES

Exercice 1

Partie A : Étude du groupe A

1.

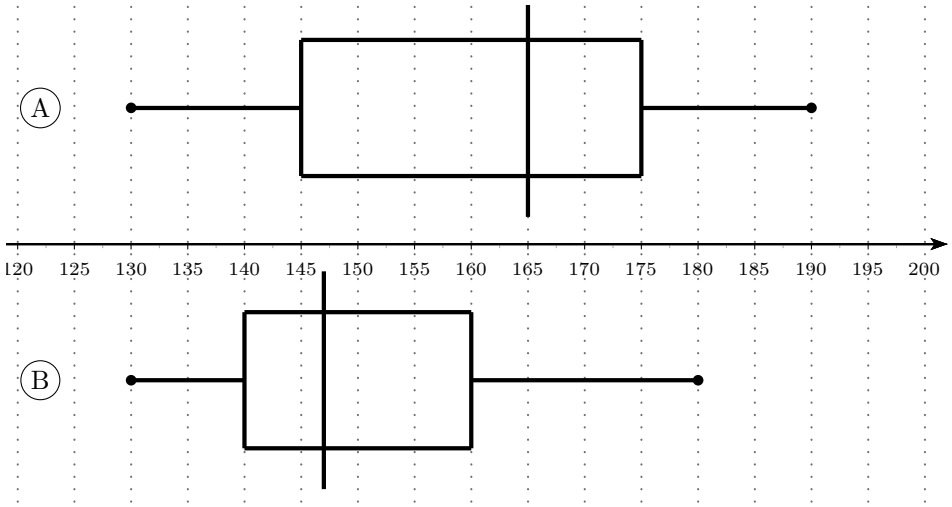
Quantité	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190
Effectifs	2	3	3	5	3	4	3	7	5	6	3	2	4
E.c.c.	2	5	8	13	16	20	23	30	35	41	44	46	50

2. On a $\frac{23}{50} \times 100 = 46$ donc 46 % des individus du groupe A ont une quantité de molécule mesurée dans la plage $[130\,;160]$.

3. On a $Mod. = 165\mu$g/L (valeur de plus grand effectif) et $e = 190 - 130 = 60\mu$g/L.
On a $\frac{50}{2} = 25$ donc la médiane est entre la 25e et la 26e valeur p.o.c. et $Med. = 165\mu$g/L.
On a $\frac{50}{4} = 12,5$ donc le premier quartile est la 13e valeur p.o.c. : $Q_1 = 145\mu$g/L.
On a $\frac{3}{4} \times 50 = 37,5$ donc le dernier quartile est la 38e valeur p.o.c. : $Q_3 = 175\mu$g/L.

4. La calculatrice donne $\overline{x_A} \simeq 162\mu$g/L et $\sigma_A \simeq 17\mu$g/L.

5.



Partie B : Étude du groupe B

1. Le traitement semble avoir pour effet de diminuer sensiblement la quantité de molécule mesurée dans la sang puisqu'après traitement, tous les indices ont diminués : la boîte B est bien plus à gauche que la boîte A. Elle est de plus bien plus étroite : les quantités mesurées dans le groupe B sont donc plus homogènes.

2. Il est vrai qu'au moins 50 % des individus du groupe B ont une quantité mesurée inférieure ou égale à 150 μ g/L puisque la médiane est d'environ 147 μg/L.
   Il est faux que le traitement ait un effet sur chacun des individus du groupe B. Ce qui est vrai c'est que, dans leur ensemble, il y a un effet significatif mais chaque individu n'y est pas nécessairement sensible.
3. On a $Q_{3B} = 160\mu$g/L donc au moins 75 % des individus du groupe B ont une quantité de molécule mesurée dans la plage $[\,130\,;160\,]$.
4. Le traitement semble effectivement avoir un effet bénéfique sur les individus puisque la proportion d'individus sains passe de 46 % à 75 %. Toutefois, la taille de l'échantillon étudié n'est pas nécessairement significative. Il est peut-être préférable d'effectuer une étude à plus grande échelle avant de généraliser ce traitement, d'autant que rien n'est dit à propos des effets secondaires.

Exercice 2

1. En 2013, 12 % des exploitations agricoles françaises avaient une SAU comprise entre 100 et 200 ha.
2. • En 2010, 49 % est très proche de 50 %, en 2013, 45 % l'est un peu moins.
   • En 2010, 12 % est plus loin de 25 % que 15 % en 2013 de 25 %.
   • Les valeurs de 2013 semblent plus grandes que celles de 2010.
   • Elles semblent aussi « plus équiréparties ».

Année	Médiane	3e quartile	Moyenne	Écart-type
2010	22	85	45	50
2013	28	90	50	60

3. $\overline{x_0} = 0,49\,\frac{0+20}{2} + 0,21\,\frac{20+50}{2} + 0,18\,\frac{50+100}{2} + 0,10\,\frac{100+200}{2} + 0,02 \times 250 \simeq 46$ ha.
   $\overline{x_3} = 0,45\,\frac{0+20}{2} + 0,20\,\frac{20+50}{2} + 0,20\,\frac{50+100}{2} + 0,12\,\frac{100+200}{2} + 0,03 \times 250 = 52$ ha.
4. $\sigma_0 = \sqrt{0,49.10^2 + 0,21.35^2 + 0,18.75^2 + 0,10.150^2 + 0,02.250^2 - 46^2} \simeq 52$ ha.
   $\sigma_3 = \sqrt{0,45.10^2 + 0,2.35^2 + 0,2.75^2 + 0,12.150^2 + 0,03.250^2 - 52^2} \simeq 57$ ha.
5. Ainsi, la surface globale utilisée par les exploitations françaises était de $46 \times 663\,812 = 30,5.10^6$ ha en 2010 et de $52 \times 589\,771 = 30,7.10^6$ ha en 2013.
6. Entre 2010 et 2013, la moyenne et l'écart-type des superficies agricoles utilisées dans les exploitations agricoles françaises ont augmenté. Ceci signifie que non seulement la taille moyenne des exploitations agricoles est plus importante, mais que celles-ci sont aussi plus diversifiées en taille. En revanche, ceci ne signifie pas que la surface globale a augmenté de façon conséquente puisqu'il y avait beaucoup moins d'exploitations en 2013 qu'en 2010.

Devoir n° 18

GRANDE MUSIQUE ET CHANTILLONNAGE

Ce devoir est associé au chapitre XIV, *Échantillonnage*.

La saison passée de l'OM fut une véritable réussite. Il est vrai que sous l'impulsion de son tout jeune président, Aymée Dediheu, l'Opéra Municipal est en plein renouveau. L'équipe est à la hauteur des ambitions, remarquablement encadrée par Mehta Combine. Il a su canaliser les frasques de la fougueuse Carmen qui, à peine arrivée, a jeté son dévolu sur l'étoile de Manaus, le brésilien Rinaldo. Il rassura aussi Mélanie Dessaix qui ne savait plus avec qui chanter : Georges ou Angela ? L'indispensable Edmond Giovanni fut toujours impérial, l'impressionnant Luciano Pepperoni tint la grande forme et le remarquable Roberto Lasagna nous enchanta malgré sa passagère déprime. Les duos entre les divas Maria Cabriès et la Callas furent magistraux.

À l'inter-saison, on a peut-être hérité de quelques transferts hasardeux comme Scala de Milan et surtout Stéphanie de Monaco. Latebal dit bien qu'un vague nerf la fait souffrir mais Lebarbier de Séville tient remarquablement son rôle et même s'il est parfois lourd comme une pierre, Ludwigvan est toujours plein d'entrain lors des hymnes. La troupe forme ainsi un ensemble cohérent et très solide.

N'oublions pas la toute nouvelle salle du Chantodrome, un splendide écrin qui a tout de même coûté la bagatelle de 3.10^8 euros. On vient de l'Europe entière assister aux représentations et, des tribunes, les foules enchantées sonnent les flûtes. Un soir de *Don Juan*, on a dénombré 640 Italiens, 231 Allemands, 91 Turcs et des Espagnols, 1003. Tous venus tassés dans le car *à* Yann, mazette !

À l'entracte, la buvette est généralement prise d'assaut. Il faut dire que le tenancier du bar, Jean-Sébastien, propose de délicieuses collations : de la truite-choux verts, de la Mozart-Ella, de l'omble chevalier à la rose, des tournedos Rossini, du fromage Wal Kiri et des bars qu'il cuit à la perfection sur son piano bien tempéré. Aussi, la bière Poulez coule en saccades.

La boutique, le *Met' la main à la poche*, est toujours tenue par les jumeaux Haendel et Gretel. On y trouve des opéras de quat'sous, des baguettes en bois hautement précieux, des jumelles de poches de toutes tailles, des portes-livrets en maroquin, de ravissantes lyres en plastique et surtout, celui qui fait fureur auprès des plus jeunes, la mascotte de l'opéra dont les peluches se vendent comme des petits pains : mélOMan !

L'intendant de l'Opéra Municipal, W. Richard, a d'ailleurs dressé un bilan très positif des retombées financières, tant sur la vente des billets que sur les royalties récoltées sur les produits dérivés.

Bien entendu, on ne peut éviter quelques accrocs : après la représentation des *Noces*, le *Figaro* titre au scandale, les anti et les pro Kofiev ergotent toujours de longues heures, en entendant les superbes arias de Tosca, Giuseppe verdit et l'on frise l'incident diplomatique lorsqu'au pied du mur, Mstislav rosse Tropovitch, son jeune poulenc,... mais dans l'ensemble, les soirées se déroulent sans malheur, dans l'harmonie la plus parfaite et les lendemains de spectacles sont généralement de placides dimanches : c'est ce que l'on appelle l'effet « Madame Papillon » ainsi que l'on surnomme désormais la directrice artistique Cecilia Barreaulit.

Aussi, l'Opéra Municipal est dorénavant une scène majeure parmi les grandes places mondiales et la concurrence fait parfois pâle figure : avec ses mises en scène aseptisées, Garnier fait dans l'ultra-doux tandis que Bastille semble avoir les doigts dans la prise à force de représentations avant-gardistes. Et que dire de la Mostra qui se meurt à Venise ?

Exercice 1 Tout augmente

Tristan et Isolde se sont rencontrés un soir à la buvette après une mémorable Traviata. Depuis, ils ne se sont plus quittés. Passionnés, ils ont calculé que cette saison, la répartition de leurs dépenses de loisirs fut la suivante : Spectacles : 40 %, Disques : 20 %, Habits de soirée : 30 %, Partitions et livrets : 10 %.
Ils prévoient pour l'an prochain, une augmentation des dépenses de spectacles de 50 %, de disques de 5 %, d'habits de 10 % et de partitions et livrets de 5 %.

Déterminer la répartition des dépenses de loisirs de Tristan et Isolde pour la saison prochaine.

Exercice 2 Traitement de choc

Un soir qu'il avait oublié ses lunettes, Jean-Sébastien intervertit malencontreusement les fioles d'huile et de cigüe. À l'entracte, les spectateurs dégustèrent qui la truite, qui l'omble, en dissertant sur les qualités remarquables de l'interprète du Faust ce soir-là. L'hôpital les accueillit plus tard et les répartit en deux groupes de 100 patients.
Un médicament fut administré au groupe T et un autre au groupe O. À la fin du traitement, 75 personnes du groupe T furent guéries tandis que dans le groupe O, 35 personnes ne le furent pas.

Peut-on affirmer que le médicament administré au groupe T fut plus efficace que celui administré au groupe O ?

Exercice 3 Taille inconnue

On a interrogé un certain nombre de spectatrices à la sortie d'une représentation de « Così Fan Tutte » et on leur a demandé : « Vous aussi ? »
L'intervalle de confiance obtenu est le suivant $[0,246\,;0,557]$.

Combien de spectatrices a-t-on interrogées ?

Corrigé du devoir n° 18

GRANDE MUSIQUE ET CHANTILLONNAGE

Exercice 1 Tout augmente

Soit s le montant des dépenses en spectacles de Tristan et Isolde cette année et s' celui de l'année prochaine. On définit de la même manière d et d', h et h', p et p'. On appelle t et t' les montant totaux des dépenses annuelles.

On a $s+d+h+p=t$, $s=0,4t$ $d=0,2t$ $h=0,3t$ $p=0,1t$

et $s'+d'+h'+p'=t'$, $s'=s(1+0,5)$, $d'=d(1+0,05)$, $h'=h(1+0,1)$, $p'=p(1+0,05)$.

Ainsi, $s'=1,5\times0,4t=0,6t$, $d'=1,05\times0,2t=0,21t$, $h'=1,1\times0,3t=0,33t$, $p'=1,05\times0,1t=0,105t$ et $t'=0,6t+0,21t+0,33t+0,105t=1,245\,t$ d'où $t=\dfrac{t'}{1,245}$.

On a alors $s'=0,6\dfrac{t'}{1,245}\simeq0,48t'$, $d'=0,21\dfrac{t'}{1,245}\simeq0,17t'$, $h'=0,33\dfrac{t'}{1,245}\simeq0,27t'$ et $p'=0,105\dfrac{t'}{1,245}\simeq0,8t'$.

L'année prochaine, la répartition des dépenses de Tristan et Isolde devrait donc être la suivante : Spectacles : 48 %, Disques : 17 %, Habits de soirée : 27 % et Partitions et livrets : 8 % pour une augmentation globale de 24,5 % de son budget.

Il est aussi possible de supposer que Tristan et Isolde disposent de 100 € cette année, de calculer les montants correspondants et d'affirmer que, puisque tout ceci est affaire de proportions, ce sont bien les parts relatives que l'on obtient.

Exercice 2 Traitement de choc

Dans le groupe T, on a $n=100$ grand et $f_T=\frac{75}{100}$ donc p_T appartient à l'intervalle de confiance :

$I_T=\left[f_T-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f_T+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,75-\frac{1}{\sqrt{100}}\,;0,75+\frac{1}{\sqrt{100}}\right]=[\,0,65\,;0,85\,]$ (qui contient f_O).

De même, dans le groupe O, on a $n=100$ et $f_O=\frac{65}{100}$ donc p_O appartient à l'intervalle de confiance :

$I_O=[\,0,65-0,1\,;0,65+0,1\,]=[\,0,55\,;0,75\,]$ (qui contient f_T).

Ainsi, $I_T\cap I_O\neq\varnothing$: les intervalles I_T et I_O se chevauchent et l'**on ne peut pas affirmer** que $p_T>p_O$ et donc que le médicament administré au groupe T est plus efficace que celui administré au groupe O.

Exercice 3 Taille inconnue

Un intervalle de confiance est de la forme $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ donc f est la moyenne entre les deux bornes, le centre de l'intervalle :

$f = \frac{0{,}246+0{,}557}{2} \simeq 0,4$.

L'amplitude de l'intervalle est égale à la différence entre les deux bornes :

$(f + \frac{1}{\sqrt{n}}) - (f - \frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

On a donc $\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,557 - 0,246 \iff \sqrt{n} = \frac{2}{0{,}311} \iff n = 41 \geqslant 25$.

La taille de cet échantillon est de 41.

On a ainsi interrogé 41 spectatrices mais on ne sait ce qu'elles ont répondu puisque f peut tout aussi bien être la proportion de « oui » que celle de « non ».

Devoir n° 19

Devoir parental

Échangeons les rôles pour une fois : ce devoir doit être fait par les parents, aidés de leur enfant.

Cet exercice est un Q.C.M. Pour chaque question, une seule réponse est juste et aucune justification n'est demandée.

1. Du point de vue des mathématiques, l'enjeu de cette année scolaire est
   - S. nul et non avenu.
   - A. majeur et vacciné.
   - V. multiple, riche et enthousiasmant.
2. Le travail demandé est
   - A. une simple répétition hebdomadaire de la formule apprise en septembre.
   - U. inutile et ennuyeux.
   - I. nécessaire, formateur et passionnant.
3. Il y aura un devoir
   - N. par an.
   - C. par hasard.
   - V. par thème, ou quasiment.
4. Les énoncés fantasques
   - S. n'ont aucun rapport avec les mathématiques.
   - U. n'existent pas, ou alors, je n'ai pas compris.
   - E. changent de l'ordinaire et apprennent à se focaliser sur l'essentiel.
5. Le rédacteur de cet ouvrage tape bien
   - S. sur les nerfs.
   - N. sur ses élèves.
   - L. sur ordinateur.
6. Les documents distribués seront
   - C. peu nombreux, confus, dans le désordre.
   - R. en couleur, écrits à la main et enluminés à l'or fin.
   - E. nombreux, trop peut-être, et seront notre outil de travail. Les élèves devront apprendre à travailler avec, quitte à en recopier une partie ou faire des fiches afin de se les approprier et de les mémoriser.

7. Le manuel numérique
   - R. est une pièce indispensable et doit être en permanence à portée de main.
   - A. est joli, coloré, et bien mieux que ce qui est fourni en classe.
   - S. une aide utile et riche, en complément de ce qui est fait en classe.
8. Le matériel est
   - U. imposé : un classeur petit format, des feuilles de teintes diverses à gros carreaux, un cahier de brouillon, un stylo vert clair, deux crayons HB gras, un compas de précision, un double décimètre, quelques feuilles de papier Canson, un stylo plume, pas d'effaceur, un taille crayon sans réserve. Équerre interdite.
   - P. inutile : tout se passe dans la tête.
   - M. conseillé : un classeur grand format, des feuilles doubles et simples à petits carreaux, une calculatrice (cf. question 9) et une perforatrice (si, si).
9. La calculatrice exigée est
   - P. un simple convertisseur francs nouveaux - euros.
   - P′. la même que celle demandée en eps.
   - A. scientifique, de type lycée.
10. Parti comme cela, au fil de l'année, votre enfant
    - U. aura perdu beaucoup de temps.
    - O. aura déjà un an de plus.
    - T. apprendra des concepts fascinants, tout en se faisant plaisir.
11. Parti comme cela, au fil de l'année, le professeur de mathématiques de votre enfant
    - L. aura perdu beaucoup de temps.
    - R. aura encore un an de plus.
    - H. enseignera des concepts fascinants, tout en se faisant plaisir.
12. Pour toute réclamation, demande d'informations, correction de coquilles ou autres doléances, le rédacteur est
    - E. joignable par l'intermédiaire du secrétariat de l'établissement après demande écrite auprès du professeur principal.
    - T. injoignable car en formation.
    - S. joignable à toute heure sur son courriel : mathmax@yahoo.com
13. Pour réussir, le plus important c'est
    - :-(le travail.
    - :-| le travail.
    - :-) le travail.

CAHIERS TRANSVERSAUX

Cahier α

Algo à gogo

Sommaire

1	**Installer Python**	**318**
2	**Les variables**	**318**
3	**Instructions conditionnelles**	**319**
4	**Boucle bornée**	**320**
5	**Boucle non bornée**	**321**
6	**Fonction**	**322**
7	**Liste**	**323**
8	**Foire de l'algo**	**325**
9	**Solutions**	**328**

Ce cahier est essentiel pour toute votre scolarité.

Le mot algorithme vient du nom d'un mathématicien perse du IXe s., Al-Khwarizmi. On trouve trace de méthodes algorithmiques dès le début des mathématiques et ce, dans toutes les cultures. L'algorithme d'Archimède donne une approximation du nombre π. Ératosthène, lui, a défini une procédure pour retrouver les nombres premiers en procédant par l'élimination des multiples successifs. Euclide trouve rapidement le *pgcd* de deux entiers. Dans son *Discours de la méthode*, René Descartes propose en 1637 de diviser chacune des difficultés qu'il examine, en autant de parcelles qu'il se peut et qui sont requises afin de mieux les résoudre. Au XIXe s., Ada Lovelace, fille de Lord Byron, est considérée comme la pionnière de la science informatique. Elle a réalisé le premier véritable programme informatique lors de son travail sur un ancêtre de l'ordinateur. En effet, on trouve dans ses notes le premier programme destiné à être exécuté par une machine. Elle a également entrevu et décrit certaines possibilités offertes par les calculateurs universels, allant bien au-delà du calcul numérique qu'imaginaient ses contemporains. Le langage informatique Ada a été nommé en son honneur.

Un algorithme est un enchaînement fini d'étapes ou d'instructions à effectuer dans un certain ordre et dont la réalisation permet la résolution en un temps fini d'un problème donné. Les structures que nous étudierons ici seront plutôt simples mais pourront tout de même user de tests (Sialors) et autres boucles (Pour et Tantque) et mettront en œuvre des fonctions, peut-être même des listes. Nos algorithmes seront ici écrits en langage *naturel* ou en langage Python, qui lui est très proche. Ceux-ci ont l'avantage de rester lisibles car, outre les problèmes de syntaxe, les mauvaises constructions sont sources de nombreuses erreurs et autres bugs et l'on sait qu'en informatique, on a rapidement la rage envers la machine.

1 Installer Python

Il faut au préalable installer une distribution Python. Rassurez-vous, c'est très facile, il suffit de visiter le site http ://www.python.org/ et de la télécharger. Des applications EduPython sur PC, Idle sur Mac ou Pydroid 3 sur tablette par exemple fonctionnent bien.

Le principe est toujours le même : on dispose d'une console Python, une fenêtre dans laquelle on peut effectuer des calculs, appliquer des fonctions et observer les résultats de sortie des programmes, ainsi que d'un éditeur de programmes, une fenêtre où l'on saisit les programmes.
Par exemple, dans la console :

```
⋙ from math import *
    # permet d'utiliser les commandes mathématiques
⋙ from random import *
    # permet d'utiliser les commandes de probabilité
⋙ 2**3   # ** signifie puissance
8
⋙ sqrt(3)
1.732050808
⋙ 13%8   # reste de la division euclidienne
5
⋙ b=3
⋙ h=4
⋙ Aire_Triangle=b*h/2
⋙ print(Aire_Triangle)
6
```

À partir de dorénavant, nous considérons que les modules `math` et `random` sont importés dès que nécessaire.

Dans l'éditeur, nous pouvons écrire un programme comme le suivant puis lancer son exécution dans la console.

```
1| Nom=input("Quel est ton prénom?")
2| Accueil="Bonjour "+Nom+". Bienvenue sur Python!"
3| print(Accueil)
```

L'éditeur permet de sauvegarder ses programmes dans un fichier « .py » ce qui est essentiel car la console oublie tout une fois qu'elle est fermée.

2 Les variables

Dans un programme, une variable est repérée par son nom et possède une valeur qui peut changer au fur et à mesure de l'exécution. On peut schématiser une variable par une boîte portant une étiquette, son nom, et ayant un contenu, sa valeur. C'est une différence fondamentale par rapport à ce qui est d'usage en mathématiques où l'on peut effectuer des calculs sans jamais connaître la valeur de la variable et si celle-ci est connue, elle ne peut changer.

On distingue plusieurs types de variables : les entiers (`int`), les décimaux (`float`), les chaînes de caractères (`str` pour string), les booléens (`bool`) : vrai et faux (ils ont aussi une valeur numérique : 1 et 0).
Une instruction d'affectation permet de donner une valeur à une variable, de remplir la boîte. En langage naturel, on écrit X⟵2 et en Python, « `X=2` ».
La demande d'une saisie de valeur s'écrit `X=float(input())` en Python. On remarque que l'on précise en même temps le type de la variable saisie. Pour l'afficher, `print(X)` fonctionne bien.

En mathématiques, le symbole = peut signifier une égalité ($3+5=8$), peut servir à définir un objet ($A=\pi R^2$) ou écrire une équation ($2x+3=5-x$) qui n'est pas toujours vérifiée et que l'on peut parfois résoudre. En Langage Python, = ne sert qu'à définir une variable. Pour tester une égalité, on utilisera `==`.

Exercice 1 Écrire un programme en langage Python appliquant l'algorithme suivant : saisir un nombre, l'élever au carré, en prendre le triple, retrancher 5 puis afficher le résultat.

3 Instructions conditionnelles

Une condition est un énoncé qui peut être vrai ou faux. Dans un programme, on peut tester si cette condition est vrai ou fausse et effectuer un traitement différent selon les cas.

Voici l'architecture d'un test :

```
Si condition Alors
    Traitement 1
Sinon
    Traitement 2
Fin Si
```

En Python, la fin de l'indentation (le décalage) marque la fin du traitement :

```
1| if condition :
2|     Traitement 1
3| else :
4|     Traitement 2
```

On peut ne pas effectuer de traitement dans le cas où la condition est fausse et l'on omet alors le « sinon/else ».
On peut aussi imbriquer plusieurs tests conditionnels et la commande « elif » combine un else suivi d'un if : cela permet de ne pas avoir un niveau d'indentation supplémentaire. Nous verrons cela en exercice.

Exercice 2 Agathe souhaite s'inscrire au club de mathématique de sa ville et on lui propose deux formules :

Formule α : une cotisation annuelle de 8 francs et chaque séance coûte 1,50 franc ;
Formule β : la séance coûte 1,70 franc.

Voici le programme incomplet qu'elle a écrit. Le compléter puis le saisir et l'exécuter.
À partir de combien de séances le programme α semble-t-il plus avantageux ?

```
1| n=int(input("Entrer n : "))
2| a=8+1,5*n
3| ................
4| if ........... :
```

EXERCICES

```
5|    print("Le tarif .... est plus avantageux.")
6| ..................
7|    print("Le tarif beta est plus avantageux.")
```

Exercice 3 Saisir et exécuter le programme suivant. Que fait-il ?

```
1| x=int(input("Combien vois-tu de lignes ? |||||||||| "))
2| if x==10 :
3|    print("Bravo !")
4| elif x<=9 :
5|    print("Tu devrais consulter un ophtalmologue.")
6| else :
7|    print("Arrête de loucher !")
```

Exercice 4 Écrire un programme demandant à une personne si elle est majeure et le cas échéant, si elle a obtenu le permis de conduire. La féliciter si cela est le cas, l'encourager sinon.

4 Boucle bornée

Une boucle permet de répéter plusieurs fois de suite un même traitement. Lorsque le nombre n de répétition est connu à l'avance, on dit que la boucle est bornée et l'on utilise un compteur i qui s'incrémente à chaque itération : à chaque fois que le traitement est effectué, le compteur i augmente de 1. Lorsque i atteint la valeur n, on effectue une dernière fois le traitement puis on sort de la boucle.

Voici l'architecture d'une boucle bornée :

Pour i allant de 1 à n
    Traitement
Fin Pour

En Python, on utilise la commande range où la borne de droite est exclue et cela donne :

```
1| for i in range(1,n+1) :
2|     Traitement
```

Exercice 5 Ce programme affiche les puissances de 1 à n du nombre x. Le complèter.

```
1| x=....(input("De quel nombre souhaites-tu connaître les
   puissances ? "))
2| n=...(input("Quelle puissance maximale souhaites-tu obtenir ? "))
3| p=1
4| for i in range(0,...) :
5|    p=x*p
6|    print(...)
```

Que cela change-t-il si l'on omet l'indentation de la dernière ligne ?

Exercice 6 Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 5$.

(a) Écrire un programme donnant les images par f de tous les entiers compris entre 0 et l'entier N.

(b) Le modifier afin qu'il donne les images de tous les multiples de $\frac{1}{2}$ compris entre 0 et l'entier N.

Exercice 7 Au cours de chaque semaine, tu doubles ton nombre de suiveurs sur ton compte Amstramgram mais tu en perds 7 le dimanche. Tu avais 9 suiveurs à l'aube du premier jour.

(a) Écris un programme donnant le nombre de suiveurs après n semaines et exécute-le.

(b) Que se passe-t-il si tu en avais seulement 6 au premier jour ? Et si tu en avais 7 ?

5 Boucle non bornée

Dans un boucle, le nombre de répétitions, d'itération n'est pas nécessairement connu à l'avance, il peut dépendre d'une condition et le traitement est alors répété tant que la condition est vérifiée puis on sort de la boucle. On parle de boucle non bornée (a priori) mais attention à ce que cette condition soit bien fausse après un certain nombre de répétitions, sinon le programme tournera *en boucle* sans jamais s'arrêter...

Voici l'architecture d'une boucle non bornée :

```
Tant que Condition
    Traitement
Fin Tant que
```

En Python, on utilise la commande while et cela donne :

```
1| while Condition :
2|     Traitement
```

Exercice 8 Écrire un programme affichant tous les entiers naturels compris entre 0 et un décimal positif D.

Exercice 9 Colette est un peu lassée de lancer son dé alors elle a écrit le programme suivant. À quoi peut-il donc bien servir ?

```
1| from random import *   # pour utiliser des fonctions de
   probabilités
2| f=randint(1,6)   # entier choisi au hasard
3| l=1
4| while f != 6 :   # différent de
5|    f=randint(1,6)
6|    l=l+1
7| print("Nombre de lancers : ", l)
```

Exercice 10 Ta capacité de concentration diminue de 16 % pour chaque heure passée quotidiennement devant un écran. Écris un programme donnant le nombre d'heures quotidiennes passées devant un écran à partir duquel ta capacité de concentration diminue de moitié.

Exercice 11 Il est bien connu que si l'on place un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite, on dépasse rapidement le nombre total de grains de riz disponibles. Complète le programme qu'a écrit Agathe afin qu'il détermine le nombre de cases que l'on peut complètement remplir avec un nombre R de grains de riz à disposition.

```
1| R=int(input("Nombre de grains de riz disponibles : "))
2| S=1
3| n=0
4| while S<=R :
5|    n=.......
6|    S=S+.....
7| print("Nombre de cases remplies : ", .... )
```

Exercice 12 On reprend la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 5$ de l'exercice 6.

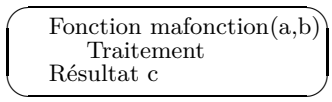
(a) Créer un programme donnant le premier entier naturel d'image strictement supérieure à un décimal M.

(b) Le modifier afin d'obtenir le premier multiple de $\frac{1}{2}$ vérifiant cette même condition.

6 Fonction

Une fonction d'un ou plusieurs arguments réalise un traitement et renvoie un résultat. Elle peut être appelée plusieurs fois par le programme principal et permet de mieux structurer celui-ci.

Voici l'architecture d'une fonction :



En Python, on utilise la commande def et cela donne :

```
1| def mafonction(a,b) :
2|    Traitement
3|    return c
```

Exercice 13 Écrire une fonction `airect` donnant l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur de ses côtés.

Exercice 14

(a) Que calcule la fonction `so` suivante ?

```
1| def so(N) :
2|    S=0
3|    for i in range(1,N+1) :
4|       S=S+i
5|    return S
```

(b) Écrire une fonction `pr` calculant le produit de tous les entiers de 1 à N.

Exercice 15 Cette fonction `nbfois` détermine le nombre d'apparition d'un caractère dans un texte, une chaîne de caractères. Le compléter. Que signifient les lignes 2 et 5 ?

```
1| def nbfois(caractere,chaine) :   # doivent être mis entre " et "
2|    l=len(chaine)
3|    n=0
4|    for i in range(0,l) :   # ou range(l)
5|       if chaine[i]== caractere :
6|          n=......
7|    .........
```

Exercice 16 Écrire

(a) une fonction opposé donnant l'opposé d'un nombre,

(b) une fonction `valabs` donnant la valeur absolue d'un nombre,

(c) une fonction `max2` donnant le plus grand de deux nombres,

(d) une fonctions `max5` donnant le maximum de cinq nombres en utilisant la précédente,

(e) une fonction `puissmin` donnant le plus petit entier tel qu'un nombre donné élevé cette puissance soit supérieur ou égal à un autre nombre donné.

Quant l'architecture commence à être complexe, il ne faut pas hésiter à créer plusieurs fonctions et faire appel aux unes dans les autres. On peut très bien utiliser une fonction qui est écrite après dans l'éditeur mais il faut faire attention à ne pas les définir en boucle. Par exemple, si `mafonction1` fait appel à `mafonction2` et si `mafontion2` à `mafonction1`, vous risquez bien de tourner en rond. En revanche, dans une architecture correctement construite, une fonction peut très bien s'appeler elle-même sans problème. C'est ce qui s'appelle un algorithme récursif.

Exercice 17 Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 2x - 4$. Écrire un programme donnant le maximum entre la valeur absolue d'un nombre et l'image par f de ce nombre en précisant duquel il s'agit.

Exercice 18 Tel Euclide, créez une fonction donnant le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels. Vous pourrez utiliser une version récursive.

7 Liste

Cette partie n'est pas au programme de seconde mais simplement à partir de la classe de première. Elle peut néanmoins être utile à tous.

Lorsque l'on a besoin de garder et d'utiliser plusieurs variables au cours d'un programme, on utilise des listes pour les stocker. Une liste est une collection d'objets de différents types (nombres, chaînes de caractères, booléens, listes,...). On peut ensuite la manipuler, faire appel à l'un de ses termes, l'utiliser dans une boucle, etc. Un exemple typique d'utilisation est la collecte des premiers termes d'un suite. Voici quelques commandes utiles en langage Python.

Un exemple de liste	`L=[2,"mai",7,True]`
Une liste vide	`L=[]`
Premier objet de la liste (rang 0)	`L[0]`
$(k+1)^e$ objet de la liste (rang k)	`L[k]`
Dernier objet de la liste	`L[-1]`
Longueur de la liste	`len(L)`
Ajouter un `objet` en fin de liste	`L.append(objet)`
Insérer un `objet` au rang k	`L.insert(k,objet)`
Supprimer l'objet de rang k	`del L[k]`
Supprimer l'objet `element`	`L.remove(element)`
Compte le nombre d'objets `element` dans la liste	`L.count(element)`
Trouve l'index de l'objet `element` dans la liste	`L.index(element)`
Concaténer (rassembler) deux listes	`L1+L2`
Inverser l'ordre des valeurs	`L.reverse()`
Afficher les objets par ordre croissant (si possible)	`sorted(L)`
Réarranger la liste par ordre croissant (si possible)	`L.sort()`

Exercice 19 On considère la fonction suivante.

```
1| def cettefonction(valeur,liste) :
2|     nombre=0
3|     for v in liste :
4|         if v>=valeur :
5|             nombre=nombre+1
6| return nombre
```

Pour `L=[1,2,4,2,1]`, `cettefonction(2,L)` donne 3, `cettefonction(3,L)` donne 1 et `cettefonction(6,L)` donne 0. Que fait cette fonction ?

Exercice 20

A. La ligne `L=[i**2 for i in range(6)]` donne la liste [0, 1, 4, 9, 16, 25]. Que fait cette instruction ?

B. Créer une liste des cubes des entiers naturels inférieurs ou égaux à douze.

C. Saisir les instructions suivantes. Que font-elles ?

(a) `L=[9-k for k in range(7)]`

(b) `M=[6]*5`

(c) `N=[randint(1,6) for i in range(8)]`

(d) `M[2]=1`

(e)
```
P=M+N
P.sort()
```

(f)
```
X=[0.5*i for i in range(-5,5)]
Y=[3*x**2-5 for x in X]
```

Exercice 21 Écrire une fonction calculant la somme des objets d'une liste de nombres.

Exercice 22 Écrire une fonction donnant la liste des diviseurs d'un entier naturel.

Exercice 23 Écrire un programme échangeant la place de deux objets d'une liste.

Exercice 24 Les notes de Colette en mathématiques augmentent de 2 % à chaque devoir jusqu'à ce qu'elle obtienne la note maximale. Écrire une fonction créant la liste de ses notes jusqu'à 20 en fonction de la note non nulle qu'elle a obtenue au premier devoir rendu.

8 Foire de l'algo

Les algorithmes seront rédigés ici en langage naturel mais je vous encourage à les saisir en Python afin de vérifier que vous maîtrisez bien ce que vous avez appris précédemment. Ils sont d'un niveau varié et peuvent parfois utiliser des résultats et notions mathématiques que vous ne connaissez pas encore mais vous pourrez tout de même comprendre leur architecture.

1. (a) Que contient la variable Z après exécution de l'algorithme (A) pour $Z = 0$, $Z = 1$ puis $Z = 3$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Algo (A)
$Z \longleftarrow 2 - Z^2$

2. (a) Que contient la variable T après exécution de l'algorithme (B) pour $S = 0$, $S = 1$ puis $S = -2$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

(c) Le simplifier.

Algo (B)
$R \longleftarrow 2$
$T \longleftarrow -\pi$
$R \longleftarrow 2S + 3$
$R \longleftarrow 4R - 1$
$T \longleftarrow 3R^2 - 4$

3. (a) Que contient la variable U après exécution de l'algorithme (C) pour $N = 3$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Algo (C)
$U \longleftarrow 7$
Pour I allant de 1 à N
  $U \longleftarrow \frac{3}{4} \times U$
Fin Pour
Afficher U

4. (a) Quelles valeurs affiche l'algorithme (D) pour $P = 5$ et $V = -3$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Algo (D)
Pour K allant de 2 à P
  Affecter $V \longleftarrow 4 + V$
  Afficher V
Fin Pour

5. (a) Exécuter les algorithmes (E) pour $N = 3$, (F) pour $A = 4$ puis $A = 10$ et (G) pour $N = 4$.

(b) Quel est le rôle de chacun de ces algorithmes ?

Algo (E)
$U \longleftarrow 4$
$I \longleftarrow 0$
Tant que $I < N$
  $I \longleftarrow I + 1$
  $U \longleftarrow \frac{2}{5}U + 2$
Fin Tant que
Afficher U

Algo (F)
$X \longleftarrow 0$
$F \longleftarrow 2$
Tant que $F < A$
  $X \longleftarrow X + \frac{1}{2}$
  $F \longleftarrow X^2 + 2$
Fin Tant que
Afficher X

Algo (G)
$P \longleftarrow \pi$
Pour I allant de 0 à N
  $D \longleftarrow Ent(P)$
  $P \longleftarrow 10(P - D)$
  Afficher D
Fin Pour

6. (a) À quoi correspond la modification « Pour K allant de 1 à P » dans le (D) ?

(b) À quoi correspond la modification « $I \longleftarrow 1$ » dans l'algorithme (E) ?

7. Évariste est gallois et son cousin est Germain. Le premier raffole des boucles *Tant que* tandis que le second affectionne les boucles *Pour*.

(a) Aide Germain à transformer la boucle *Tant que* du (E) en boucle *Pour*.

(b) Peut-il transformer la boucle *Tant que* de l'algorithme (F) en boucle *Pour* ?

(c) Tel Évariste, transforme les boucles *Pour* des (C) et (D) en boucles *Tant que*.

8. (a) Observer et analyser l'algorithme (H).

(b) Le compléter afin qu'il réponde au problème donné dans $\mathbb{R}$.

Algo (H)
Saisir $A \neq 0$, B et C
$D \longleftarrow$ ...
Si D..., Alors
  $U \longleftarrow \frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$
  $V \longleftarrow$ ...
  Afficher ....
Sinon
....
Fin Si

9. (a) Observer, analyser, compléter, modifier, exécuter pour différentes valeurs les algorithmes (I), (J), (K), (L) et (M).

(b) Quel est le rôle de chacun de ces algorithmes ?

Algo (I)
$K \longleftarrow 0$
$B \longleftarrow 2$
Saisir N
Pour K allant de 1 à N
  $B \longleftarrow A + 1$
  $A \longleftarrow B - 1$
Fin Pour
Afficher $A - B$

Algo (J)
$B \longleftarrow 3$
Saisir N
Tant que $K < N$
  $K \longleftarrow K + 1$
  $A \longleftarrow 3B$
  $C \longleftarrow A - 2$
  $A \longleftarrow \frac{C+2}{3}$
Fin Tant que
Afficher $A - B$

Algo (K)
$F \longleftarrow 1$
$U \longleftarrow 0$
Pour K allant de 1 à N
  Afficher F
  $V \longleftarrow F$
  $F \longleftarrow U + F$
  $U \longleftarrow V$
Fin Pour

Algo (L)
$U \longleftarrow 4$
$V \longleftarrow 1$
$I \longleftarrow 0$
Saisir M
Tant que $I < M$
  $W \longleftarrow V$
  $V \longleftarrow \frac{U+V}{2}$
  $U \longleftarrow W$
  Afficher U
Fin Tant que

Algo (M)
$X \longleftarrow 0$
Saisir A
$F \longleftarrow 1 - X^3$
Tant que $F < A$
  $X \longleftarrow X + 1$ à X
  $F \longleftarrow 1 - X^3$
Fin Tant que
Afficher X

10. (a) Observer, analyser, compléter, exécuter, au moyen de tableaux et pour différentes valeurs, l'algorithme (N) pour les fonctions $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = \sin(x)$ puis $f(x) = 1 - x^2$.

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

(c) Le test « Si $f(A) \times f(B) > 0$ » est-il nécessaire ?

Algo (N)
f est une fonction .....ante et ...
Saisir A, B et E
$I \longleftarrow A$
Si $f(A) \times f(B) > 0$, Alors
  Afficher "Non mais ça ne va pas ?"
Sinon
  Tant que $|f(I)| > E$
    $I \longleftarrow \frac{A+B}{2}$
    Si $f(I) > 0$, Alors
      ... $\longleftarrow I$
    Sinon
      ... $\longleftarrow I$
    Fin Si
  Fin Tant que
  Afficher I
Fin Si

11. Rédiger puis exécuter pour différentes valeurs des algorithmes répondant aux problèmes suivants :

(a) Afficher l'image d'un réel x_0 à saisir par la fonction $f(x) = 3x^2 - 5\cos(x) + 7$.

(b) Afficher les coordonnées du milieu d'un segment dont on saisit les coordonnées des extrémités.

(c) Afficher tous les termes jusqu'au rang p de la suite $u_n = n^2 - 3n + 4$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) Afficher le $(n+1)$-ième terme de la suite $v_0 = 5$, $v_{n+1} = 2v_n - 3$.

(e) Afficher le terme numéro n de la suite $w_0 = 4$, $w_1 = 5$, $w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$.

(f) Calculer le produit scalaire de deux vecteurs dont on saisit les coordonnées dans un repère orthonormé, l'afficher puis déterminer leur éventuelle orthogonalité.

(g) Faire choisir un nombre entier entre 0 et 100 à la machine (*Aléat*) puis saisir des entiers jusqu'à ce qu'il soit trouvé. La machine doit préciser si la saisie est supérieure ou inférieure à la solution et féliciter chaleureusement le joueur lorsqu'il réussit enfin.

12. Implémenter le cas réel de l'algorithme du discriminant (H) dans votre calculatrice, cela pourra vous servir...

13. (ʃ) Implémenter ses algorithmes préférés en langage Python et les exécuter pour différentes valeurs.

EXERCICES

9 Solutions

Exercice 1 Dans la console, cela donne :

```
>>> x=float(input("Saisir un nombre : "))
>>> x=x**2   # On utilise la même variable
>>> x=3*x
    # Cela prend moins de « place » mais on perd l'information de départ
>>> x=x-5
>>> print(x)
```

Exercice 2 Avec ce programme, Agathe s'aperçoit qu'à partir de 40 séances, le tarif α est plus avantageux.

```
1| n=int(input("Entrer n : "))
2| a=8+1,5*n
3| b=1,7*n
4| if a<=b :
5|    print("Le tarif alpha est plus avantageux.")
6| else :
7|    print("Le tarif beta est plus avantageux.")
```

Exercice 3 Ce programme teste sommairement la vue du joueur. S'il voit 10 lignes, on le félicite, s'il en voit moins c'est qu'il devrait certainement porter des lunettes et s'il en voit plus, c'est qu'il louche.

Exercice 4

```
1| n=int(input("Quel âge as-tu? "))
2| if n>=18 :
3|    p=str(input("Tu es donc majeur(e). As-tu le permis de conduire? "))
4|    if p=="oui" :   # chaîne de caractères
5|       print("Bravo!")
6|    else :
7|       print("Rien n'est perdu.")
8| else :
9|    print("Tu es mineur(e) et tu ne peux pas encore avoir le permis de conduire.")
```

Exercice 5 Le programme suivant affiche les puissances de 1 à n du nombre x.

```
1| x=float(input("De quel nombre souhaites-tu connaître les puissances? "))
```

```
2| n=int(input("Quelle puissance maximale souhaites-tu obtenir? "))
3| p=1
4| for i in range(0,n) :
     # i va prendre n valeurs différentes, de 0 à n-1
5|    p=x*p
6|    print(p)
```

Si l'on omet l'indentation de la dernière ligne, seule la dernière puissance est affichée.

Exercice 6 Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 5$.

(a) Voici un programme donnant les images par f de tous les entiers compris entre 0 et l'entier N.

```
1| N=int(input("Antécédent max : "))
2| for i in range(0,N+1) :
3|    y=3*i**2-5
4|    print(y)
```

(b) En voici un donnant les images de tous les multiples de $\frac{1}{2}$ compris entre 0 et N.

```
1| N=int(input("Antécédent max : "))
2| for i in range(0,N) :
3|    y1=3*i**2-5
4|    y2=3*(i+0.5)**2-5
5|    print(y1)
6|    print(y2)
7| print(3*N**2-5)   # Pour calculer et afficher l'image de N
```

Exercice 7 Compte Amstramgram

(a)
```
1| n=int(input("Depuis combien de semaines as-tu ton compte
   Amstramgram?"))
2| S=9
3| for i in range(n) :
     # On a omis la borne gauche, c'est alors 0 par défaut
4|    S=2*S-7
5| print("Tu as désormais ",S," suiveurs.")
```

(b) Si tu avais 6 suiveurs au premier jour, on s'aperçoit que tu n'en as plus dès la troisième semaine.
Et si tu en avais 7 à l'aube du premier jour, cela restera ainsi jusqu'à la fin des temps.

Exercice 8 Celui-ci affiche tous les entiers naturels entre 0 et un décimal positif D.

```
1| D=float(input("Quel nombre positif, je te prie?"))
2| k=0
```

```
3| while k<=D :
4|     print(k)
5|     k=k+1
```

Exercice 9 Le programme de Colette simule des lancers d'un dé cubique jusqu'à l'obtention d'un six et affiche le nombre de lancers qui ont été nécessaires.

Exercice 10 Grâce au programme suivant, tu sais que ta capacité de concentration aura diminuée de moitié si tu passes plus de 4 heures par jour devant un écran.

```
1| c=1   # Capacité initiale
2| h=0
3| while c>0.5 :
4|     c=0.84*c   # diminution de 16 % : multiplication par 1 - 16/100
5|     h=h+1
6| print("Nombre d'heures quotidiennes devant un écran: ", h)
```

Exercice 11 Grains de riz

```
1| R=int(input("Nombre de grains de riz disponibles : "))
2| S=1
3| n=0
4| while S<=R :
5|     n= n+1
6|     S=S+2**n
7| print("Nombre de cases remplies : ", n )
```

Exercice 12 $f : x \longmapsto 3x^2 - 5$

(a)
```
1| M=float(input("Borne à dépasser : "))
2| f=-5
3| n=0
4| while f<=M :
5|     n=n+1
6|     f=3*n**2-5
7| print("L'image de ",n," par f est strictement plus grande que ",M)
```

(b) Afin d'obtenir le premier multiple de $\frac{1}{2}$, il suffit de remplacer la ligne 5 par `n=n+0.5`.

Exercice 13 La fonction `airect` suivante donne l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur de ses côtés.

```
1| def airect(l,L) :
```

```
2|    a=l*L
3|    return a
```

Exercice 14

(a) La fonction so calcule la somme des entiers entre 0 et N.

(b) La fonction pr suivante calcule le produit des entiers entre 1 et N.

```
1| def pr(N) :
2|    P=1
3|    for i in range(1,N+1) :
4|       P=P*i
5|    return P
```

Exercice 15 La fonction `nbfois` détermine le nombre d'apparition d'un caractère dans une chaîne de caractères.

```
1| def nbfois(caract,chain) :   # doivent être mis entre " et "
2|    l=len(chain)   # nombre de caractères dans la chaîne
3|    n=0
4|    for i in range(0,l) :   # ou range(l)
5|       if chain[i]== caract :
    # si le caractère de rang i est caract
6| # Rq : le premier caractère d'une chaîne est de rang 0 et le
   dernier, de rang len−1
7|          n=n+1
8|    return n
```

Exercice 16

(a)
```
1| def opposé(x) :
2|    return -x
```

(b)
```
1| def valabs(x):
2|    if x<0 :
3|       return -x
4|    else :
5|       return x
```

(c)
```
1| def max2(a,b) :
2|    if a<b :
3|       return b
4|    else :
5|       return a
```

(d)
```
1| def max5(a,b,c,d,e) :
2|    M=max2(a,max2(b,
        max2(c,max2(d,e))))
3|    return M
```

(e)
```
1| def puissmin(a,A) :
2|    n=0
3|    while a**n<A :
4|       n=n+1
5|    return(n)
```

Exercice 17 On va utiliser les fonctions `max2` et `valabs` de l'exercice précédent.

```
1| def monmaxf(x) :
```

CORRIGÉS

```
2|    f=3*x**2-2*x-4
3|    m=max2(f,valabs(x))
4|    if m==f :
5|       return print("Le maximum est l'image ",m)
6|    else :
7|       return print("Le maximum est l'antécédent ", m)
```

Exercice 18 Algorithme d'Euclide

```
1| def EuclideClassique(a,b) :
     # algorithme classique du pgcd de a et b
2|    while a%b != 0 :
3|    # le % donne le reste de la division euclidienne, != teste si
  différent
4|       a, b = b, a%b
5|    # on change les valeurs de a et b en même temps, cela évite de
  sauver l'ancien a pour l'utiliser dans le nouveau b
6|    return b
1| def EuclideRécursif(a,b) : # algorithme récursif du pgcd de a et b
2|    if (b==0) :
3|       return(a)
4|    else :
5|       r=a%b
6|       return EuclideRécursif(b,r)
```

Exercice 19 Cette fonction donne le nombre d'objets numériques ou bouléens (True valant 1 et False valant 0) de la liste ayant une valeur supérieure ou égale à la valeur en argument.

Exercice 20

A. `L=[i**2 for i in range(6)]` crée la liste des carrés des six premiers entiers (de 0 à 5).

B. `L=[i**3 for i in range(13)]` crée la liste des cubes des entiers jusqu'à douze.

C. (a) `L=[9-k for k in range(7)]` donne la liste `[9,8,7,6,5,4,3]`.

(b) `M=[6]*5` donne la liste `[6,6,6,6,6]`.

(c) `N=[randint(1,6) for i in range(8)]` donne une liste aléatoire de huit entiers entre 1 et 6.

(d) `M[2]=1` remplace l'objet de rang 2 (le troisième) par un 1 dans la liste `M`.

(e) `P=M+N` puis `P.sort()` crée la liste concaténée de `M` suivie de `N` puis la réorganise par ordre croissant.
La liste `P` est ici `[1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6]`.

(f) `X=[0.5*i for i in range(-5,5)]` crée la liste des multiples de $\frac{1}{2}$ dans $\left[-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right[$.
`Y=[3*x**2-5 for x in X]` crée la liste des images de ces mêmes multiples par $f(x)=3x^2-5$.

Exercice 21 La fonction suivante calcule la somme des objets d'une liste de nombres. Remarquons que la fonction intégrée `sum()` aurait donné le même résultat.

```
def sommeliste(L) :
    s=0
    for v in L :
        s=s+v
    return s
```

Exercice 22 Cette fonction affiche la liste des diviseurs d'un entier naturel.

```
def listediv(n) :
    div=[]
    for i in range(1,n+1) :
        if n
            div.append(i)
    print(div)
```

Exercice 23 Le programme suivant échange la place de deux objets d'une liste.

```
def echange(i,j,L) :
    if i>len(L) or j>=len(L) :
   # afin de ne pas dépasser les dimensions de la liste
        print("Liste trop courte")
    else :
        L[i],L[j]=L[j],L[i]   # échange simultané, c'est pratique
    return L
```

Exercice 24 Les notes de Colette en mathématiques sont données par ce programme.

```
def notesaugementées(n) :
    L=[]
    d=n
    while d<20 :
        L.append(d)
        d=1.02*d
    L.append(20)
    return L
```

Foire de l'algo

1. On obtient 2, 1 puis -7. L'algorithme (A) affiche l'image de Z par la fonction $f(x) = 2 - x^2$.

2. On obtient 359, 1079 puis 71. L'algorithme (B) affiche l'image de S par la fonction $192x^2 + 528x + 359$. Il est bien plus simple de reprendre alors l'algorithme (A) avec cette fonction f.

3. L'algorithme (C) affiche u_N pour $u_n = 7 \times (\frac{3}{4})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$U \longleftarrow 7$
$N \longleftarrow 3$
Début Pour
  $I \longleftarrow 1$
    $U \longleftarrow \frac{3}{4} \times 7$
  $I \longleftarrow 2$
    $U \longleftarrow \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 7$
  $I \longleftarrow 3$
    $U \longleftarrow 7(\frac{3}{4})^3$
Fin Pour
"$\frac{189}{64}$"

4. L'algorithme (D) affiche $v_2, v_3, ...v_P$ pour $v_1 = -3$, $v_{n+1} = v_n + 4$, $\forall n \geqslant 1$.

$P \longleftarrow 5$
$V \longleftarrow -3$
Début Pour
  $K \longleftarrow 2$
    $V \longleftarrow 4 - 3 = 1$
    "1"
  $K \longleftarrow 3$
    $V \longleftarrow 4 + 1 = 5$
    "5"
  $K \longleftarrow 4$
    $V \longleftarrow 4 + 5 = 9$
    "9"
  $K \longleftarrow 5$
    $V \longleftarrow 4 + 9 = 13$
    "13"
FinPour

5. • L'algorithme (E) affiche u_N pour $u_0 = 4$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 2$, $\forall n \geqslant 0$.

$U \longleftarrow 4$
$I \longleftarrow 0$
$N \longleftarrow 3$
Début Tantque
  $0 < 3$
    $I \longleftarrow 0 + 1 = 1$
    $U \longleftarrow \frac{2}{5} \times 4 + 2 = \frac{18}{5}$
  $1 < 3$
    $I \longleftarrow 1 + 1 = 2$
    $U \longleftarrow \frac{2}{5} \times \frac{18}{5} + 2 = \frac{86}{25}$
  $2 < 3$
    $I \longleftarrow 2 + 1 = 3$
    $U \longleftarrow \frac{2}{5} \times \frac{86}{25} + 2 = \frac{422}{125}$
  $3 \geqslant 3$
FinTantque
"$\frac{422}{125}$"

• L'algorithme (F) affiche le premier multiple positif de $\frac{1}{2}$ tel que $f(X) = X^2 + 2 \geqslant A$.

$X \longleftarrow 0$
$F \longleftarrow 2$
$A \longleftarrow 4$
Début Tantque
  $2 < 4$
    $X \longleftarrow 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
    $F \longleftarrow (\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{9}{4}$
  $\frac{9}{4} < 4$
    $X \longleftarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
    $F \longleftarrow 1^2 + 2 = 3$
  $3 < 4$
    $X \longleftarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
    $F \longleftarrow (\frac{3}{2})^2 + 2 = \frac{17}{4}$
  $\frac{17}{4} \geqslant 4$
FinTantque (pour $A = 4$)
"$\frac{3}{2}$"

Pour $A = 10$, on continue jusqu'à $X = 3$.

• L'algorithme (G) affiche les $N + 1$ premières décimales de π (pour peu qu'on les connaisse auparavant).

$P \longleftarrow \pi = 3,14159...$
$N \longleftarrow 4$
Début Pour
  $I \longleftarrow 0$
    $D \longleftarrow Ent(\pi) = 3$
    $P \longleftarrow 10(\pi - 3) = 1,4159...$
    "3"
  $I \longleftarrow 1$

$D \longleftarrow Ent(1, 4159...) = 1$
$P \longleftarrow 10(1, 4159... - 1) = 4, 159...$
"1"
$I \longleftarrow 2$
$D \longleftarrow Ent(4, 159...) = 4$
$P \longleftarrow 10(4, 159... - 4) = 1, 59...$
"4"
$I \longleftarrow 3$

$D \longleftarrow Ent(1, 59...) = 1$
$P \longleftarrow 10(1, 59... - 1) = 5, 9...$
"1"
$I \longleftarrow 4$
$D \longleftarrow Ent(5, 9...) = 5$
$P \longleftarrow 10(5, 9... - 5) = 9, ...$
"5"
FinPour

6. (a) Si K va de 1 à P alors, (D) affiche v_1, v_2,...v_P pour $v_0 = -3$, $v_{n+1} = v_n + 4$.

(b) Si on affecte 1 à I, alors (E) affiche u_N pour $u_1 = 4$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 2, \forall n \geqslant 1$.

7. (a) La boucle *Tantque* de (E) devient « Pour I allant de 1 à N, $U \longleftarrow \frac{2}{5}U + 2$, Fin Pour », sans initialisation de I.

(b) Dans l'algorithme (F), on ne peut transformer la boucle *Tant que* en boucle *Pour* car on ne sait pas à l'avance à partir de quel multiple de $\frac{1}{2}$ la fonction f « dépasse » la borne A que l'on saisit.

(c) (C) : $I \in \mathbb{N}$, Init. : $I \longleftarrow 0$, Boucle : Tant que $I < N$, $I \longleftarrow I + 1$, $U \longleftarrow \frac{3}{4}U$, Fin Tantque.
(D) : $K \geqslant 1$, Init. : $K \longleftarrow 1$, Boucle : Tant que $K < P$, $K \longleftarrow K + 1$, $V \longleftarrow 4 + V$, Fin Tantque.

8. L'algorithme (H) est celui du discriminant d'un trinôme du second degré dans $\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Algo (H)
Saisir $A \neq 0$, B et C
$D \longleftarrow B^2 - 4AC$ à D
Si $D > 0$, Alors
  $U \longleftarrow \frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$ et $V \longleftarrow \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$
  Afficher "Deux racines réelles :" U "et" V "."
Sinon
  Si $D = 0$, Alors
    $U \longleftarrow \frac{-B}{2A}$
    Afficher "Une racine réelle double :" U "."
  Sinon
    Afficher "Pas de racine réelle."
  Fin Si
Fin Si

9. (I) : A n'est pas initialisé alors que B l'est sans que ce soit nécessaire. On peut donc « Affecter 2 à A » plutôt qu'à B. Par ailleurs, N ne doit pas être nul et l'initialisation de K est inutile tout comme cet algorithme qui affichera toujours $3 - 2 = 1$.
(J) : C n'est pas déclaré et K n'est pas initialisé à 0. Cet algorithme affichera toujours 0 ce qui est extrêmement inutile.
(K) : Il faut « Saisir N ($\geqslant 1$) » et la variable s'appelle K et non I. Cet algorithme affiche alors les termes f_1, f_2, ..., f_N de l'historique suite de Fibonacci : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

(L) : Il manque l'incrémentation « $I \longleftarrow I + 1$ » dans la boucle. Cet algorithme affiche les valeurs successives de la suite $u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + u_n}{2}$.

(M) donne le premier entier naturel pour lequel la fonction $f(x) = 1 - x^3$ dépasse A. Le problème est que f est décroissante et ceci n'est donc pas pertinent du tout : cela donne généralement 0 ou pire, l'algorithme tourne à l'infini si $A > 1$. Il faut donc mieux imposer A négatif et faire un test « Tant que $F > A$ » pour voir quand elle passe en dessous.

10. L'algorithme (N) affiche une valeur approchée d'une racine de la fonction f sur l'intervalle $[\,A\,;B\,]$ par la *méthode de dichotomie*. Le réel strictement positif E donne la précision de l'approximation.

La fonction f doit être continue et monotone (théorème des valeurs intermédiaires !). Pour f croissante, on affecte I à B lorsque $f(I)$ est positif et I à A lorsque $f(I)$ est négatif. On inverse B et A lorsque f est décroissante.

Si $f(A) \times f(B) < 0$, f change de signe entre A et B et s'annule donc : ce test est nécessaire.

Il est à noter que f n'admet pas nécessairement une unique racine et l'algorithme ne donne pas le même résultat selon les valeurs de A et de B saisies.

Vous avez peut-être besoin des explications de votre professeur alors, n'hésitez pas.

11. Voici des algorithmes répondant aux problèmes posés.

Algo (a)
Saisir X
$X \longleftarrow 3X^2 - 5\cos(X) + 7$
Afficher X

Algo (b)
Saisir xA, yA, xB et yB
$xA \longleftarrow \frac{xA+xB}{2}$
$yA \longleftarrow \frac{yA+yB}{2}$
Afficher xA et yA

Algo (c)
Saisir P
Pour I allant de 0 à P
  $U \longleftarrow I^2 - 3I + 4$
  Afficher U
Fin Pour

Algo (d)
$V \longleftarrow 5$
Saisir N ($\geqslant 1$)
Pour K allant de 1 à N
  $V \longleftarrow 2V - 3$
Fin Pour
Afficher V

Algo (e)
$W \longleftarrow 5$
$U \longleftarrow 4$
Saisir N ($\geqslant 2$)
Pour K allant de 1 à $N - 1$
  $V \longleftarrow W$
  $W \longleftarrow 3U - 2W$
  $U \longleftarrow V$
Fin Pour
Afficher W

Algo (f)
Saisir Xu, Yu, Xv et Yv
$S \longleftarrow Xu \times Xv + Yu \times Yv$
Afficher "Leur produit scalaire est" S
Si $S = 0$, Alors
  Afficher "et ils sont orthogonaux"
Fin Si

```
Algo (g)
N ⟵ Aléat(0; 100)
I ⟵ 0
Tant que I < 101
   I ⟵ I + 1
   Saisir E
   Si E = N, Alors
      Afficher "Bravo !"
   Sinon
      Si E > N, Alors
         Si E ⩾ 101, Alors
            Afficher "Tu n'as rien compris !"
         Sinon
            Afficher "Trop grand !"
         Fin Si
      Sinon
         Afficher "Trop petit !"
      Fin Si
   Fin Si
Fin Tant que
Si I ⩾ 101, Alors
   Afficher "Tu n'es vraiment pas très doué !"
Fin Si
```

12. Voici le programme du « discriminant réel » sur une T.I.

Commentaires	T.I.
Écriture du programme	PROGRAM :DEGRE2
Initialisation	
Commencer par effacer l'écran	: ClrHome
Entrées	
Demander la valeur de a	: Prompt A
Demander la valeur de b	: Prompt B
Demander la valeur de c	: Prompt C
Traitement	
Calculer Δ *et Affecter la valeur à D*	: B^2-4×A×C → D
Afficher D	: Disp D
Si Δ *est strictement négatif*	: If D < 0
Alors	: Then
Afficher "Pas de solution réelle"	: Disp "Pas de solution réelle"
Fin de si	: End
Si Δ *est nul*	: If D = 0
Alors	: Then
Afficher "1 solution double"	: Disp "1 solution double"
Calculer la solution et affecter la valeur à X	: -B/(2A)→ X
Afficher la valeur de X	: Disp X
Fin de si	: End
Si Δ *est strictement positif*	: If D > 0
Alors	: Then
Afficher "2 solutions réelles"	: Disp "2 solutions réelles"
Calculer la première solution et affecter la valeur à X	: (-B - $\sqrt{\text{D}}$)/(2A) → X
Afficher la valeur de X	: Disp X
Calculer la deuxième solution et affecter la valeur à X	: (-B - $\sqrt{\text{D}}$)/(2A) → X
Afficher la valeur de X	: Disp X
Fin de si	: End

Cahier β

EN TOUTE LOGIQUE

Sommaire

1 Diagrammes de Venn 339
2 Ensembles 342
3 Logique 344
3.1 Propositions 344
3.2 Implication 345
3.3 Équivalence 346
3.4 Exercices 346
4 Solutions 348

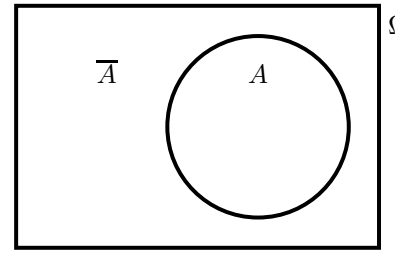
Ce cahier est fondamental pour votre scolarité et votre vie.

1 Diagrammes de Venn

Les diagrammes de Venn, ou diagrammes *en patates*, sont des représentations graphiques des relations entre plusieurs ensembles. Chaque ensemble est représenté par une forme géométrique simple comme un cercle, une ellipse ou un rectangle.

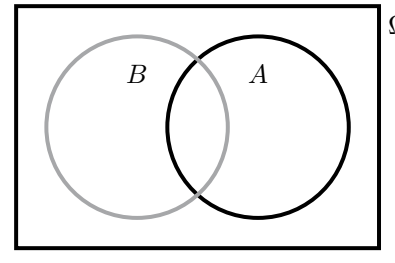
Un ensemble dans l'univers

Dans ce premier exemple, nous voyons Ω (l'intérieur du rectangle) et A, un *sous-ensemble* de Ω (l'intérieur du cercle). Le *complémentaire* de A, noté $\overline{A}$, est la partie du rectangle qui n'est pas dans le cercle.



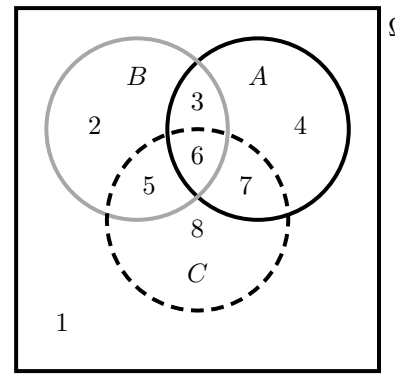
Deux ensembles dans l'univers

Dans ce second exemple, nous voyons l'univers Ω et deux sous-ensembles de Ω, A et B. L'*intersection* $A \cap B$ des deux ensembles est leur partie commune, ce qui est dans les deux cercles en même temps. L'*union* $A \cup B$ des deux ensembles est ce qui se situe dans au moins un des deux cercles, intersection incluse donc.



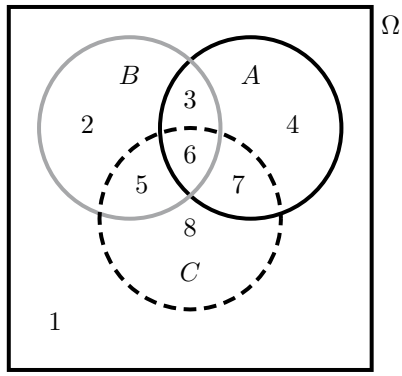
Trois ensembles dans l'univers

Dans ce troisième exemple, nous voyons l'univers Ω et trois sous-ensembles de Ω, A, B et C. Toutes les intersections et unions de deux ou trois de ces ensembles ainsi que leur complémentaire, y sont représentées.
Par exemple, la region 3 est $(A \cap B) \cap \overline{C}$, tandis que $(\overline{A} \cup B) \cap C$ est constitué des régions 5, 6 et 8.



Exercice 1

Décrire les différentes régions au moyen d'unions et d'intersections des ensembles A, B, C ainsi que leur complémentaire, et réciproquement.



(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.
(e) 5.
(f) 6.
(g) 7.
(h) 8.
(i) 3 et 6.
(j) 8 et 3.
(k) 5 et 7.
(l) 6 et 8.
(m) 1 et 7.
(n) $\overline{A \cap C}$.
(o) $\overline{A} \cup \overline{C}$.
(p) $\overline{B \cup C}$.
(q) $\overline{B} \cap \overline{C}$.
(r) $(B \cap C) \cup A$.
(s) $B \cap (C \cup A)$.
(t) $(B \cup A) \cap (C \cup A)$.
(u) $(B \cup C) \cap A$.
(v) $B \cup (C \cap A)$.
(w) $(B \cap A) \cup (C \cap A)$.
(x) $(\overline{A} \cup B) \cap C$.
(y) $\overline{B \cup C} \cap \overline{A}$.
(z) $\overline{\overline{A \cap C} \cup B}$.

Vous aurez donc remarqué que l'on a toujours $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$.

Exercice 2

Faire correspondre à chacun de ces ensembles, son diagramme de Venn parmi ceux des pages suivantes. Les décrire ensuite en termes d'unions et d'intersections.

A. Fonctions affines et fonctions trigonométriques telles que $f(0) = 0$.

B. Triangles isocèles non équilatéraux.

C. Parmi les réels, les entiers naturels et les nombres irrationnels.

D. Les entiers naturels qui ne sont ni multiples de 2 ni de 3.

E. Parallélogrammes dont les diagonales n'ont pas même longueur et ne sont pas perpendiculaires.

F. Parallélogrammes dont les diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires ou ni l'un, ni l'autre.

G. Entiers multiples de 7 ou de 2 mais pas de 14.

H. Parallélogrammes dont les diagonales ont même longueur ou sont perpendiculaires ou ni l'un, ni l'autre mais pas les deux.

I. Les réels n'étant pas décimaux.

J. Les fonctions telles que $f(0) \neq 0$ qui ne sont ni affines, ni trigonométriques.

K. Les nombres réels étant décimaux.

L. Parallélogrammes ayant leurs diagonales de même longueur ou perpendiculaires.

M. Les réels irrationnels ou décimaux.

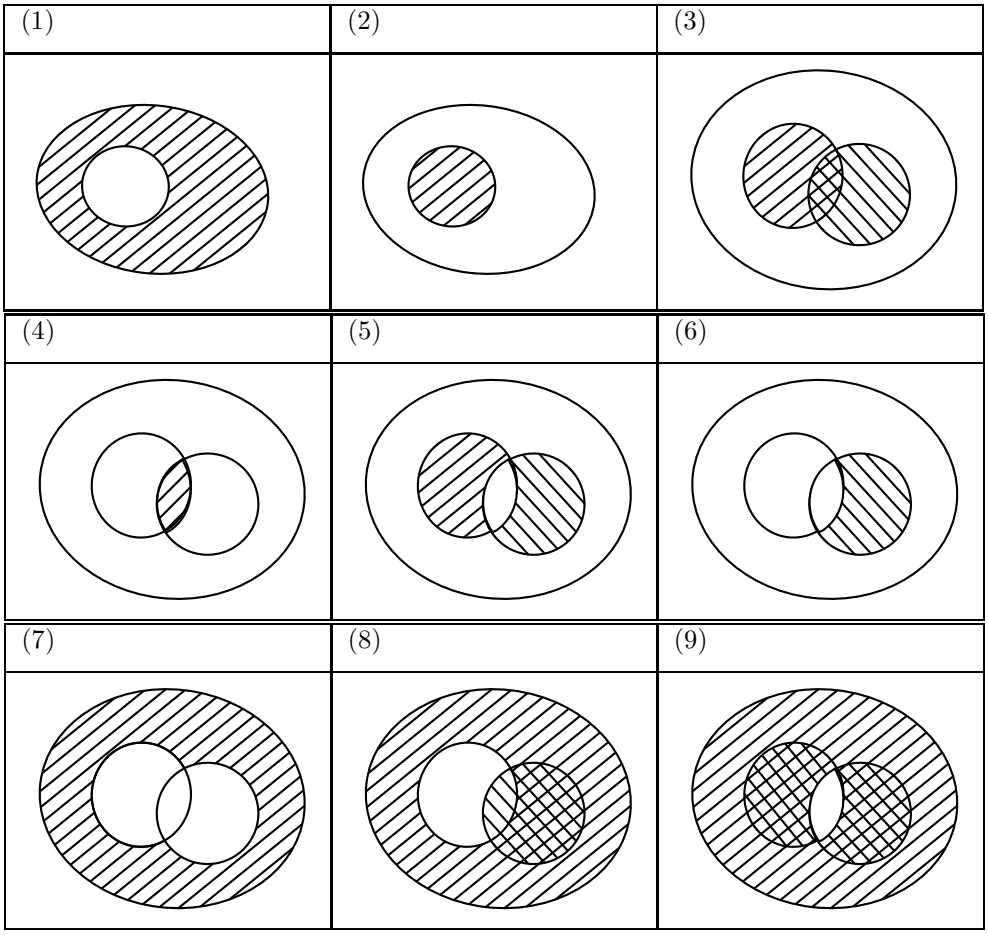
N. Les réels ni irrationnels, ni naturels.

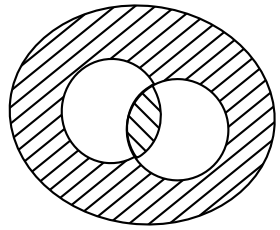
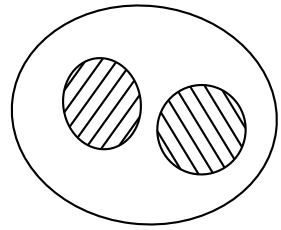
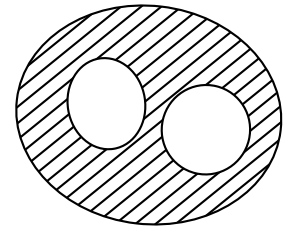
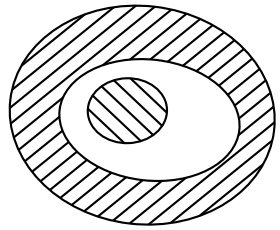
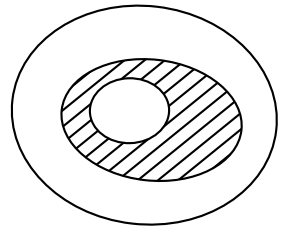
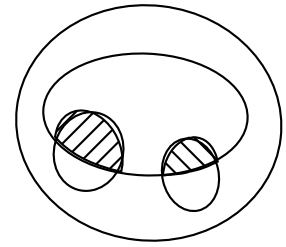
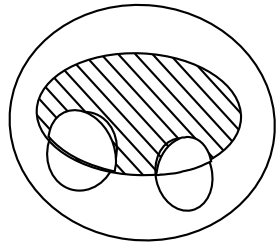
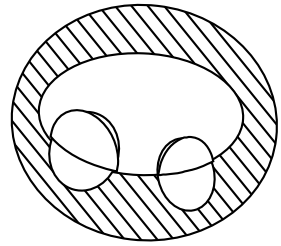
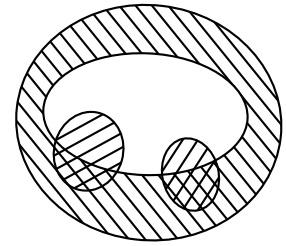
O. Parallélogrammes de diagonales de même longueur et perpendiculaires.

P. Les fonctions telles que $f(0) = 0$ qui ne sont ni affines, ni trigonométriques.

Q. Les fonctions affines, trigonométriques ou les fonctions telles que $f(0) \neq 0$.

R. Les entiers multiples de 7 qui ne sont pas pairs.



(10)	(11)	(12)
		
(13)	(14)	(15)
		
(16)	(17)	(18)
		

2 Ensembles

Vocabulaire

Notations ensemblistes

$\{\ldots\}$: un ensemble.

: ou | ou / : "tel que" (tq.).

$\setminus$: "privé de", $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ensembles de nombres

$\mathbb{N}$: les entiers naturels.

$\mathbb{Z}$: les entiers relatifs

$\mathbb{D}$: les nombre décimaux.

$\mathbb{Q}$: les nombres rationnels.

$\mathbb{R}$: les nombres réels.

$\mathbb{R}^*$: les réels non nuls.

$\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+$: les réels positifs.

$\mathbb{R}^-$ ou $\mathbb{R}_-$: les réels négatifs.

$\mathbb{R}_+^*$: les réels strictement positifs.

Ensemble, sous-ensembles, éléments

$\cap$: l'intersection de deux ensembles.

$\cup$: l'union de deux ensembles.

$\in$: "appartient à" ou "est un élément de".

$\subset$: "est un sous-ensemble de".

Opérateurs logiques

$\neg$: la négation d'une proposition, "non".

$\wedge$: la conjonction de deux propositions, "et".

$\vee$: la disjonction de deux propositions, "ou".

$\forall$: "pour tout".

$\exists$: "il existe".

$\exists!$: "il existe un unique".

$\nexists$: "il n'existe pas".

Un ensemble E est défini si, et seulement si, l'assertion $(x \in E) \wedge \neg(x \in E)$ est fausse.

Exercice 3 Faire correspondre chaque liste de nombres (à droite) avec l'ensemble qui la contient (à gauche).

$\{2k+1 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ ... A

$\left\{n \ : \ n \in \mathbb{Z} \wedge \dfrac{12}{n} \in \mathbb{Z}\right\}$ ... B

$\{n^2 \ : \ n \in \mathbb{N} \cap [\,0\,;5\,]\}$ ... C

$\{3k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ ... D

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3x \in \mathbb{Z}\}$ ... E

$\{a+bi \ : \ a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$ ... F

$\{7k+1 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ ... G

$\{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists m \in \mathbb{Z}, m^2 = n\}$ ... H

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 = x\}$ ... I

$\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \wedge xq = p\}$ ... J

$\{r \in \mathbb{R} \ : \ \exists k \in \mathbb{Z}, r^2 = k\}$ ... K

$\{n \in \mathbb{Z} \ : \ |n| \leqslant 5\}$ ... L

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \leqslant 5\}$ ... M

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ \forall y \in \mathbb{N}, x \leqslant y\}$ ... N

$\{(x;y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \ x+y=7\}$ ... O

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leqslant -3 \vee \ x \geqslant 5\}$ ... P

$\{n \in \mathbb{Z} \ : \ \forall m \in \mathbb{Z}, n > m\}$ ... Q

$\left\{n \in \mathbb{N} : \nexists m \in \mathbb{N} \setminus \{1;n\}, \dfrac{n}{m} \in \mathbb{N}\right\}$ ... R

$\{(x;y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \ xy \leqslant 6\}$ ... S

$\{(x;y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \ y = 2x\}$ ... T

a ... 6, 21, 336, 4272

b ... $3+5i$, $\sqrt{2}-i$, 17, $-1+\pi i$

c ... -5, -2π, $-\frac{4}{7}$, -0.0001

d ... 0, 1, 9, 16

e ... -5, $-\sqrt{19}$, 17.25, 5

f ... 0, 9, 81, 196

g ... $\frac{12}{7}$, $-\frac{2}{3}$, 42, $\frac{-28}{2}$

h ... 3, 6, -12, 1

i ... 17, 2, 5, 43, 199

j ... 5, $\sqrt{2}$, -13, $\sqrt{13}$

k ... $(2;2)$; $(1;5)$; $(3;1)$; $(1;1)$

l ... -4, -2, 0, 3

m ... $\frac{7}{3}$, -17, $-\frac{52}{3}$, 0

n ... 0, 1

o ... -7, -3, 5, 17

p ... $(3;6)$; $(12;24)$; $(5;10)$; $(131;262)$

q ... $(2;5)$; $(1;6)$; $(4;3)$; $(3;4)$

r ... $\sqrt{2}$, $-\pi$, 2.256, -4.99

s ... -20, 1, 50, 778

t ... $\varnothing$

EXERCICES

Paradoxe de Russell †

L'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ?

Si l'on répond oui, alors, comme par définition les membres de cet ensemble n'appartiennent pas à eux-mêmes, il n'appartient pas à lui-même : contradiction. Mais si l'on répond non, alors il a la propriété requise pour appartenir à lui-même : contradiction de nouveau. On a donc une contradiction dans les deux cas, ce qui rend l'existence d'un tel ensemble paradoxale.

Plus formellement, si l'on pose $y = \{x \mid x \notin x\}$, on a immédiatement que $y \in y \iff y \notin y$ donc chacune des deux possibilités, $y \in y$ et $y \notin y$, mène à une contradiction.

Et de façon plus imagée : *Un barbier se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Le barbier doit-il se raser lui-même ?*

3 Logique

3.1 Propositions

Définition 1 *Une proposition est une affirmation qui peut être vraie ou fausse, mais qui ne peut être les deux en même temps ou ni l'un ni l'autre.*

Exemples : Considérons les trois propositions suivantes :

- $\mathscr{P}_1$: « $x + 2 = 2 + x$ ».
- $\mathscr{P}_2$: « $2 \times 3 = 7$ ».
- $\mathscr{P}_3$: « $x^2 = 9$ ».

∗ La proposition $\mathscr{P}_1$ est toujours vraie.

∗ La proposition $\mathscr{P}_2$ est toujours fausse.

∗ La proposition $\mathscr{P}_3$ peut être vraie ou fausse suivant les valeurs de x : si $x = 3$, elle est vraie, si $x = -3$, elle est vraie et elle est fausse dans tous les autres cas.

Exercice 4 Les trois propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

- $\mathscr{P}_4$: « $x - 2$ est strictement plus grand que x ».
- $\mathscr{P}_5$: « $2x$ est plus grand ou égal à x ».
- $\mathscr{P}_6$: « le carré d'un nombre pair est pair ».

Exercice 5 Énoncer une affirmation qui n'est pas une proposition.

Définition 2 *La négation d'une proposition, notée « non $\mathscr{P}$ » ou « $\neg\mathscr{P}$ », est une proposition qui est fausse lorsque $\mathscr{P}$ est vraie et qui est vraie lorsque $\mathscr{P}$ est fausse.*

Remarque : La proposition $\neg(\neg\mathscr{P})$ est précisément $\mathscr{P}$.

Exercice 6 Établir la négation des propositions $\mathscr{P}_1$ à $\mathscr{P}_6$. Sont-elles toujours vraies ?

†. Publié en 1903 par Bertrand Russell (1872–1970), troisième comte du nom. Mathématicien, logicien, épistémologue, écrivain (Nobel 1950), homme politique (membre du Parlement britannique) et moraliste gallois, Russell est considéré comme l'un des plus importants philosophes du XX^{e}s.

Exercice 7 Établir la négation des propositions suivantes. Lesquelles sont vraies ?

- $\mathscr{P}_7$: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 > 0$.
- $\mathscr{P}_8$: $\exists b \in \mathbb{R}^+$ tq. $b - 3 < 0$.
- $\mathscr{P}_9$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tq. $x \leqslant y$.
- $\mathscr{P}_{10}$: $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ tq. $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\beta^2 - \alpha < 0$.

Toutefois, il existe des propositions *indécidables*, dont on ne peut affirmer si elles sont vraies ou fausses. C'est un fameux résultat du mathématicien Kurt Gödel (1906-1978) et je ne peux que vous conseiller de lire *La Déesse des petites victoires*, brillant roman de Yannick Grannec autour de ce personnage.

3.2 Implication

Définition 3 *Pour affirmer que « si $\mathscr{P}$ (est vraie), alors $\mathscr{Q}$ (est vraie) », les mathématiciens disent que « $\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$ » et écrivent $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$. $\mathscr{P}$ est la condition suffisante (l'hypothèse) et $\mathscr{Q}$ est la condition nécessaire (la conclusion).*

Exemples :
- Si $\underbrace{x = 3}_{\mathscr{P}}$, alors $\underbrace{x^2 = 9}_{\mathscr{Q}}$.
- Si $\underbrace{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}_{\mathscr{P}}$, alors $\underbrace{ABDC \text{ est un parallélogramme}}_{\mathscr{Q}}$.

Définition 4
L'implication $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ est appelée l'implication réciproque de $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$.
L'implication non $\mathscr{Q} \Longrightarrow$ non $\mathscr{P}$ est appelée la contraposée de $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$.

Exercice 8 VouF ?

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$	$\neg\mathscr{Q} \Rightarrow \neg\mathscr{P}$	$\neg\mathscr{P} \Rightarrow \neg\mathscr{Q}$
n est premier	$n = 3$				
$x \in \mathbb{D}$	$x \in \mathbb{Q}$				
$ab = 9$	$a = 3$ et $b = 3$				
$x \geqslant 2$	$x \geqslant 3$				
$x > 0$	$x \geqslant 0$				
$x < 0$	$x^3 < 0$				

Propriété 1
Si l'implication $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})$ est vraie,
alors sa contraposée $(non\ \mathscr{Q} \Rightarrow non\ \mathscr{P})$ est vraie.

Exercice 9 Quelle est la contraposée de l'implication $(non\ \mathscr{Q} \Rightarrow non\ \mathscr{P})$?

EXERCICES

3.3 Équivalence

Définition 5
Deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont dites équivalentes si $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ *et* $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$.
Si $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$, *alors* $\mathscr{P}$ *est vraie si, et seulement si,* $\mathscr{Q}$ *est vraie.*

Exemples : • $\underbrace{x = 3}_{\mathscr{P}} \iff \underbrace{2x = 6}_{\mathscr{Q}}$.

• Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$.
$\underbrace{M \text{ est un point de } \mathscr{C} \text{ différent de } A \text{ et } B}_{\mathscr{P}}$ si, et seulement si, $\underbrace{\widehat{AMB} = 90°}_{\mathscr{Q}}$.

Exercice 10 Donner un exemple d'implication qui n'est pas une équivalence.

3.4 Exercices

Exercice 11 Très facile

A. La phrase suivante est supposée vraie :
« Si la télé est allumée, alors il y a nécessairement quelqu'un qui la regarde. »
Choisir la réponse correcte pour chaque question.

1. La télé est allumée. Quelqu'un la regarde-t-il ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
2. Personne ne regarde la télé. Est-elle allumée ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
3. La télé est éteinte. Quelqu'un la regarde-t-il ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
4. Quelqu'un regarde la télé. Est-elle allumée ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.

B. Même consigne pour la phrase : « L'équation (E) n'a pas de solution négative. »

1. Est-ce que -2 est une solution de (E) ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
2. a est une solution de (E). Est-ce que a est négatif ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
3. 3 est-il une solution de (E) ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
4. b n'est pas une solution de (E). Est-ce que b est négatif ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.

Exercice 12 Facile
Compléter par « donc » ou « car ».

1. J'ai eu un accident ... j'ai grillé un feu rouge.
2. Il est malade ... il ne viendra pas.
3. J'ai eu un cadeau ... c'est mon anniversaire.

4. Je ne suis pas européen ... je ne suis pas allemand.
5. Jean est triste ... c'est la fin des vacances.
6. Il pleut ... la fête est annulée.
7. (AB) et (CD) sont parallèles ... $ABCD$ est un parallélogramme.
8. $ABCD$ possède deux angles droits ... c'est un rectangle.
9. Le triangle ABC est équilatéral ... il est isocèle.
10. $y^2 = 25$ ... $y = 5$.
11. $x \in [-1\,;4]$ ... $x \in [-2\,;5]$.
12. $u^2 \geqslant 49$ ... $u \geqslant 7$.
13. $\sqrt{x} \leqslant 6$ ... $x \leqslant 36$.

Exercice 13 Pas si facile

Préciser si les implications et équivalences suivantes sont vraies ou fausses.

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$A \Longleftrightarrow B$
Je vis en France	Je vis en Europe			
Je suis un adolescent	J'ai 16 ans			
$CDEF$ parallélogramme	$CDEF$ carré			
MNP rectangle en M	$MP^2 + MN^2 = NP^2$			
$x \in \mathbb{N}$	$x \in \mathbb{Z}$			
$a + b = 5$	$a = 2$ et $b = 3$			
$4x - (x - 5) = 11$	$x = 2$			
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ et $cx + d = 0$			
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$			

Exercice 14 Peu difficile

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse.

- Pour prouver qu'elle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.
- Pour prouver qu'elle est vraie, il est nécessaire de trouver une démonstration.

1. Si $x^2 \geqslant 4$ alors $x \geqslant 2$.
2. Pour tous réels x et y, $(x + y)^3 = x^3 + y^3$.
3. Pour tout réel x, le réel $-10x$ est négatif.
4. Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle.
5. Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes.
6. Si a et b sont deux entiers naturels, alors $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$ est un entier naturel.

Exercice 15 Assez difficile

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.
Démontrer que, si $(a^2 - b^2)$ est premier, alors a et b sont consécutifs.
La réciproque est-elle vraie ?

Bonus Très plaisant

Faites-vous donc offrir puis lisez le petit *Éloge des mathématiques* d'Alain Badiou qui nous explique avec ravissement pourquoi l'on se passionne logiquement pour cette discipline.

4 Solutions

Exercice 1

Ces solutions ne sont pas toujours uniques et vous pouvez en avoir trouvé d'autres.

(a) $1 : \overline{A \cup B \cup C}$.
(b) $2 : B \cap \overline{A \cup C}$.
(c) $3 : A \cap B \cap \overline{C}$.
(d) $4 : A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
(e) $5 : B \cap C \cap \overline{A}$.
(f) $6 : A \cap B \cap C$.
(g) $7 : A \cap C \cap \overline{B}$.
(h) $8 : C \cap \overline{A \cup B}$.
(i) 3 et $6 : A \cap B$.
(j) 8 et $3 : (C \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$.
(k) 5 et 7 : $[(C \cap A) \cup (C \cap B)] \cap (\overline{A \cap B})$.
(l) 6 et $8 : (C \cap \overline{A \cup B}) \cup (A \cap B \cap C)$.
(m) 1 et $7 : (\overline{A \cup B \cup C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$.

(n) $\overline{A \cap C}$: 1, 2, 3, 4, 5 et 8.
(o) $\overline{A} \cup \overline{C}$: 1, 2, 3, 4, 5 et 8.
(p) $\overline{B \cup C}$: 1 et 4.
(q) $\overline{B} \cap \overline{C}$: 1 et 4.
(r) $(B \cap C) \cup A$: 3, 4, 5, 6 et 7.
(s) $B \cap (C \cup A)$: 3, 5, 6.
(t) $(B \cup A) \cap (C \cup A)$: 3, 4, 5, 6, 7.
(u) $(B \cup C) \cap A$: 3, 6, 7.
(v) $B \cup (C \cap A)$: 2, 3, 5, 6, 7.
(w) $(B \cap A) \cup (C \cap A)$: 3, 6, 7.
(x) $(\overline{A} \cup B) \cap C$: 5, 6 et 8.
(y) $\overline{B \cup C} \cap \overline{A}$: 1.
(z) $\overline{\overline{A \cap C} \cup B}$: 7.

Ainsi, on a toujours, $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$.

Exercice 2 Ce qui suit est écrit de manière informelle.

(1) : (I). $\mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$.
(2) : (K). $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$.
(3) : (L). $Diag.\text{Égal.} \cup Diag.Perp. \subset Parallélogrammes$.
(4) : (O). $Diag.\text{Égal.} \cap Diag.Perp. \subset Parallélogrammes$.
(5) : (G). $\{Multiples(7) \cup Multiples(2)\} \setminus Multiples(14) \ \subset \mathbb{Z}$.
(6) : (R). $Multiples(7) \setminus Multiples(14) \ \subset \mathbb{Z}$.
(7) : (D). $\mathbb{N} \setminus \{Multiples(2) \cup Multiples(3)\}$.
(8) : (E). $\overline{Rectangles} \cup Losanges \subset Parallélogrammes$.
(9) : (H). $\overline{Carrés} \subset Parallélogrammes$.
(10) : (F). $\overline{Rectangle \cup Losanges} \cup Carrés \subset Parallélogrammes$.
(11) : (C). $\mathbb{N} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$ ou (M). $\mathbb{D} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$.
(12) : (N). $\overline{\mathbb{N}} \cap \overline{Irrationnels} \subset \mathbb{R}$.
(13) : (M). $\mathbb{D} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$ ou (C). $\mathbb{N} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$.
(14) : (B). $Isocèles \setminus \text{Équilatéraux} \subset Triangles$.
(15) : (A). $(Trigos \cup Affines) \cap (0 \mapsto 0)$.

(16) : (P). $\overline{Trigos \cup Affines} \cap (0 \mapsto 0)$

(17) : (J). $\overline{Trigos \cup Affines} \cap \overline{0 \mapsto 0}$

(18) : (Q). $Trigos \cup Affines \cup \overline{0 \mapsto 0}$.

Exercice 3

A - o	D - a	G - s	J - g	M - r	P - e	S - k
B - h	E - m	H - f	K - j	N - c	Q - t	T - p
C - d	F - b	I - n	L - l	O - q	R - i	

Exercice 4

- $\mathscr{P}_4$ « $x-2$ est strictement plus grand que x » : toujours faux puisque $x-2 \leqslant x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\mathscr{P}_5$ « $2x$ est plus grand ou égal à x » : vrai pour $x \geqslant 0$, faux pour $x < 0$.
- $\mathscr{P}_6$ « le carré d'un nombre pair est pair » : toujours vrai car $(2n)^2 = 4n^2$ pair.

Exercice 5 La phrase « Il fait beau et chaud. » n'est pas une proposition mathématique car elle peut être à la fois vraie et fausse selon les préférences de chacun.
En revanche, c'est une contrepèterie amusante et facile.

Exercice 6

- $\neg\mathscr{P}_1$: « $x+2 \neq 2+x$ » : toujours faux puisque $\mathscr{P}_1$ est toujours vrai.
- $\neg\mathscr{P}_2$: « $2 \times 3 \neq 7$ » : toujours vraie puisque $\mathscr{P}_2$ est toujours fausse.
- $\neg\mathscr{P}_3$: « $x^2 \neq 9$ » : vraie pour $x \neq \pm 3$, fausse si $x = \pm 3$.
- $\neg\mathscr{P}_4$ « $x-2 < x$ » : toujours vraie car $\mathscr{P}_4$ toujours fausse.
- $\neg\mathscr{P}_5$ « $2x$ est strictement plus petit que x » : vrai pour $x < 0$, faux pour $x \geqslant 0$.
- $\neg\mathscr{P}_6$ « le carré d'un pair n'est pas pair » : toujours faux car $\mathscr{P}_6$ toujours vraie.

Exercice 7

- $\neg\mathscr{P}_7 : \exists a \in \mathbb{R},\ a^2 \leqslant 0$ est vraie : $a = 0$ et $a^2 = 0 \leqslant 0$ donc $\mathscr{P}_7$ est fausse.
- $\mathscr{P}_8 : \exists b \in \mathbb{R}^+$ tq. $b - 3 < 0$ est vraie : $b = 1 \in \mathbb{R}^+$ et $b - 3 = -2 < 0$
  donc $\neg\mathscr{P}_8 : \forall b \in \mathbb{R}^+,\ b - 3 \geqslant 0$ est fausse.
- $\mathscr{P}_9 : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tq. $x < y$ est vraie : $y = x + 1 > x$
  donc $\neg\mathscr{P}_9 : \exists x \in \mathbb{R}$ tq. $\forall y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y$ est fausse.
- $\neg\mathscr{P}_{10} : \forall \alpha \in \mathbb{R}^+,\ \exists \beta \in \mathbb{R}$ tq. $\beta^2 - \alpha \geqslant 0$ est vraie : $\beta = \sqrt{\alpha}$ et $\beta^2 - \alpha = 0 \geqslant 0$
  donc $\mathscr{P}_{10}$ est fausse.

Exercice 8

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$	$\neg\mathscr{Q} \Rightarrow \neg\mathscr{P}$	$\neg\mathscr{P} \Rightarrow \neg\mathscr{Q}$
n est premier	$n = 3$	F	V	F	V
$x \in \mathbb{D}$	$x \in \mathbb{Q}$	V	F	V	F
$ab = 9$	$a = 3$ et $b = 3$	F	V	F	V
$x \geqslant 2$	$x \geqslant 3$	F	V	F	V
$x > 0$	$x \geqslant 0$	V	F	V	F
$x < 0$	$x^3 < 0$	V	V	V	V

Exercice 9 La contraposée de $\neg\mathscr{Q} \Rightarrow \neg\mathscr{P}$ est $\neg\neg\mathscr{P} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{Q}$ *i.e.* $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

CORRIGÉS

Exercice 10 Dans l'exercice 8, seul le dernier item concerne une implication qui est aussi une équivalence.

Exercice 11 Très facile

A. 1 - Oui. 2 - Non. 3 - On ne peut savoir. 4 - On ne peut savoir.

B. 1 - Non. 2 - Non. 3 - On ne peut savoir. 4 - On ne peut savoir.

Exercice 12 Facile

1. car	3. car	5. car	7. car	9. donc	11. donc	13. donc
2. donc	4. donc	6. donc	8. car	10. car	12. car	

Exercice 13 Pas si facile

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$A \Longleftrightarrow B$
Je vis en France	Je vis en Europe	Vrai	Faux	Faux
Je suis un adolescent	J'ai 16 ans	Faux	Vrai	Faux
$CDEF$ parallélogramme	$CDEF$ carré	Faux	Vrai	Faux
MNP rectangle en M	$MP^2 + MN^2 = NP^2$	Vrai	Vrai	Vrai
$x \in \mathbb{N}$	$x \in \mathbb{Z}$	Vrai	Faux	Faux
$a + b = 5$	$a = 2$ et $b = 3$	Faux	Vrai	Faux
$4x - (x - 5) = 11$	$x = 2$	Vrai	Vrai	Vrai
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ et $cx + d = 0$	Faux	Vrai	Faux
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$	Vrai	Vrai	Vrai

Exercice 14 Peu difficile

1. Si $x^2 \geqslant 4$ alors $x \geqslant 2$ Faux. $x = -3$ par exemple.
2. Pour tous réels x et y, $(x + y)^3 = x^3 + y^3$: Faux. $x = y = 1$ par exemple.
3. Pour tout réel x, le réel $-10x$ est négatif : Faux. $x = -1$ par exemple.
4. Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle : Vrai, $x^2 + 1 = 0$ par exemple.
5. Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes : Vrai.
   $x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$ par exemple.
6. Si a et b sont deux entiers naturels, alors $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$ est un entier naturel : Vrai car $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = \frac{[(a+b)+(a-b)][(a+b)-(a-b)]}{4} = \frac{(2a)(2b)}{4} = ab \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 Assez difficile

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.

Si $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ est premier alors il a exactement deux diviseurs et donc l'un des deux termes est égal à 1, le plus petit des deux nécessairement. Ainsi, $a - b = 1$: a et b sont consécutifs.

Réciproquement, si a et b sont consécutifs, $a^2 - b^2$ n'est pas toujours premier. Par exemple, $5^2 - 4^2 = 9$ est dans la table de 3.

EXTRAS

Extra A

Collège Express

Sommaire

1 Calculs et simplifications 353
2 Équations 353
3 Développements 354
4 Factorisations 354
5 Fonctions 354
6 Géométrie 354
7 Logique 355
8 Solutions 355

EXERCICES

Cet extra est très utile pour vous préparer à l'entrée en seconde et ne pas tout oublier pendant les vacances d'été. Ces exercices ne couvrent pas tout le programme de collège mais ils doivent être réalisés sans calculatrice, le plus possible de tête. Les solutions sont là afin que vous vérifiez vos résultats : s'ils sont faux, corrigez vos erreurs car tout ceci vous sera nécessaire dès le début de l'année.

1 Calculs et simplifications

(a) $3-5+1-19$
(b) $(-3)^2$
(c) -5^2
(d) $7-3\times 5$
(e) $-23-4\times 3^2$
(f) $(4-5)^2$
(g) 4^2-5^2
(h) 2^3-3^2
(i) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$
(j) $\frac{81}{27}+1$
(k) $3-\frac{13}{11}$
(l) $\frac{12}{16}-\frac{21}{28}$
(m) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$
(n) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$
(o) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$
(p) $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$
(q) $\frac{2}{5}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}$
(r) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$
(s) $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{9}}$
(t) $\frac{3-5}{5}$
(u) $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}$
(v) $\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{8}$
(w) $\dfrac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{3}-3}$
(x) $\dfrac{3\times 4}{3\times 2}$
(y) $\dfrac{2+4}{2+1}$
(z) $3+\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}$

2 Équations

(a) $x-3=0$
(b) $x+2=0$
(c) $7t=3$
(d) $-4y=3$
(e) $-5t=-2$
(f) $2x+10=0$
(g) $5-x=0$
(h) $2y+3=1$
(i) $2-3x=-7$
(j) $5+4y=2$
(k) $4x-5=-7-2x$
(l) $x^2=9$

(m) $y^2 - 4 = 0$

(n) $t^2 - 15 = 1$

(o) $2x + 3 = 5 - 4x$

(p) $3x^2 - 4x + 7 = 3 + 2x + 3x^2$

(q) $4 - 3x = -3x + 8$

(r) $2y - 3 = -3 + 2y$

3 Développements

(a) $k(a + b)$

(b) $a(b - c)$

(c) $(r + s)(t - u)$

(d) $(x + y)^2$

(e) $(f - g)^2$

(f) $(u + v)(u - v)$

(g) $2x(4x + 5)$

(h) $(4x - 5)x$

(i) $-3y(7 - 2y)$

(j) $(3x + 2)(5 - 4x)$

(k) $(2t - 3)(2t + 3)$

(l) $(3x - 2y)^2$

(m) $-2(3a - 1)(5 - 2a)$

(n) $(3r - 2t)(2t + 3r)$

(o) $-5t^2(7 - 3t)$

(p) $(3u + 2v)(5v - 4u)$

4 Factorisations

(a) $12 - 6x$

(b) $35 - 28t^2 + 21t^5$

(c) $5a^2 - 3a$

(d) $12b - 21b^2$

(e) $5z^2 - 4z^3$

(f) $3(x - 2) - 5x(x - 2)$

(g) $9p - 6p^2$

(h) $3(q - 1)^2 + 4q - 4$

5 Fonctions

(a) Déterminer l'image de -5 par la fonction $f(x) = 3 - 2x$.

(b) Déterminer l'image de -2 par la fonction $g(x) = 7 - 3x^2$.

(c) Déterminer l'antécédent de 7 par la fonction $h(x) = 3x - 5$.

(d) Déterminer l'antécédent de 3 par la fonction $i(x) = 2 - 5x$.

6 Géométrie

(a) BAC est rectangle en A. $AB = 4$, $AC = 7$. Peut-on calculer BC ?

(b) PQR est rectangle en R. $PQ = 3$, $PR = 2$. Peut-on calculer QR ?

(c) GHI est tel que $GH = 3$, $HI = 5$ et $GI = 4$. Que dire ?

(d) MNP est rectangle. $MN = 5$, $NP = 6$. Peut-on calculer MP ?

(e) FGH est tel que $FG = 5$, $GH = 7$ et $FH = 5$. Que dire ?

(f) UVW est tel que $UV = 8$, $VW = 7$. Peut-on calculer UW ?

(g) Que dire du quadrilatère non croisé $ABCD$ tq. $(AB)//(CD)$ et $AB = CD$?

(h) Que dire des points E, F, G et H tels que $(EF)//(GH)$ et $EF = GH$?

(i) Vrai ou Faux ?

i. Si $AI = BI$ alors I est le milieu du segment $[AB]$.

ii. Si T est sur la médiatrice du segment $[RS]$ alors $TR = TS$.

iii. Si $ABCD$ est un carré alors $CBAD$ est un trapèze.

iv. Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors $(MN)//(BC)$.

v. $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$.

7 Logique

Vrai ou Faux ? Justifier.

(a) Les étoiles sont immortelles, Socrate est immortel donc Socrate est une étoile.

(b) Tous les éléphants roses vivent en Antarctique. Barbar est un éléphant qui vit en Antarctique donc Barbar est rose.

(c) On sait que si les petits pois sont rouges, alors il ne sont pas comestibles. Or Némo est un poisson rouge, donc il n'est pas comestible.

(d) Lors d'un certain radio-crochet, aucun candidat ne sait chanter. Or certaines casseroles le savent, donc quelques casseroles ne sont pas candidates.

8 Solutions

Calculs et simplifications

(a)	-20	(f)	1	(k)	$\frac{20}{11}$	(p)	$\frac{15}{28}$	(u)	-1	(z)	$\frac{31}{10}$
(b)	9	(g)	-9	(l)	0	(q)	$\frac{1}{4}$	(v)	$-\frac{1}{16}$		
(c)	-25	(h)	-1	(m)	$\frac{19}{12}$	(r)	$\frac{14}{15}$	(w)	$\frac{9}{16}$		
(d)	-8	(i)	$\frac{22}{15}$	(n)	$\frac{31}{30}$	(s)	6	(x)	2		
(e)	-59	(j)	4	(o)	$\frac{3}{4}$	(t)	$-\frac{2}{5}$	(y)	2		

Équations

(a)	$x = 3$	(g)	$x = 5$	(m)	$y = -2$ ou $y = 2$
(b)	$x = -2$	(h)	$y = -1$	(n)	$t = -4$ ou $t = 4$
(c)	$t = \frac{3}{7}$	(i)	$x = 3$	(o)	$x = \frac{1}{3}$
(d)	$y = -\frac{3}{4}$	(j)	$y = -\frac{3}{4}$	(p)	$x = \frac{2}{3}$
(e)	$t = \frac{2}{5}$	(k)	$x = -\frac{1}{3}$	(q)	Impossible
(f)	$x = -5$	(l)	$x = -3$ ou $x = 3$	(r)	Toujours vrai

Développements

(a)	$ka + kb$	(d)	$x^2 + 2xy + y^2$	(g)	$8x^2 + 10x$
(b)	$ab - ac$	(e)	$f^2 - 2fg + g^2$	(h)	$4x^2 - 5x$
(c)	$rt - ru + st - su$	(f)	$u^2 - v^2$	(i)	$6y^2 - 21y$

CORRIGÉS

(j) $-12x^2 + 7x + 10$
(k) $4t^2 - 9$
(l) $9x^2 - 12xy + 4y^2$
(m) $12a^2 - 34a + 10$
(n) $9r^2 - 4t^2$
(o) $15t^3 - 35t^2$
(p) $10v^2 + 7uv - 12u^2$

Factorisations

(a) $6(2 - x)$
(b) $7(5 - 4t^2 + 3t^5)$
(c) $a(5a - 3)$
(d) $3b(4 - 7b)$
(e) $z^2(5 - 4z)$
(f) $(x - 2)(3 - 5x)$
(g) $3p(3 - 2p)$
(h) $(q - 1)(3q + 1)$

Fonctions

(a) $f(-5) = 3 - 2(-5) = 13.$
(b) $g(-2) = 7 - 3(-2)^2 = -5.$
(c) 4 car $h(4) = 7.$
(d) $-\frac{1}{5}$ car $i(-\frac{1}{5}) = 3.$

Géométrie

(a) Oui, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 65$ et $BC = \sqrt{65}$.
(b) Oui, $QR^2 = PQ^2 - PR^2 = 5$ et $QR = \sqrt{5}$.
(c) $HI^2 = GH^2 + GI^2$ donc GHI est rectangle en G.
(d) Non car on ne sait pas si MNP est rectangle en M ou en N.
(e) FGH est isocèle en F, non rectangle (car $5^2 + 5^2 \neq 7^2$).
(f) Non car on ne sait s'il est rectangle ou isocèle et l'on ne connaît aucun angle.
(g) $ABCD$ est un parallélogramme.
(h) $EFGH$ ou $EFHG$ est un parallélogramme.
(i)
i. Faux : ABI isocèle en I.
ii. Vrai : RST isocèle en T.
iii. Vrai, un carré est un trapèze.
iv. Faux, on doit avoir l'alignement dans le « même ordre ».
v. Faux : BAC n'est pas nécessairement rectangle en B.

Logique

Vrai ou Faux ? Justifier.

(a) Faux. Tout ce qui est immortel n'est pas nécessairement une étoile.
(b) Faux. Tous les éléphants qui vivent en Antarctique ne sont pas nécessairement roses.
(c) Faux. Nous n'avons aucune information sur les poissons rouges.
(d) Vrai. Les casseroles sachant chanter ne peuvent être candidates.

Extra B

LES BONS COMPTES

Sommaire

1 Niveau 1 357
2 Niveau 2 357
3 Niveau 3 358
4 Solutions 358

Cet extra est parfait pour la pratique indispensable du calcul mental.

Un petit rappel de la règle du fameux jeu *Le compte est bon* : on doit obtenir par le calcul un nombre donné en utilisant une seule fois ceux qui sont proposés. Plusieurs méthodes sont parfois possibles mais on se restreint aux entiers naturels. Bien entendu, on ne doit pas utiliser de calculatrice.

Un exemple simple : comment obtenir 12 avec 1, 2, 4 et 5 ? On a $1+2=3$ et $3\times 4=12$ mais aussi $1+5=6$ et $6\times 2=12$.

C'est à vous !

1 Niveau 1

- 54 avec 2, 3, 5, 25.
- 33 avec 5, 6, 7, 8, 10, 100.
- 49 avec 3, 5, 6, 7, 10, 75.
- 22 avec 1, 3, 4, 7, 9, 10.
- 38 avec 3, 5, 8, 9, 10, 25.
- 81 avec 5, 8, 9, 10, 25, 50.
- 87 avec 1, 2, 7, 9, 75, 100.
- 47 avec 4, 7, 8, 9, 10, 25.
- 73 avec 2, 3, 7, 10, 50, 100.
- 53 avec 1, 3, 6, 8, 9, 25.

2 Niveau 2

- 120 avec 2, 5, 6, 25, 50, 75.
- 213 avec 3, 4, 6, 8, 10, 50.
- 352 avec 1, 4, 7, 9, 10, 75.
- 381 avec 1, 3, 4, 5, 9, 75.
- 110 avec 1, 3, 4, 6, 10, 25.
- 135 avec 2, 3, 5, 6, 10, 50.
- 420 avec 2, 4, 7, 8, 75, 100
- 104 avec 2, 4, 7, 9, 25, 50.
- 135 avec 1, 2, 7, 8, 9, 100.
- 240 avec 2, 3, 4, 6, 50, 100.

3 Niveau 3

- 660 avec 3, 6, 7, 10, 50, 100.
- 511 avec 2, 6, 10, 25, 50, 75.
- 794 avec 2, 3, 6, 8, 50, 75.
- 950 avec 2, 3, 5, 6, 25, 100.
- 610 avec 2, 4, 5, 8, 9, 75.
- 518 avec 2, 3, 4, 5, 50, 100.
- 595 avec 1, 3, 6, 7, 9, 100.
- 789 avec 1, 2, 8, 10, 50, 75.
- 690 avec 6, 10, 25, 50, 100.
- 509 avec 2, 4, 5, 8, 25, 100.

4 Solutions

4.1 Niveau 1

- 54 : $2 + 25 = 27$, $5 - 3 = 2$, $27 \times 2 = 54$.
- 33 : $10 - 7 = 3$, $5 \times 6 = 30$, $3 + 30 = 33$.
- 49 : $7 \times 3 = 21$, $75 - 5 = 70$, $70 - 21 = 49$.
- 22 : $1 + 4 = 5$, $3 \times 9 = 27$, $27 - 5 = 22$.
- 38 : $10 + 9 = 19$, $5 - 3 = 2$, $19 \times 2 = 38$.
- 81 : $5 \times 8 = 40$, $40 - 9 = 31$, $50 + 31 = 81$.
- 87 : $100 + 1 = 101$, $2 \times 7 = 14$, $101 - 14 = 87$.
- 47 : $10 + 9 = 19$, $4 \times 7 = 28$, $19 + 28 = 47$.
- 73 : $50 + 2 = 52$, $3 \times 7 = 21$, $52 + 21 = 73$.
- 53 : $8 \times 9 = 72$, $72 + 6 = 78$, $78 - 25 = 53$.

4.2 Niveau 2

- 120 : $50 + 75 = 125$, $6 \times 5 = 30$, $30 - 25 = 5$, $125 - 5 = 120$.
- 213 : $50 \times 4 = 200$, $10 + 6 = 16$, $200 + 16 = 216$, $216 - 3 = 213$.
- 352 : $9 \times 10 = 90$, $7 + 1 = 8$, $4 \times 90 = 360$, $360 - 8 = 352$.
- 381 : $5 + 1 = 6$, $9 - 4 = 5$, $5 \times 75 = 375$, $375 + 6 = 381$.
- 110 : $10 + 1 = 11$, $25 - 3 = 22$, $11 - 6 = 5$, $22 \times 5 = 110$.
- 135 : $6 + 3 = 9$, $50 - 5 = 45$, $10 \times 9 = 90$, $90 + 45 = 135$.
- 420 : $7 + 75 = 82$, $100 - 8 = 92$, $4 \times 82 = 328$, $92 + 328 = 420$.
- 104 : $2 \times 4 = 8$, $7 + 25 = 32$, $9 \times 8 = 72$, $32 + 72 = 104$.
- 135 : $9 + 8 = 17$, $17 \times 2 = 34$, $34 + 1 = 35$, $35 + 100 = 135$.
- 240 : $100 - 3 = 97$, $50 - 4 = 46$, $2 \times 97 = 194$, $194 + 46 = 240$.

4.3 Niveau 3

- 660 : $100-50=50$, $10+6=16$, $3+7=10$, $50+16=66$, $66\times10=660$.
- 511 : $10\times50=500$, $2+6=8$, $75/25=3$, $500+8=508$, $508+3=511$.
- 794 : $42\times75=150$, $50-6=44$, $8-3=5$, $5\times150=750$, $44+750=794$.
- 950 : $6/3=2$, $100\times5=500$, $25\times2=50$, $2\times500=1000$, $1000-50=950$.
- 610 : $4/2=2$, $75-5=70$, $8+2=10$, $70-9=61$, $61\times10=610$.
- 518 : $3+4=7$, $5\times100=500$, $50/2=25$, $25-7=18$, $500+18=518$.
- 595 : $9+7=16$, $100+3=103$, $6-1=5$, $16+103=119$, $5\times119=595$.
- 789 : $8+1=9$, $50-2=48$, $10\times75=750$, $750-9=741$, $741+48=789$.
- 690 : $100/4=25$, $10\times75=750$, $50+4=54$, $750-6=744$, $744-54=690$.
- 509 : $100-4=96$, $8/2=4$, $5\times25=125$, $96\times4=384$, $384+125=509$.

Extra C

La racine, c'est carré

Cet extra est idéal pour réviser les propriétés algébriques de la racine carrée.

En préambule, rappelons la définition suivante :

Définition *Soit a un* .....
La racine carrée de a est ..... *de* ..... *valant* ....
Pour $a \in \ldots$, ... $= a$ *et* $\sqrt{a}$ *est* .....

Calculer, simplifier, résoudre et/ou écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les écritures suivantes. N'utiliser la calculatrice qu'en tout dernier ressort.

(a) $\sqrt{49} =$
(b) $-\sqrt{64} =$
(c) $(-\sqrt{79})^2 =$
(d) $-\sqrt{127}^2 =$
(e) $\sqrt{-25}^2 =$
(f) $\sqrt{36} + \sqrt{64} =$
(g) $\sqrt{36 + 64} =$
(h) $\sqrt{9 \times 4} =$
(i) $\sqrt{9} \times \sqrt{4} =$
(j) $\sqrt{(-9) \times (-4)} =$
(k) $\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} =$
(l) $\sqrt{32} =$
(m) $\sqrt{72} =$
(n) $\sqrt{300} =$
(o) $\sqrt{12}.\sqrt{27} =$
(p) $\sqrt{75}.\sqrt{6} =$
(q) $\sqrt{6}.\sqrt{15}.\sqrt{10} =$
(r) $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{28} =$
(s) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$
(t) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} =$
(u) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{32}} =$
(v) $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{175}} =$
(w) $x^2 - 9 = 0$
(x) $y^2 - 18 = 0$
(y) $-3z^2 - 5 = 0$
(z) $3 - 5t^2 = 0$

VouF ?

(α) Si $u^2 = 25$ alors $u = 5$.

(β) La racine carrée du produit de deux réels égale le produit de leur racine carrée.

(γ) La racine carrée d'un réel positif est inférieure ou égale à celui-ci.

Solutions :

Soit a un réel positif ou nul. La racine carrée de a est l'unique réel positif de carré valant a. Pour $a \in \mathbb{R}^+$, $\quad \sqrt{a}^2 = a \quad$ et $\quad \sqrt{a}$ est positif.

(a) $\sqrt{49} = 7$

(b) $-\sqrt{64} = -8$

(c) $(-\sqrt{79})^2 = 79$

(d) $-\sqrt{127}^2 = -127$

(e) $\sqrt{-25}^2$ n'a aucun sens.

(f) $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$

(g) $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

(h) $\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$

(i) $\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$

(j) $\sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$

(k) $\sqrt{-9} \times \sqrt{-4}$ n'a aucun sens.

(l) $\sqrt{32} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(m) $\sqrt{72} = \sqrt{9}\sqrt{4}\sqrt{2} = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(n) $\sqrt{300} = \sqrt{100}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

(o) $\sqrt{12}.\sqrt{27} = \sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{9} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

(p) $\sqrt{75}.\sqrt{6} = \sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2} = 5 \times 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

(q) $\sqrt{6}.\sqrt{15}.\sqrt{10} = \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{5} = 2 \times 3 \times 5 = 30$

(r) $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{28} = \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{4}\sqrt{7} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7})$

(s) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(t) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} + \dfrac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{15}$

(u) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{16}\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{8}\sqrt{10}$

(v) $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{175}} = \dfrac{\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{25}\sqrt{7}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{3}$

(w) $x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3$

(x) $y^2 - 18 = 0 \iff y^2 = 18 \iff y = -\sqrt{18} = -\sqrt{9}\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$ ou $y = 3\sqrt{2}$

(y) $-3z^2 - 5 = 0 \iff z^2 = -\frac{5}{3}$ qui n'admet aucune solution réelle.

(z) $3 - 5t^2 = 0 \iff t^2 = \frac{3}{5} \iff t = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$ ou $t = \frac{\sqrt{15}}{5}$

(α) Si $u^2 = 25$ alors $u = 5$: Faux (et -5 !)

(β) La racine carrée du produit de deux réels égale le produit de leur racine carrée : Faux (et s'ils sont tous deux strictement négatifs ?).

(γ) La racine carrée d'un réel positif est inférieure ou égale à celui-ci : Faux (et s'il est entre 0 et 1 ?)

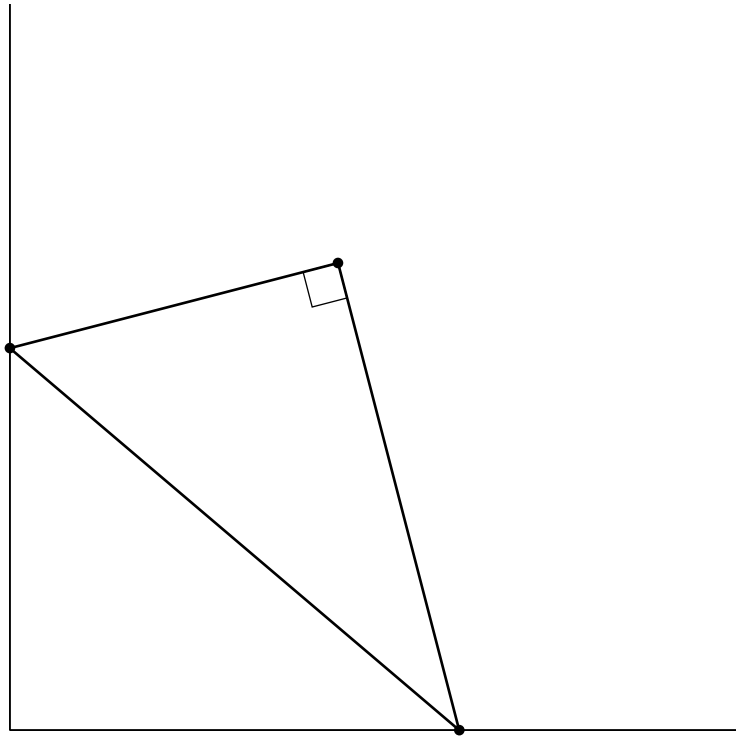
Extra D

Équerre et math

Cet extra est impeccable pour pratiquer GeoGebra et revoir la géométrie classique.

Problème

C'est la rentrée. Pour fêter cela, vous avez reçu une superbe équerre mate. Vous vous précipitez dans votre chambre afin de jouer avec et très rapidement un problème vous tarabuste. En effet, vous avez posé un des sommets saillants au sol et l'autre contre le mur, l'équerre leur étant perpendiculaire. Vous avez ensuite fait glisser l'équerre de haut en bas tout en conservant cette configuration et tout en souplesse afin de ne pas en émousser les angles. Vous vous êtes alors demandé quelle pouvait bien être la trajectoire du troisième sommet, celui de l'angle droit.
Tentez donc d'y répondre.



Aides

Répondez aux questions dans l'ordre et sans lire les suivantes, sinon c'est de la triche.

1. Tracez plusieurs équerres de mêmes dimensions et dans la même configuration sur la figure de la page précédente afin de conjecturer la trajectoire de l'angle droit.
2. Réalisez une figure GeoGebra. Attention, ce n'est pas aisé et une méthode générale est donnée en question suivante, à ne lire qu'après s'y être essayé sur des dimensions particulières.
3. Construisez la figure GeoGebra suivante :
   (a) Créer trois curseurs $a \in [-10\,;10]$, $h \in [0\,;15]$ et $\alpha \in [0\,;90]$.
   (b) Créer le point $A(0\,;a)$ dans le repère orthonormé de centre O.
   (c) Tracer le cercle Γ de centre A et de rayon h.
   (d) Appeler B une des intersections de Γ et de l'axe des abscisses.
   (e) Après avoir créé le milieu de $[AB]$, tracer le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
   (f) Créer la demi-droite $[AM)$ telle que $\widehat{BAM} = \alpha$, appeler C son intersection avec le cercle $\mathscr{C}$ puis tracer le triangle BAC.
   (g) Activer la *trace* du point C puis faire varier le curseur a.
   (h) Après avoir modifié les curseurs h et α, faire varier le curseur a.
4. Justifiez la construction précédente.
5. (a) Vous avez donc conjecturé que la trajectoire du point C est...
   (b) Conjecturez donc son coefficient directeur en traçant quelques graphes de fonctions affines.
   (c) Vous ne l'avez pas trouvé ? Affichez donc la *valeur* (c.-à-d. la longueur) des segments adjacents à l'angle droit.
   (d) Tracez alors la droite conjecturée et vérifiez que ce ne peut être que celle-ci en faisant varier les différents paramètres.
6. (a) Démontrez votre conjecture.
   (b) C'est difficile ? Tracez l'angle $\widehat{BOC}$, cela ira mieux.
   (c) Toujours pas ? Souvenez-vous du théorème de l'angle inscrit.
   (d) Maintenant que les angles sont superposables, vous pouvez calculer le rapport $\dfrac{y_C}{x_C}$.
   Vous voyez bien que l'on y arrive finalement.

Solution

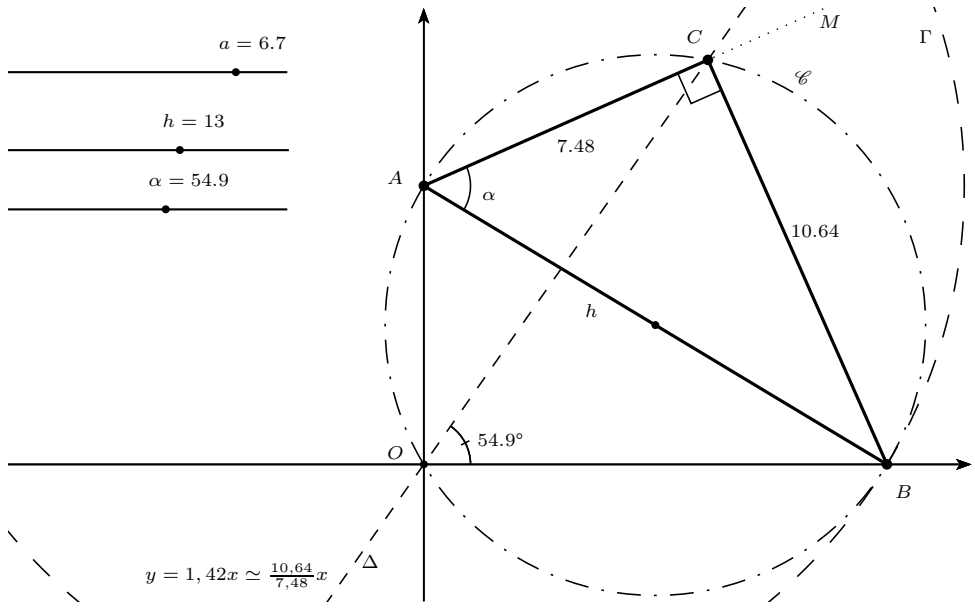
Après de multiples tentatives, on conjecture que le point C est sur une droite passant par l'origine O dont le coefficient directeur dépend uniquement de l'angle α en A (ou de l'autre angle saillant en B) et non de la longueur h de l'hypoténuse ni de la position a du point A (ni de B).

Justifions la construction : A est sur l'axe des ordonnées, B sur l'axe des abscisses à une distance h de A donc sur le cercle Γ. Le point C est tel que $\widehat{BAC} = \alpha$ donc $C \in [AM)$ et tel que $\widehat{BCA} = 90°$ donc C appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

En activant la *trace* de C et en faisant varier les paramètres, on observe que C appartient à une droite passant par l'origine. En testant différentes droites, surtout après avoir afficher les *valeurs* indiquées, on conjecture que C est sur la droite d'équation $y = \frac{BC}{AC}$. Empressons-nous de la tracer.

Comment le démontrer ? Affichons donc l'angle $\widehat{BOC}$. Tiens, tiens, il a la même valeur que α. En effet, O est bien sur le même cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ puique le triangle BOA est aussi rectangle en O. Le théorème de l'angle inscrit nous affirme alors que A et O « regardent » la corde $[BC]$ selon le même angle, le fameux α. L'angle $\widehat{BOC}$ est donc bien constant.

Le coefficient directeur de la droite (OC) est donc le rapport $\frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{y_C}{x_C}$ et dans le repère orthonormé donné, ce rapport est aussi la tangente de l'angle $\widehat{BOC}$ (*opposé/hypoténuse*). Dans l'équerre BAC, la tangente de ce même angle s'exprime par $\tan(\alpha) = \frac{BC}{AC}$ qui est donc bien le coefficient directeur de la droite sur laquelle le point C se promène.



Extra E

Einstein vaut mieux que deux tu l'auras

Cet extra est récréatif.

Énigme

Il y a cinq maisons de cinq couleurs différentes, alignées le long d'une route. Dans chacune de ces maisons vit une personne de nationalité différente. Chacune de ces personnes boit une boisson différente, pratique un sport différent et possède un animal domestique différent.

1. Le Qatari séjourne dans la maison grenat.
2. L'Uruguayen dresse des manchots.
3. Le Wallon s'abreuve de thé.
4. La maison violette est directement à gauche de la maison beige.
5. Le kayakiste élève des rhinocéros.
6. On apprécie le café dans la maison violette.
7. Le propriétaire de la maison indigo joue au jokari.
8. La personne qui occupe la maison du centre sirote du lait.
9. Le Fidjien habite dans la première maison.
10. Le nageur loge à côté de celui qui possède des yacks.
11. Le hockeyeur ingurgite du soda.
12. Celui qui prend soin de ses zèbres est voisin de celui qui pratique le jokari.
13. L'Ouzbek vole en deltaplane.
14. Le Fidjien réside juste à côté de la maison azur.
15. Celui qui pratique la natation a un voisin qui ne boit que de l'eau.

Question : Qui a un poisson ?

Cette énigme est attribuée à Albert Einstein selon qui, seulement 2 % des individus seraient capable de résoudre cette énigme sans papier ni crayon, de tête. Et vous ?

Aide

Moi, j'ai listé les initiales, dressé un tableau et mis les maisons sur la première ligne, de gauche à droite. J'ai rempli plutôt facilement quelques cases puis j'ai fait les associations imposées et les ai testées dans mon tableau. Ainsi, j'ai trouvé... avec un papier et un stylo.

Solution

La première maison est indigo. Son propriétaire est le Fidjien, qui boit de l'eau, joue au jokari et a des yacks.

La seconde maison est azur. Son propriétaire est le Wallon, qui boit du thé, pratique la natation et a des zèbres.

La troisième maison est grenat. Son propriétaire est le Qatari, qui boit du lait, fait du kayak et a des rhinocéros.

La quatrième maison est violette. Son propriétaire est l'Ouzbek, qui boit du café, vole en deltaplane et a un poisson.

La dernière maison est beige. Son propriétaire est l'Uruguayen, qui boit du soda, pratique le hockey et a des manchots.

C'est donc l'Ouzbek qui possède un poisson.

ANNEXES

If

Si tu lis une première fois l'énoncé afin de comprendre la structure du problème,

Si tu rédiges correctement et montres comment les résultats sont obtenus et ne te contentes pas de la réponse ; sache que le correcteur la connaît déjà et qu'il juge seulement ton travail,

Si tu prends le temps de te relire avant de sortir comme si ce n'était pas ta copie et corriges ainsi maintes fautes de français et de mathématiques,

Si tu fais des phrases de conclusions, sans faute d'orthographe, un tableau ne concluant rien tout seul par exemple,

Si tu évites les tirets, qui sont des signes $-$ et préfères les étoiles, d'autant que c'est plus joli,

Si tu n'abrèges pas les barres de fractions car le signe $-$ s'applique alors sur tout le numérateur le cas échéant,

Si tu prends soin de ta calligraphie : p, P, $\mathscr{P}$, $\mathcal{P}$, ρ,... désignant des objets différents,

Si tu réponds à toutes les questions, dans l'ordre, surtout si tu sais y répondre,

Si tu utilises des résultats précédents mais ne te sers point d'une question suivante,

Si tu remarques qu'il n'est pas anodin qu'une consigne commençe par « en déduire » et qu'il ne faut alors pas faire autrement,

Si tu vérifies et contre-vérifies tes résultats avec l'énoncé, les résultats obtenus précédemment, les résultats attendus, les résultats théoriques,... tout ce que tu peux excepté la copie d'un tiers,

Si tu ne confonds pas $=$ et $\iff$: deux nombres, vecteurs, expressions algébriques, fonctions,... peuvent être égaux mais des équations, des propositions,... sont équivalentes,

Si tu n'effectues pas trois calculs en un passage de ligne car tu fais souvent faux comme, par exemple, la factorisation par a et l'identité remarquable en même temps pour la forme canonique,

Si tu sais calculer avec les fractions de manière infaillible,

Si tu simplifies systématiquement les fractions et, en particulier, ne laisses pas un dénominateur négatif : cela t'évite le ridicule et les erreurs,

Si tu ne confonds pas « racines d'un polynôme » et « solutions d'une équation algébrique »,

Si tu ne t'encombres pas l'esprit et utilises des formules le moins possible : celle de la forme canonique est souvent mal appliquée, celles de Δ et $x_{1,2}$ en première sont bien suffisantes et tu auras bientôt de nombreuses formules de dérivation autrement plus importantes et plus difficiles à retrouver,

Si tu résous une équation en trouvant la valeur de l'inconnue, généralement x, et non une valeur d'un X, d'un t ou de $\frac{2}{x+3}$; lors d'un changement de variable, change d'abord x en X puis trouve des solutions X_1 et X_2 et repasse ensuite vers x_1 et x_2 par exemple,

Si tu n'oublies pas de tester tes solutions,

Si tu es méticuleux et ne confonds pas $1-x$ et $x-1$ par exemple au lieu de passer en force ; de même, $b \neq -b$ donc si $b = -56$, $-b = 56$; $c = -3$ et $c^2 = 9$ mais $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$,

Si tu fais attention aux couples : le sommet d'une parabole est un point du plan et possède ainsi deux coordonnées : $\frac{-b}{2a}$ et son image, l'extremum,

Si tu sais dresser un tableau de signes et ne remplis pas des cases sous les nombres mais bien entre les nombres ; la première ligne correspond aux « x » et les suivantes aux « y », alors ne mélange pas tout ; les doubles barres sont réservées aux valeurs interdites et surtout pas aux racines,

Si tu n'hésites pas, dans un tableau de variations, à faire une haute ligne de variations pour pouvoir distinguer le sens des flèches,

Si tu regardes au final à quoi ressemble ton ouvrage et que tu n'y comprends pas grand-chose, pense que cela sera pire pour le correcteur,

Si tu écris des choses vraies car il est infiniment mieux d'écrire peu et juste que des pages entières mais fausses,

Si surtout, les mathématiques te passionnent,

Tu seras bon, mon élève.

Notations & Abréviations

Cette partie n'a pas un but exhaustif mais simplement indicatif pour ceux qui aurait un doute, d'autant que l'on use dans cet ouvrage de certaines abréviations non conventionnelles, par commodité généralement. Après leur description, il y aura souvent la référence de la page de leur première utilisation.

Commençons par lister quelques notations et abréviations classiques et usuelles dans le petit monde des mathématiques.

- $\forall$: « pour tout », le quantificateur universel (cf. page 343).
- $\exists$: « il existe (au moins un) », le quantificateur existentiel (cf. page 343).
- ! : « un unique » lorsque précédé de $\exists$. Exemple : $\exists! x \in \mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+$ (cf. p. 343).
- $\setminus$: « privé de ». Exemple, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (cf. page 343).
- $\pm$ et $\mp$: « plus ou moins » et « moins ou plus ». Signifie « soit $+$, soit $-$ » (et surtout pas « environ », attention).
- $\subset$: « inclus dans ». Se dit d'un sous-ensemble (cf. page 343).
- c.q.f.d. et $\square$: « ce qu'il fallait démontrer ».
- *i.e.* : « id est », c'est-à-dire mais en latin.
- $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$: $]-\infty\,;0]$ et $[\,0\,;+\infty[$, les réels positifs / négatifs ou nuls.
- $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]\,0\,;+\infty[$: les réels non nuls.
- *ssi* et $\iff$: « si, et seulement si » et « équivaut ». À la fois $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$ (cf. page 346).

Voici ensuite des notations et abréviations moins classiques mais bien pratiques.

- $\nearrow$, $\searrow$: croissante, décroissante, à propos d'une fonction.
- $\nearrow\!\!\nearrow$ ou $\nearrow^{\text{nt}}$, $\searrow\!\!\searrow$ ou $\searrow^{\text{nt}}$: strictement (dé)croissante, pour une fonction.
- $\lightning$: « contradiction ». Étape finale d'une démonstration par l'absurde.
- coeff. dir. : « coefficient directeur » d'une droite ou d'une fonction affine.
- colin. : « colinéaires ». Se dit de deux vecteurs.

- p.o.c. : « par ordre croissant ». Se dit des valeurs classées d'une série statistique (cf. page 226).
- r.o.n. : « repère orthonormé » (cf. page 34).
- R.T.T. : « Résoudre de TêTe ». Type d'exercice peu prisé des élèves.
- th. : « théorème ».
- tq. : « tel que ».
- VouF : « Vrai ou faux ». Type d'exercice très prisé des élèves.

Bibliographie & Références

Commençons par des manuels de seconde. Les suivants sont ceux que je parcours régulièrement :

[DE] *Déclic 2de*, J.-P. Beltramone (dir.), éd. Hachette, 2019.

[HB] *Hyperbole 2de*, J. Malaval (dir.), éd. Nathan, 2019.

[LS2] *Le Livre scolaire 2de*, manuel collaboratif, éd. Livre scolaire, 2019.

[M2] *Maths 2de*, H. Gringoz et F. Weyermann, éd. Magnard, 2019.

[MX] *Math'X 2de*, M.-H. Le Yaouanq (dir.), éd. Didier, 2019.

Puis, quelques ouvrages pour réviser ou aller un peu plus loin :

[CR] M. Colonval et A. Roumadni, *Les mathématiques au quotidien*, éd. Ellipses, 2010.

[Th] François Thirioux, *Mathématiques $T^{le}S$ pour réussir en prépa*, éd. Ellipses, 2015.

[LS1] *Le Livre scolaire 1re Spé*, manuel collaboratif, éd. Livre scolaire, 2019.

[LST] *Le Livre scolaire T^{le} Spé*, manuel collaboratif, éd. Livre scolaire, 2020.

Poursuivons par des références sur la toile, très utiles lorsqu'utilisées à bon escient :

[MP] *Math en poche* : http ://mathenpoche.sesamath.net. Pour réviser en ligne (plutôt les « petites » classes toutefois).

[KA] *Khan Academy* : https ://fr.khanacademy.org. Tous les cours, en vidéo.

[WK] *Wikipedia* : toujours utile, même si très vite technique.

[MN] *Les Mathématiques.net* : http ://www.les-mathematiques.net. Pour le supérieur plutôt mais cela permet déjà de voir plus loin. Le forum est réactif.

[IM] *Images des mathématiques* : http ://images.math.cnrs.fr. Des actualités, des articles, des énigmes, des images,... de mathématiques.

[AP] *APMEP : Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* : http ://www.apmep.fr. Vous pouvez y trouver toutes les annales corrigées du baccalauréat depuis le siècle dernier mais aussi des jeux mathématiques.

Ensuite, des ouvrages et références autour des mathématiques et des sciences dont je conseille fortement la lecture. Ils sont cités dans cet ouvrage, à vous de retrouver en quel endroit (les solutions suivent).

[AH] Alain Badiou avec Gilles Haéri, *Éloge des mathématiques*, éd. Flammarion, 2015.

[CV] Cédric Villani, *Théorème vivant*, éd. Grasset, 2012.

[Dé] François-Henri Désérable, *Évariste*, éd. Gallimard, 2015.

[EA] Edwin Abbot Abbot, *Flatland*, 1884.

[EK] Étienne Klein, *La conversation scientifique*, émission radiodiffusée sur France Culture.

[Eu] Euclide, *Éléments*, $\sim$ 300 av. J.-C.

[GM] *Le Goût des Mathématiques*, ouvrage collectif, éd. Mercure de France, 2013.

[YG] Yannick Grannec, *La Déesse des petites victoires*, éd. Anne Carrière, 2012.

Enfin, voilà les références des allusions qui ont guidées, inspirées ou simplement connotées certains énoncés que l'on pourrait parfois qualifier de décalés. À vous de les retrouver dans le corps du texte (les solutions suivent).

[AC] Albert Cohen, *Belle du Seigneur*, éd. Gallimard, 1968.

[AD] Alexandre Dumas, *Les Trois Mousquetaires*, éd. Baudry, 1844.

[Ay] Marcel Aymé, romans et nouvelles, 1926-1967.

[CL] *Des chiffres et des lettres*, émission télédiffusée (France 3) depuis 1972.

[ER] Edmond Rostand, *Cyrano de Bergerac*, création 1897.

[Fr] Franquin, *Gaston Lagaffe*, tous les albums, éd. Dupuis, 1963-1996.

[GE] Gustave Eiffel, *La Tour*, Paris, 1889.

[GK] Gustave Kobbé, *Tout l'opéra*, éd. R. Laffont, 1999.

[GL] George Lucas, *Star Wars*, prod. Lucasfilm, 1977-2019.

[GS] R. Goscinny et J.-J. Sempé, *Le Petit Nicolas*, journal Pilote, 1956-1965.

[GU] R. Goscinny et A. Uderzo, *Astérix : La Serpe d'or* et tous les autres albums, éd. Dargaud, 1959-1977.

[HM] Henri Matisse, Rideau pour l'*Étrange farandole*, 1938.

[HP] Hugo Pratt, *Corto Maltese*, tous les albums, éd. Casterman, 1975-1992.

[JL] John Lennon, *Discographie complète (Beatles compris)*, label Parlophone/Apple, 1962-1980.

[JR] Jean Racine, *Phèdre*, *Bérénice* et *Iphigénie*, 1670-1687.

[MA] *Mars Attacks !*, réal. Tim Burton, prod. T. Burton, 1996.

[Mi] Midas, roi mythologique grec.

[MJ] Michael Jackson, *Best of*, label Epic, 2008.

[MM] *Mad Max*, réal. George Miller, prod. Kennedy Miller, 1979-2015.

[MT] Michel Tournier, *Gaspard, Melchior et Balthazar*, éd. Gallimard, 1980.

[PL] Patrice Leconte, *Les Bronzés font du ski*, prod. Trinacra Films, 1979.

[R2] G.P. Cosmatos, *Rambo II*, avec Sylvester Stallone, prod. Anabasis N.V., 1985. Voir plutôt le premier opus, à la rigueur.

[Ra] RATM, *Rage against the machine*, label EPIC, 1992.

[RG] Hergé, *Tintin*, tous les albums, éd. Casterman, 1929-1986.

[RK] Rudyard Kipling, *Tu seras un homme, mon fils*, 1910.

[SD] *Samson et Dalila*, récit biblique.

[TJ] *Tom & Jerry*, courts-métrages animés américains de Hanna et Barbera télédiffusés (CBS) depuis 1940.

[To] J. R. R. Tolkien, *Le Seigneur des anneaux*, éd. Allen & Unwin, 1954-1955.

[WS] William Shakespeare, *Hamlet* et *Antoine et Cléopâtre*, 1603-1608.

Solutions

[AC] page 283
[AD] page 257
[AH] page 347
[Ay] page 100
[CL] pp. 305 et 357
[CV] page 271
[Dé] page 326
[EA] page 261
[EK] page 277
[ER] page 149
[Eu] page 29
[Fr] page 227
[GE] page 104
[GK] page 309
[GL] page 287
[GM] page 257
[GS] pp. 251 et 295
[GU] page 287
[HM] p. 190 par ex.
[HP] page 241
[JL] page 291
[JR] page 151
[MA] page 190
[Mi] page 132
[MJ] page 291
[MM] couverture
[MT] page 167
[PL] page 188
[R2] page 241
[Ra] page 317
[RG] pp. 233 et 279
[RK] page 371
[SD] page 265
[TJ] page 210
[To] page 232
[WS] pp. 166, 257 et 299
[YG] page 345

Remerciements

Contrairement à ce que l'on pourrait parfois penser à la lecture de cet ouvrage, je suis bien un professeur de mathématiques. Je n'ai donc aucun scrupule à effectuer des remerciements sous forme de liste et dans un ordre quasi-aléatoire. L'important est qu'ils soient sincères, non ?

Ainsi,

- à mes élèves, pour leurs questions, pertinentes ou non, leur insistance pour avoir des devoirs ou non, leur souhait d'avoir des corrections d'exercices tapées (comme si leur professeur avait une écriture illisible), leur curiosité et leur soif d'apprendre et de découvrir et pour le sourire dans leurs yeux lorsqu'ils ont compris ce que l'on étudie,
- à ma compagne qui m'a encouragé, m'a supporté et a prodigué de précieux conseils,
- à mes filles, qui ne me voient généralement que derrière un écran et qui, dès le plus jeune âge, ont appris à envoyer un courriel afin de communiquer avec moi,
- à ma mère, ma première lectrice, au sens mathématique littéral,
- à mes collègues, de mathématiques ou d'autres disciplines, qui m'ont donné de nombreuses idées, à leur insu parfois,
- au corps d'inspection pour les remarques judicieuses,
- à mes stagiaires qui me poussent à une réflexion approfondie sur mes pratiques,
- aux nombreux auteurs d'ouvrages et contributeurs de sites personnels ou académiques comme les IREM, qui m'ont inspiré et dont je n'ai plus la référence, qu'ils veuillent bien me pardonner,
- à Donald Knuth (1938-), à l'origine du LaTeX, sans qui rien de ceci n'aurait pu être écrit (sous TeXShop),
- aux éditions Ellipses, et en particulier Corinne Baud qui a immédiatement accepté et soutenu ce projet,
- et finalement, à mes lecteurs, qui voudront bien excuser les coquilles et erreurs subsistantes et qui pourront envoyer leurs remarques aux éditions Ellipses ou même m'écrire : mathmax@yahoo.com,

je dis merci !

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 1
Sommaire 3

Cours & Exercices corrigés **5**

I Les nombres réels **7**
1 Puissances entières, racine carrée 8
2 Ensembles de nombres 9
2.1 Représentation des nombres sur une droite 9
2.2 Différents types de nombres 10
2.3 Intervalles 11
2.4 Réunion et intersection d'ensembles 12
3 Valeur absolue 14
Corrigé des exercices 16

II Expressions algébriques **21**
Exercices 21
Corrigé des exercices 25

III Géométrie et repérages cartésiens du plan **29**
1 Configurations du plan : rappels et compléments 30
1.1 Droites remarquables dans le triangle 30
1.2 Quelques théorèmes classiques 31
1.3 Un peu de trigonométrie 31
1.4 Tangente à un cercle 32
1.5 Définitions et propriétés de certains quadrilatères 32
2 Projeté orthogonal d'un point sur une droite 33
3 Repères du plan 34
4 Coordonnées du milieu d'un segment 35
5 Distances dans un repère orthonormé 36
Exercices 37
Corrigé des exercices 40

IV Premières fonctions de référence 47
1 Fonctions affines . . . 48
2 Fonction carré . . . 51
3 Fonction inverse . . . 54
4 À la calculatrice . . . 57
Exercices . . . 58
Corrigé des exercices . . . 64

V Arithmétique 71
1 Divisibilité . . . 72
2 Nombres premiers . . . 73
3 Nombres premiers entre eux, fractions irréductibles . . . 75
4 Problèmes . . . 76
Corrigé des exercices . . . 78

VI Nouvelles fonctions de référence 83
1 Fonction cube . . . 83
2 Fonction racine carrée . . . 86
Exercices . . . 88
Corrigé des exercices . . . 93

VII Vecteurs du plan 99
Introduction . . . 99
Activités . . . 100
1 Translations . . . 101
2 Notion de vecteur . . . 102
2.1 Définitions . . . 102
2.2 Représentation graphique . . . 102
2.3 Cas particuliers . . . 103
2.4 Exercices . . . 103
3 Somme de vecteurs . . . 104
3.1 Définition . . . 104
3.2 Constructions . . . 104
3.3 Compléments . . . 104
3.4 Exercices . . . 105
4 Coordonnées d'un vecteur . . . 106
4.1 Milieu d'un segment : rappel . . . 106
4.2 Définition . . . 106
4.3 Exercices . . . 107
4.4 Coordonnées de la somme de vecteurs . . . 108
4.5 Norme d'un vecteur – Repères orthonormés . . . 108
5 Multiplication d'un vecteur par un réel . . . 109
5.1 Définition et premières propriétés . . . 109
5.2 Colinéarité de vecteurs . . . 111
5.3 Homothéties . . . 113
6 Problèmes . . . 114
Corrigé des exercices . . . 116

VIII Pourcentages & Évolutions **127**
1 Pourcentages & Proportions . . . 127
2 Évolutions . . . 128
3 Évolutions successives . . . 131
4 Exercices . . . 132
Corrigé des exercices . . . 133

IX Généralités sur les fonctions **137**
Introduction . . . 137
1 Notion de fonction . . . 138
1.1 Définitions . . . 138
1.2 Exercices . . . 140
2 Étude qualitative d'une fonction . . . 141
2.1 Parité . . . 142
2.2 Variations . . . 143
2.3 Extremums . . . 145
2.4 Signe . . . 145
2.5 Exercices . . . 146
3 Fonctions définies sur $\mathbb{N}$ . . . 146
4 Problèmes et exercices . . . 147
Corrigé des exercices . . . 153

X Inéquations & Tableaux de signes **165**
Exercices . . . 165
Corrigé des exercices . . . 169

XI Probabilités **181**
Introduction . . . 181
1 Événements d'une expérience aléatoire . . . 182
1.1 Expérience aléatoire, issue, univers . . . 182
1.2 Événements d'une expérience aléatoire . . . 182
1.3 Opérations sur les événements . . . 183
2 Probabilités . . . 184
2.1 Probabilité d'un événement . . . 184
2.2 Probabilités et fréquences . . . 185
3 Calculs de probabilités . . . 185
3.1 Équiprobabilité . . . 185
3.2 Probabilités et opérations . . . 186
3.3 Arbres pondérés . . . 186
Exercices . . . 188
Corrigé des exercices . . . 193

XII Droites du plan **199**
1 Introduction . . . 199
2 Vecteurs directeurs et équations cartésiennes d'une droite . . . 200
2.1 Vecteurs directeurs d'une droite . . . 200
2.2 Équations cartésiennes d'une droite . . . 201
3 Équation réduite d'une droite . . . 203
4 Positions relatives de droites . . . 207
4.1 Droites parallèles . . . 207

4.2 Droites sécantes et systèmes linéaires . . . 209
Corrigé des exercices . . . 212

XIII Statistiques descriptives 223
Introduction . . . 224
1 Vocabulaire . . . 224
2 Indices de position . . . 226
2.1 Mode d'une série statistique . . . 226
2.2 Médiane d'une série statistique . . . 226
2.3 Moyenne d'une série statistique . . . 227
3 Indices de dispersion . . . 228
3.1 Étendue d'une série statistique . . . 228
3.2 Quartiles d'une série statistique . . . 228
3.3 Écart-type d'une série statistique . . . 229
4 Bilan . . . 230
4.1 Diagrammes en boîtes . . . 230
4.2 Remarques générales . . . 230
4.3 Avec la calculatrice . . . 231
5 Exercices . . . 231
Corrigé des exercices . . . 235

XIV Échantillonnage 241
1 Échantillons . . . 241
2 Fluctuation d'échantillonnage . . . 242
3 Exercices . . . 244
Corrigé des exercices . . . 246

Devoirs corrigés 249

1 Le petit papier plat 251
Corrigé . . . 252

2 Quelles moyennes ? 253
Corrigé . . . 254

3 To bee or not to bee 257
Corrigé . . . 258

4 Euler (de rien) 261
Corrigé . . . 262

5 Hair Force 265
Corrigé . . . 266

6 Les mains sur la table ! 269
Corrigé . . . 270

7 Fonctions géométriques 271
Corrigé . . . 272

8 Suivez les flèches 273
Corrigé . . . 274

9 Beau et fort 277
Corrigé . . . 278

10 Île héritée 279
Corrigé . . . 280

11 Belle autoroute 283
Corrigé . . . 285

12 Que la Force surhumaine soit avec toi 287
Corrigé . . . 288

13 Big Ben 291
Corrigé . . . 292

14 Nicolabilités 295
Corrigé . . . 296

15 Antoine, Octave & Cléo 299
Corrigé . . . 300

16 Ménagerie 303
Corrigé . . . 304

17 Des chiffres et des lettres 305
Corrigé . . . 307

18 Grande musique et chantillonnage 309
Corrigé . . . 311

19 Devoir parental 313

Cahiers transversaux 315

α Algo à gogo 317
1 Installer Python . . . 318
2 Les variables . . . 318
3 Instructions conditionnelles . . . 319
4 Boucle bornée . . . 320
5 Boucle non bornée . . . 321
6 Fonction . . . 322
7 Liste . . . 323
8 Foire de l'algo . . . 325
9 Solutions . . . 328

β **En toute logique** **339**
1 Diagrammes de Venn . . . 339
2 Ensembles . . . 342
3 Logique . . . 344
3.1 Propositions . . . 344
3.2 Implication . . . 345
3.3 Équivalence . . . 346
3.4 Exercices . . . 346
4 Solutions . . . 348

Extras **351**

A Collège Express **353**
1 Calculs et simplifications . . . 353
2 Équations . . . 353
3 Développements . . . 354
4 Factorisations . . . 354
5 Fonctions . . . 354
6 Géométrie . . . 354
7 Logique . . . 355
8 Solutions . . . 355

B Les bons comptes **357**
1 Niveau 1 . . . 357
2 Niveau 2 . . . 357
3 Niveau 3 . . . 358
4 Solutions . . . 358
4.1 Niveau 1 . . . 358
4.2 Niveau 2 . . . 358
4.3 Niveau 3 . . . 359

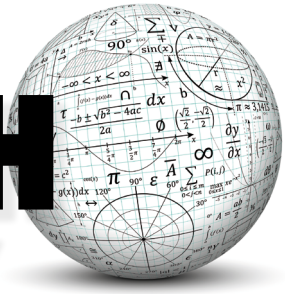
C La racine, c'est carré **361**

D Équerre et math **363**

E Einstein vaut mieux que deux tu l'auras **367**

Annexes **369**
If . . . 371
Notations & Abréviations . . . 373
Bibliographie & Références . . . 375
Remerciements . . . 379

MATH MAX



NOUVEAUX PROGRAMMES

MATH MAX, parce que les mathématiques sont très sérieuses… mais pas uniquement.

Cette seconde édition, conforme aux nouveaux programmes, contient :

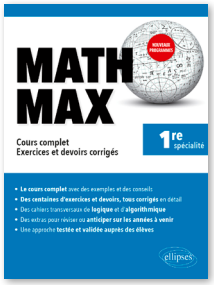
- un cours complet avec des exemples, des remarques et des conseils,
- des centaines d'exercices et devoirs, tous corrigés en détail, de difficulté croissante, couvrant tout le programme et même plus,
- des cahiers transversaux de logique et d'algorithmique,
- des activités d'approche, de révision et de synthèse,
- des extras pour anticiper sur les années à venir,
- des exercices en anglais pour enrichir la langue,
- des corrections rédigées comme l'exigent les enseignants,
- une approche testée et validée auprès des élèves.

Tout ce qui est nécessaire pour asseoir ses bases, réussir son année et bien préparer la suivante.

Mais **MATH MAX**, c'est aussi des données historiques, des conseils de lectures, des touches culturelles, des exercices décalés, des énoncés fantasques, des contextes farfelus, des jeux de mots (presque) amusants.

Voici bien de quoi égayer votre réflexion.

Et aussi dans la même série





www.editions-ellipses.fr

9 782340 043978