

AVANT - PROPOS

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes de seconde C et T. Il est conçu comme un guide pour l'élève travaillant en autonomie. J'ai voulu, en priorité, redonner à l'utilisateur de ce recueil d'exercices, c'est-à-dire à l'élève, le goût de « faire les mathématiques » en montrant que cette expression recouvre des activités très diverses, intellectuelles ou manuelles, parfois amusantes, toujours utiles pour les autres disciplines.

Le présent manuel scolaire est conforme au programme de mathématiques seconde C et T en vigueur au BURKINA FASO et les exercices qu'il contient sont variés et corrigés dans un langage mathématique clair et simple.

Il est donc un bon outil didactique qui contribuera largement à la réussite des utilisateurs et aussi, j'espère bien sûr qu'il répondra à l'attente et aux besoins de mes collègues professeurs.

Je souhaite que les utilisateurs de cet ouvrage me fassent part de leurs remarques et suggestions constructives afin d'améliorer les prochaines éditions et je les en remercie par avance.

L'auteur

Issaka SAVADOGO

Tél : +226 78981409

+226 70514283

+226 76072920

E-mail : savadogo87@gmail.com

SOMMAIRE

	Page	
Thèmes	Enoncés	Solutions
Thème1 :Les nombres réels	3	6
Thème2 :Les polynômes	13	14
Thème3 :Les fonctions	16	21
Thème4 :Equations-Inéquations et Système d'équations –Système d'inéquations	32	37
Thème5 :Statistiques	47	48
Thème6 :Calcul vectoriel	51	54
Thème7 :Angles orientés- Trigonométrie	62	67
Thème8 :Droites et Cercle dans le plan	78	83
Thème9 :Produits scalaires	96	98
Thème10:Barycentre	106	106
Thème11 :Géométrie dans l'espace	107	112
<i>Devoirs surveillés de Mathématiques</i>	De la page 119 à la page 133	

THÈME 1: Les nombres réels

ÉNONCÉS

Intervalles

EXERCICE 1

Représenter graphiquement, puis écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres vérifiant les inégalités suivantes :

a) $-3 \leq x \leq 2$

b) $x \geq 7$

c) $1 > x$

d) $-4 \leq x < 1$

e) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

EXERCICE 2

Schématiser les intervalles suivants :

$[1; 4]$; $] -2; +\infty[$; $[-7; 7,1]$; $] -\infty; 1[$; $[0; 1]$.

Existe-t-il un réel commun à ces cinq intervalles ?

EXERCICE 3

: a , b et c sont des nombres non nuls. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a^p \times b^q \times c^r$:

$$A = \frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$B = a^5 (bc)^2 \times \frac{1}{(a^3b)^2}$$

$$C = \frac{ab^2}{ca^{-2}}$$

$$D = \left(a^3b^{-5}\right)^2$$

EXERCICE 4

Combien y a-t-il d'entiers relatifs x tels que :

$$3 - x \leq 2x + 4 \leq 5 - x$$

Inéquations

EXERCICE 5

Étudier le signe de :

- a) $(5 - 3x)(2x + 1)$
- b) $(x + 1)^2 - 4x^2$
- c) $(1 - 2x)(1 - 3x)$
- d) $x^2 - x(x + 3)$

Valeurs absolues

EXERCICE 6

Trouver tous les entiers relatifs x tels que : $|x| \leq 6$

EXERCICE 7

Décrire, en termes d'intervalles, d'encadrement, de valeurs absolues, de distance et par une représentation graphique chacune des propriétés énoncées :

- $|x - 2| \leq 3$
- $d(x, -1) \leq 2$
- $|3 - x| \leq 4$
- $d(x, 4) \leq 0,5$
- $-5 \leq x \leq -3$
- $-3 \leq 2x \leq 3$
- $x \in]5; 6[$

Signe d'un produit, d'un quotient

EXERCICE 8

Procéder à une étude du signe de chacune des expressions suivantes :

- a) $\frac{(2x - 1)(3x - 1)(4x - 1)(5x - 1)}{x}$
- b) $\frac{x + 1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2}}$
- c) $\frac{x}{x^2 - 4}$
- d) $\frac{x + 1}{1}$
- e) $2x(x - 2)$

EXERCICE 9

Écrire un quotient dont le tableau de signes est :

x	$-\infty$	-3	2	3	$+\infty$
	-	-	-	0	+
	-	0	+	+	+
			0		
$Q(x)$	+	-	+	-	-

EXERCICE 10

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$|x + 3| = -4$$

$$|x - 4| = \frac{21}{5}$$

$$|x + 2| < 3$$

EXERCICE 11

Ecrire en utilisant la notion de valeurs absolues les affirmations suivantes :

$$x \in]-3; 7[$$

$$x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$$

EXERCICE 12

Résoudre les systèmes d'inéquations suivantes :

$$\begin{cases} |x - 1| < \frac{5}{4} \\ |x - \frac{1}{5}| \leq \frac{1}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - 1| < 2 \\ |2 - x| \leq 2 \end{cases}$$

EXERCICE 13

Compléter :

Si $-2 < x < 3$, alors x^2

EXERCICE 14

Une balle de tennis est lâchée de la hauteur h d'un balcon. A chaque rebond, elle remonte aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur atteinte au rebond précédent.

1. Exprimer, en fonction de h , la hauteur atteinte au deuxième rebond, puis au troisième, puis au quatrième.

2. Supposons qu'en mètres : $h = 5$.

Donner des valeurs approchées, arrondies au centimètre, des hauteurs trouvées au 1..

EXERCICE 15

Une plaque métallique rectangulaire a pour dimensions en centimètres : $L \approx 4,5$ et $l \approx 2,3$. Ces mesures ont été faites à 0,01 cm près avec un pied à coulisse.

1. Donner un encadrement de l , puis de L .
2. En déduire un encadrement de l'aire S de cette plaque métallique.
3. Traduire cet encadrement par une approximation de S .

EXERCICE 16

Quelle est la nature du nombre $A = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{10-3\sqrt{11}} + \frac{1}{10+3\sqrt{11}}}}$?

EXERCICE 17

Ecrire les nombres suivants sous la forme $2^x 3^y 5^z$

$$150 ; 36 ; \frac{150}{36} ; (150)^2 \times 36 ; \frac{(150)^3}{36} ; \frac{2}{150^2} \left(\frac{6}{5} \right)^2.$$

EXERCICE 18 (casse tête)

1. Choisir trois chiffres distincts. Calculer leur somme s .
2. Ecrire les six nombres possibles que l'on peut obtenir en permutant ces trois chiffres.
3. Calculer la somme S de ces six nombres. Calculer le quotient de S par s . Recommencer deux fois avec trois autres chiffres. Que remarque-t-on ?
4. Démontrer le résultat conjecturé à la deuxième question.

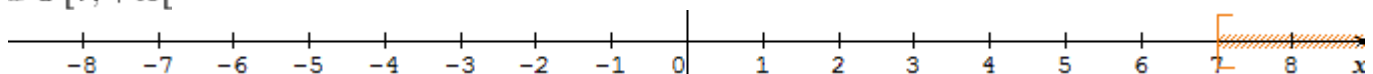
SOLUTIONS

EXERCICE 1

a) $-3 \leq x \leq 2$
 $x \in [-3; 2]$



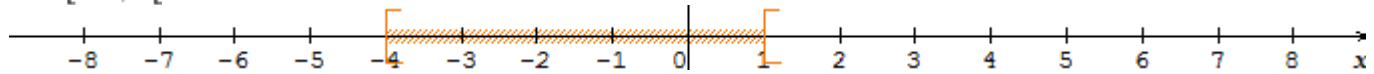
b) $x \geq 7$
 $x \in [7; +\infty[$



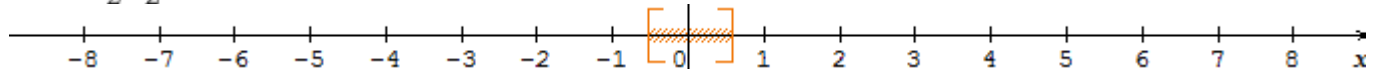
c) $1 > x$
 $x \in]-\infty; 1[$



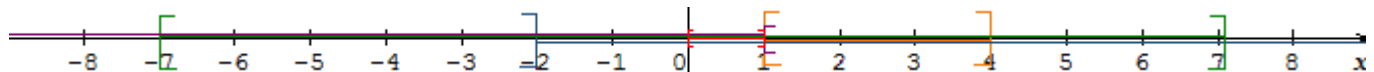
d) $-4 \leq x < 1$
 $x \in [-4; 1[$



e) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$
 $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$



EXERCICE 2



Il n'existe pas de réel commun à ces cinq intervalles (la valeur 1 est exclu dans l'intervalle $]-\infty; 1[$)

EXERCICE 3

$$A = \frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = a^{-2} \times b^2 \times c ; B = a^5 (bc)^2 \times \frac{1}{(a^3b)^2} = a^{-1} \times c^2 ; C = \frac{ab^2}{ca^{-2}} = a^3 \times b^2 \times c^{-1} ;$$

$$D = (a^3b^{-5})^2 = a^6 \times b^{-10}.$$

EXERCICE 4

$$\begin{aligned} 3 - x &\leq 2x + 4 \leq 5 - x \\ \Leftrightarrow 3 &\leq 2x + x + 4 \leq 5 \\ \Leftrightarrow 3 &\leq 3x + 4 \leq 5 \\ \Leftrightarrow 3 - 4 &\leq 3x \leq 5 - 4 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq 3x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3} &\leq x \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il existe un unique entier relatif unique compris entre $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$, il s'agit de 0.

EXERCICE 5

a) $(5 - 3x)(2x + 1)$

$(5 - 3x) = 0$ si et seulement $x = \frac{5}{3}$ et $(2x + 1) = 0$ si et seulement $x = -\frac{1}{2}$

pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$, $2x+1$ est négatif et $5-3x$ est positif donc $(5-3x)(2x+1)$ est négatif.

pour $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{5}{3}[$, $2x+1$ est positif et $5-3x$ est positif donc $(5-3x)(2x+1)$ est positif.

pour $x \in]\frac{5}{3}; +\infty[$, $2x+1$ est positif et $5-3x$ est négatif donc $(5-3x)(2x+1)$ est négatif.

pour $x = \frac{5}{3}$ ou $x = -\frac{1}{2}$, $(5-3x)(2x+1)$ est nul.

b) $(x + 1)^2 - 4x^2$

$(x+1)^2 - 4x^2 = [(x+1)-2x][(x+1)+2x] = (-x+1)(3x+1)$

on pose $-x+1=0$ ssi $x=1$ et $3x+1=0$ ssi $x=-1/3$

pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[$, $-x+1$ est positif et $3x+1$ est négatif donc $(x+1)^2 - 4x^2$ est négatif

pour $x \in]-\frac{1}{3}; 1[$, $-x+1$ est positif et $3x+1$ est positif donc $(x+1)^2 - 4x^2$ est positif

pour $x \in]1; +\infty[$, $-x+1$ est négatif et $3x+1$ est positif donc $(x+1)^2 - 4x^2$ est négatif.

pour $x=1$ ou $x=-1/3$ est nul.

c) $(1 - 2x)(1 - 3x)$

$1-2x=0$ ssi $x=1/2$ et $1-3x=0$ ssi $x=1/3$

pour $x \in]-\infty; 1/3[$, $1-2x$ est positif et $1-3x$ est positif donc $(1-2x)(1-3x)$ est positif

pour $x \in]1/3; 1/2[$, $1-2x$ est positif et $1-3x$ est négatif donc $(1-2x)(1-3x)$ est négatif.

pour $x \in]1/2; +\infty[$, $1-2x$ est négatif et $1-3x$ est négatif donc $(1-2x)(1-3x)$ est positif.

pour $x=1/3$ ou $x=1/2$ est nul.

d) $x^2 - x(x + 3)$

$x^2 - x(x+3) = x^2 - x^2 - 3x = -3x$

$-3x=0$ ssi $x=0$

pour $x \in]-\infty; 0[$, $x^2 - x(x+3)$ est positif

pour $x \in]0; +\infty[$, $x^2 - x(x+3)$ est négatif

pour $x=0$ $x^2 - x(x+3)$ est nul.

EXERCICE 6

$|x| \leq 6 \iff -6 \leq x \leq 6$

Les entiers relatifs recherchés sont tous ceux de l'intervalle $[-6;6]$, c'est à dire -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

EXERCICE 7

$|x - 2| \leq 3 \iff -3 \leq x - 2 \leq 3 \iff -1 \leq x \leq 5$, ainsi on a encadré x . L'intervalle est $[-1;5]$.

$|x - 2| \leq 3 \iff d(x, 2) \leq 3$.

$d(x, -1) \leq 2 \iff |x + 1| \leq 2 \iff -2 \leq x + 1 \leq 2 \iff -3 \leq x \leq 1$. L'intervalle est $[-3;1]$.

$|3 - x| \leq 4 \iff -4 \leq 3 - x \leq 4 \iff -7 \leq -x \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 7$. L'intervalle est $[-1;7]$.

$$|3 - x| \leq 4 \iff d(3, x) \leq 4.$$

$$d(x, 4) \leq 0,5 \iff |x - 4| \leq 0,5 \iff -0,5 \leq x - 4 \leq 0,5 \iff 3,5 \leq x \leq 4,5.$$

L'intervalle est $[3,5;4,5]$.

$-5 \leq x \leq -3$. L'intervalle correspondant est $[-5;-3]$.

En terme de valeur absolue on a $|x + 4| \leq 1$ et en distance on a $d(x; -4) \leq 1$.

$$-3 \leq 2x \leq 3 \iff -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

En valeur absolue on a $|x| \leq \frac{3}{2}$

. En terme de distance on aura $d(x; 0) \leq \frac{3}{2}$.

$x \in]5; 6[$, c'est un intervalle. Encadrement : $5 < x < 6$.

En valeur absolue on a $|x - \frac{11}{2}| < \frac{1}{2}$. En distance on a $d(x; \frac{11}{2}) < \frac{1}{2}$.

EXERCICE 8

a) $(2x - 1)(3x - 1)(4x - 1)(5x - 1)$

Soit $2x-1=0$ ou $3x-1=0$ ou $4x-1=0$ ou $5x-1=0$

$$\iff x=1/2 \text{ ou } x=1/3 \text{ ou } x=1/4 \text{ ou } x=1/5$$

pour $x \in]-\infty; 1/5[$ $(2x-1), (3x-1), (4x-1)$ et $(5x-1)$ sont négatifs donc $(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)$ est positif,

pour $x \in]1/5; 1/4[$ $(2x-1), (3x-1)$ et $(4x-1)$ sont positifs mais $(5x-1)$ est négatif donc $(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)$ est négatif,

pour $x \in]1/4; 1/3[$ $(2x-1)$ et $(3x-1)$ sont positifs mais $(4x-1)$ et $(5x-1)$ sont négatifs donc $(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)$ est positif,

pour $x \in]1/3; 1/2[$ $(3x-1), (4x-1)$ et $(5x-1)$ sont négatifs mais $(2x-1)$ est positif donc $(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)$ est négatif,

pour $x \in]1/2; +\infty[$ $(2x-1), (3x-1), (4x-1)$ et $(5x-1)$ sont positifs donc $(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)$ est positif,

pour $x=1/2$ ou $x=1/3$ ou $x=1/4$ ou $x=1/5$ $(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)$ est nul.

b) $\frac{x}{x+1}$

Cette expression existe pour $x+1 \neq 0 \iff x \neq -1$

pour $x \in]-\infty; -1[$ on a x et $x+1$ sont négatifs donc $\frac{x}{x+1}$ est positif,

pour $x \in]-1; 0[$ on a x est négatif et $x+1$ est positif donc $\frac{x}{x+1}$ est négatif,

pour $x \in]0; +\infty[$ on a x et $x+1$ sont positifs donc $\frac{x}{x+1}$ est positif.

pour $x=0$ $\frac{x}{x+1}$ est nul

c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$

Cette expression existe pour $x \neq 0$ et $x \neq -2$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)}$ (obtenu en réduisant au même dénominateur)

pour $x \in]-\infty; -2[$ on a $x(x+2)$ est positif donc $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ est positif,

pour $x \in]-2; 0[$ on a $x(x+2)$ est négatif donc $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ est négatif,

pour $x \in]0; +\infty[$ on a $x(x+2)$ est positif donc $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ est positif.

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

d) $\frac{x^2 - 4}{x + 1}$ Cette expression existe pour $x \neq -1$ Résolvons $x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$ pour $x \in]-\infty; -2[$ $x^2 - 4$ est positif et $x + 1$ est négatif donc $\frac{x^2 - 4}{x + 1}$ est négatif,pour $x \in]-2; -1[$ $x^2 - 4$ est négatif et $x + 1$ est négatif donc $\frac{x^2 - 4}{x + 1}$ est positif,pour $x \in]-1; 2[$ $x^2 - 4$ est négatif et $x + 1$ est positif donc $\frac{x^2 - 4}{x + 1}$ est négatif,pour $x \in]2; +\infty[$ $x^2 - 4$ et $x + 1$ sont positifs donc $\frac{x^2 - 4}{x + 1}$ est positif,pour $x = 2$ ou $x = -2$, $\frac{x^2 - 4}{x + 1}$ est nul.

$$\text{e) } \frac{1}{2x(x-2)}$$

Cette expression existe pour $2x(x-2) \neq 0 \iff x \neq 0$ et $x \neq 2$ pour $x \in]-\infty; 0[$ $2x(x-2)$ est positif donc $\frac{1}{2x(x-2)}$ est positif,pour $x \in]0; 2[$ $2x(x-2)$ est négatif donc $\frac{1}{2x(x-2)}$ est négatif,pour $x \in]2; +\infty[$ est positif donc $\frac{1}{2x(x-2)}$ est positif.**EXERCICE 9**Posons $Q(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ tel que $D(x) \neq 0$.Puisque $Q(x)$ n'est pas définie en -3 , 2 et 3 alors on peut prendre $D(x) = (x+3)(-x+2)(x-3) = (-x+2)(x^2-9)$ De plus $Q(x)$ ne s'annule nul part donc $N(x) = \text{une constante} \in]0; +\infty[$

Finalement on peut écrire

$$Q(x) = \frac{1}{(-x+2)(x^2-9)}$$

EXERCICE 10

1.) $|x + 3| = -4$

Une valeur absolue étant toujours positive, cette équation n'admet aucune solution.

D'où : $S = \emptyset$

2.) D'où : $S = \left\{-\frac{1}{5}; \frac{41}{5}\right\}$

3.) $|x + 2| < 3$ équivaut à : $-3 < x + 2 < 3$

soit : $-5 < x < 1$

D'où : $S =]-5; 1[$.

EXERCICE 11

1.) $x \in]-3; 7[\iff |x - 2| < 5 (7 - (-3) = 10)$

2.) $x \in]-\infty; -4[\cup [2; +\infty[\iff |x + 1| \geq 3$.

EXERCICE 12

1.)Résolvons séparément les inéquations (1) et (2) :

$$|x - 1| < \frac{5}{4} \iff -\frac{1}{4} < x < \frac{9}{4}$$

$$\text{Donc : } S_1 =]-\frac{1}{4}; \frac{9}{4}[$$

$$\left|x - \frac{1}{5}\right| \leq \frac{1}{20} \iff \frac{3}{20} \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc : } S_2 = [\frac{3}{20}; \frac{1}{4}]$$

$$\text{D'où : } S = S_1 \cap S_2$$

$$S = [\frac{3}{20}; \frac{1}{4}]$$

2.

$$\begin{cases} |x - 1| < 2 & (1) \\ |2 - x| \leq 2 & (2) \end{cases}$$

Résolvons séparément les inéquations (1) et (2) :

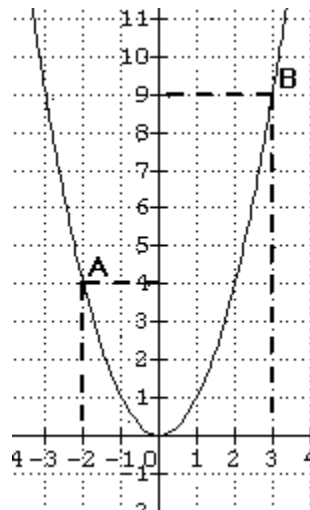
$$|x - 1| < 2 \iff -1 < x < 3$$

$$\text{Donc : } S_1 =]-1; 3[$$

$$\text{Donc : } S_2 = [0; 4]$$

$$\text{D'où : } S = S_1 \cap S_2$$

$$S = [0; 3[$$

EXERCICE 13

Si $-2 < x < 3$:

$f(x)$ varie sur la portion de courbe délimitée par A et B. Les valeurs de $f(x)$ sont donc comprises entre 0 et 9.

Conclusion : si $-2 < x < 3$, on a $0 \leq x^2 < 9$.

EXERCICE 14

1. Premier rebond = $3/4$ h
 Deuxième rebond : $3/4(3/4 \text{ h}) = 9/16 \text{ h}$
 Troisième rebond : $3/4(9/16 \text{ h}) = 27/64 \text{ h}$
 Quatrième rebond : $3/4(27/64 \text{ h}) = 81/256 \text{ h}$
2. Premier rebond = 3,75
 Deuxième rebond : $3/4(3/4 \text{ h}) \approx 2,81$
 Troisième rebond : $3/4(9/16 \text{ h}) \approx 2,11$
 Quatrième rebond : $3/4(27/64 \text{ h}) \approx 1,58$

EXERCICE 15

- $2,29 < l < 2,31$
1. $4,49 < L < 4,51$
 2. $10,28 < S < 10,42$
 3. $S \approx 10,35$

EXERCICE 16

On pose $A = \frac{1}{\sqrt{B}}$. Calculons d'abord le nombre B :

$$B = \frac{1}{10-3\sqrt{11}} + \frac{1}{10+3\sqrt{11}} = \frac{1 \times (10+3\sqrt{11})}{(10-3\sqrt{11})(10+3\sqrt{11})} + \frac{1 \times (10-3\sqrt{11})}{(10+3\sqrt{11})(10-3\sqrt{11})}$$

$$B = \frac{10+3\sqrt{11}}{10^2 - (3\sqrt{11})^2} + \frac{10-3\sqrt{11}}{10^2 - (3\sqrt{11})^2} = \frac{10+3\sqrt{11}}{100-99} + \frac{10-3\sqrt{11}}{100-99} = 10+3\sqrt{11} + 10-3\sqrt{11}$$

$$B = 20.$$

Donc, $A = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20}$ est irrationnel car 20 n'est pas un carré parfait.

EXERCICE 17

$$150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$$

$$36 = 6^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^0$$

$$150/36 = 2^{-1} \times 3^{-1} \times 5^2$$

$$150^2 \times 36 = (2 \times 3 \times 5^2)^2 \times 2^2 \times 3^2 = 2^4 \times 3^4 \times 5^4$$

$$(150^3)/36 = (2 \times 3 \times 5^2)^3 / (2^2 \times 3^2) = 2^1 \times 3^1 \times 5^6$$

$$\frac{2}{150^2} \left(\frac{6}{5} \right)^2 = (2^3 \times 3^2) / ((2 \times 3 \times 5^2)^2 \times 5^2) = 2^1 \times 3^0 \times 5^6$$

EXERCICE 18

1) $3 ; 5 ; 1 ; s = 3+5+1=9.$

2) $S = 351+315+531+513+153+135 = 1998.$

3) $\frac{S}{s} = \frac{1998}{9} = 222.$ On remarque que le quotient de S par s est toujours égal à 222.

4) Soit c, d et u les trois chiffres choisis alors $s = c+d+u.$

$$S = (100c+10d+u) + (100c+10u+d) + \dots + (100u+10c+d),$$

$$S = 200(c+d+u) + 20(c+d+u) + 2(c+d+u) = 222s, \text{ d'où } \frac{S}{s} = \frac{222s}{s} = 222.$$

THÈME 2 : Les polynômes

ENONCES

EXERCICE 1

Donner la forme canonique des fonctions polynômes f du second degré définies par :

1). $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

2). $f(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$

3). $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + 15x + 30$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1). $-x^2 + 6x - 10 = 0$

2). $x^2 + 4x - 21 = 0$

3). $9x^2 + 6x + 1 = 0$

EXERCICE 3

Factoriser les expressions suivantes :

1). $x^2 + 4x - 21$

2). $8x^2 + 8x + 2$

3). $-3x^2 + 7x - 8$

EXERCICE 4

Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de :

1). $f_1(x) = 8x^2 + 8x + 2$

2). $f_2(x) = 2x^2 - 3x + 2$

3). $f_3(x) = -x^2 - 3x + 10$

Sans calculer $f_3(-7)$, $f_3(1/2)$, $f_3(148)$, indiquer les signes de ces nombres.

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1). $2x^2 - 3x + 2 < 0$

2). $8x^2 + 8x + 2 \leq 0$

3). $-x^2 - 3x + 10 < 0$

EXERCICE 6

Somme et produit des racines

1). Résoudre mentalement les équations suivantes :

a) $3x^2 + 7x - 10 = 0$

b) $2x^2 + 9x + 7 = 0$

2). Vérifier que 2 est racine de l'équation : $x^2 + 11x - 26 = 0$.

Quelle est l'autre racine ?

3). Écrire une équation du second degré admettant les nombres 3 et -5 pour racines.

4). Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ? si oui, les calculer.

SOLUTIONS**EXERCICE 1**1). $f(x)$ a pour forme canonique : $2[(x - 2)^2 - 1]$ 2). $f(x)$ a pour forme canonique : $-(x + \frac{1}{3})^2$ 3). $f(x)$ a pour forme canonique : $\frac{5}{2}[(x + 3)^2 + 3]$ **EXERCICE 2**1). $\Delta < 0$ donc $-x^2 + 6x - 10 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$ 2). $\Delta > 0$ donc $x^2 + 4x - 21 = 0$ admet deux racines réelles $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 $S = \{-7; 3\}$ 3). $\Delta = 0$ donc $9x^2 + 6x + 1 = 0$ admet une racine double $x = \frac{-b}{2a}$
 $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **EXERCICE 3**1. $\Delta > 0$ donc $x^2 + 4x - 21$ se factorise en : $(x + 7)(x - 3)$.2. $\Delta = 0$ donc $8x^2 + 8x + 2$ se factorise en : $8(x + \frac{1}{2})^2$ 3. $\Delta < 0$ donc $-3x^2 + 7x - 8$ ne se factorise pas .**EXERCICE 4**1). $\Delta = 0$ donc $8x^2 + 8x + 2$ est du signe de a donc $8x^2 + 8x + 2$ est positif ou nul2). $\Delta < 0$ donc $2x^2 - 3x + 2$ est strictement du signe de a donc $2x^2 - 3x + 2$ est positif.3). $\Delta > 0$ donc $-x^2 - 3x + 10$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.Or $-x^2 - 3x + 10$ admet comme racines 2 et -5Donc $-x^2 - 3x + 10 > 0$ lorsque x appartient à $]-5; 2[$ $-x^2 - 3x + 10 < 0$ lorsque x appartient à $] - \infty; -5[\cup]2; + \infty[$ $-x^2 - 3x + 10 = 0$ lorsque $x = -5$ ou $x = 2$ $f_3(-7) < 0$, $f_3(\frac{1}{2}) > 0$ et $f_3(148) < 0$ **EXERCICE 5**

1. $\Delta < 0$ donc $2x^2 - 3x + 2$ est strictement du signe de a donc $2x^2 - 3x + 2$ est positif. Donc

$$S = \emptyset$$

2. $\Delta = 0$ donc $8x^2 + 8x + 2$ est du signe de a donc $8x^2 + 8x + 2$ est positif ou nul. Donc

$$S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

3. $\Delta > 0$ donc $-x^2 - 3x + 10$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

Or $-x^2 - 3x + 10$ admet comme racines 2 et -5. Donc $S =]-\infty; -5[\cup]2; +\infty[$

EXERCICE 6

1). **Résoudre mentalement les équations suivantes :**

a) $3x^2 + 7x - 10 = 0$

$$\boxed{x = 1}$$

b) $2x^2 + 9x + 7 = 0$

$$\boxed{x = -1}$$

2). **Vérifier que 2 est racine de l'équation $x^2 + 11x - 26 = 0$**

On remplace x par 2, si le polynôme s'annule 2 alors est bel et bien une racine de l'équation ci-dessus.

$$(2)^2 + 11 \times 2 - 26$$

$$= 4 + 22 - 26$$

$$= 0$$

Quelle est l'autre racine ?

Dans le cas d'un polynôme du second degré de type $ax^2 + bx + c$, le produit des deux racines et de a vaut c , autrement dit : $\alpha_1 \times \alpha_2 \times a = c$.

Ici on a $\alpha_1 = 2, a = 1, c = -26$, par conséquent

$$\boxed{\alpha_2 = -13}$$

3). **Écrire une équation du second degré admettant les nombres 3 et -5 pour racines.**

Le polynôme recherché admet pour racines a et b , il est alors factorisable en

$P(x) = (x - a)(x - b)g(x)$, avec $g(x)$ un autre polynôme de degrés $\text{Deg}(P) - 2$. Ici comme

le polynôme P est de degrés 2, on peut le mettre sous la forme : $k(x - 3)(x + 5)$, soit

$kx^2 + 2kx - 15k = 0$. Par exemple avec $k = 1$, on a : $x^2 + 2x - 15 = 0$. Et 3 et -5 sont des racines évidentes de cette équation.

4). **Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ? Si oui, les calculer.**

On doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x \times y = -70 \end{cases}$$

On isole une des deux variables de la deuxième équation, puis on la remplace dans la première, ce qui aboutit à une équation du deuxième degré que l'on pourra résoudre :

$$x \times y = -70$$

$$x = \frac{-70}{y}$$

On remplace x dans la première ligne du système :

$$\frac{-70}{y} + y = 9$$

$$\frac{y^2 - 70}{y} = 9$$

$$y^2 - 70 = 9y$$

$$y^2 - 9y - 70 = 0$$

On remarque que ce polynôme aurait bien pu admettre comme variable x , après avoir effectué le discriminant, on aura 2 racines qui correspondront à x et y (peu importe).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4(1 \times -70)$$

$$\Delta = 81 + 280$$

$$\Delta = 361$$

$$\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\alpha_1 = \frac{9 - 19}{2}$$

$$\boxed{\alpha_1 = -5}$$

$$\alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\alpha_2 = \frac{9 + 19}{2}$$

$$\boxed{\alpha_2 = 14}$$

On en conclut que le couple $(x; y)$ est associé au couple de solution $(-5; 14)$.

THÈME 3 : Les fonctions

ÉNONCÉS

EXERCICE 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2x^2$

- Calculer les images par f des réels $0; \sqrt{2}; -4$
- Vérifier que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ont pour image 4.
- Pourquoi -4 n'est-il l'image d'aucun réels ?
- Quels sont les réels qui ont $\frac{5}{4}$ pour image par f ?

EXERCICE 2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^2 + 3x + 1$

- a) Calculer les images par f des réels $0 ; 1 ; -\sqrt{3} ; \frac{1}{2}$
 b) Trouver tous les réels qui ont pour image 1 par f

EXERCICE 3

- a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x$?
 b) Quel est le réel pour lequel on ne peut pas calculer $\frac{1}{x}$? Donner alors l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$
 c) Quels sont les réels pour lesquels on peut calculer $\sqrt{x}$? Donnez alors l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$
 d) Compléter les phrases :
 « Pour calculer $\frac{1}{\sqrt{x}}$; on commence par calculer $\sqrt{x}$; il faut donc que x
 Puis on calcule son inverse $\frac{1}{\sqrt{x}}$; il faut donc que $\sqrt{x} \neq 0$, donc x »
 Donner l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

EXERCICE 4

Une agence propose deux types de contrat de location d'une voiture pour une journée :

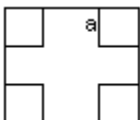
- Premier type : 200 francs de forfait et 1 franc par kilomètre.
- Deuxième type : 100 francs de forfait et 1,50 franc par kilomètre.

Pour x kilomètres parcourus, le prix à payer est noté $f_1(x)$ pour le premier type de contrat, et $f_2(x)$ pour le second.

- a) Donner les expressions de $f_1(x)$ et $f_2(x)$. Construire dans un même repère les représentations graphiques de ces fonctions pour x compris entre 0 et 500.
 b) Indiquer, en utilisant le graphique, le type de contrat le plus avantageux suivant le nombre de kilomètres parcourus.
 c) Retrouver et préciser ces résultats par calcul.

EXERCICE 5

On dispose d'un carré de métal de 20cm de côté. Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on enlève à chaque coin un carré de côté a et on relève les bords par pliage.



- a) Exprimer le volume $V = f(a)$ de cette boîte en fonction de a .
 b) Les réels -1 et 2,3 sont-ils dans l'ensemble de définition de cette fonction f ?

EXERCICE 6

Ensemble de définition d'une fonction

Indiquer sur quelle(s) partie(s) de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont définies :

$$\begin{array}{ll}
 1. f(x) = \frac{x^2 - 4}{2} & 2. f(x) = \frac{2}{x^2 - 4} \\
 3. & 4. \\
 f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 14x + 49} & f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}
 \end{array}$$

EXERCICE 7

Fonctions égales

Les fonctions f et g suivantes sont elles égales ?

$$\begin{array}{ll}
 1.) & f(x) = x^2 + 4x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = (x+2)^2 \\
 2.) & f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{3(x-2)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{3} \\
 3.) & f(x) = \frac{x-1}{2x-5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1-x}{5-2x}
 \end{array}$$

EXERCICE 8

Fonctions paires, impaires.

Etudier la parité des fonctions f suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 1. D_f = \mathbb{R} \text{ et } f(x) = 3x & \\
 2. D_f = \mathbb{R} \text{ et } f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} & \\
 3. D_f = \mathbb{R} \text{ et } f(x) = x^2 - x & \\
 4. D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\} \text{ et } f(x) = \frac{-4}{x^3 - x} & \\
 5. D_f =]-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty[\text{ et } f(x) = \sqrt{x^2 - 5} & \\
 6. D_f = \mathbb{R}^* \text{ et } f(x) = \frac{4|x|}{x} &
 \end{array}$$

EXERCICE 9

Représentation graphique d'une fonction

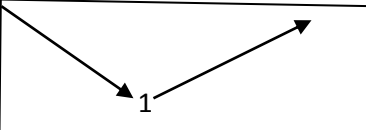
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, représenter graphiquement les fonctions f suivantes; indiquer pour chacune d'elles (par lecture graphique) l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ (S_1) et de l'inéquation $f(x) > 0$ (S_2) :

$$\begin{array}{ll}
 1. f(x) = 3x + 2 & 2. f(x) = 1 - x \\
 3. f(x) = x^2 - 1 & 4. f(x) = \frac{2}{2 - x}
 \end{array}$$

EXERCICE 10

Sens de variation d'une fonction

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 2$.Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.Montrer que f est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et que f est croissante sur $[0; +\infty[$.**EXERCICE 11**Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x - 2$.Etudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de cette fonction f .**EXERCICE 12**Est-ce qu'une fonction qui n'est pas croissante sur un intervalle I , est décroissante sur I ?**EXERCICE 13**Une fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, admet le tableau de variations suivant :

X	$-\infty$	2	$+\infty$
f			

1. Démontrer que, pour tout réel x , on a $f(x) > 0$ 2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 1$ **EXERCICE 14**Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2|x|$.Étudier le sens de variation et dresser le tableau de variations de la fonction f .**EXERCICE 15**Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = \frac{-x}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Puis la représenter graphiquement.

EXERCICE 16

1. Montrer que pour tous réels a et b positifs,

$$-\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{b-a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f: x \mapsto -\sqrt{x}$ et la représenter graphiquement.

EXERCICE 17

Résoudre graphiquement le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

EXERCICE 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 < 3$.

- par le calcul,
- graphiquement.

EXERCICE 19

Etudier la parité de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f: x \mapsto \sqrt{2x}$.

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Quels sont les réels x tels que $f(x) > 10^6$?
- Quels sont les réels x tels que $f(x) < 10^5$?
- Quels sont les réels x tels que $0 < f(x) < 10^{-4}$?

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\frac{2}{x}$.

- Etudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- Etudier la parité de la fonction f et en déduire les variations de la fonction f sur $]-\infty; 0[$.
- Dresser le tableau de variations de la fonction f et la représenter graphiquement.

EXERCICE 22

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x - 2 \end{cases}$$

SOLUTIONS

EXERCICE 1

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$

$$f(0) = 2 \times 0 = 0$$

$$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$f(-4) = 2 \times (-4)^2 = 2 \times 16 = 32$$

b)

$$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$f(-\sqrt{2}) = 2 \times (-\sqrt{2})^2 = 2 \times 2 = 4$$

On a donc bien $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 4$

c) La fonction f associe à tout réel x un réel égal à $2x^2$. Or un carré est toujours positif, donc -4 ne peut être l'image d'aucun réel x par la fonction f .

d) On cherche les x tels que $f(x) = \frac{5}{4}$

$$f(x) = \frac{5}{4} \iff 2x^2 = \frac{5}{4}$$

Il faut donc résoudre l'équation

$$2x^2 = \frac{5}{4}$$

$$x^2 = \frac{5}{8}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{8}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{2 \times 4}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{5}{2 \times 4}}$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

EXERCICE 2

a) Pour tout réel x , $f(x) = x^2 + 3x + 1$

$$f(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 5$$

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 + 3(-\sqrt{3}) + 1 = 4 - 3\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{11}{4}$$

b) On cherche tous les réels x tels que $f(x) = 1$

$$f(x) = 1 \iff x^2 + 3x + 1 = 1$$

Réolvons donc cette équation :

$$x^2 + 3x + 1 = 1$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

EXERCICE 3

a) La fonction $f : x \mapsto x$ est définie pour tout x réel. On a donc :

$$D_f = \mathbb{R}$$

b) Le réel $\frac{1}{x}$ ne peut pas être calculé pour $x = 0$. L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc : $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

c) On peut calculer $\sqrt{x}$ pour tout réel $x \geq 0$. L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est donc :

$$D_f = [0 ; +\infty[$$

d) Pour calculer $\frac{1}{\sqrt{x}}$, on commence par calculer $\sqrt{x}$; il faut donc que x soit positif ou nul.

Puis on calcule son inverse $\frac{1}{\sqrt{x}}$; il faut donc que $\sqrt{x} \neq 0$, donc x doit être strictement positif.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est donc définie sur $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 4

a) Soit x le nombre de kilomètres effectués. Soit $f(x)$ le prix total en francs.

$$f_1(x) = \text{Prix Forfait} + \text{Prix Kilométrage}$$

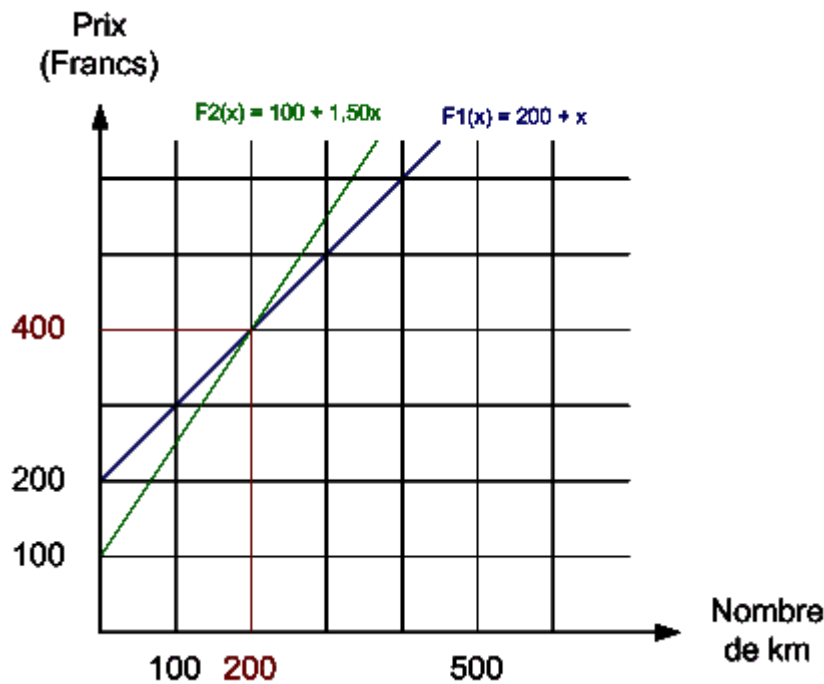
$$f_1(x) = \text{Prix Forfait} + \text{Prix au Kilomètre} \times \text{Nombre de Kilomètres}$$

$$^2f_1(x) = 200 + x$$

De la même manière :

$$f_2(x) = 100 + 1,50x$$

b) Raisonnement graphique



Jusqu'à 200 km, c'est le contrat 2 qui est le plus avantageux (la droite de $f_2(x)$ est en dessous de celle de $f_1(x)$).

A partir de 200 km, c'est le contrat 1 qui devient plus avantageux (la droite de $f_1(x)$ est en dessous de celle de $f_2(x)$).

c) Raisonnement par le calcul

Dans quel intervalle de x a-t-on $f_1(x) < f_2(x)$ (contrat 1 plus avantageux) ?

$$f_1(x) < f_2(x)$$

$$f_1(x) - f_2(x) < 0$$

$$(200 + x) - (100 + 1,5x) < 0$$

$$200 + x - 100 - 1,5x < 0$$

$$100 - 0,5x < 0$$

$$0,5x > 100$$

$$x > \frac{100}{0,5}$$

$$x > 200$$

On voit donc bien que le contrat 1 est plus avantageux que le contrat 2 pour $x > 200$ (distance parcourue supérieure à 200km)

Pour montrer que $f_2(x)$ est plus avantageux que $f_1(x)$ pour $x < 200$, on procède de la même façon que précédemment.

EXERCICE 5

a) Le volume de la boîte parallélépipédique est donné par :

$$V = L \times l \times h$$

avec $L = l = 20 - 2a$ et $h = a$

$$V = a \cdot (20 - 2a)^2$$

$$V = a \cdot (20^2 - 2 \times 20 \times 2a + (2a)^2)$$

$$V = 4a^3 - 80a^2 + 400a$$

b) a étant une longueur, on ne peut pas avoir $a < 0$. Donc -1 n'est pas dans l'ensemble de définition de $V = f(a)$

De même, d'un point de vue "physique", a ne peut pas être supérieur à 10 cm. 2,3 appartient donc à l'ensemble de définition de $V = f(a)$

L'ensemble de définition de $V = f(a)$ est :

$$D_f =]0 ; 10[$$

EXERCICE 6

1 Aucun problème de définition de f : toutes les valeurs possibles pour x ont une image par f .

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$2. f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$$

f est définie si et seulement si le dénominateur ne s'annule pas. On cherche donc la (ou les) valeur(s) interdite(s) :

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x \neq -2 \text{ et } x \neq 2$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$3. F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 14x + 49}$$

$$x^2 - 14x + 49 \neq 0$$

$$(x - 7)^2 \neq 0$$

$$x \neq 7$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{7\}.$$

$$4. f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}.$$

Il faut que l'expression sous la racine soit positive ou nulle et que le dénominateur soit non nul :

$$\frac{x+1}{2-x} \geq 0 \text{ et } 2-x \neq 0$$

$$\frac{x+1}{2-x}$$

Etudions le signe de $\frac{x+1}{2-x}$:

$$x+1 \leq 0 \text{ si et seulement si } x \leq -1$$

$$\text{et } 2-x \leq 0 \text{ si et seulement si } x \geq 2$$

On trouve $D_f = [-1 ; 2[$

EXERCICE 7

$$1. D_f = D_g = \mathbb{R}.$$

On reconnaît l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\text{Donc } f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = g(x)$$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$2. D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ et } D_g = \mathbb{R}$$

Or, pour que deux fonctions soient égales il faut qu'elles le soient pour toutes les valeurs de x .

Pour $x = 2$, f n'est pas définie et g l'est.
D'où : $f \neq g$

3.

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-5} = \frac{-(-x+1)}{-(-2x+5)} = \frac{1-x}{-2x+5} = g(x)$$

D'où : $f = g$

EXERCICE 8

1.) L'ensemble de définition de la fonction f est symétrique par rapport à 0.

Pour tout x appartenant à D_f , $f(-x) = 3(-x) = -3x = -f(x)$

D'où : la fonction f est impaire.

2.) L'ensemble de définition de la fonction f est symétrique par rapport à 0.

Pour tout x appartenant à D_f ,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = f(x)$$

D'où : la fonction f est paire.

3.) L'ensemble de définition de la fonction f est symétrique par rapport à 0.

Pour tout x appartenant à D_f , $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$

Donc : $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

D'où : f n'est ni paire ni impaire.

4.) L'ensemble de définition de la fonction f est symétrique par rapport à 0.

Pour tout x appartenant à D_f ,

$$f(-x) = \frac{-4}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-4}{-(x^3 - x)} = -f(x)$$

D'où : la fonction f est impaire.

5.) L'ensemble de définition de la fonction f est symétrique par rapport à 0.

Pour tout x appartenant à D_f , $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 5} = \sqrt{x^2 - 5} = f(x)$

D'où : la fonction f est paire.

6.) L'ensemble de définition de la fonction f est symétrique par rapport à 0.

Pour tout x appartenant à D_f ,

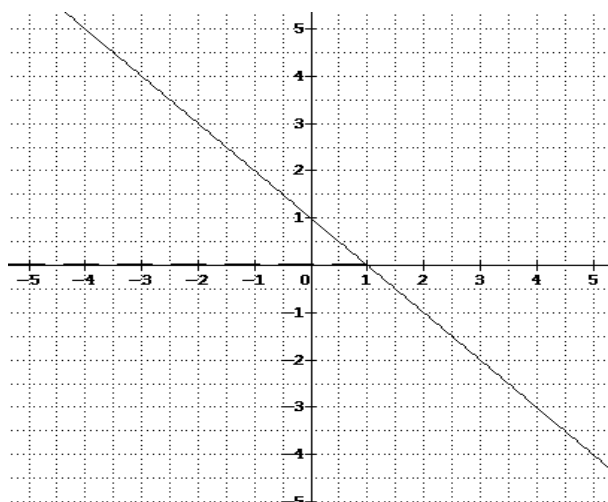
$$f(-x) = \frac{4|-x|}{-x} = \frac{4|x|}{-x} = -f(x)$$

D'où : la fonction f est impaire.

EXERCICE 9

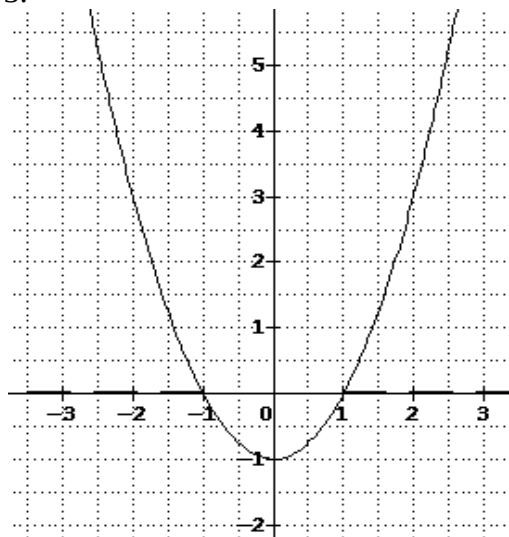
1.) $S_1 = \{-\frac{2}{3}\}$ et $S_2 =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.

2.)



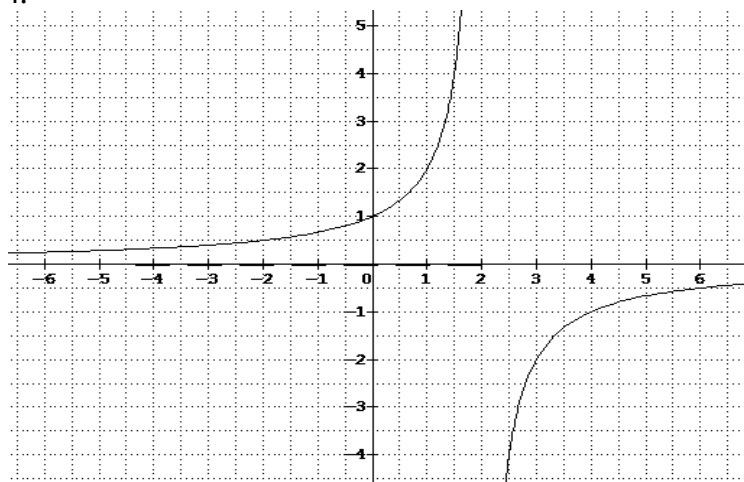
$S_1 = \{1\}$ et $S_2 =]-\infty; 1[$.

3.



$S_1 = \{-1; 1\}$ et $S_2 =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

4.



$S_1 = \emptyset$ et $S_2 =]-\infty; 2[$.

EXERCICE 10

1. $f(x) = -x + 2$

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, alors :

$$-a > -b \text{ et } -a + 2 > -b + 2$$

D'où : $a < b$ entraîne $f(a) > f(b)$: f est décroissante sur $\mathbb{R}$

2. $f(x) = 3x^2$

► Soient a et b deux réels de $] -\infty; 0]$ tels que $a < b \leq 0$, alors :

$$f(a) - f(b) = 3a^2 - 3b^2 = 3(a^2 - b^2) = 3(a - b)(a + b)$$

Comme a et b sont deux réels négatifs, alors $a + b < 0$.Comme $a < b$, alors $a - b < 0$.

Donc : $3(a - b)(a + b) > 0$

D'où : $a < b \leq 0$ entraîne $f(a) > f(b)$: f est décroissante sur $] -\infty; 0]$.► Soient a et b deux réels de $[0; +\infty[$ tels que $0 \leq a < b$, alors :

$$f(a) - f(b) = 3(a - b)(a + b)$$

Comme a et b sont deux réels positifs, alors $a + b > 0$.Comme $a < b$, alors $a - b < 0$.

Donc : $3(a - b)(a + b) < 0$

D'où : $0 \leq a < b$ entraîne $f(a) < f(b)$: f est croissante sur $[0; +\infty[$.**EXERCICE 11**

Pour tout réel x , $f(x) = 3x - 2$

 f est une fonction affine de coefficient directeur 3, strictement positif.Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.Autre méthode : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

On a :

$$f(a) - f(b) = 3a - 2 - (3b - 2) = 3a - 2 - 3b + 2 = 3(a - b)$$

Comme $a < b$, alors $a - b < 0$.

Donc $3(a - b) < 0$.

Conclusion : Pour tous réels a et b tels que $a < b$, $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$.La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.**EXERCICE 12**

NON, une fonction qui n'est pas croissante sur un intervalle I n'est pas nécessairement décroissante; elle peut être constante (exemple : $f(x) = 4$) ou ni croissante, ni décroissante (exemple : $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0; 2\pi]$).

EXERCICE 131. Le minimum de la fonction f est atteint en 2 et vaut 1.Donc pour tout réel x , $f(x) \geq 1$ (définition du minimum), donc en particulier $f(x) > 0$.

2. L'inéquation $f(x) \geq 1$ a donc comme ensemble de solutions : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

EXERCICE 14

Pour tout réel x , $f(x) = 2|x|$.

Donc, pour tout réel x , $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Sur $]-\infty; 0]$, f est une fonction linéaire de coefficient négatif.

Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Sur $[0; +\infty[$, f est une fonction linéaire de coefficient directeur positif.

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f		$\searrow$ 0 $\nearrow$	

EXERCICE 15

Pour tout réel x , $f(x) = \frac{-x}{2}$

f est une fonction linéaire de coefficient $\frac{-1}{2}$, strictement négatif.

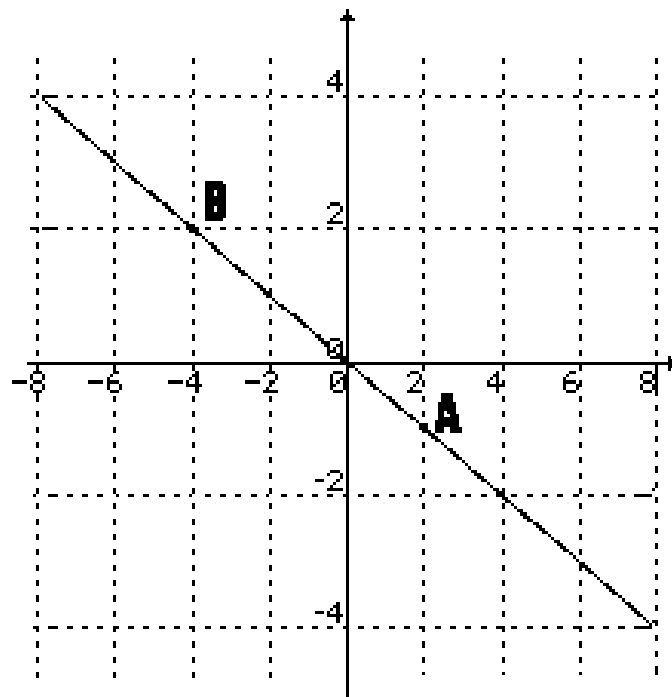
Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f		$\searrow$

Représentation graphique

$f(2) = \frac{-2}{2} = -1$ et $f(-4) = \frac{-(-4)}{2} = 2$.

Donc les points A(2; -1) et B(-4; 2) appartiennent à la représentation graphique de la fonction f .



EXERCICE 16

1. Pour tous réels a et b positifs, on a : $-\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{(-\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{b-a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

D'où pour tous réels a et b positifs, on a $-\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{b-a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

2. Soient a et b deux réels positifs tels que $0 \leq a < b$. On a :

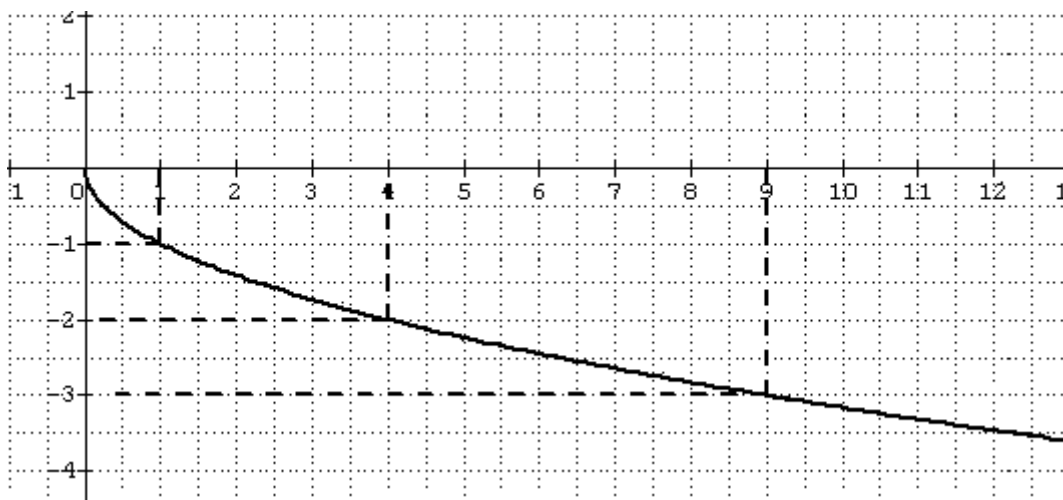
$$f(a) - f(b) = -\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{b-a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ (d'après la question précédente)}$$

Or, $a < b$, donc $b - a > 0$.

Comme $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs, alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

Conclusion : pour tous réels a et b positifs tels que $0 \leq a < b$, $f(a) > f(b)$.

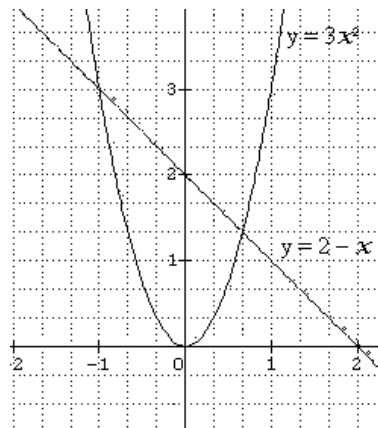
La fonction f est donc décroissante sur $[0; +\infty[$.



représentation graphique de la fonction f

EXERCICE 17

Pour représenter graphiquement le système, il faut tracer les deux courbes d'équation $y = 3x^2$ et $g(x) = 2 - x$.



Les solutions de ce système sont les points d'intersection de ces deux courbes.

Donc : graphiquement on obtient $S = \{-1; 0,6\}$.

EXERCICE 18

a) $x^2 < 3$ équivaut successivement à

$$x^2 - 3 < 0$$

$$x^2 - (\sqrt{3})^2 < 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0$$

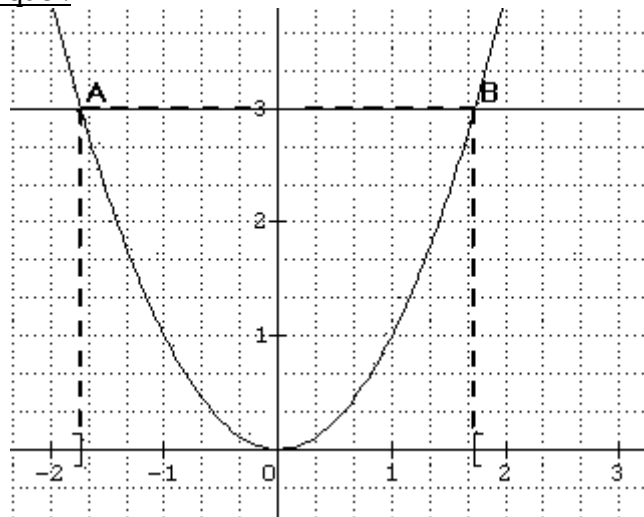
$$x - \sqrt{3} < 0 \text{ si } x < \sqrt{3}$$

$$x + \sqrt{3} < 0 \text{ si } x < -\sqrt{3}$$

D'où $S =]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$.

b) On trace la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et la droite d'équation $y = 3$. Les solutions de l'inéquation $x^2 < 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'équation $y = x^2$ situés en dessous de la droite d'équation $y = 3$.

Représentation graphique :



$$S =]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$$

EXERCICE 19

f est définie sur $[0; \infty[$. Son ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0, donc la fonction f ne peut être ni paire ni impaire.

EXERCICE 20

1.

$$f(x) > 10^6 \iff \frac{1}{x} > 10^6$$

$$\iff x < \frac{1}{10^6}$$

$$\iff x < 10^{-6}$$

D'où $\mathcal{S} =]-\infty; 10^{-6}[$.2. D'où $\mathcal{S} =]10^{-5}; +\infty[$.

3.

$$0 < f(x) < 10^{-4} \iff 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{10^4}$$

$$\iff x > 10^4$$

D'où $\mathcal{S} =]10^4; +\infty[$.**EXERCICE 21**1. Soient a et b deux réels de $]0; +\infty[$ tels que $0 < a < b$. On a :

$$f(a) - f(b) = -\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \frac{-2b + 2a}{ab} = \frac{2(a-b)}{ab}$$

Comme a et b sont strictement positifs, alors $ab > 0$.Comme $a < b$, alors $a - b < 0$.

$$\frac{2(a-b)}{ab} < 0$$

Donc

C'est à dire $f(a) - f(b) < 0$.Conclusion : Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$ tels que $0 < a < b$, on a $f(a) < f(b)$.La fonction f est donc croissante sur $]0; +\infty[$.2. Soient a et b deux réels de $]-\infty; 0[$ tels que $a < b < 0$. On a :

$$f(a) - f(b) = \frac{2(a-b)}{ab}$$

Comme a et b sont strictement négatifs, alors $ab > 0$.Comme $a < b$, alors $a - b < 0$.

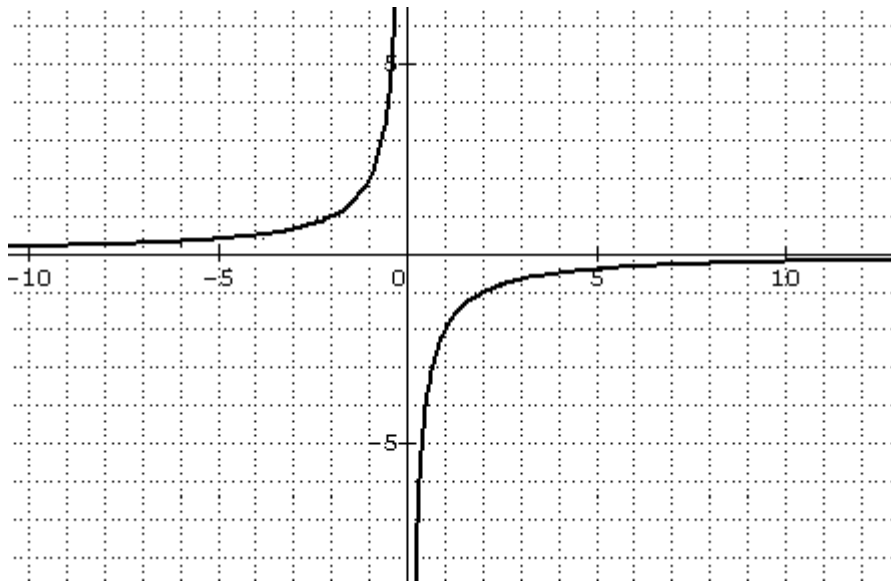
$$\frac{2(a-b)}{ab} < 0$$

Donc

C'est à dire $f(a) - f(b) < 0$ Conclusion : Pour tous réels a et b de $]-\infty; 0[$ tels que $a < b < 0$, on a $f(a) < f(b)$.La fonction f est donc croissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations			

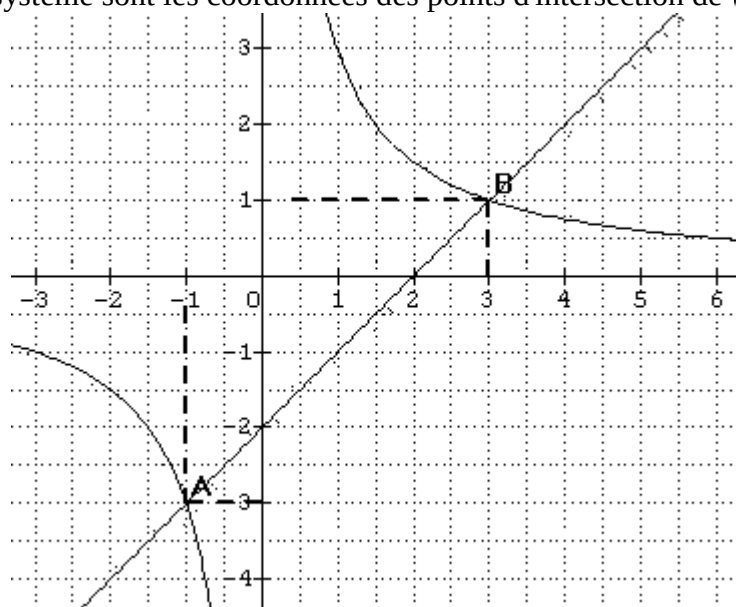
Remarque : f est une fonction impaire, donc la représentation graphique de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

**EXERCICE 22**

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Pour résoudre graphiquement ce système, on trace dans un repère orthonormal, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{3}{x}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$.

Les solutions du système sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.



$$S = \{(-1, -3); (3, 1)\}$$

THÈME 4 : Équations-Inéquations et Système d'équations-Système d'inéquations

ÉNONCÉS

EXERCICE 1

1. Sans les résoudre, donner le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$\text{a. } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} ; \quad \text{b. } \begin{cases} \frac{x}{3} - 2y = 1 \\ -3x + 18y = 0 \end{cases} ; \quad \text{c. } \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$$

2. Résoudre ensuite chacun des systèmes par la méthode de votre choix.

EXERCICE 2

Voici un système d'inéquations:

$$\begin{cases} y + x > 1 \\ y - 2x > 1 \end{cases}$$

Le résoudre graphiquement

EXERCICE 3

Résoudre graphiquement les systèmes suivants:

$$\text{a) } \begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq -1 \\ y \leq 2x \\ y \geq 2x - 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq -1 \\ y \leq -2x \\ y \geq -2x - 2 \end{cases}$$

EXERCICE 4

Au cirque de Pythaville, un adulte paie x euros et un enfant y euros.

Lundi dernier, pour 20 adultes et 10 enfants, la recette était de 160 euros et le lendemain, pour 30 adultes et 60 enfants, la recette était de 420 euros.

Mais combien paie donc un adulte? Et un enfant?

- a) Résoudre ce système graphiquement.
- b) Vérifier que le couple (x; y) trouvé est bien solution des équations précédentes.
- c) Conclure.

EXERCICE 5

Un homme veut investir 100 000 F. il décide de diviser cette somme en deux parties, et d'en placer une à 10 %, l'autre à 7 % (annuels).

Le premier placement étant plus risqué, il ne veut pas y déposer plus de 60 000 F. pour des raisons fiscales, il voudrait en outre investir un minimum de 20 000 F dans le second placement, et investir au moins autant dans le premier placement que dans le second.

Quelle répartition de ses fonds lui permettra-t-elle de réaliser les intérêts annuels les plus élevés ?

EXERCICE 6

Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x + 2y)(x - y) = 0 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 7

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 5y - 26 = 0 \\ 8x - 7y - 38 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ 6x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y - 9 = 0 \\ 8x + 10y - 18 = 0 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement ces systèmes et leurs solutions.

EXERCICE 8

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{12}{x+2} - \frac{18}{y+1} = -10 \\ \frac{3}{x+2} + \frac{4}{y+1} = 5 \end{cases}$$

EXERCICE 9

Résoudre les équations:

1. $2(x - 3) - \frac{3}{2}x + 7 - 4\left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\right) = 0$
2. $\frac{3}{4}(2 - x) - \frac{1}{2}(6x + 1) + 2 + \frac{15}{4}x = 0$
3. $\frac{3x + 1}{x - 2} = 4$

EXERCICE 10

Est-il possible de trouver trois naturels impairs consécutifs dont la somme soit 99 ?

EXERCICE 11

Résoudre l'équation et l'inéquation :

$$|x - 3| = 4$$

$$|x + 2| < 3$$

EXERCICE 12

Résoudre l'inéquation $x^2 \leq 5$

EXERCICE 13

Deux réels ont pour somme 25 et pour différence $\frac{5}{2}$. Quels sont ces deux réels ?

EXERCICE 14

En automobile, si je roule à 60 km/h, j'arrive à 13h ; mais si je roule à 80 km/h, j'arrive à 11h. Quelle distance ai-je à parcourir et à quelle heure suis-je parti ?

Indication : noter d la distance à parcourir et t l'heure de départ.

EXERCICE 15

Un malade est remboursé à 70% par la Sécurité Sociale. S'il a payé 40 €, combien reste-t-il à sa charge ?

EXERCICE 16

Un projectile est lancé à partir du sol à un instant pris comme origine. On note h(t) sa hauteur (en mètres) à l'instant t (en secondes).

Les physiciens estiment que l'on a, à tout instant t :

$$h(t) = -5t^2 + 100t.$$

1. À quel instant le projectile retombera-t-il au sol ?

2. Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $[0 ; 10]$ et strictement décroissante sur $[10 ; 20]$.
3. Quelle hauteur maximale a atteint le projectile ?

EXERCICE 17

Dans une ville, il n'y a que deux lycées.

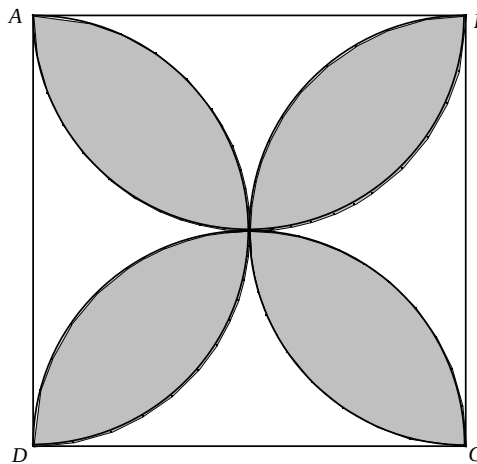
1. Dans l'un, il y a 80% de garçons et dans l'autre 40%.

Peut-on affirmer que le nombre de garçons de cette ville, allant au lycée, est supérieur au nombre de filles ?

2. Dans chacun des lycées de cette ville, le pourcentage des garçons est supérieur à celui des filles.

Peut-on affirmer que le nombre de garçons de cette ville, allant au lycée, est supérieur au nombre de filles ?

EXERCICE 18



Soit le carré $ABCD$ de côté 2 à l'intérieur duquel on a tracé les demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Résoudre le système suivant:
$$\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 2x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. Exprimer le système précédent comme le calcul des aires de deux surfaces clairement exprimées de la figure.

3. En déduire l'aire exacte de la surface sombre.

SOLUTIONS

EXERCICE 1

1. a. Le déterminant vaut : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \dots = -\frac{4}{3} \neq 0$. Donc le système admet un unique couple solution.

b. Le déterminant vaut : $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ -3 & 18 \end{vmatrix} = \dots = 0$. Donc aucun couple solution ou une infinité.

2nd déterminant : $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 18 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$. Donc le système n'admet aucun couple solution.

c. Le déterminant associé vaut : $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \dots = 0$. Le système n'admet aucun couple solution ou en admet une infinité. 2nd déterminant : $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = \dots = 0$. Le système admet une infinité de couples solution.

2. a. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$. On peut isoler x dans la 2nde ligne et on trouve après calcul : $S = \left\{ \left(\frac{5}{4}; \frac{9}{8} \right) \right\}$, c'est

l'unique couple solution.

b. $\begin{cases} \frac{x}{3} - 2y = 1 \\ -3x + 18y = 0 \end{cases}$. On sait que ce système n'admet aucun couple solution. On a donc : $S = \emptyset$.

c. $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$. On sait que ce système admet une infinité de solution, les deux équations sont donc proportionnelles.

En isolant y dans l'une ou l'autre des lignes, on obtient : $y = 2x - 3$; $S = \{ (x; 2x - 3) / x \in \mathbb{R} \}$.

EXERCICE 2

On a le système suivant

$$\begin{cases} y + x > 1 \\ y - 2x > 1 \end{cases}$$

On a donc

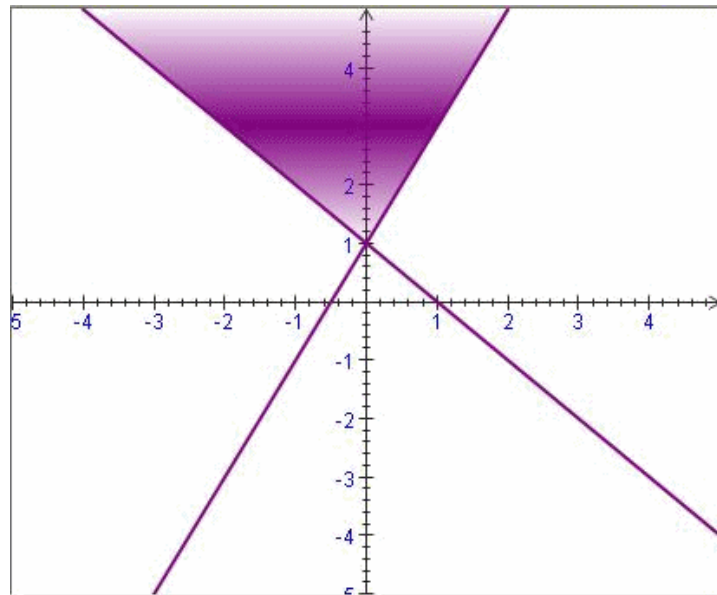
$$\begin{cases} y > 1 - x \\ y > 1 + 2x \end{cases}$$

On prend

$$f(x) = 1 - x \quad (F)$$

$$g(x) = 1 + 2x \quad (G)$$

L'ensemble des points vérifiant le système d'inéquation se trouve au dessus de la courbe F et au dessus de la courbe G. (Zone sombre sur le graphique)



EXERCICE 3

a) On a le système suivant

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq -1 \\ y \leq 2x \\ y \geq 2x - 2 \end{cases}$$

On prend

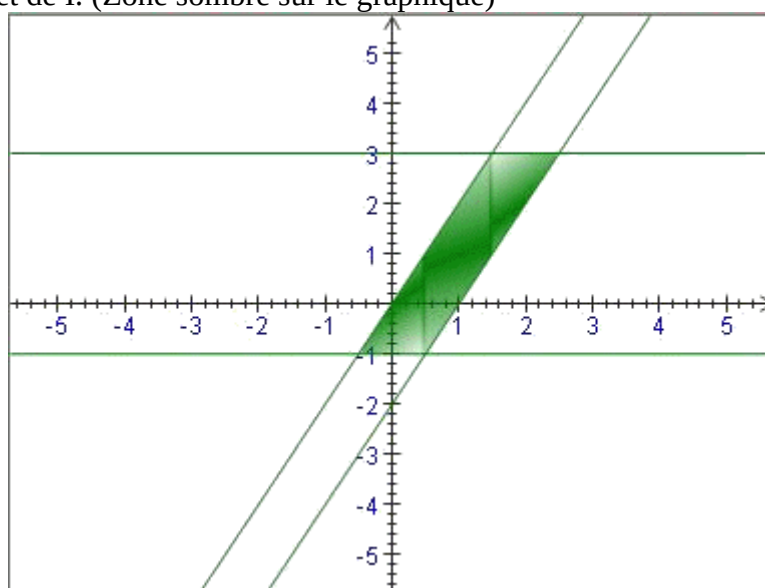
$$f(x) = 3 \quad (F)$$

$$h(x) = -1 \quad (H)$$

$$i(x) = 2x \quad (I)$$

$$g(x) = 2x - 2 \quad (G)$$

L'ensemble des points vérifiant le système d'inéquations se trouve au dessus de H et de G et en dessous de F et de I. (Zone sombre sur le graphique)



b) On a le système suivant

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq -1 \\ y \leq -2x \\ y \geq -2x - 2 \end{cases}$$

On prend

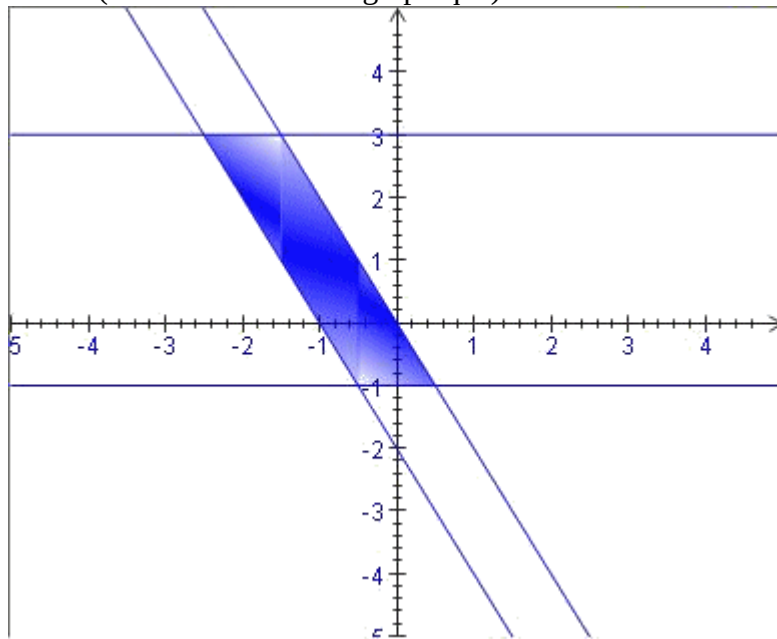
$$f(x) = 3 \quad (\text{F})$$

$$h(x) = -1 \quad (\text{H})$$

$$i(x) = -2x \quad (\text{I})$$

$$g(x) = -2x - 2 \quad (\text{G})$$

L'ensemble des points vérifiant le système d'inéquations se trouve au dessus de H et de G et en dessous de F et de I. (Zone sombre sur le graphique)



EXERCICE 4

a) Soit y le prix payé par un adulte.
Soit x le prix payé par un enfant.

Lundi :

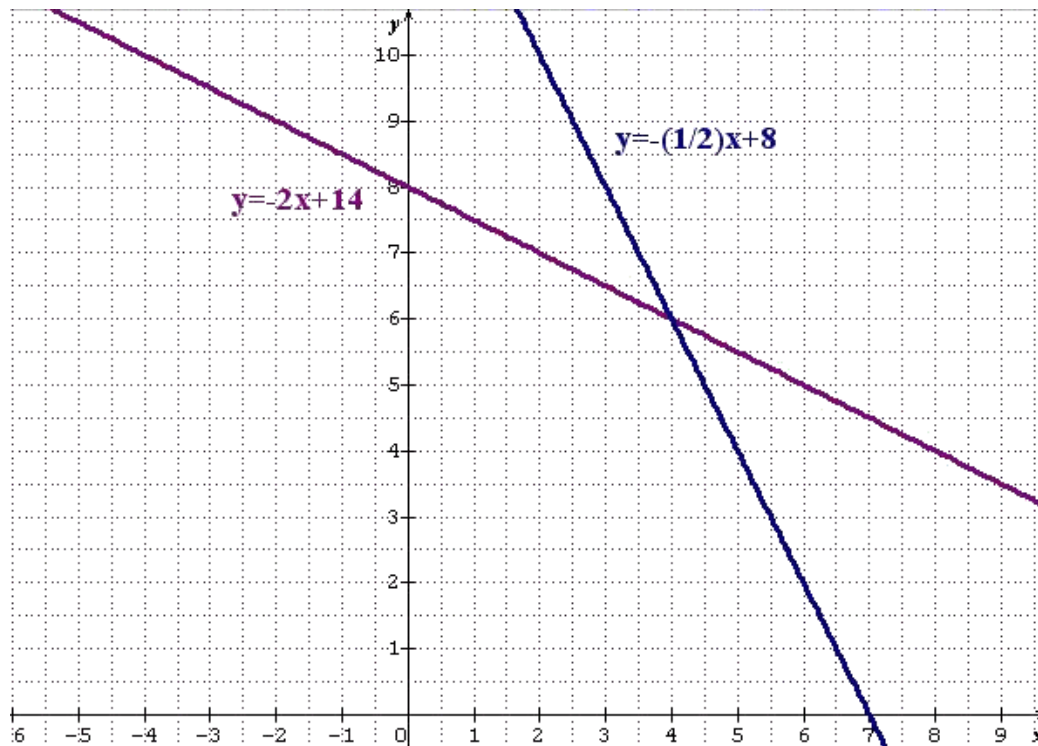
$$20y + 10x = 160$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 8$$

Mardi :

$$30y + 60x = 420$$

$$y = -2x + 14$$



L'intersection des deux droites a pour coordonnées (4;6)

$$y = \frac{-1}{2}x + 8$$

$$\frac{-1}{2} \times 4 + 8 = y \quad y = -2x + 14$$

$$b) \quad y = 6 \quad y = -2 \times 4 + 14$$

$$y = 6$$

Le couple (4;6) est bien solution de ce système.

c) Un adulte paie donc 6€ et un enfant, 4€.

EXERCICE 5

60 000 F pour le premier placement et 40 000 F pour le second.

EXERCICE 6

$$\left\{ \left(\frac{2}{9}; -\frac{1}{9} \right); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right) \right\}$$

EXERCICE 7

$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Comme $3 \times (-2) - 1 \times 1 = -7 \neq 0$, alors ce système admet un unique couple solution.

Résolution du système : multiplions la deuxième équation par -3 :

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -3x + 6y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 7y = 10 \end{cases} \quad (\text{On additionne la première et la deuxième équation})$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ y = \frac{10}{7} \end{cases} \quad (\text{On a déterminé la valeur de } y, \text{ on remplace alors cette valeur dans la première équation})$$

$$\begin{cases} 3x + \frac{10}{7} = 1 \\ y = \frac{10}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{10}{7} \end{cases}$$

D'où : $S = \{(-\frac{1}{7}; \frac{10}{7})\}$

L'équation $3x + y = 1$ est équivalente à $y = -3x + 1$ [1]

De même, l'équation $x - 2y = -3$ est équivalente à $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ [2]

Les droites dont les équations réduites sont respectivement [1] et [2] sont sécantes. Le système a donc une unique solution : les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

$$\begin{cases} 12x + 5y - 26 = 0 \\ 8x - 7y - 38 = 0 \end{cases} \quad \text{équivalent à} \quad \begin{cases} 12x + 5y = 26 \\ 8x - 7y = 38 \end{cases}$$

Comme $12 \times (-7) - 5 \times 8 = -124 \neq 0$, alors ce système admet une unique couple solution.

Résolution du système : multiplions la première équation par 2 et la deuxième équation par -3 :

$$\begin{cases} 24x + 10y = 52 \\ -24x + 21y = -114 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x + 10y = 52 \\ 31y = -62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 5y = 26 \\ y = -\frac{62}{31} = -2 \end{cases}$$

Remplaçons y par -2 dans la première équation :

$$\begin{cases} 12x = 36 \\ y = -\frac{62}{31} = -2 \end{cases}$$

D'où : $S = \{(3; -2)\}$

L'équation $12x + 5y = 26$ est équivalente à $y = -\frac{12}{5}x + \frac{26}{5}$ [1]

De même, l'équation $8x - 7y = 38$ est équivalente à $y = \frac{8}{7}x - \frac{38}{7}$ [2]

Les droites dont les équations réduites sont respectivement [1] et [2] sont sécantes. Le système a donc une unique solution : les coordonnées du point d'intersection de ces deux

droites.

$$\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ 6x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \text{équivalent à } \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 6x + 2y = 9 \end{cases}$$

Comme $3 \times 2 - 1 \times 6 = 0$, alors ce système n'admet soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

L'équation $3x + y = 7$ est équivalente à $y = -3x + 7$ [1]

De même, l'équation $6x + 2y = 9$ est équivalente à $y = -3x + \frac{9}{2}$ [2]

Les droites dont les équations réduites sont respectivement [1] et [2] sont strictement parallèles (les équations ont même coefficient directeur et des ordonnées à l'origine différentes).

Nous pouvons donc en conclure que ce système n'admet aucune solution.

D'où : $S = \emptyset$

$$\begin{cases} 4x + 5y - 9 = 0 \\ 8x + 10y - 18 = 0 \end{cases} \text{équivalent à } \begin{cases} 4x + 5y = 9 \\ 8x + 10y = 18 \end{cases}$$

Comme $4 \times 10 - 5 \times 8 = 0$, alors le système admet soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

L'équation $4x + 5y = 9$ est équivalente à $y = -\frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$

De même, l'équation $8x + 10y = 18$ est équivalente à $y = -\frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$

Les droites dont les équations réduites sont respectivement [1] et [2] sont confondues.

Nous pouvons donc en conclure que le système admet une infinité de solutions : les coordonnées des points de la droite d'équation

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{9}{5}.$$

EXERCICE 8

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{12}{x+2} - \frac{18}{y+1} = -10 \\ \frac{3}{x+2} + \frac{4}{y+1} = 5 \end{cases}$$

On effectue un changement de variable en posant :

$$X = \frac{1}{x+2} \text{ et } Y = \frac{1}{y+1}$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} 12X - 18Y = -10 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$$

Comme $12 \times 4 - 3 \times (-18) = 102 \neq 0$, alors ce système admet une unique solution.

Résolution du système :

$$\begin{cases} 12X - 18Y = -10 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases} \text{équivalent à } \begin{cases} 6X - 9Y = -5 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases} \text{ (on divise par 2 la première équation)}$$

$$\begin{cases} 6X - 9Y = -5 \\ -6X - 8Y = -10 \end{cases} \text{ (on multiplie par -2 la deuxième équation)}$$

$$\begin{cases} 6X - 9Y = -5 \\ -17Y = -15 \\ 6X - 9Y = -5 \\ Y = \frac{15}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{25}{51} \\ Y = \frac{15}{17} \end{cases}$$

Or n'oublions pas que nous avons établi un changement de variable en posant.

$$X = \frac{1}{x+2} \text{ et } Y = \frac{1}{y+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{25}{51} &= \frac{1}{x+2} \\ 25(x+2) &= 51 \\ 25x + 50 &= 51 \\ 25x &= 1 \\ x &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{15}{17} &= \frac{1}{y+1} \\ 15(y+1) &= 17 \\ 15y + 15 &= 17 \\ 15y &= 2 \\ y &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

D'où :

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{25}; \frac{2}{15} \right) \right\}$$

EXERCICE 9

1)

$$2(x-3) - \frac{3}{2}x + 7 - 4 \left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$2x - 6 - \frac{3}{2}x + 7 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

$$\boxed{6 = 6}$$

Cette relation est toujours vraie, et ne dépend pas de la variable x .

$$S = \mathbb{R}$$

2)

$$\frac{3}{4}(2-x) - \frac{1}{2}(6x+1) + 2 + \frac{15}{4}x = 0$$

$$\frac{6}{4} - d\frac{3}{4}x - 3x - d\frac{1}{2} + 2 + d\frac{15}{4}x = 0$$

$$\boxed{3 \neq 0}$$

Encore une fois, l'équation ne dépend pas de la variable x , or le résultat est incohérent, on en conclut que :

$$S = \emptyset$$

3)

$$\frac{3x+1}{x-2} = 4$$

$$3x+1 = 4(x-2)$$

$$3x+1 = 4x-8$$

$$\boxed{x=9}$$

EXERCICE 10

Soit n le premier naturel impair. Donc $n=2p+1$

On cherche à résoudre :

$$2p+1+2p+3+2p+5=99$$

$$p=15$$

Donc les trois impairs consécutifs 31,33,35 ont leur somme égal à 99.

EXERCICE 11

$$1. |x-3| = 4$$

$$x-3 = 4 \quad x-3 = -4$$

$$\text{On a soit : } x = 7 \quad \text{soit : } x = -1$$

Donc :

$$\boxed{S = -1; 7}$$

$$2. |x-2| < 3$$

$$-3 < x-2 < 3$$

$$-3+2 < x-2+2 < 3+2$$

$$-1 < x < 5$$

$$\boxed{S =]-1; 5[}$$

EXERCICE 12

$$x^2 \leq 5$$

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

EXERCICE 13

On nomme x et y les deux réels, ils doivent vérifier le système qui suit :

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations par substitution, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{55}{4} \\ y = \frac{45}{4} \end{cases}$$

EXERCICE 14

Pour cet exercice, il faut utiliser la formule :

$$V = \frac{d}{t}, \text{ avec } V \text{ la vitesse la distance et } t \text{ le temps.}$$

On adopte également la nomenclature proposée en indication, c'est à dire que t est en réalité le point de départ. On a deux situations décrites, on les interprète mathématiquement :

$$\begin{aligned} 60 &= \frac{d}{13-t} & 80 &= \frac{d}{11-t} \\ 60(13-t) &= d & 80(11-t) &= d \\ 780 - 60t &= d \text{ ainsi que : } & 880 - 80t &= d \end{aligned}$$

Pour déterminer d et t , on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 880 - 80t = d \\ 780 - 60t = d \end{cases}$$

Après avoir utilisé la méthode de substitution (cas trivial ici), on trouve :

$$\begin{cases} t = 5h \\ d = 480km \end{cases}$$

Conclusion : J'ai parcouru 480 km, en partant à 5 h du matin.

EXERCICE 15

Le malade est remboursé à 70%, il aura donc à payer uniquement 30% des soins qui lui sont prescrits. Ici les soins s'élèvent à 40 euros, il devra donc payer :

$$\frac{30}{100} \times 40 = 12 \text{ euros}$$

EXERCICE 16

1. Le projectile retombera au sol, au moment où $h(t) = 0$, en d'autres termes, on doit résoudre :

$$100t - 5t^2 = 0$$

$$5t^2 = 100t$$

$$t^2 = 20t$$

$$t = 20$$

$\Rightarrow$ le projectile retombera à l'instant $t=20$ secondes.

2. Pour étudier la variation d'une fonction f , on étudie le signe de $f(a)-f(b)$:

On considère premièrement $a=0$ et $b=10$:

$$f(a)-f(b)$$

$$f(0)-f(10) = 0-500 = -500 < 0$$

On en déduit que **f est croissante sur [0;10]**, à valeur sur [10;20], en effet :

$$f(10)-f(20) = 500-0 = 500 > 0$$

f est décroissante sur [10;20].

3. Le sens de variation nous révèle que f est majorée en $x=10$, c'est à dire que c'est le point le plus haut de la courbe, par conséquent **à l'instant $t=10$, la hauteur maximale sera de 500 m.**

EXERCICE 17

1). **On ne peut pas affirmer que le nombre de garçon sera plus conséquent**, dans la mesure où le pourcentage ne nous révèle pas la quantité dont il traite. Les 40% de garçons d'un des lycées qui peut-être bien plus grand que l'autre, ne permet pas de conclure, il faudrait avoir le nombre d'élèves que cela engage.

2). En revanche ici, si les deux pourcentages indiquent une majorité de garçons, alors **on peut en conclure qu'il y a plus de garçons de la ville qui font au lycée que de filles.**

EXERCICE 18

$$1. \begin{cases} 4x+4y=4 \\ 2x+y=\frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=\frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x+y=1 \\ x=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2} \end{cases} \begin{cases} y=1-x=\frac{4-\pi}{2} \\ x=\frac{\pi-2}{2} \end{cases}; S = \left\{ \left(\frac{\pi-2}{2}; \frac{4-\pi}{2} \right) \right\}.$$

2. En considérant que chacun des quatre "pétales" sombre a une aire de mesure x et que chaque partie disjointe non coloriée a une aire de mesure y , on peut écrire les deux informations suivantes :

* le carré constitué de quatre "pétales" et de quatre "zones" blanches a une aire égale à 4 :
soit $4x+4y=4$;

* le demi disque de diamètre $[CD]$, constitué de deux "pétales" et d'une "zone" blanche a une aire égale à $\frac{\pi}{2}$ puisque son rayon vaut 1 : soit $2x+y=\frac{\pi}{2}$.

3. Ainsi $x=\frac{\pi-2}{2}$ est bien l'aire d'un pétale sur cette figure et la surface sombre a une aire de $4x=2\pi-4$.

THÈME 5: Statistiques

ÉNONCÉS

EXERCICE 1

On a recensé le nombre d'enfants vivant dans chacun des foyers d'une petite ville.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif (foyers)	290	170	155	95	43	27	20	10

1. Calculer le nombre moyen d'enfants m par foyer.
2. Calculer l'écart type du tableau.
3. Calculer le pourcentage de foyers dont le nombre d'enfants appartiennent à l'intervalle $[m - \sigma ; m + \sigma]$.

EXERCICE 2

Un pépiniériste a fait l'inventaire des arbustes à vendre, suivant leur hauteur. Les résultats sont classés ainsi:

Hauteurs (cm)	Effectifs
40 à 50	28
50 à 600	34
60 à 800	90
80 à 1000	110
00 à 1400	84
40 à 1600	32
60 à 180	22

1. Dresser le tableau faisant apparaître les effectifs, les fréquences, les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants.
2. Tracer les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. Calculer la moyenne et l'écart-type.

EXERCICE 3

Un mélange de café se compose de 45 % d'arabica et de 55 % de robusta.
L'arabica coûte 2 euros le kilogramme et le robusta coûte 1,80 euros le kilogramme.

Calculer le prix du kilogramme du mélange arabica-robusta.

EXERCICE 4

Une boutique de confection a relevé le montant mensuel de ses ventes :

Montant des ventes (en francs)	Effectifs (nombre des ventes)
[0; 300[	127
[300; 600[	82
[600; 900[	90
[900; 1200[	48
[1200; 1500[	33
[1500; 1800[	20
[1800; 2100	400

Déterminer

- le montant moyen des ventes;
- l'écart moyen;
- l'écart-type.
- Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants ainsi que celui des effectifs cumulés décroissants.

SOLUTIONS

EXERCICE 1

1.

La moyenne est donnée par : Somme des (effectif $\times$ modalité) / somme des effectifs

$$m = \frac{170 + 310 + 285 + 172 + 135 + 120 + 70}{290 + 170 + 155 + 95 + 43 + 27 + 20 + 10}$$

$$m = 1,56$$

Le nombre moyen d'enfants m par foyer est d'environ 1,56.

2. l'écart-type (noté σ) est donné par $\sigma = \sqrt{\text{variance}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-1,56)^2 + 2 \times 0,44^2 + 3 \times 1,44^2 + 4 \times 2,44^2 + 5 \times 3,44^2 + 6 \times 4,44^2 + 7 \times 5,44^2}{1,56}}$$

$$\sigma \approx 0,72$$

EXERCICE 2

1. La fréquence est donnée par : Effectif / Effectif total $\times 100$

L'effectif total est : $28 + 34 + 90 + 110 + 84 + 32 + 22 = 400$

Fréquence₁ = $28/400 \times 100 = 7\%$

Fréquence₂ = $34/400 \times 100 = 8,5\%$

Fréquence₃ = $90/400 \times 100 = 22,5\%$

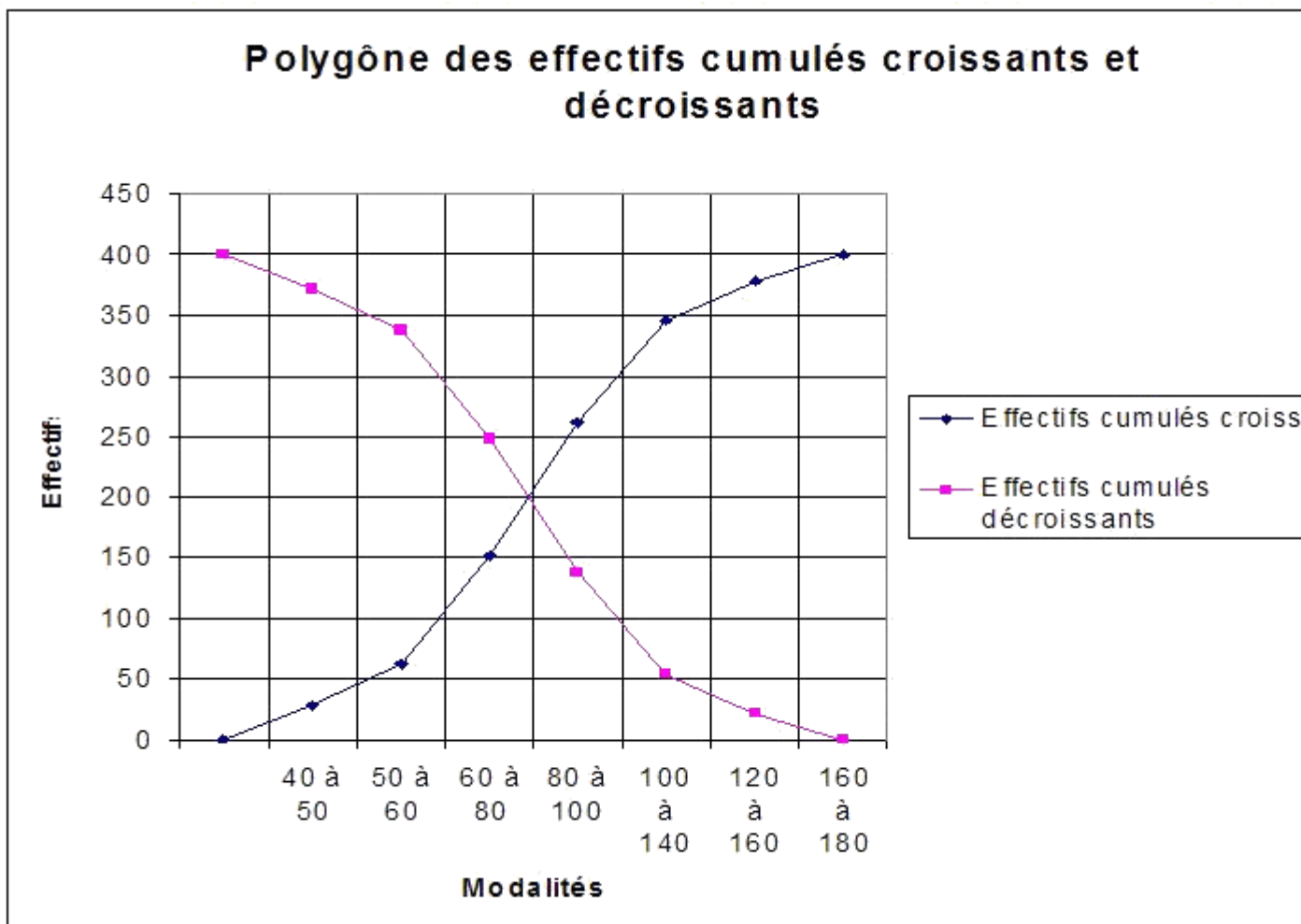
Fréquence₄ = $110/400 \times 100 = 27,5\%$

Fréquence₅ = $84/400 \times 100 = 21\%$ Fréquence₆ = $32/400 \times 100 = 8\%$

Fréquence₇ = $22/400 \times 100 = 5,5\%$

Hauteurs (cm)	Effectifs	Fréquences (%)	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
			0	400
40 à 50	28	7	28	372
50 à 60	34	8,5	62	338
60 à 80	90	22,5	152	248
80 à 100	110	27,5	262	138
100 à 140	84	21	346	54
140 à 160	32	8	378	22
160 à 180	22	5,5	400	0

2.



3.

$$\sigma \approx 33,78$$

EXERCICE 3

Dans un kilo du mélange on trouve :

▶ 450g d'arabica

▶ 550g de robusta

▶ 450 g d'arabica coûtent : $0,450 \times 2 = 0,90$ €

▶ 550g de robusta coûtent : $0,550 \times 1,80 = 0,99$ €

Le kilogramme de mélange arabica-robusta coûte donc **1,89 €**

EXERCICE 4

$$m = \frac{150 \times 127 + 400 \times 82 + 750 \times 90 + 1050 \times 48 + 1350 \times 33 + 1650 \times \frac{20}{400}}{127 + 82 + 90 + 48 + 33 + \frac{20}{400}}$$

a)

m $\approx$ 564

b)

écart-moyen = somme(effectifs)/effectif total

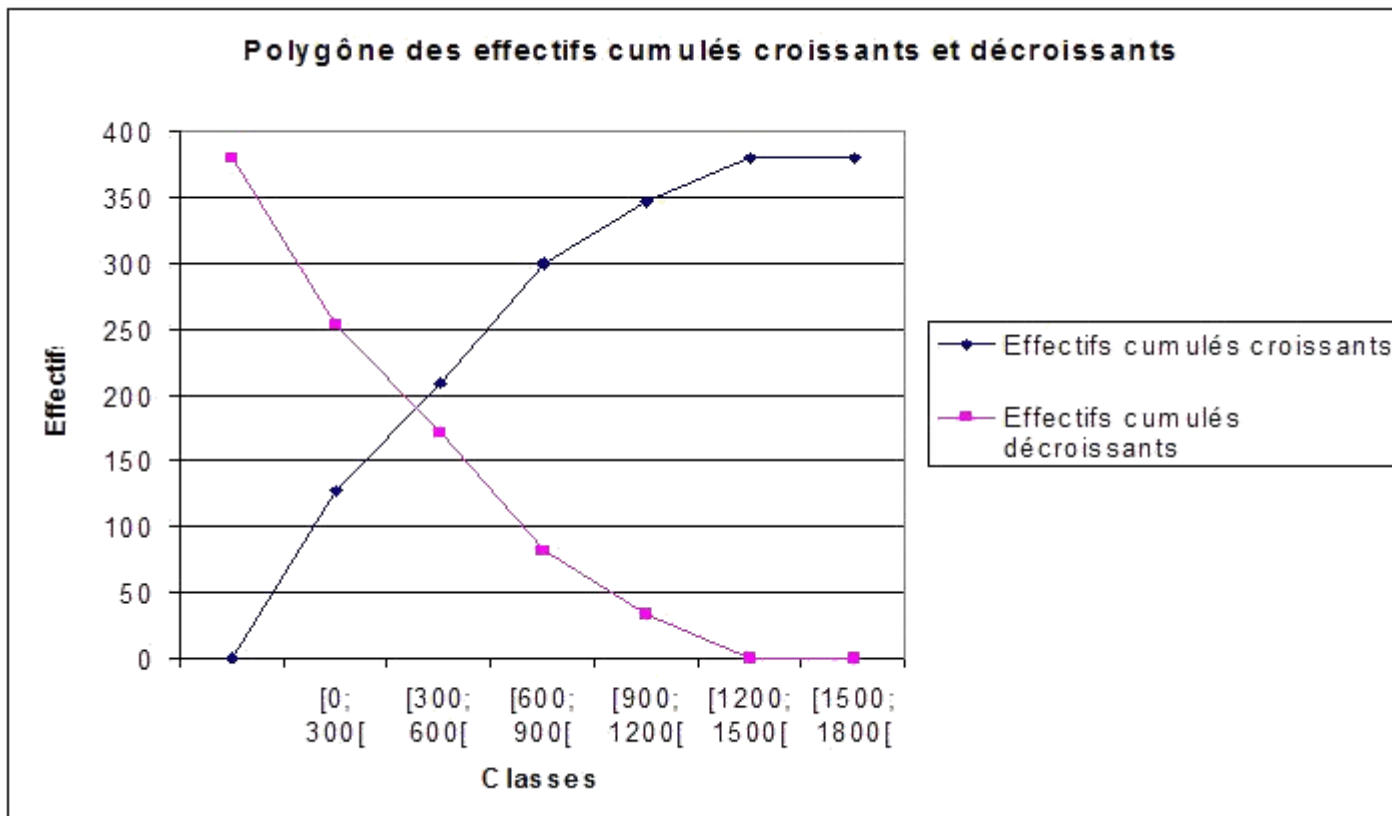
$$\text{écart-moyen} = (127+82+90+48+33+20/400)/6$$

$$\text{écart-moyen} = \mathbf{63,34}$$

c)

$$\sigma \approx \mathbf{393,57}$$

d) Polygone :



THÈME 6: Calcul vectoriel

ENONCES

EXERCICE1

Soit A, B, C, D quatre points du plan . Démontrez que si l'on a l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (1), alors on a aussi les égalités : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (2) ; $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ (3) ; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$ (4)

EXERCICE2

Soit A, B, C trois points distincts d'une droite D ; les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}$ ont – ils la même direction ?

EXERCICE3

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. construisez le point J tel que $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

EXERCICE4

Soit ABC un triangle .Construisez les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Démontrez que B est le milieu du segment [EF].

EXERCICE5

Soit ABC un triangle. Construisez le point J précisé par égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$$

EXERCICE6

L'égalité $k\vec{v} = k'\vec{v}$ entraîne -t- elle $k = k'$?

EXERCICE7

L'égalité $k\vec{v} = k'\vec{v}$ (1) entraîne -t- elle $\vec{v} = \vec{v}'$?

EXERCICE 8

Deux vecteurs de même direction sont -ils colinéaires ?

EXERCICE9

Deux vecteurs colinéaires ont-ils la même direction ?

EXERCICE10

Soit ABCD un triangle. A tout point M du plan on fait correspondre le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Trouvez l'ensemble E des points du plan tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ aient la même direction.

EXERCICE11

Soit ABC un parallélogramme

1° Construisez les points M, N, P, Q tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CD}$;

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$$

2° Calculer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$. Déduisez - en la nature du quadrilatère MNPQ.

EXERCICE12

Soit ABCD un parallélogramme, M le milieu de [AD], N le milieu de [BC]

1° Démontrez que les droites (BM) et (DN) sont parallèles.

2° (BM) coupe [AC] en P. (DN) coupe le [AC] en Q

Démontrez que $AP = PQ = QC$

3° Déterminez la nature du quadrilatère MPNQ.

EXERCICE13

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC]. Soit P un point de la médiane (AI). La parallèle à (AB) passant par P coupe (BC) en D. La parallèle à (AC) passant par P coupe (BC) en E

Montrez que I est le milieu du segment [DE]

EXERCICE14

Soit ABCD un trapèze convexe où (AB) est parallèle à (CD). Soit P le milieu de [AD] et Q le milieu de [BC]. Démontrez que (PQ) est parallèle à (AB) et à (CD)

EXERCICE15

Soit ABC un triangle et A', B', C', les milieux respectifs des segments [BC], [AC], et [AB].

1° Démontrez que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

2° Soit D le point tel que $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

I le point tel que ACC'I soit un parallélogramme,

J le point tel que AB'BJ soit un parallélogramme,

E le milieu du segment [IJ].

Démontrez que ACDE est un parallélogramme

EXERCICE16

Soit ABCD un trapèze convexe où (AB) est parallèle à (CD). Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en E. Les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

Démontrez que les points F, I, E, J sont alignés

EXERCICE17

Soit ABC un triangle, A' le milieu de [BC], D le milieu de [AA'], E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

1° Calculer $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

2° Déduisez – en que les droites (ED) et (BF) sont parallèles.

EXERCICE18

Soit ABC un triangle quelconque. A' le milieu de $[BC]$, G le centre de gravité du triangle, D et E les points tels que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note I le milieu de $[DE]$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
- b. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- c. Démontrer que les points A , A' et I sont alignés.
2. Démontrer que le point G est le milieu de $[AI]$.
3. Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

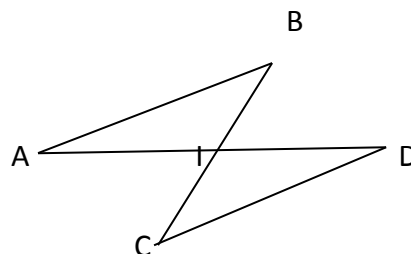
SOLUTIONS

EXERCICE 1

L' égalité (1) signifie que les bipoints (A,B) et (C,D) sont équipollents, donc que les bipoints (A, D) et (B,C) ont le même milieu I . Il en résulte que les bipoints (A, D) et (C,B) ont le même milieu donc les bipoints (A,C) et (B,D) sont équipollents

d'où : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Dans l' égalité (1) si l' on désigne par A et D les points extrêmes, par B et C les points moyens. On voit que l' on obtient (2) en échangeant dans (1) les points moyens. On démontre de même les égalités (3) et (4). L' égalité (3) est obtenue à partir de (1) en échangeant les points extrêmes ; l' égalité (4) est obtenue à partir de (1) en échangeant les points moyens et les points extrêmes.



EXERCICE 2

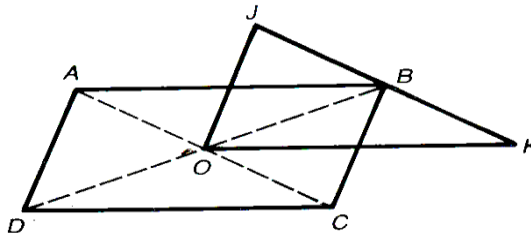
Oui ils ont la même direction que la droite (AB) . *Ne confondez pas direction et sens : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction (voyez la définition) mais pas le même sens.*

EXERCICE 3

On construit d'abord K tel que $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AB}$

, puis J tel que :

$$\overrightarrow{KJ} = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$$



On aurait pu observer que

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB},$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{CB}$$

EXERCICE4

Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$, E vérifie $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, ce qui signifie que ABEC est un parallélogramme. E est donc situé à l'intersection de la parallèle à (AB) passant par C et de la parallèle à (AC) passant par B.

Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire le système de C par rapport à A.

Comme précédemment, de

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF},$$

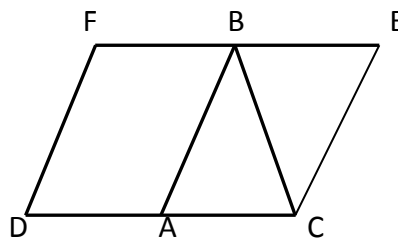
On déduit que ADFB est un parallélogramme. F est donc le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par D et de la parallèle à (AD) passant par B.

ABEC étant un parallélogramme on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.

ADFB étant un parallélogramme on a : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BF}$

$$\text{De } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0},$$

On tire : $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = \vec{0}$, c'est à dire M milieu du segment [EF].



EXERCICE5

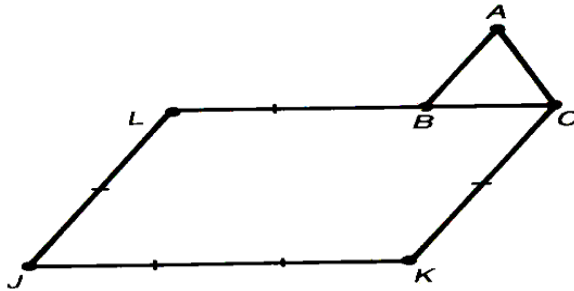
On construit d'abord K tel que $\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{AB}$, puis J tel que $\overrightarrow{KJ} = -3\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CB}$.

On aurait pu aussi construire L tel que

$$\overrightarrow{CL} = -3\overrightarrow{BC}, \text{ puis J tel que}$$

$$\overrightarrow{LJ} = 2\overrightarrow{AB}$$

Car on a aussi : $\overrightarrow{CJ} = (-3\overrightarrow{BC}) + 2\overrightarrow{AB}$

**EXERCICE6**

$$K\vec{v} = K'\vec{v} \Leftrightarrow (k-k')\vec{v} = \vec{0} \quad (1)$$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, d'après (1) on a : $k - k' = 0$ d'où $k = k'$,

Par contre, si $\vec{v} = \vec{0}$, l'égalité (1) est satisfaite même si $k \neq k'$

Concluons que l'égalité $k\vec{v} = k'\vec{v}$ n'entraîne pas $k = k'$ par contre si l'on a :

$(K\vec{v} = k'\vec{v} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0})$, alors $k = k'$.

EXERCICE7

Le raisonnement est analogue à celui de l'exercice précédent. L'égalité (1) n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{v}'$ par contre si l'on a (1) et $k \neq 0$, alors : $\vec{v} = \vec{v}'$.

EXERCICE8

oui (cf. la définition)

EXERCICE9

Pas nécessairement. En effet, si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v}$ un vecteur quelconque, ces deux vecteurs sont colinéaires puisque l'on a : $\vec{u} = k\vec{v}$, avec $k = 0$. D'autre part la direction de $\vec{u}$ n'est pas définie. Par contre deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction (cf. la définition)

EXERCICE10

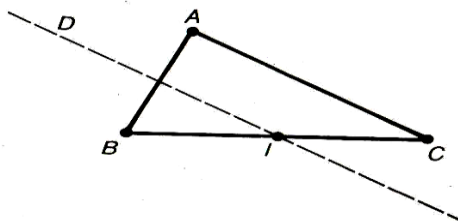
Soit I le milieu de [BC].

$$\text{On a : } \vec{u} = (\vec{MI} + \vec{IA}) + (\vec{MI} + \vec{IB})$$

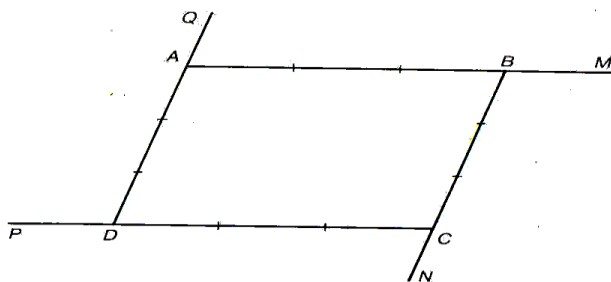
$$= 2\vec{MI} + (\vec{IA} + \vec{IB})$$

$$= 2\vec{MI}$$

Donc M appartient à E si et seulement si, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{IM}$ à la même direction que $\vec{AC}$. E est donc la droite D parallèle à (AC) et passant par I diminuée du point I

**EXERCICE 11**

1°



$$2^\circ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3} \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$$

ABCD étant un parallélogramme, on a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}. \text{ D'où : } \overrightarrow{BN} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AD}, \text{ puis } \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3} \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP}$$

$$\overrightarrow{QD} = -\frac{4}{3} \overrightarrow{DA} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Car } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

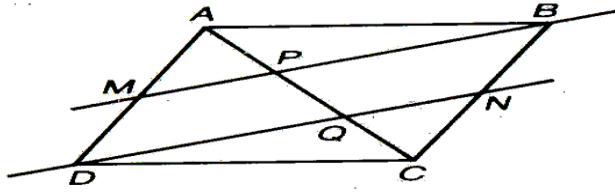
D'où : $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3} \overrightarrow{AD}$. Comme $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DP}$, MNPQ est un parallélogramme.

EXERCICE 12

M étant le milieu de [AD] on a $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$

N étant le milieu de [BC] on a $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

ABCD étant un parallélogramme on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



Comme $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$ le quadrilatère BMDN est un parallélogramme, et en particulier les droites (BM) et (DN) sont parallèles

2° M étant le milieu de [AD], on a $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM}$. Les droites (MP) et (QD) étant parallèles, on en déduit d'après la propriété de Thalès que $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AP}$ ou encore $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ}$

De même à partir de $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CN}$, on obtient : $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CQ}$ ou encore : $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QP}$.

On a donc : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$. De l'égalité des vecteurs on déduit l'égalité de leurs normes : $AP = PQ = QC$

3° On a : $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{MP}$.

De même $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{QN}$. D'autre part $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$ puisque BMDN est un parallélogramme.

Montrons que MNPQ est un parallélogramme

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{QN} = (\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{QN}) - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{QN}$$

Soit : $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{QN}$, d'où : $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{MP}$, ce qui montre bien que MNPQ est un parallélogramme

EXERCICE 13

Les points A, I, P étant alignés

Il existe un réel K tel que $\overrightarrow{IP} = k\overrightarrow{IA}$

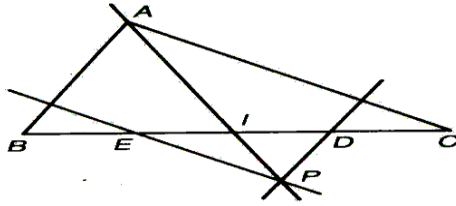
Les droites (AB) et (PD) étant

Parallèles on en déduit d'après

La propriété de Thalès : $\overrightarrow{ID} = k\overrightarrow{IB}$.

De même les droites (AC) et (PE) étant parallèles on obtient :

$\overrightarrow{IE} = k\overrightarrow{IC}$. On en déduit donc : $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = k(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$ puisque I est milieu de [BC] ; donc I est aussi milieu de [DE].

**EXERCICE 14**

P étant le milieu de [AD] on a :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

Q étant le milieu de [BC] on a :

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

Par hypothèse les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Donc d'après la réciproque de la propriété de Thalès, (PQ) est parallèle à (AB) et à (CD).

EXERCICE 15

1° on a :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC'}$$

D' où :

$$2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'}) + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CB'}) + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BC'} = \vec{0},$$

donc $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

2° ACDE un parallélogramme

De $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JE}$, et E milieu de [IJ], on tire :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$$

ACC'I et AB'BJ étant des parallélogrammes, on a

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CC'} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BB'}$$

D' après la question précédente on a :

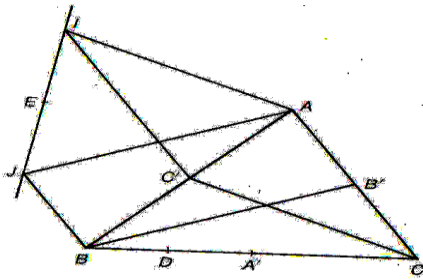
$$\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CC'}$$

$$\text{D' où } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CC'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC'} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'})$$

$$= \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA'} \text{ car } \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'B}$$

$$= \overrightarrow{CB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{3}{4} \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}. \text{ Comme } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD} \text{ ACDE est un parallélogramme.}$$



EXERCICE 16

Alignement des points F, I, E, J

En appliquant la propriété de Thalès aux droites parallèles (AB) et (CD) et aux sécantes (FD) et (FC) on obtient :

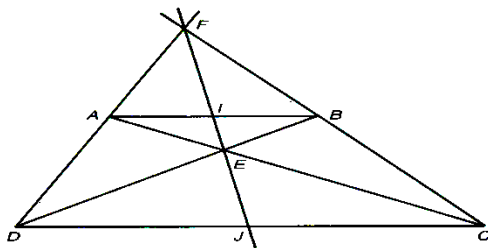
$$\overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FA} ; \overrightarrow{FC} = k\overrightarrow{FB}$$

Puis $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}$ ou k est un réel .

En considérant les mêmes parallèles et les sécantes (AC) et (BD) on obtient l'existence d'un réel k' tel que :

$$\overrightarrow{ED} = k'\overrightarrow{EB} ; \overrightarrow{EC} = k'\overrightarrow{EA},$$

$$\text{Puis } \overrightarrow{DC} = k'\overrightarrow{BA}$$



Comme on a :

$$\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DC} = k'\overrightarrow{BA},$$

On a nécessairement $k' = -k$.

J étant le milieu de [DC], on a : $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC})$

D'où :

$$\overrightarrow{FJ} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}) = k\overrightarrow{FI}$$

Les points F, J, I, sont donc alignés.

$$\text{De même, } \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC}) = -\frac{k}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA}) = -k\overrightarrow{EI}$$

Les points E, J, I sont donc alignés et les quatre points F, I, E, J appartiennent à la même droite (IJ)

EXERCICE 17

Calcul de $\overrightarrow{ED}$ et de $\overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

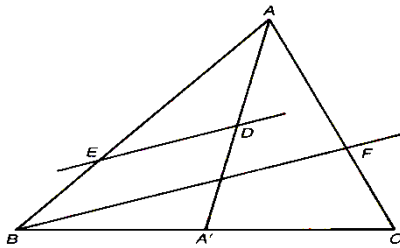
Car A' étant milieu de [BC], on a : $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

D'où

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{5}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}$$



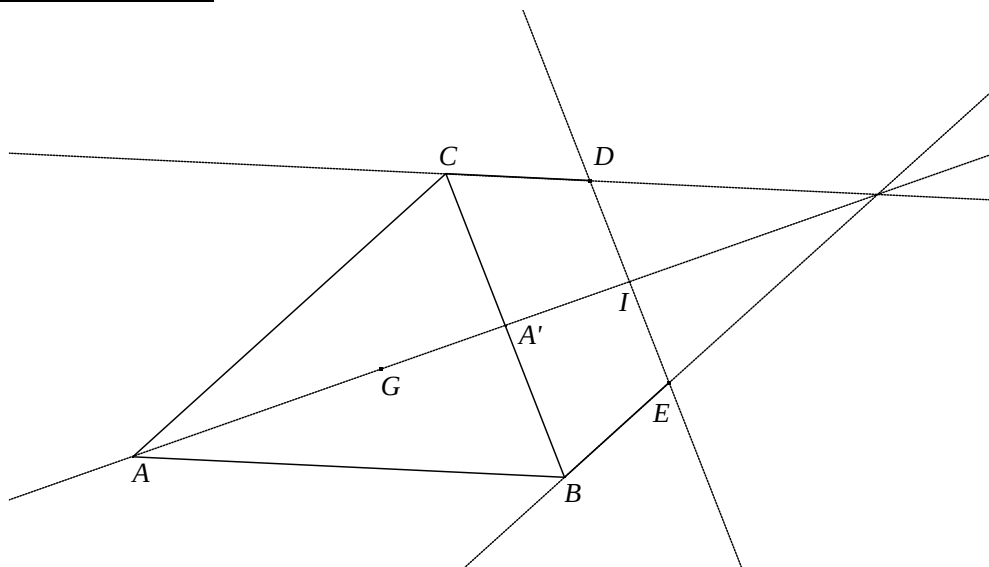
2° Parallélisme des droites (ED) et (BF)

Des calculs précédents on tire :

$$\frac{5}{12} \overrightarrow{BF} = -\frac{5}{12} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont donc colinéaires et par conséquent les droites (ED) et (BF) sont parallèles

EXERCICE 17



1. a. Prenons le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ où A a pour coordonnées (0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ; 1). Des

données de construction on tire que $E\left(1; \frac{1}{3}\right)$ et $D\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, soit $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ ou encore

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}.$$

b. Les coordonnées de A' sont $A' \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ d'où $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

c. Faisons le déterminant des vecteurs : $\det(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AI}) = \begin{vmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{vmatrix} = 0$; on pouvait également

remarquer que $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AA'}$.

2. Les coordonnées de G sont $G \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$ d'où $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AG}$ et G est le milieu de $[AI]$.

3. $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}) = \begin{vmatrix} 0-1 & \frac{1}{3}-1 \\ 1-0 & 1-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$ donc les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

THÈME 7: Angles orientés- Trigonométrie

ENONCES

EXERCICE 1

Démontrer que

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

EXERCICE 2

On veut partager un cercle (de centre A) en six arcs égaux. Comment faire, avec un compas et sans rapporteur ?

On veut ensuite partager le même cercle en douze arcs égaux. Comment faire ?

Quelle est la mesure de chacun des arcs obtenus ?

B_0 est un des points de la division. On nomme $Ax_0, Ax_1, \dots, Ax_n$ les demi droites tracées (en tournant dans le sens positif) .

Construire le point B_1 , projeté de B_0 sur Ax_1 , puis le point B_2 projeté de B_1 sur Ax_2 .

Continuer jusqu'à placer tous les points successifs de B_1 à B_{12} .

On pose $AB_0 = 1$.

Calculer les longueurs AB_1 , AB_2 , ..., AB_{12} .

Calculer la longueur de la ligne brisée $B_0B_1B_2\ldots B_{12}$.

EXERCICE 3

Compléter le tableau :

α α en radians	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$ rad	45° $\frac{\pi}{4}$ rad	60° $\frac{\pi}{3}$ rad	90° $\frac{\pi}{2}$ rad
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					
$\tan \alpha$					

Démontrer (grâce à des triangles particuliers bien choisis par exemple) que ces valeurs sont exactes

EXERCICE 4

x est un réel tel que $\sin x = \frac{1}{3}$

1. Peux-tu en déduire $\cos x$?

2. On sait de plus que.

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

Trouver $\cos x$ et $\tan x$.

EXERCICE 5

1. Calculer.

$$\cos\left(\frac{65\pi}{4}\right)$$

2. Calculer.

$$\sin\left(\frac{-39\pi}{4}\right)$$

EXERCICE 6

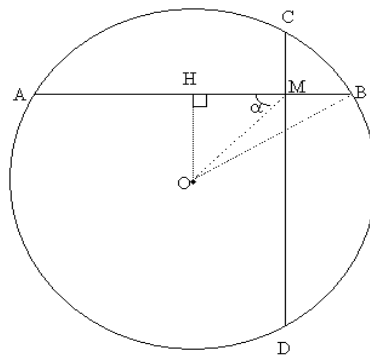
Sachant que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, calculer $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos(-\frac{\pi}{8})$, $\cos(\frac{-325\pi}{8})$

EXERCICE 7

A la cathédraleExtrait de *Jeux et Stratégie*, n°14

On fit récemment des travaux importants à la Cathédrale Saint-Pierre de Genève; c'est ainsi que l'un des vitraux cassés y fut remplacé par un vitrail moderne. C'est un cercle de 2 mètres de diamètre, traversé par une croix, formée de 2 segments perpendiculaires qui se coupent en un point situé à 50 cm du vitrail.

Et tandis que résonnaient d'admirables chœurs, quelques pensées d'ordre géométrique vinrent me distraire de ma concentration religieuse : " Tiens, me dis-je, comme c'est étrange : la somme des carrés des longueurs des deux côtés formant cette croix est égale à ... "



1. Démontrer que $AB^2 = 4 OB^2 - 4 OM^2 \sin^2 \alpha$.
2. Déterminer de même CD^2 .
3. Calculer $AB^2 + CD^2$.

EXERCICE 8

Démontrer que pour tout réel x , on a :

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$$

EXERCICE 9

ABCD est un parallélogramme articulé tel que la mesure x en radians de $\widehat{ADC}$ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

La tige [AD] est fixe. On donne $AD = 3$ et $AB = 2$.

Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme en fonction de x .

2. Comment choisir x pour avoir $\mathcal{A} = 4$? (arrondir au degré près)

EXERCICE 10

Convertissez en degrés et en grades : $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$, $\frac{5\pi}{3} \text{ rad}$, $0,7 \text{ rad}$.

EXERCICE 11

Sachant que le quart du méridien terrestre a environ 10 000 Km de longueur et que la sphère terrestre est subdivisée en 24 fuseaux horaires déterminez la distance qui mesurée le long de l'équateur Sépare deux fuseaux horaires.

EXERCICE 12

Représentez trois points M, N et P sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de telle manière que les arcs orientés MN et NP aient tous les deux pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radians. Quelle est la mesure de l'arc orientés MP ?

EXERCICE 13

Sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ on note A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{1}$ et on considère les points M_0, M_1, M_2, M_3 tels que les arcs orientés AM_0, M_0M_1, M_1M_2 , et M_2M_3 aient pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radians.

Représentez les point M'_0, M'_1, M'_2, M'_3 images de M_0, M_1, M_2, M_3 dans la symétrie d'axe (OA) Quelles sont les mesures en radians des arcs AM'_0, AM'_1, AM'_2 , et AM'_3 ?

EXERCICE 14

Précisez parmi les nombres suivants ceux qui représentent des déterminations de la même mesure d'arcs (ou d'angle)

$$3\pi, 5\frac{\pi}{2}, 7\pi, 8\pi, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 0, 5\pi$$

EXERCICE 15

Convertissez en grades et radians : $36^\circ, -21^\circ, 10^\circ 27'$.

EXERCICE 16

Sachant que la détermination principale est $\frac{\pi}{4}$ pressiez les autres déterminations de la mesure d'angle correspondant dans l'intervalle $[-2\pi, 5\pi]$

EXERCICE 17

Soit dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ et A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{1}$. Représentez les deux points M et M' du cercle $\mathcal{C}$ tel que $AM = AM' = 1$. Quelles sont les mesures des arcs AM et AM' ?

EXERCICE 18

Soit $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ un angle orienté de mesure $\frac{\pi}{5}$ radians.

1° Donnez une valeur en degrés de la mesure de $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

2° soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de Rayon $r=5\text{cm}$. Précisez la longueur, en cm, de l'arc AB intercepté par l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ dans le cercle C.

EXERCICE 19

Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ a pour mesure $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$. Précisez les mesures, en radians, des angles orientés suivants:

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \text{ et } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}).$$

EXERCICE 20

Une bille est animée d'un mouvement circulaire uniforme et parcourt un tour complet en 5 secondes.

1° Sachant que le cercle C, décrit par la bille dans son mouvement, a un rayon de 30cm et que la bille se trouve au point A à l'instant $t=0$ déterminez la position de la bille sur le cercle C aux instant $t=12$, $t=365$, $t=1351$

2° Quelle est la vitesse de la bille ?

EXERCICE 21

Résolvez l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ où x est l'inconnue, en supposant que :

1° $x \in [0, 2\pi[$

2° $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 22

Résolvez l'équation $\sin x = 0$ où :

1° $x \in [0, 2\pi[$

2° $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 23

Résolvez l'inéquation $\sin x > 0$.

EXERCICE 24

Résolvez l'inéquation $|\sin x| > \frac{1}{2}$

EXERCICE 25

Démontrez la relation $(\tan x - \frac{1}{\tan x})^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 4$ lorsqu'elle est définie.

EXERCICE 26

Résolvez le système :
$$\begin{cases} (\sin \alpha)x - (\cos \alpha)y = 1 & (1) \\ (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y = 1 & (2) \end{cases}$$

Où α est une constante réelle et où les inconnues sont x et y .

EXERCICE 27

Calculez le cosinus et le sinus des arcs ou des angles de mesures suivantes :

$$6\pi - \frac{\pi}{3} ; \pi + \frac{\pi}{6} ; 3\pi + \frac{\pi}{4} ; 5\pi - \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

EXERCICE 28

Calculez le cosinus et le sinus de $\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{11\pi}{6}$, et $\frac{33\pi}{4}$.

SOLUTIONS

EXERCICE 1

Démontrons que

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Quelque soit α , on a $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ce qui signifie que $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

Signifie que $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$

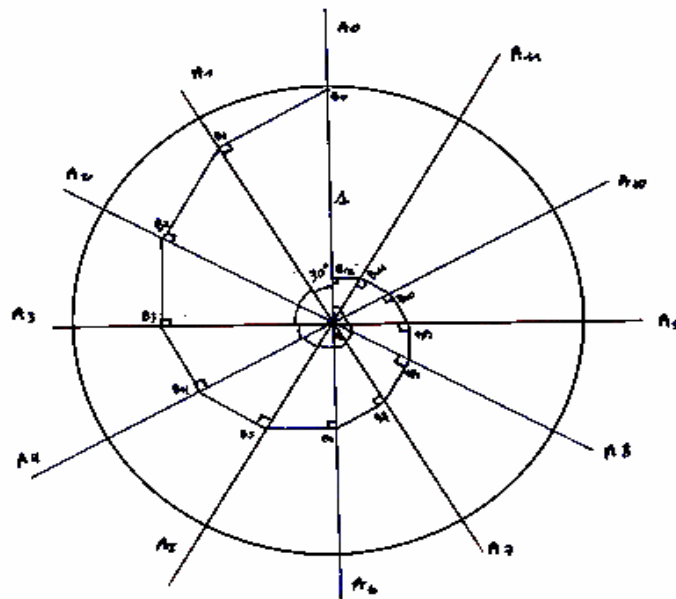
$$\rightarrow 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ or } \tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

donc

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

EXERCICE 2

Figure :



Obtenir six arcs égaux :

$\frac{360}{6} = 60$ donc il faut avoir des angles de 60° :

On trace des triangles équilatéraux pour avoir des angles de 60°

Obtenir douze arcs égaux :

Après avoir tracé les 6 demi-droites, on trace les bissectrices pour avoir des angles de 30° pour obtenir 12 arcs égaux.

On obtient 12 demi-droites.

On a des angles de 30°

Calcul de AB_1 :

$$AB_0 = 1$$

$$\cos 30 = \frac{AB_1}{AB_0} \rightarrow AB_1 = AB_0 \cos 30 = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calcul de AB_2 :

$$\cos 30 = \frac{AB_2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}AB_2}{3} \rightarrow AB_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

Calcul de AB_3 :

$$\cos 30 = \frac{AB_3}{\frac{3}{4}} \rightarrow AB_3 = \frac{3}{4} \cos 30 = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Calcul de AB_4 :

$$\text{De même pour } AB_4 \text{ on a : } \cos 30 = \frac{AB_4}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} \rightarrow AB_4 = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cos 30 = \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{16}$$

Calcul de $AB_5, AB_6, AB_7, AB_8, AB_9, AB_{10}, AB_{11}, AB_{12}$:

On procède la même manière on a donc :

$$AB_5 = \frac{9\sqrt{3}}{32}, AB_6 = \frac{27}{64}, AB_7 = \frac{27\sqrt{3}}{128}, AB_8 = \frac{81}{256}, AB_9 = \frac{81\sqrt{3}}{512}, AB_{10} = \frac{243}{1024}, AB_{11} = \frac{243\sqrt{3}}{2048}, AB_{12} = \frac{729}{4096}$$

On utilise les sinus et les longueurs obtenues précédemment; on obtient $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{12}$ On peut ainsi obtenir la longueur de la ligne brisée $B_0B_1B_2 \dots B_{12}$.

Longueur de la ligne brisée: $B_0B_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + B_4B_5 + B_5B_6 + B_6B_7 + B_7B_8 +$

$$B_8B_9 + B_{10}B_{11} + B_{11}B_{12} = \frac{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^{12}}{2 - \sqrt{3}} \approx 3.07 \text{ cm}$$

EXERCICE 3

α α en radians	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$ rad	45° $\frac{\pi}{4}$ rad	60° $\frac{\pi}{3}$ rad	90° $\frac{\pi}{2}$ rad
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Impossible

Démonstration des résultats du Tableau :

(On sait que les angles aigus dans un triangle rectangle sont complémentaires, si on a le cosinus d'un angle on peut avoir le sinus par un simple calcul; à part quelques exceptions)

Dans un triangle rectangle en A, si $\widehat{ACB} = 0^\circ$ alors A et B sont confondus ce qui induit que $AC=BC$.

Comme $\cos 0^\circ = \frac{AB}{AC}$ et que $AB = AC$ alors $\cos 0^\circ = 1$.

Dans un triangle rectangle en A, si $\widehat{ACB} = 0^\circ$ alors A et B sont confondus ce qui induit que $AB=0$.

Comme $\sin 0^\circ = \frac{AB}{AC}$ alors $\sin 0^\circ = 0$.

Dans un triangle rectangle en A, si $\widehat{ACB} = 0^\circ$ alors A et B sont confondus ce qui induit que $AB=0$.

Comme $\tan 0^\circ = \frac{AB}{BC}$ alors $\tan 0^\circ = 0$.

Traçons un triangle équilatéral de côté a et de hauteur h. Nous obtenons un angle de 30° .

D'après Pythagore, on a $a^2 = (\frac{a}{2})^2 + h^2$ d'où $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$ donc $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Or $\cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a}$, d'où $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on peut ainsi en déduire que $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dans un triangle rectangle isocèle, on a deux angles de 45° . On trace une hauteur h.

On obtient ainsi un triangle isocèle et rectangle qui a pour côté h, h et c (hypothénuse).

Dans ce triangle, d'après le théorème de Pythagore, on a $c^2 = 2h^2$.

d'où $h = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$.

Or $\cos 45^\circ = \frac{h}{c} = \frac{c\sqrt{2}}{2c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (d'où $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

Dans un triangle équilatéral de côté a, on trace une hauteur h.

On remarque que d'après le théorème de Pythagore,.

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

Or $\cos 60^\circ = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ d'où $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Dans un triangle équilatéral de côté a, traçons une hauteur h. On a vu précédemment que,

d'après le théorème de Pythagore $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Or $\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{a} = \sqrt{3}$

Dans un triangle isocèle rectangle, traçons une hauteur h.

On obtient ainsi un triangle isocèle et rectangle qui a pour côté h, h et c (hypoténuse).

$\tan 45^\circ = \frac{h}{h} = 1$

Dans un triangle équilatéral de côté a, et de hauteur h, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Dans un triangle rectangle, $\sin 90^\circ = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{hypoténuse}} = 1$ puisque le côté opposé à l'angle droit est

l'hypoténuse.

Comme l'angle droit n'a pas de côté adjacent, alors $\cos 90^\circ = 0$.

EXERCICE 4

1. On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x .

Ainsi, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

Donc : $\cos x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ ou $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. Sachant que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ alors $-1 \leq \cos x \leq 0$.

Donc d'après ce qui précède on peut écrire :

$$\cos x = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \text{ puis } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

EXERCICE 5

Il faut commencer par déterminer la mesure principale de l'angle (c'est-à-dire la mesure comprise entre 0 et 2π).

$$1. \frac{65\pi}{4} = \frac{8 \times 8\pi + \pi}{4} = 8 \times 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{4}$ est la détermination principale de l'angle $\frac{65\pi}{4}$. Et $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ pour tout entier k . (la fonction cosinus est 2π -périodique).

$$\cos\left(\frac{65\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. tout d'abord remarquons que $\sin(-x) = -\sin(x)$.

$$\frac{39\pi}{4} = \frac{8\pi \times 4 + 4\pi + 3\pi}{4} = 4 \times (2\pi) + \pi + \frac{3\pi}{4}.$$

Par conséquent: $\sin\left(\frac{39\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ n(car $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$).

Et alors:

$$\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{39\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

EXERCICE 6

$\cos(-x) = \cos(x)$; $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$; $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$; $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$;

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$;

$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$.

calculons:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{325\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{325\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{320\pi + 5\pi}{8}\right) = \cos\left(40\pi + \frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(20 \times 2\pi + \frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{4\pi + \pi}{8}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

EXERCICE 7

$$1). AB^2 = (2HB)^2 = 4 HB^2 = 4 (OB^2 - OH^2) = 4 OB^2 - 4 OH^2 = 4 OB^2 - 4 OM^2 \sin^2 \alpha$$

$$2). CD^2 = 4 OD^2 - 4 OM^2 \cos^2 \alpha$$

$$3). AB^2 + CD^2 = 4OB^2 + 4OD^2 - 4OM^2$$

EXERCICE 8

Pour tout réel x , $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$.

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

EXERCICE 9

1. Pour déterminer l'aire du parallélogramme, il faut calculer la hauteur de celui-ci.

Soit H le projeté orthogonale de A sur (DC).

Dans le triangle ADH rectangle en H, on a :

$$\sin(\widehat{ADC}) = \frac{AH}{AD}.$$

$$\text{Soit: } AH = 3 \sin x.$$

Aire du parallélogramme :

$$\mathcal{A} = \text{base} \times \text{hauteur}$$

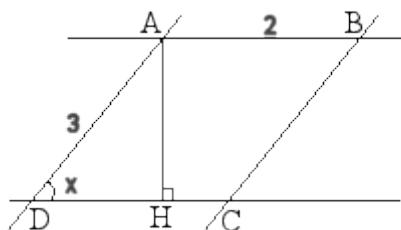
$$\mathcal{A} = AB \times AH$$

$$\mathcal{A} = 2 \times 3 \sin x$$

$$\mathcal{A} = 6 \sin x.$$

2. Résoudre $\mathcal{A} = 4$ équivaut à résoudre $6 \sin x = 4$ soit encore $\sin x = \frac{2}{3}$

Comme $\widehat{ADC}$ est un angle aigu, alors $x \approx 42^\circ$.



EXERCICE 10

Présentons les résultats sous forme d'un tableau :

Radians	Degrés	Grades
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{180}{10} = 18$	$\frac{200}{10} = 20$
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{5 \times 180}{3} = 300$	$\frac{5 \times 200}{3} = \frac{1000}{3}$
0,7	$\frac{0,7}{\pi} \times 180 = \frac{126}{\pi}$	$\frac{0,7}{\pi} \times 200 = \frac{140}{\pi}$

Remarque : $\frac{126}{\pi}$ exprimé dans le système sexagesimal donne : $40^\circ 6' 25,36''$

EXERCICE 11

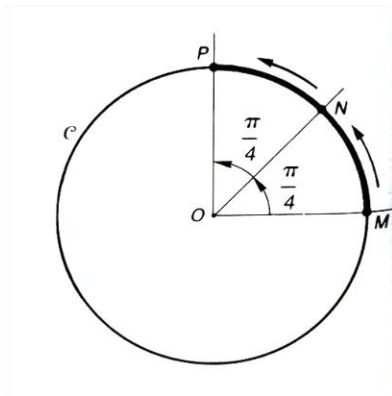
Il s'agit de $\frac{C}{24}$, C designant la circonférence terrestre .on a donc approximativement

$$\frac{40\,000}{24} \text{ Km , soit environ } 1\,667 \text{ Km.}$$

EXERCICE 12

Pour la position des points M, N et P

Voyez la figure.



La relation de Chasles donne :

$$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}; \overrightarrow{OP}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Donc, l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ rad.

EXERCICE 13

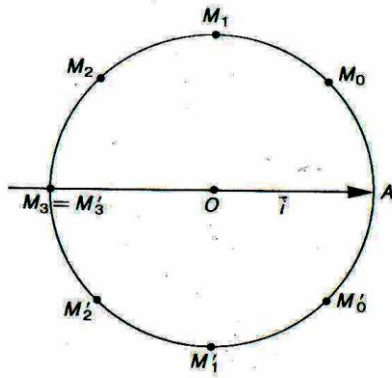
Les arcs AM_0 , AM_1 , AM_2 et AM_3

Ont respectivement pour mesure

$$\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{4} \text{ et } \pi. \text{ On en déduit que:}$$

AM'_0 , AM'_1 , AM'_2 , et AM'_3 ont respectivement pour mesure $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-3\frac{\pi}{4}$ et $-\pi$. Remarquons que les arcs.

AM'_3 et AM_3 ont même mesure puisque $\pi = -\pi + 2\pi$.

**EXERCICE 14**

On a : $\begin{cases} 7\pi = \pi + 6\pi \\ 5\pi = \pi + 4\pi \\ 3\pi = \pi + 2\pi \end{cases}$ donc les nombres 3π , 5π et 7π sont les déterminations de la mesure

de l'angle plat .

On a : $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ et $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\pi$, donc : $\frac{5\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ sont des déterminations de la mesure de

L'angle droit direct.

Enfin , 8π et $\frac{3\pi}{2}$ représentent l'angle nul et l'angle droit indirecte , respectivement .

Regroupons les réels représentant la même mesure ; on a :

$$\{3\pi, 5\pi, 7\pi\}, \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right\}, \{8\pi, 0\} \text{ et } \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

EXERCICE 15

Une minute étant un soixantième de degré, vous remarquerez que l'on a :

$$10^\circ 27' = 10,45^\circ.$$

Degrés	Grades	Radians
36	$\frac{36}{180} \times 200 = 40$	$-\frac{236}{180} \times \pi = \frac{\pi}{5}$
-21	$-\frac{21}{180} \times 200 = -\frac{70}{3}$	$-\frac{21}{180} \times \pi = -\frac{7\pi}{60}$
10,45	$-\frac{10,45}{180} \times 200 = -\frac{104,5}{9}$	$\frac{10,45}{180} \times \pi = \frac{0,5225\pi}{9}$

EXERCICE 16

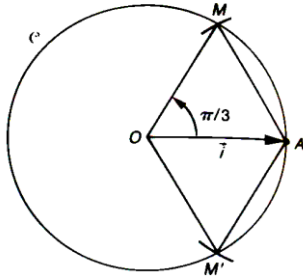
Puisque les différentes déterminations s'écrivent sous la forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$, on obtient:

$$\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4} ; \quad \frac{\pi}{4} + 0\pi = \frac{\pi}{4} ; \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \text{ et } \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$$

EXERCICE 17

Les triangles OAM et OAM' sont

équilatéraux, donc les angles non orientés $\widehat{AOM}$ et $\widehat{AOM'}$ ont pour mesure $\frac{\pi}{3}$



Pour l'orientation choisie sur la figure : l'arc AM a pour mesure $\frac{\pi}{3}$, l'arc AM' a pour mesure $-\frac{\pi}{3}$

EXERCICE 18

1°) $\frac{\pi}{5}$ radians correspond à $\frac{180}{5}$ degrés, soit 36 degrés.

2°) La circonférence C du cercle $\mathcal{C}$ est en cm : $2\pi \times r = 10\pi$

L'arc AB a pour longueur $\frac{1}{10} \times C$ cm, soit π cm

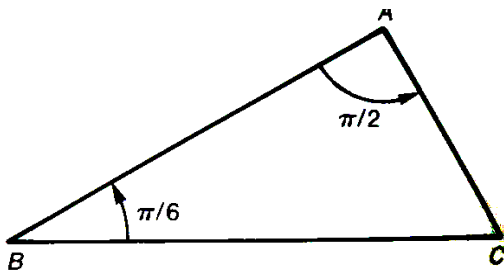
EXERCICE 19

Pour l'orientation choisie sur le dessin, l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ a pour mesure

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ radians. On en déduit que } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \text{ a pour mesure } -\frac{\pi}{3} \text{ radians}$$

L'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$ (resp. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$) est égale à l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ (resp. $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$), donc a pour mesure

$$\frac{\pi}{3} \left(\text{resp. } -\frac{\pi}{3} \right)$$

**EXERCICE 20**

1°) Position de la bille aux instants $t=12$, $t=365$, $t=1351$

La bille parcourt un tour en 5 secondes, donc, au bout de 12 secondes, elle aura parcouru 2 tours et $\frac{2}{5}$ tour. Sa position sur C est donc définie par le point M où l'angle

L'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2}{5} \times 2\pi$ ou $\frac{4\pi}{5}$ (l'orientation étant définie par le mouvement)

A l'instant $t = 365$, la bille a parcouru 73 tours complets, donc la bille se retrouve au point A

A l'instant $t = 1351$, la bille a parcouru 270 tours et $\frac{1}{5}$ tour. Elle se trouve donc au point M_1 défini par

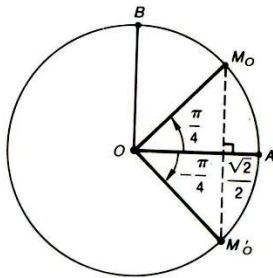
$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1} = \frac{2\pi}{5}.$$

2°) Vitesse de la bille

En 5 secondes, la bille parcourt 60π cm donc, en une heure, elle parcourt 432π mètres. Sa Vitesse est donc de $0,432\pi$ km /h, soit environ 1,357 km/h.

EXERCICE 21

On sait que $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Notons M le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$ et M_0 le point



de $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_0}) = \frac{\pi}{4}$. Les points M de $\mathcal{C}$ tels que $\cos x = \frac{\pi}{4}$ sont M_0 et M'_0 le symétrique de M_0 par rapport à $(x'x)$. Il en résulte que les solutions sont les mesures des angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_0})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'_0})$.

1° Pour $x \in [0, 2\pi[$, on trouve $x = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$ donc $S_{[0; 2\pi[} = \{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\}$

2° Pour $x \in \mathbb{R}$, on trouve

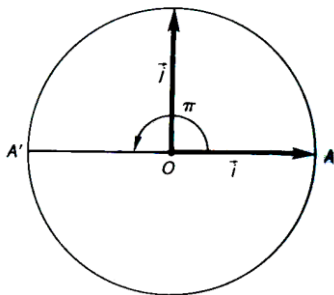
$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

Ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$ (remarquons que la valeur $\frac{7\pi}{4}$ correspond à $k' = 1$).

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

EXERCICE 22

Les solutions de l'équation $\sin x = 0$ sont les mesures des angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OA'})$ (cf. figure).



1° Pour $x \in [0, 2\pi[$, on trouve $x = 0$ ou $x = \pi$ donc $S_{[0, 2\pi[} = \{0; \pi\}$

2° Pour $x \in \mathbb{R}$, on trouve $x = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$, ou $x = \pi + 2k'\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$.

Cela signifie que x est un multiple entier de π . ($x = k''\pi$, $k'' \in \mathbb{Z}$)

$$S_{\mathbb{R}} = \{2k\pi; \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

EXERCICE 23

Les solutions de l'inéquation $\sin x > 0$ sont les mesures de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ pour M appartenant au demi-cercle supérieur ouvert (partie du cercle trigonométrique contenue dans le demi-plan des points d'ordonnée strictement positive). On trouve donc : $S =]2k\pi; \pi + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 24

On a l'équivalence :

$$(|\sin x| > \frac{1}{2}) \iff (\sin x > \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x < -\frac{1}{2})$$

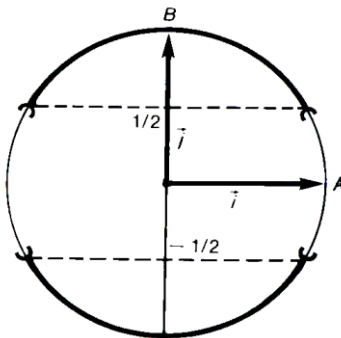
Les solutions de l'inéquation $\sin x > \frac{1}{2}$

Sont les réels des intervalles

$$]\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$$

et les solutions de l'inéquation $\sin x < -\frac{1}{2}$ sont les réels des intervalles

$$]\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z} \text{ (cf. figure ci-dessous).}$$



On peut conclure : les solutions de l'inéquation $|\sin x| > \frac{1}{2}$ sont des réels des ensembles $]\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi[\cup]\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 25

$$\begin{aligned} \text{On a : } \left(\tan x - \frac{1}{\tan x}\right)^2 &= \tan^2 x - 2 + \frac{1}{\tan^2 x} \\ &= (1 + \tan^2 x) + \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) - 4 \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 4 \end{aligned}$$

EXERCICE26

Multiplions respectivement les équations (1) et (2) par $-\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ et ajoutons membres à membre, on obtient :

$$\begin{array}{r} (\sin^2 \alpha)x - (\sin\alpha \cos \alpha)y = \sin\alpha \\ + (\cos^2 \alpha)x + (\sin\alpha \cos \alpha)y = \cos\alpha \\ \hline (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)x + 0 = \sin \alpha + \cos \alpha \end{array}$$

$$\text{Donc: } x = \sin\alpha + \cos\alpha$$

En multipliant (1) par $-\cos\alpha$, (2) par $\sin\alpha$ et en ajoutant, on obtient : $y = -\cos\alpha = \sin\alpha$.

Conclusion : le système admet pour unique solution le couple $(x,y) = (\sin \alpha + \cos\alpha, \sin\alpha - \cos\alpha)$.

EXERCICE27

Pour $x = 6\pi - \frac{\pi}{3}$, on a : $x = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi$, avec $k = 3$,

$$\text{Donc : } \cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan x = -\sqrt{3}.$$

Pour $x = \pi + \frac{\pi}{6}$, nous savons que $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ et $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. on a donc :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x = -\frac{1}{2}, \tan x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{On a : } 3\pi + \frac{\pi}{4} = \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi \text{ donc, dans ce cas : } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan x = 1.$$

$$\text{Le nombre } x = 5\pi - \frac{\pi}{4} \text{ est égal à } \pi - \frac{\pi}{4} + 4\pi, \text{ donc : } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan x = -1.$$

Pour $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, on peut utiliser les relations $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. on a

$$\text{donc : } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x = \frac{1}{2}, \tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Enfin, pour } x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \text{ on a : } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan x = -1.$$

EXERCICE28

$$\text{pour } x = \frac{4\pi}{3}, \text{ on a : } x = \pi + \frac{\pi}{3}, \text{ donc } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Le nombre } x = -\frac{11\pi}{3} \text{ est égal à } -2\pi + \frac{\pi}{3}, \text{ donc } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{On peut écrire } x = 33\frac{\pi}{4} \text{ sous la forme } \frac{8x + 4\pi + \pi}{4}. \text{ On donc : } x = 8\pi + \frac{\pi}{4}. \text{ Il en résulte que : } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

THÈME 8: Droites et cercles dans le plan

ENONCES

EXERCICE 1

Dans un repère (O, i, j) , soit $A(2; -1)$ et $\vec{u}(-2; 2)$.

- Déterminer une équation de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- Tracer la droite d' d'équation $x + y + 2 = 0$.
- Les droites d et d' sont-elles parallèles?

EXERCICE 2

Soit $A(4; -3)$, $B(7; 2)$ et $u(6; -2)$.

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ ainsi que des points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NB} = \vec{u}$.

EXERCICE 3

On donne $A(-2; 7)$, $B(-3; 5)$ et $C(4; 6)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 4

Ecrire une équation de la droite (AB) où $A(-1; -2)$ et $B(-5; -4)$.

EXERCICE 5 - Vrai ou Faux ?

La droite d a pour équation $2x + 3y - 5 = 0$.

- d passe par l'origine du repère.
- d passe par $A(2; 1/3)$.
- d a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; \frac{2}{3})$.
- d a pour coefficient directeur $\frac{2}{3}$.

EXERCICE 6

Soit la droite (d) d'équation $5x - y - 2 = 0$.

Déterminer une équation de la droite (d') passant par $A(2; -1)$ et parallèle à (d) .

EXERCICE 7

Déterminer un vecteur directeur de la droite d'équation:

- $3x - 7y + 4 = 0$
- $x = -y$
- $8y - 4x = 0$

- d) $x = 4$
- e) $y - 5 = 0$
- f) $x = y$

EXERCICE 8

On considère les deux droites d et d' d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$ et $2x - y - 1 = 0$.
Que peut-on dire des droites d et d' ?

EXERCICE 9

Soit $B(-5; 1)$ et $C(2; -4)$.

Trouver les coordonnées du point A commun à (BC) et à l'axe des abscisses.

EXERCICE 10

On donne les points $M(-1; 3)$, $N(8; -4)$ et $X(5; a)$ où a est un réel.
Comment choisir a pour que les points M , N et X soient alignés?

EXERCICE 11

Déterminer y pour que D soit situé sur la parallèle à (AB) passant par C lorsque
 $A(7; 2)$, $B(3; -3)$, $C(0; 2)$ et $D(8; y)$.

EXERCICE 12

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a) Placer les points $A(1,5; 1,5)$, $B(0; 3)$, $C(-1; 0)$ et $D(0; -3)$.
- b) Ecrire une équation pour chacune des droites (BC) et (AD) .

Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

- c) Soit M le milieu de $[AB]$ et N celui de $[CD]$. Calculer les coordonnées de M et de N .

Montrer que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$ où k est un réel que l'on précisera.

Que peut-on en déduire pour la droite (MN) ? Montrer que (MN) passe par O .

EXERCICE 13

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère quatre points $A(-1; 2)$, $B(1; -1)$, $C(2; 4)$ et $D(6; -2)$.

- a) Faire une figure.
- b) Montrer que $ABDC$ est un trapèze et non un parallélogramme.
- c) Soit I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB) .

d) Soit K le milieu de $[BC]$ et L le point tel que $2\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD}$. Montrer que les points I , J , K et L sont alignés.

EXERCICE 14

Dans un plan muni d'un repère, on considère un triangle ABC où $A(-3; 0)$, $B(5; 0)$ et $C(6; -6)$.
Soit A' , B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

- a) Calculer les coordonnées des points A' , B' et C' .
- b) Déterminer une équation de la droite (AA') , de la droite (BB') et de la droite (CC') .
- c) Calculer les coordonnées du point d'intersection G des droites (AA') et (BB') .

d) Le point G est-il sur la droite (CC')?

e) L'équation $x - y + 4 = 0$ est-elle une équation de (AC')?

EXERCICE 15

On considère le quadrilatère ABCD où A(3; 3), B(3; -1), C(-2; -4) et D(-2; 0).

Démontrer que ABCD est un parallélogramme et calculer les coordonnées de son centre I.

EXERCICE 16

Déterminer un vecteur directeur et le coefficient directeur de chacune des droites suivantes:

(d) $2x - 5y + 7 = 0$

(d') $3y - 4x = 0$

(d'') $-x = y$

EXERCICE 17

Répondez directement sur le sujet.

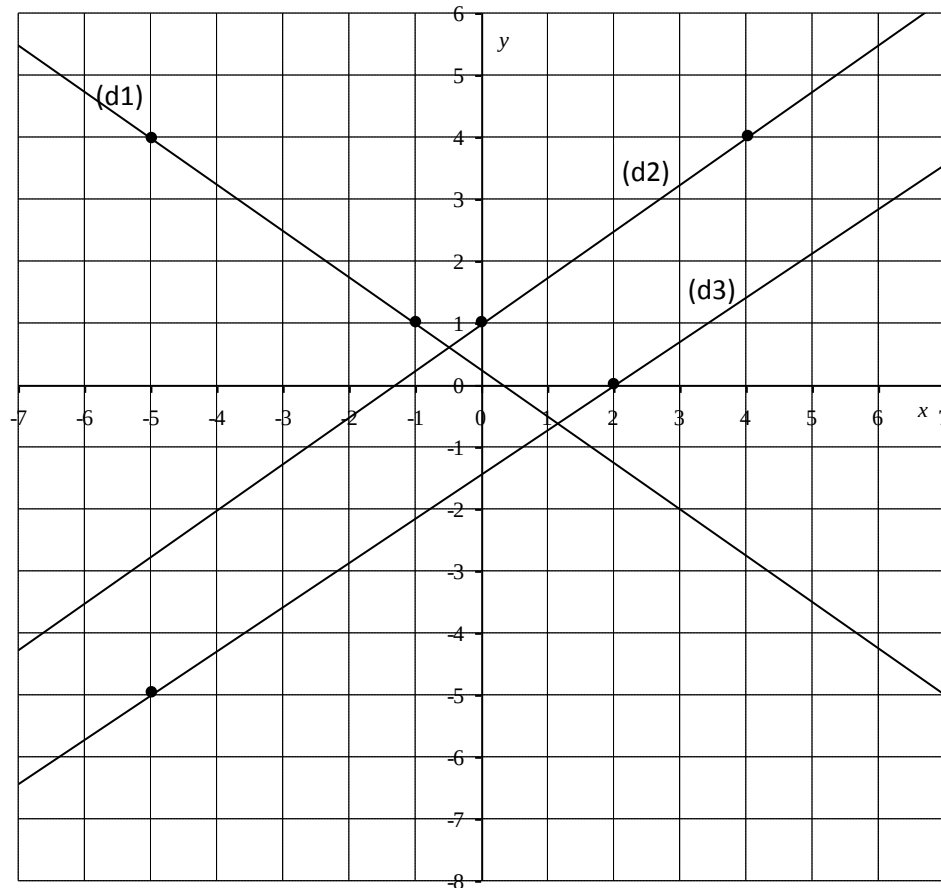
1. En utilisant les informations données sur le dessin, déterminer une équation de chacune des droites ci-dessous (*on donnera des valeurs exactes, pas de justification*).

(d1) :

(d2) :

(d3) :

2. Les droites (d2) et (d3) sont elles parallèles ? Pourquoi ?



EXERCICE 18

Soient les points A(3; 5), B(1; 3) et C(-3; 2).

- Déterminer une équation de la droite (AB).
- Déterminer une équation de la droite (d) passant par C et parallèle à (AB).
- Soit D(x; y). Déterminer les coordonnées de D pour que ABCD soit un parallélogramme.
- On considère le point E(1; 6). Démontrer que les points C, D et E sont alignés.

EXERCICE 19

Trouver les valeurs de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux:

- $\vec{u}(-2; -5)$ $\vec{v}(1; x+4)$
- $\vec{u}(5; 11)$ $\vec{v}(2; x)$
- $\vec{u}(x; 3)$ $\vec{v}(x; -6)$

EXERCICE 20

Trouver une équation de la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à la droite D.

- A(1; 1) D a pour équation $x + y - 5 = 0$

b) A(-2; 3) D a pour équation $2x - y + 2 = 0$

EXERCICE 21

Démontrer que si les deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires alors leur déterminant est nul.

EXERCICE 22

- Placer les points A(3; 6) B(1; 2) C(5; 4) dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
- Déterminer une équation de la médiatrice de [AB].
- Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
- Calculer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 23

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Déterminer les valeurs du nombre réel l pour que les deux droites (D) et (D') d'équations :

$$(D) : x + ly = 1$$

$$(D') : (1 - l)x + ly = -2$$

soient parallèles ?

EXERCICE 24

Les équations : $x = 2 - 3t$ (1) ; $y = -1 + 5t$ (2), avec $t \in \mathbb{R}$, constituent un système d'équations paramétriques d'une droite (D). Déduisez-en une équation cartésienne de (D).

EXERCICE 25

Soit $2x - 7y - 3 = 0$ une équation cartésienne d'une droite (D). Trouvez un système d'équations paramétriques de (D).

EXERCICE 26

(D) et (D') définies ci-dessous sont-elles parallèles ou sécantes ? Déterminer éventuellement le point d'intersection.

(D) est la droite passant par A(1,3) et B(4,2).

(D') est la droite passant par C(-3, 0) et par D(0, -2).

EXERCICE 27

(D) et (D') définies ci-dessous sont-elles parallèles ou sécantes ? Déterminer éventuellement le point d'intersection.

(D) est la droite passant par A (4, -1) et de vecteur directeur $\vec{v}(-2, -3)$.

(D') est la droite d'équation cartésienne : $3x - 2y + 1 = 0$.

EXERCICE 28

(D) et (D') définies ci-dessous sont-elles parallèles ou sécantes ? Déterminer éventuellement le point d'intersection.

(D) et (D') sont données par des systèmes d'équations paramétriques :

$$(D) \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}). \quad (D') \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

EXERCICE 29

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Donnez une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre I (3 ;4) et de rayon R=5.

EXERCICE 30

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Donnez une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre I(4 ;1) et passant par le point A(2 ;7).

EXERCICE 31

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Donnez une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ qui admet un diamètre d'extrémités A(-5 ;2) et B(6 ;4).

EXERCICE 32

Montrer que $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ (1) est une équation d'un cercle dont vous déterminerez le centre I et le rayon R.

SOLUTIONS

EXERCICE 1

Rappel :

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$

Réciproquement ; la droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$; le coefficient c étant à déterminer avec un point de la droite.

a) Une équation de (d) est de la forme : $2x + 2y + c = 0$. Déterminons c :

A appartient à (d) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d) :

$2 \times 2 + 2 \times (-1) + c = 0$; on obtient: $c = -2$.

donc (d) : $2x + 2y - 2 = 0$ ou encore : $x + y - 1 = 0$ et l'équation réduite de (d) est :

$$y = -x + 1.$$

b) Pour tracer la droite d'équation $x + y + 2 = 0$, il suffit de connaître deux points de cette droite et de les relier.

x	0	-2
y	-2	0

Il suffit donc de placer les points A(0,-2) et B(-2,0). La droite (d') est la droite (AB).

c) Deux droites d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$. Ou encore, si elles ont pour équation : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, elles sont parallèles si et seulement si $ab' = a'b$.

Le coefficient directeur de (d) est -1 et celui de (d') est -1. Les droites d et (d') sont donc parallèles.

EXERCICE 2

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) : \overrightarrow{AB}(3; 5).$$

Soit $M(x, y)$.

.

D'où : M(10 ; -5).

De même: Soit $N(a, b)$:

.

D'où : N(1 ; 4).

EXERCICE 3

ABCD parallélogramme

Ainsi: D(-2 - (-3) + 4 ; 7 - 5 + 6)

Donc : D(5 ; 8).

EXERCICE 4

Deux méthodes possibles (même encore plus).

► **1^{ère} méthode :**

A et B appartiennent à la droite (AB) donc leurs coordonnées vérifient l'équation de la droite (d), on a donc le système :

$$\begin{cases} -2 = -a + b \\ -4 = -5a + b \end{cases} \text{ et il nous faut déterminer } a \text{ et } b :$$

En soustrayant les deux équations on obtient facilement la valeur de a et en remplaçant dans une des deux équations on obtient b :

Une équation de la droite (AB) est : $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

► **2^{ème} méthode :**

On a $x_A \neq x_B$, donc une équation de la droite (AB) est de la forme : $y = ax + b$.

Déterminons le coefficient directeur de (AB) :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

L'équation de (AB) est donc de la forme $y = \frac{x}{2} + b$. Il reste à déterminer b , pour cela comme précédemment, on dit que A appartient à (AB) et donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$-2 = \frac{1}{2} \times (-1) + b; \text{ soit } b = -\frac{3}{2}.$$

Et on conclut de la même façon.

EXERCICE 5

a) FAUX (le couple (0 ; 0) n'est pas solution de l'équation, ou encore, ce n'est pas une fonction linéaire !)

b) VRAI $2 \times 2 + 3 \times (1/3) - 5 = 0$.

c) VRAI

d) FAUX $(-2/3)$.

EXERCICE 6

La droite (d) a pour équation $5x - y - 2 = 0$ ou encore $y = 5x - 2$.

Le coefficient directeur est donc $m = 5$.

Comme (d') est parallèle à (d), alors le coefficient directeur m' de (d') vérifie : $m' = m = 5$.

Donc une équation de (d') est de la forme : $y = 5x + p$.

De plus, A(2 ; -1) appartient à (d') donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d') : $-1 = 5 \times 2 + p$. Soit : $p = -11$.

Ainsi, l'équation réduite de (d') est : $y = 5x - 11$. Une autre équation de (d') est : $5x - y - 11 = 0$.

EXERCICE 7

Si (d): $ax+by+c = 0$ alors un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(-b ; a)$

a) $3x-7y+4 = 0$; vecteur directeur: $\vec{u}(7;3)$

b) $x=-y$; vecteur directeur: $\vec{u}(-1;1)$

c) $8y-4x=0$; vecteur directeur: $\vec{u}(-8;-4)$ ou encore: $\vec{v}(2;1)$

d) $x = 4$; vecteur directeur: $\vec{u}(0;1)$

e) $y - 5 = 0$; vecteur directeur: $\vec{u}(-1 ; 0)$

f) $x=y$; vecteur directeur: $\vec{u}(1;1)$

EXERCICE 8

(d): $2x-y+3 = 0$; coefficient directeur: $m=2$

(d'): $2x-y-1 = 0$; coefficient directeur: $m'=2$.

$m=m'$. Les droites (d) et (d') sont donc parallèles.

EXERCICE 9

► Déterminons une équation de (BC) par une des deux méthodes de l'exercice 4. (BC): $5x+7y-18=0$.

► axe des abscisses: $y=0$.

Le point A vérifie ces deux équations: $y_A=0$ et $5x_A-18=0$. On en déduit: $A(18/5; 0)$.

EXERCICE 10

Deux méthodes:

► **1^{ère} méthode** (qui concerne le thème choisi ici : équations de droite) :

On détermine l'équation de la droite (MN) puis on détermine a pour que X appartienne à cette droite :

(MN): coefficient directeur: $m = -\frac{7}{9}$; $9y = -7x + p$.

M appartient à (MN) donc: $27 = 7 + p$; soit $p = 20$.

Une équation de (MN) est: $7x+9y-20=0$.

X appartient à (MN) $\iff 7 \times 5 + 9 \times a - 20 = 0 \iff 9a = -15 \iff a = -\frac{5}{3}$

► **2^{ème} méthode** (avec les vecteurs) :

M, N et X alignés $\iff \overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MX}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{MN}(9; -7)$ et $\overrightarrow{MX}(6; a-3)$.

M, N et X alignés $\iff$ il existe un réel k non nul tel que: $9 = 6k$ et $-7 = k(a-3) \iff k = \frac{3}{2}$ et $a = \frac{-5}{3}$.

EXERCICE 11

Déterminons l'équation de la droite (d) parallèle à (AB) et passant par C.

► coefficient directeur de (AB): $m = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$. Et (d) parallèle à (AB) $\iff m' = m = \frac{5}{4}$.

► L'équation de (d) est donc de la forme: $y = \frac{5}{4}x + p$.

C appartient à (d) donc: $2 = 0 + p$ soit $p = 2$.

L'équation réduite de (d) est: $y = \frac{5}{4}x + 2$.

D appartient à (d) $\iff y = \frac{5}{4}(8) + 2 \iff y = 12$. Donc $D(8; 12)$.

EXERCICE 12

b) * droite (BC):

- coefficient directeur: $m = \frac{-3}{-1} = 3$.

- Une équation de (BC) est de la forme: $y = 3x + p$.

- B appartient à (BC) donc $3 = 0 + p$ soit $p = 3$.

- donc (BC): $y = 3x + 3$.

* droite (AD): $y = 3x - 3$.

Ces deux droites ont même coefficient directeur égal à 3, elles sont donc parallèles.

c) M milieu de [AB]: $M(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$ soit $M(0,75; 2,25)$.

N milieu de [CD]: $N(\frac{x_C+x_D}{2}; \frac{y_C+y_D}{2})$ soit $N(-0,5; -1,5)$.

$\overrightarrow{MN}(-1,25; -3,75)$ et $\overrightarrow{BC}(-1; -3)$. donc: $\overrightarrow{MN} = -1,25 \overrightarrow{BC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Donc

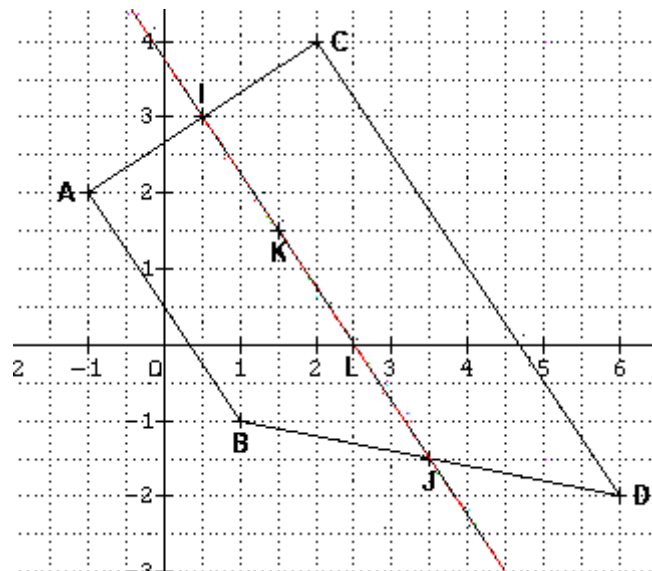
le coefficient directeur de la droite (MN) est 3.

Une équation de (MN) est donc de la forme: $y = 3x + p$. Et M appartient à (MN) donc: $2,25 = 3 \times 0,75 + p$; soit $p = 0$.

Ainsi, (MN): $y = 3x$. Donc (MN) est une droite représentée par une fonction linéaire; elle passe donc par l'origine O.

EXERCICE 13

a)



b) Montrons que $(AB) \parallel (CD)$ mais que (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

coefficients directeurs : $m_{(AB)} = \frac{-3}{2}$ $m_{(AC)} = \frac{2}{3}$ $m_{(CD)} = \frac{-3}{2}$ $m_{(BD)} = \frac{-1}{5}$.

Ce qui montre bien que (AB) et (CD) sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur mais que (AC) et (BD) ne le sont pas.

Donc ABDC est un trapèze.

c) $I(0,5 ; 3)$ et $J(3,5 ; -1,5)$. donc $m_{(IJ)} = \frac{-4,5}{3} = \frac{-3}{2} = m_{(AB)} = m_{(CD)}$.

Donc (IJ) est parallèle à (AB) et (CD) .

d) $K(1,5 ; 1,5)$. Il faut montrer que I, J, K et L sont alignés.

L est défini par $2\vec{AL} = \vec{AD}$, donc D est le milieu de $[AD]$ et $L(2,5 ; 0)$.

équation de (IJ): $y = \frac{-3}{2}x + p$; $3 = \frac{-3}{2}(0,5) + p$ soit $p = 3,75$. ; donc (IJ): $y = \frac{-3}{2}x + 3,75$.

et (KL): $m_{(KL)} = \frac{-1,5}{1} = \frac{-3}{2}$. $y = \frac{-3}{2}x + p'$ et $\frac{3}{2} = (\frac{-3}{2})(\frac{3}{2}) + p'$ soit $p' = 3,75$. donc (IJ) et (KL) sont confondues (même équation de droite).

On en conclut que les points I, J, K et L sont alignés.

EXERCICE 14

a) $A'(5,5 ; -3)$; $B'(1,5 ; -3)$; $C'(1 ; 0)$.

b) (AA') : $m_{(AA')} = \frac{-3}{8,5} = \frac{-6}{17}$. une équation de (AA') : $6x + 17y + 18 = 0$.

(BB') : $m_{(BB')} = \frac{-3}{-3,5} = \frac{6}{7}$. une équation de (BB') : $-6x + 7y + 30 = 0$.

(CC') : $m_{(CC')} = \frac{6}{-5}$; une équation de (CC') : $6x + 5y - 6 = 0$.

c) Les coordonnées du point G vérifient les équations de (AA') et (BB') donc sont solutions du système:

$$S \begin{cases} 6x + 17y + 18 = 0 \\ -6x + 7y + 30 = 0 \end{cases}$$

Soit:

$$S \begin{cases} x = \frac{-17y - 18}{6} \\ 24y + 48 = 0 \end{cases}$$

$$S \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = -2 \end{cases}$$

G(8/3 ; -2)

d) 1^{ère} méthode: G est l'intersection de (AA') et (BB') qui sont deux médianes du triangle ABC; donc G est le centre de gravité du triangle et (CC') la troisième médiane donc G appartient à (CC').

2^{ème} méthode: $6 \times (8/3) + 5 \times (-2) - 6 = 16 - 10 - 6 = 0$. Les coordonnées de G vérifient l'équation de (CC') donc G appartient à la droite (CC').

e) Les coordonnées de A et C' sont-elles solutions de l'équation $x - y + 4 = 0$?

$-3 - 0 + 4 = 1$ donc A n'est pas sur cette droite; donc l'équation $x - y + 4 = 0$ n'est pas une équation de la droite (AC').

EXERCICE 15

Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB}(0; -4)$$

$$\overrightarrow{DC}(0; -4)$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leurs milieu, donc le centre I du parallélogramme est le milieu de [AC]

$$I \left(\frac{x_a + x_c}{2}; \frac{y_a + y_c}{2} \right)$$

$$I \left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2} \right)$$

EXERCICE 16

$$2x - 5y + 7 = 0$$

$$y = \frac{-2x - 7}{-5}$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$$

Le coefficient directeur de (d) est $\frac{2}{5}$.

La droite d'équation $y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$ et la droite d'équation $y = \frac{2}{5}x$ ont le même vecteur directeur (car ils ont le même coefficient directeur).

On constate que si $x = 1$ alors $y = \frac{2}{5}$

Le vecteur directeur de la droite (d) a pour coordonnées.

$$\left(1; \frac{2}{5}\right)$$

$$3y - 4x = 0$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

Le coefficient directeur de (d') est $\frac{4}{3}$

On constate que si $x = 1$ alors $y = \frac{4}{3}$

Le vecteur directeur de la droite (d') a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$

$$y = -x$$

Le coefficient de la droite (d'') est -1

On constate que si $x = 1$ alors $y = -1$

Le vecteur directeur de la droite (d'') a pour coordonnées $((1; -1))$

EXERCICE 17

1. (d1) : passe par $(-5 ; 4)$ et $(-1 ; 1)$, équation : $\begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ y-4 & -3 \end{vmatrix} = -3x-15-4y+16=0 \Leftrightarrow 4y+3x-1=0$.

(d2) : passe par $(4 ; 4)$ et $(0 ; 1)$, coeff. directeur $\frac{3}{4}$, ordonnée à l'origine : 1, équation : $y = \frac{3}{4}x + 1$.

(d3) : passe par $(-5 ; -5)$ et $(2 ; 0)$, coeff. directeur $\frac{5}{7}$, $0 = \frac{5}{7}.2 + p \Rightarrow p = -\frac{10}{7}$, équation : $y = \frac{5}{7}x - \frac{10}{7}$.

2. Les droites (d2) et (d3) ne sont pas parallèles : elles n'ont pas le même coefficient directeur.

EXERCICE 18

a) On sait que $A(3; 5)$ et qu'une fonction affine est de la forme $y = ax + b$

On se ramène donc à un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

On trouve $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

b) L'équation de la droite passant par C et parallèle à (AB) a donc le même coefficient directeur que la droite (AB)

D'où $a = 1$

On a donc l'équation suivante :

$$-3 + b = 2$$

D'où $b = 5$

c) Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

On a donc le système d'équation suivant

$$\begin{cases} -2 = -3 - x \\ -2 = 2 - y \end{cases}$$

On trouve $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$

Donc D(-1 ; 4).

d) Si C, D et E sont alignés alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{CD}(2; 2)$$

$$\overrightarrow{CE}(4; 4)$$

Si $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires alors $X_{\overrightarrow{CD}} \times Y_{\overrightarrow{CE}} - X_{\overrightarrow{CE}} \times Y_{\overrightarrow{CD}}$

$$2 \times 4 - 4 \times 2 = 0$$

Donc C, D et E sont alignés.

EXERCICE 19

a) On détermine une équation de la droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$

On trace la droite ayant pour vecteur directeur, le vecteur $\vec{u}$ passant par O(0;0)

On constate que :

- L'image de 0 est 0

- L'image de -2 est -5

On a donc le système d'équation suivant

$$\begin{cases} b = 0 \\ -2a + b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

D'où

L'équation de la droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$ est donc $y = \frac{5}{2}x$

On détermine une équation de la droite ayant pour vecteur directeur $\vec{v}$

On considère la droite ayant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}$ et passant par O(0;0)

On constate que

- L'image de 0 est 0

- L'image de 1 est x+4

On a donc le système d'équation suivant

$$\begin{cases} b = 0 \\ x + 4 = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x + 4 \\ b = 0 \end{cases}$$

D'où

Si 2 droites sont perpendiculaires alors le produit de leur coefficient directeur est égale à -1.

$$\frac{5}{2}(x + 4) = -1$$

$$x = \frac{-22}{5}$$

b) On détermine une équation de la droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$

On trace la droite ayant pour vecteur directeur, le vecteur $\vec{u}$ passant par O(0;0)

On constate que :

- L'image de 0 est 0

- L'image de 5 est 11

On a donc le système d'équation suivant

$$\begin{cases} b = 0 \\ 5a + b = 11 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} a = \frac{11}{5} \\ b = 0 \end{cases}$$

On considère la droite ayant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}$ et passant par O(0;0)

On constate que

- L'image de 0 est 0

- L'image de 2 est x

On a donc le système d'équation suivant

$$\begin{cases} b = 0 \\ x = 2a + b \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} a = \frac{x}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Si 2 droites sont perpendiculaires alors le produit de leur coefficient directeur est égale à -1.

$$\frac{11}{5} \times \frac{x}{2} = -1$$

$$x = \frac{-10}{11}$$

c) On détermine une équation de la droite ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$

On trace la droite ayant pour vecteur directeur, le vecteur $\vec{u}$ passant par O(0;0)

On constate que :

- L'image de 0 est 0

- L'image de x est 3

On a donc le système d'équation suivant

$$\begin{cases} b = 0 \\ ax + b = 3 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} a = \frac{3}{x} \\ b = 0 \end{cases}$$

On considère la droite ayant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}$ et passant par O(0;0)

On constate que

- L'image de 0 est 0

- L'image de x est -6

On a donc le système d'équation suivant

$$\begin{cases} b = 0 \\ ax + b = -6 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} a = \frac{-6}{x} \\ b = 0 \end{cases}$$

Si 2 droites sont perpendiculaires alors le produit de leur coefficient directeur est égale à -1.

$$\frac{3}{x} \times \frac{-6}{x} = -1$$

$$\frac{-18}{x^2} = -1$$

$$-18 = -x^2$$

$$x^2 = 18$$

$$x = 3\sqrt{2} \text{ ou } x = -3\sqrt{2}$$

EXERCICE 20

a) D a pour équation $y = -x + 5$

Le produit du coefficient directeur de D et du coefficient directeur de la droite passant par A est égal à -1 car les deux droites sont perpendiculaires.

On a donc le système d'équations suivant

$$\begin{cases} -a = -1 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

On trouve

Donc l'équation de la droite passant par A est $y = x$

b) D a pour équation $y = 2x + 2$

Le produit du coefficient directeur de D et du coefficient directeur de la droite passant par A est égal à -1 car les deux droites sont perpendiculaires.

On a donc le système d'équations suivant

$$\begin{cases} 2a = -1 \\ -2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

On trouve

Donc l'équation de la droite passant par A est $y = \frac{-1}{2}x + 2$

EXERCICE 21

Prenons deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ colinéaires. Par définition de la colinéarité, il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

On a donc : $x' = kx$ et $y' = ky$. Calculons, le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = xky - kxy = kxy - kxy = 0.$$

EXERCICE 22

b) On prend un point $M(x; y)$ situé sur la médiatrice [AB]

On sait que le point M est équidistant de A et de B donc $MA = MB$

$$\text{Donc } \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

En élevant au carré, on obtient

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 12y + 45 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$$

$$-6x - 12y + 45 = -2x - 4y + 5$$

$$-4x - 8y + 40 = 0$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 5$$

c) On détermine l'équation de la médiatrice de [AC]

On prend un point N(x,y)

On sait que le point N est équidistant de A et de C donc NA=NC

$$\text{Donc } \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

En élevant au carré on obtient

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$-6x - 12y + 45 = -10x - 8y + 41$$

$$4x - 4y + 4 = -10x - 8y + 41$$

$$y = x + 1$$

On cherche l'intersection des deux médiatrices.

$$\frac{-1}{2}x + 5 = x + 1$$

$$\frac{-3}{2}x + 4 = 0$$

$$x = \frac{8}{3}$$

On cherche l'image de $\frac{8}{3}$

$$\left(\frac{8}{3}\right) + 1 = \frac{11}{3}$$

Le centre I du cercle circonscrit a pour coordonnées $(\frac{8}{3}; \frac{11}{3})$

Le rayon du cercle est égale à IA

$$IA = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - 6\right)^2}$$

$$IA = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

d) Le triangle ABC à l'air isocèle en B

Si le triangle ABC est isocèle en B alors BA=BC

Vérifions-le

$$BA = \sqrt{(1-3)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Donc, le triangle ABC est isocèle en B.

On appelle H, le milieu du segment [AC]

$$Aire_{ABC} = \frac{HB \times AC}{2}$$

Coordonnées de H

$$H\left(\frac{3+5}{2}; \frac{6+4}{2}\right)$$

$$H(4;5)$$

Distance BH

$$HB = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Distance AC

$$AC = \sqrt{(3-5)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Aire}_{ABC} &= \frac{HB \times AC}{2} \\ \text{Aire}_{ABC} &= \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} \\ \text{Aire}_{ABC} &= 6 \end{aligned}$$

EXERCICE 23

On trouve $l=0$

EXERCICE 24

Considérons un point $M(x,y)$ de (D), le point $A(2, -1)$ et le vecteur $\vec{v}(-3, 5)$; ((1) ; (2))
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{v}$ il en résulte que (D) est la droite qui passe par A et admet $\vec{v}$ pour vecteur directeur. On peut obtenir une équation cartésienne de (D) en écrivant que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $5(x-2) + 3(y+1) = 0$.

Ainsi (D) : $5x + 3y - 7 = 0$

On aurait pu aussi écrire que : $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{5} (=t)$ pour obtenir une équation cartésienne de (D).

EXERCICE 25

Considérons un point de (D) par exemple A (5,1) ; (D) admet $\vec{v}(7,2)$ pour vecteur directeur. Un point $M(x,y)$ appartient à (D) si et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{v}$ (1) ; (1) $\Leftrightarrow (x = 5 + 7t \text{ (2)} ; y = 1 + 2t \text{ (3)})$

Les égalités (2) et (3) où $t \in \mathbb{R}$ constituent un système d'équation paramétrique.

On a donc (D) : $\begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

EXERCICE 26

(D) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(3, -1)$; (D') a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD}(3, -2)$. Ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires car leurs composantes ne sont pas proportionnelles. (D) et (D') ne sont par conséquent pas parallèles.

Pour déterminer le point d'intersection de (D) et de (D'), le plus pratique est de disposer d'une équation cartésienne pour une droite et d'un système d'équation paramétrique pour l'autre droite.

Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (D), comme (D) passe par A et B

On a : $\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -\frac{1}{10}c \\ b = -\frac{3}{10}c \end{cases}$

En choisissant $c = -10$ on obtient l'équation : $x + 3y - 10 = 0$

Pour (D') en retenant le point C et le vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$ on obtient pour système d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Le paramètre t du point de (D') intersection avec (D) vérifie :

$(-3 + 3t) + 3(-2t) - 10 = 0$ soit : $t = -\frac{13}{3}$. En reportant on obtient les coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') : $(-16, \frac{26}{3})$

EXERCICE 27

(D') a pour vecteur directeur $\vec{v}(2, 3)$ comme $\vec{v}' = -\vec{v}$, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont colinéaires et (D) et (D') sont parallèles. Comme de plus le point A n'appartient pas à (D') les droites (D) et (D') ne sont pas confondues.

Autres solutions :

(D) admet pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et en reportant dans l'équation cartésienne de (D') , on obtient l'équation :}$$

$3(4 - 2t) - 2(-1 - 3t) + 1 = 0$ qui n'admet pas de solution.

EXERCICE 28

(D) admet pour vecteur directeur $\vec{v}(2, -1)$. (D') admet pour vecteur directeur $\vec{v}'(-4, 2)$. Ces vecteurs étant colinéaires, les droites (D) et (D') sont parallèles. De plus (D) passe par le point A (3, 1) qui appartient aussi à D' (t=1) les droites (D) et (D') sont donc confondues.

EXERCICE 29

Une équation de $\mathcal{C}$ est : $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ ou encore $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

EXERCICE 30

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre I(4 ; 1) a une équation de la forme : $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 - R^2 = 0$. A ∈ $\mathcal{C}$ donc x et y respectivement par 2 et 7 on obtient $(2 - 4)^2 + (7 - 1)^2 - R^2 = 0$; ce qui donne $R^2 = 40$.

L'équation (1) s'écrit alors : $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 23 = 0$.

EXERCICE 31

Le cercle est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $\widehat{AMB} = 90^\circ$ ou encore $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (1).

On a $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -5-x \\ 2-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 6-x \\ 4-y \end{pmatrix}$.

La relation (1) devient :

$(-5-x)(6-x) + (2-y)(4-y) = 0$ ce qui donne $x^2 + y^2 - x - 6y - 22 = 0$.

EXERCICE 32

On a $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 - 12$
 $= (x+2)^2 + (y-3)^2 - 25$

L'équation (1) s'écrit donc : $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ qui est une équation de cercle de centre $I(-2 ; 3)$ et de rayon $R = \sqrt{25} = 5$.

THÈME 9 : Produits scalaires

ENONCES

EXERCICE 1

Calculer le produit $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans le cas suivant :

$\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ avec $\vec{a} = 2$, $\vec{b} = 3\vec{a} + \vec{b}$ avec $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

EXERCICE 2

1° Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ de normes respectives $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$ forment un angle de $\frac{5\pi}{6}$. Calculer le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{U}'$

2° Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ de normes respectives de 3 et 2 ont pour produit scalaire -3.

- Quel est l'angle α des deux vecteurs compris entre 0 et π ?

EXERCICE 3

On donne trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 2$

- 1° calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

- 2° Calculez $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

EXERCICE 4

Soit un parallélogramme ABCD. Démontrez la relation : $AC^2 + DB^2 = 2(AB^2 + BC^2)$

EXERCICE 5

Soit dans un cercle O, une corde [BC] et le diamètre [AD] perpendiculaire à [BC]. Soit un point M de la droite (BC) ; la droite (AM) recoupe le cercle O en M'

1° Montrez que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$

2° montrez que $\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{AM} = AB^2$

EXERCICE 6

Soit deux points distinct A et B, soit O le milieu de (A,B)

1° Montrez que pour tout point M, on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - \frac{AB^2}{4}$$

2° Quel est l'ensemble des points M tels $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = K$ (Réel donné) ?

EXERCICE 7

On donne un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O. Soit H le point défini par la relation :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Démontrez que H est l'orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE 8

Dans un triangle ABC on donne : $b = \sqrt{6}$ $c = \sqrt{3} + 1$, $\hat{A} = 45^\circ$

Calculer le côté a et les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

EXERCICE 9

On donne un triangle ABC rectangle en A et isocèle ($AB = AC = a$). Construisez les points A', B' et C' tels que :

$$\overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

1° Montrez que $\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2° Montrez que le triangle A'B'C' est rectangle et isocèle

EXERCICE 10

Soit un triangle ABC et soit H le projeté de A sur (BC)

1° Montrez que $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BH} = BA^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ (1)

2° Déduisez-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BA^2 = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BH}$.

EXERCICE 11

Soit un triangle ABC et H le projeté orthogonal de A sur (BC)

1° Montrez que $\overrightarrow{AH}^2 = -\overrightarrow{HB} \times \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (1).

2° Déduisez-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$$AH^2 = -\overrightarrow{HB} \times \overrightarrow{HC}$$

EXERCICE 12

Soit deux points A et B et O le milieu de (A,B)

1° Démontrez que $MA^2 - MB^2 = 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$

2° Déduisez en l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 4$

EXERCICE 13

Soit un cercle $\mathcal{C}(O,R)$ et un point M distinct de O. Trouvez l'ensemble des points N du plan tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = R^2$ étudiez le cas où $M \in \mathcal{C}$

EXERCICE 14

Soit deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1° a) Montrez que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v}$.

b) Déduisez-en que les diagonales d'un parallélogramme ABCD ont même longueur si et seulement si ce parallélogramme a un angle droit.

2° a) Montrez que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si $(\vec{u} + \vec{v})$ orthogonal à $(\vec{u} - \vec{v})$

b) déduisez-en qu'un parallélogramme ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

EXERCICE 15

Soit un triangle ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) et soit O le milieu de [BC]. On construit extérieurement au triangle ABC les triangles BAM et CAN isocèles et rectangles en A.

1° a) Montrez que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM}$;

b) Montrez que $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ (on pourra observer que $\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ et que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$)

Que représente la droite (AO) pour le triangle AMN ?

2° a) Montrez que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$. Déduisez-en que $(BN) \perp (CM)$. Montrez que $BN = CM$.

b) soit I et J les milieux respectifs de [BM] et [CN]. Montrez que le triangle IOJ est rectangle et isocèle.

SOLUTIONS**EXERCICE 1**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a}^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2.$$

$$\text{Or : } \vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2 = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = -1, \vec{b}^2 = \|\vec{b}\|^2 = 9$$

$$\text{Donc : } \vec{u} \cdot \vec{v} = 12 + 1 - 3 - 9 = 1$$

Méthode : si deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U'}$ ont pour normes $\|\vec{U}\|$ et $\|\vec{U'}\|$, pour angles α , pour produit scalaire P, la relation $P = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{U'}\| \cdot \cos\alpha$ permet, connaissant trois des quatre nombres P, $\|\vec{U}\|$, $\|\vec{U'}\|$ et α , de calculer le quatrième.

1° on a : $\vec{U} \cdot \vec{U'} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{U'}\| \cdot \cos \frac{5}{6} \pi$. Or $\frac{5}{6} \pi$ étant le supplément de $\frac{\pi}{6}$, on a

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

2° la relation $-3 = 3 \times 2 \times \cos \alpha$ donne $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ d'où, puisque α est saillant : $\alpha = \frac{2}{3}\pi$

$$1^\circ \overrightarrow{BA} . \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB}) . \overrightarrow{AC} = [(-1) \overrightarrow{AB}] . \overrightarrow{AC}$$

2° Remplaçons $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ pour faire apparaître les produits scalaires connus :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = -5 + 4 = -1$$

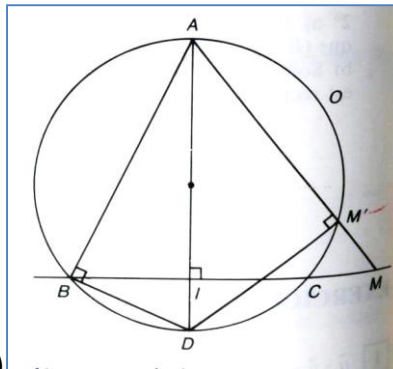
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \text{signifie que } AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \Rightarrow DB^2 = AB^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

EXERCICE 5

1° Le point I intersection de (AD) et (BC) est le projeté orthogonal de M (et de B) sur (AD). Le produit scalaire de deux vecteurs étant égal à la mesure algébrique de l'un par la projection de l'autre sur lui on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AI} \end{aligned} \right\}$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (1)$$

2 ° [AD] étant le diamètre on a:

$$\widehat{ABD} = \widehat{AM'D} = 90^\circ$$

Donc en utilisant le même théorème qu'au 1°, on peut écrire : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \overline{AM'} \times \overline{AM}$ et

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overline{AB} \times \overline{AB} = AB^2$$

D'où en tenant compte de (1) : $\overline{AM'} \times \overline{AM} = AB^2$

EXERCICE 6

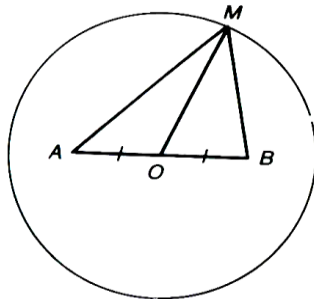
$$1^\circ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$$

$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$$

$$= MO^2 - OA^2 = OM^2 - \frac{AB^2}{4}$$

2 On a les équivalences:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = K \quad OM^2 - \frac{AB^2}{4} = K \Leftrightarrow OM^2 - \frac{AB^2}{4} = K.$$



$$\Leftrightarrow OM^2 = K + \frac{AB^2}{4}. \quad \text{Il ya deux cas : Si } K + \frac{AB^2}{4} \geq 0 \text{ (ou } K \geq -\frac{AB^2}{4} \text{),}$$

l'ensemble des points M est le cercle de centre O de rayon $\sqrt{K + \frac{AB^2}{4}}$. Ce cercle est

réduit au singleton $\{O\}$ si $K = -\frac{AB^2}{4}$.

Si $K + \frac{AB^2}{4} < 0$ ou $(K < -\frac{AB^2}{4})$, la relation $OM^2 = K + \frac{AB^2}{4}$ ne peut avoir lieu. L'ensemble cherché est l'ensemble vide.

EXERCICE 7

Cherchons à montrer que (AH) est une hauteur en calculant le produit scalaire

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

On a :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

On a donc

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = OC^2 - OB^2 = R^2 - R^2 = 0 \text{ et, par suite } (AH) \perp (BC). \text{ Ainsi}$$

(AH) est hauteur ; on montre de manière analogue que (BH) et (CH) sont hauteurs, donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE 8

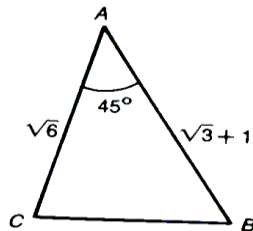
On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ d'où en élevant au carré :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Soit :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$= 6 + 3 + 1 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$



D'où : $a=2$

On a de même :

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$ d'où :

$$\cos \hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{4 + 2\sqrt{3} + 4 - 6}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où } \hat{B} = 60^\circ.$$

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$. Ainsi $a = 2$, $\hat{B} = 60^\circ$ et $\hat{C} = 75^\circ$.

EXERCICE 9

$$1^\circ \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB'}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB})$$

$$\text{De même } \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CC'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

2° Formons le produit scalaire $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \right) \\ &= \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{16}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{9}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2 \end{aligned}$$

Or : $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = a^2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ puisque $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Donc : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0$; par suite : $\overrightarrow{A'B'} \perp \overrightarrow{A'C'}$ et le triangle $A'BC'$ est rectangle en A' .

D'après le théorème de Pythagore :

$$A'B'^2 = AA'^2 + AB'^2 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{17}{9}a^2$$

$$A'C'^2 = A'C^2 + CC'^2 = \frac{16}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 = \frac{17}{9}a^2, \text{ d'où : } A'B' = A'C'$$

Le rectangle $A'B'C'$ est donc isocèle (et rectangle).

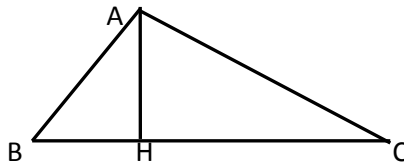
EXERCICE 10

1° Le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH}$ est égal au produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\text{Or : } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = BA^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

2° Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire d'après la relation (1): $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = BA^2$

**EXERCICE 11**

1° Faisons apparaître H dans $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en écrivant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} \quad (2) \end{aligned}$$

Or (produit scalaire de vecteurs orthogonaux) :

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \text{ et la relation (2) s'écrit :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}, \text{ D'où : } \overrightarrow{AH}^2 = -\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

2° Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si :
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire (1) : $\overrightarrow{AH}^2 = -\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$

EXERCICE 12

$$1^\circ \text{ on a : } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

$$\text{Or : } \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{MO} = -2\overrightarrow{OM}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Vous pouvez retrouver ce résultat en partant de l'égalité :

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2$$

et en développant le second membre.

2° Si H est le projeté orthogonal de

M sur (AB), on a :

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH},$$

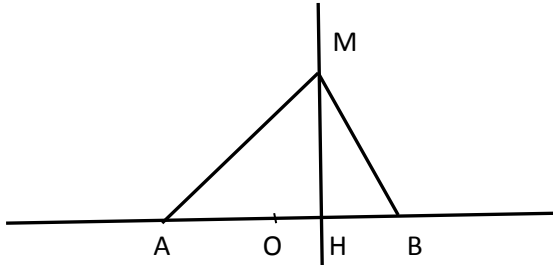
D'où les équivalences :

$$MA^2 - MB^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{AB} \times \overline{OH} = 4 \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{2}{\overline{AB}}$$

Cette dernière égalité détermine un point H et un seul.

L'ensemble cherché est la perpendiculaire à (AB) au point fixe H.



EXERCICE 13

Soit H le projeté orthogonal de N sur la droite (OM).

Comme $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overline{OM} \times \overline{OH}$, on a ainsi $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = R^2 \Leftrightarrow \overline{OM} \times \overline{OH} = R^2$

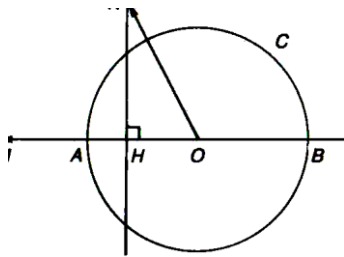
$$\Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{R^2}{\overline{OM}} \quad (1)$$

Le point H existe (car $\overline{OM} \neq 0$) et est fixe (car $\frac{R^2}{\overline{OM}}$ est constant)

L'ensemble des points N est donc la droite D perpendiculaire à (OM) en H

Défini par la relation (1).

Si $M \in C$, H est en M ; la droite D est la tangente en M à C.



EXERCICE 14

1° a) Equivalence $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

L'égalité $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ est équivalente à : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$ ou, en développant :

$$\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}, \text{ soit encore : } 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ qui est vérifiée}$$

si, et seulement si, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) Application au parallélogramme ABCD

$$\text{On a : } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

Les longueurs AC et BD sont égales si et seulement si, $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|$, c'est-à-

dire, d'après le 1° $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. On redémontre ainsi ce résultat classique : un parallélogramme est un rectangle si, et seulement si, ses diagonales ont même longueur.

2° a) Equivalence $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$

L'égalité $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ est équivalente à : $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$, c'est-à-dire : $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$ qui s'écrit $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$ ou encore : $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

Nous vous conseillons de retrouver ce résultat après avoir posé :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{U}, \quad \vec{u} - \vec{v} = \vec{V}, \quad \text{d'où :}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{U} + \vec{V}), \quad \vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{U} - \vec{V})$$

Et en appliquant le 1^{er} a aux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

b) Application au parallélogramme ABCD

Les longueurs AB et AD sont égales si, et seulement si, $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\|$, c'est-à-dire,

d'après le 2^o a : $(\vec{AB} + \vec{AD}) \perp (\vec{AB} - \vec{AD})$ ou encore : $\vec{AC} \perp \vec{DB}$.

On redémontre ainsi ce résultat classique : un parallélogramme est un losange si, et seulement si, ses diagonales sont perpendiculaires.

EXERCICE 15

1^o a) Relation $\vec{AB} \cdot \vec{AN} = \vec{AC} \cdot \vec{AM}$

On a : $\vec{AB} \cdot \vec{AN} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AN}\| \times \cos \widehat{BAN}$ (1)

$\vec{AC} \cdot \vec{AM} = \|\vec{AC}\| \times \|\vec{AM}\| \times \cos \widehat{CAM}$ (2)

Or $\widehat{BAN} = \widehat{CAM} = 90^\circ + \widehat{BAC}$.

Les seconds membres de (1) et (2) sont égaux, donc aussi les premiers. Ainsi :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AN} = \vec{AC} \cdot \vec{AM}.$$

b) relation $\vec{OA} \cdot \vec{OM} = 0$

Construisons le parallélogramme ABCD. Le vecteur

$\vec{AD}$ est la somme des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ donc $\vec{AO} = \frac{\vec{AD}}{2} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$

D'autre part

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} + \vec{AN} - \vec{AM}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{OA} \cdot \vec{MN} &= \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \cdot (\vec{AN} - \vec{AM}) \\ &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AN} + \vec{AC} \cdot \vec{AN} - \vec{AB} \cdot \vec{AM} - \vec{AC} \cdot \vec{AM}}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

Or après le paragraphe a : $\vec{AB} \cdot \vec{AN} - \vec{AC} \cdot \vec{AM} = 0$; D'autre part

$\vec{AC} \cdot \vec{AN} = 0$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0$ (produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires)

. (3) donne alors : $\vec{AO} \cdot \vec{MN} = 0$. la droite (AO) est donc perpendiculaire à la droite (MN)

Ainsi la droite (AO) est la hauteur issue de A dans le triangle AMN.

2^o a) Relation $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{BN} \cdot \vec{CM} = 0$

On a : $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = AM \times AN \times \cos \widehat{MAN}$. Or $AM = AB$, $AN = AC$ et l'angle $\widehat{MAN}$ est supplémentaire de $\widehat{BAC}$, donc

$$\vec{AM} \cdot \vec{AN} = AB \times AC \times \cos(180^\circ - \widehat{BAC})$$

$$= -AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC}.$$

$$\text{Ainsi : } \vec{AM} \cdot \vec{AN} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} \quad (4)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) \\
 &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 + 0 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

Orthogonalité des segments $[BN]$ et $[CM]$

Comme $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$, On a : $(BN) \perp (CM)$

Egalité $BN = CM$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \text{ d'où } BN^2 = BA^2 + AN^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AN} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \text{ d'où } CM^2 = CA^2 + AM^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AM} \quad (4)$$

Les seconds membres des égalités (3) et (4) sont égaux car $BA^2 = AM^2$, $AN^2 = CA^2$,

et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AM}$ (Puisque d'après le 1° a) leurs opposés respectifs

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM}$ sont égaux).

Ainsi $BN^2 = CM^2$, donc $BN = CM$.

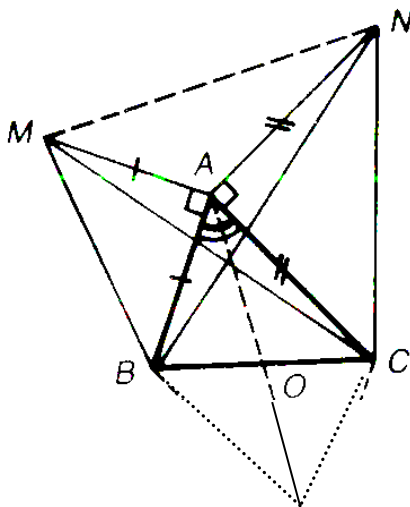
b) Nature du triangle OIJ

Dans le triangle BCN, O et J sont les milieux des côtés $[BC]$ et $[CN]$, donc :

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{BN}}{2} \text{ De même : } \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{CM}}{2}$$

Comme $(BN) \perp (CM)$ et $BN = CM$, on a : $(OJ) \perp (OI)$ et $OJ = OI$.

Le triangle OIJ est donc isocèle et rectangle en O.



THÈME 10 : Barycentre

ÉNONCÉS

EXERCICE 1

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de [AB]. On sait que si $a=b$, alors I est le barycentre du système (A,a) ; (B,b), avec $a+b \neq 0$. La réciproque de cette propriété est-elle exacte ?

EXERCICE 2

Soit I le milieu d'un segment [AB]. Démontrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

EXERCICE 3

Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer un couple (a,b) de réels tels que le barycentre du système (A,a) ; (B,b) soit le symétrique C du point A par rapport à B.

EXERCICE 4

Soit A et B deux points distincts du plan et x un réel quelconque. On considère le barycentre G du système (A,x) ; (B,1-x). Trouver l'ensemble des points G.

EXERCICE 5

Comparer le barycentre G du système (A,a) ; (B,b) et le barycentre G' du système (B,b) ; (A,a).

SOLUTIONS

EXERCICE 1

Soit G le barycentre du système (A,a) ; (B,b). On $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, donc $G=I$ implique que $\frac{b}{a+b} = \frac{1}{2}$ ce qui donne $a=b$. La réciproque est bien exacte ; autrement dit, le barycentre du système (A,a) ; (B,b) est le milieu de [AB] si et seulement si $a=b$.

EXERCICE 2

I est le barycentre du système (A,1) ; (B,1). On a donc $(1+1)\overrightarrow{MI} = (1)\overrightarrow{MA} + (1)\overrightarrow{MB}$, d'après la réciproque fondamentale. d'où l'égalité $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

EXERCICE 3

Soit G le barycentre du système considéré, avec $a+b \neq 0$.

On a $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$. D'autre part, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, donc $G=C$ implique que $\frac{b}{a+b} = 2$ ce qui donne $b=-2a$.

On peut prendre, par exemple (a,b)=(1,-2)

EXERCICE 4

Pour tout point M du plan on a : $[x+(1-x)]\overrightarrow{MG} = x\overrightarrow{MA} + (1-x)\overrightarrow{MB}$.

Si $M=B$, on obtient : $\overrightarrow{BG} = x\overrightarrow{BA}$. Il en résulte que l'ensemble des points G est la droite (AB).

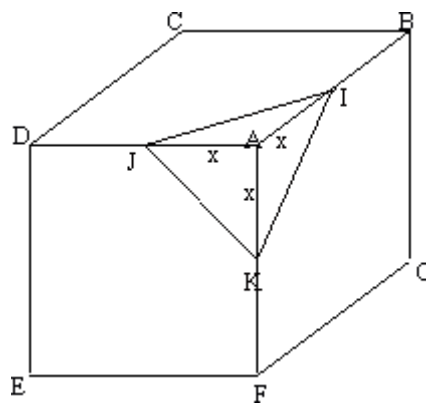
EXERCICE 5

$G=G'$ car pour un point O quelconque du plan on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}}{a+b}$; $\overrightarrow{OG'} = \frac{b\overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{OA}}{b+a}$ d'où $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'}$.

THÈME 11: Géométrie dans l'espace**ENONCES****EXERCICE 1**

Section d'un cube

Sur les arêtes d'un cube, on marque les points I, J, K tels que : $AI = AJ = AK = x$, où x est un réel donné strictement positif et strictement inférieur à la longueur a de l'arête du cube.

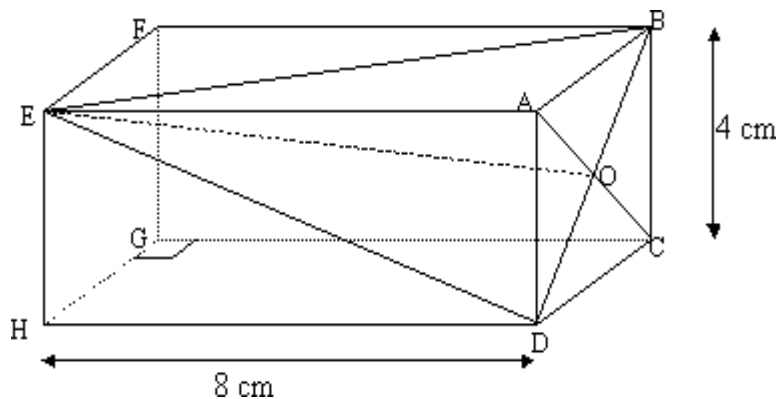


1. Pourquoi le triangle IJK est-il équilatéral ? Calculer son aire.
2. Comment appelle-t-on le solide AIJK ? Calculer son volume.
3. La perpendiculaire menée par A au plan (IJK) coupe ce plan en H. Calculer AH en fonction de x .

EXERCICE 2

Pavé et pyramide

Voici le dessin, en perspective cavalière, d'un parallélépipède rectangle de 8cm de longueur. La face ABCD est un carré de 4cm de côté et de centre O.



1. Calculer les distances BD, DE et EB.
2. Que dire du triangle EBD ?
3. Pourquoi la droite (EO) est elle perpendiculaire à la droite (BD) ?
Calculer EO.
4. On considère la pyramide de sommet E et de base le carré ABCD. Calculer le volume de cette pyramide.

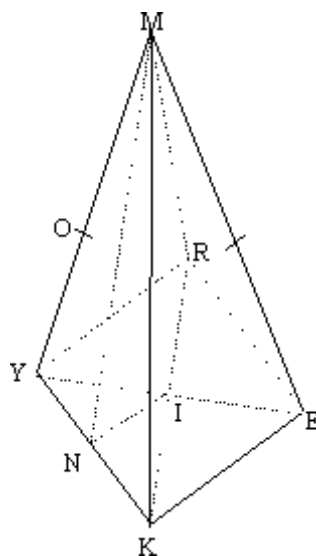
EXERCICE 3

La pyramide Mykérinos

MYKER est une pyramide de sommet M, de base carrée et telle que M se projette orthogonalement en le centre I du carré YKER.

N est le milieu de [YK], O le milieu de [YM].

Le côté du carré de base a pour longueur 108,5 m ; la longueur d'une arête est de 101,2 m.

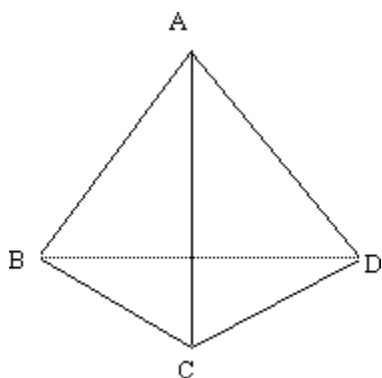


1. Calculer la hauteur MI de la pyramide.

2. Calculer la mesure en degrés des angles $\widehat{MKI}$ et $\widehat{MKY}$.
3. Démontrer que (YK) est perpendiculaire au plan (MNI) .
4. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{MNI}$.
5. Démontrer que (YE) et (MK) sont orthogonales.

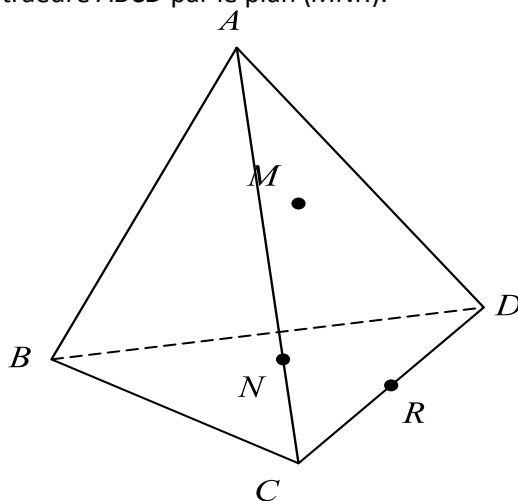
EXERCICE 4

$ABCD$ est un tétraèdre dont les faces sont des triangles équilatéraux. Démontrer que les arêtes opposées (celles qui ne se coupent pas) sont orthogonales.



EXERCICE 5

$ABCD$ est un tétraèdre. M est un point de la face ABD , N un point de $[AC]$ et R un point de $[CD]$. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (MNR) .

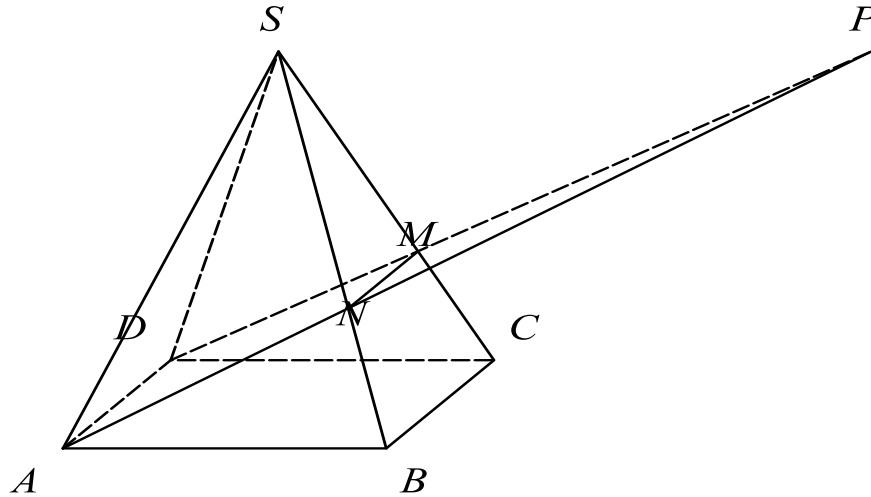


EXERCICE 6

$SABCD$ est une pyramide de sommet S et dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. M est un point de l'arête $[SC]$, N est un point de l'arête $[SB]$, et (MN) est parallèle à (BC) .

1. Montrer que (AD) et (MN) sont parallèles.
2. Dans le plan (ADM) , les droites (AN) et (DM) se coupent en P .
 - a. Démontrer que P appartient à chacun des plans (SAB) et (SDC) .

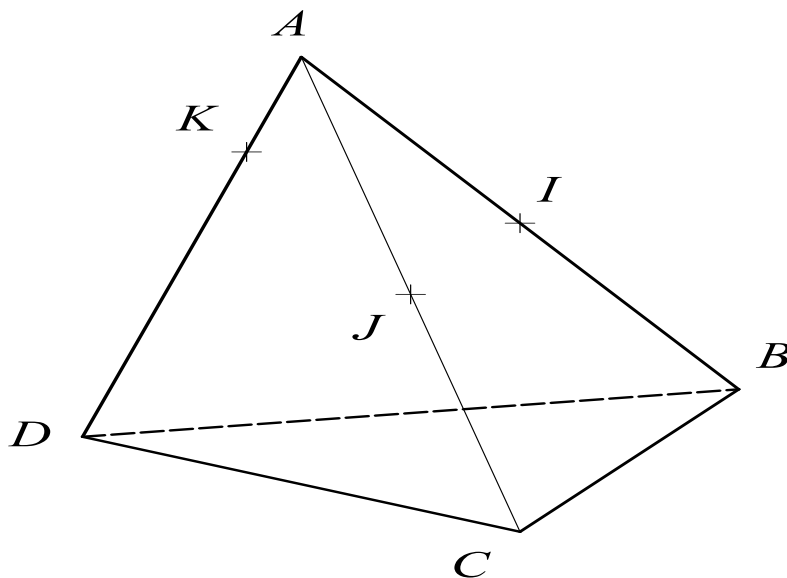
- b. Pourquoi la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est-elle la droite (SP) ?
 3. En déduire que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD) .



EXERCICE 7

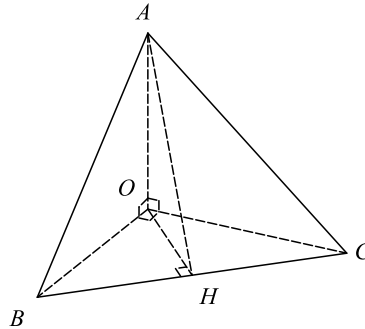
$ABCD$ est un tétraèdre. I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[AC]$ et K est le point de $[AD]$ tel que $AK = \frac{1}{4} AD$.

1. Démontrer que (IJ) est parallèle (BC) .
2. Tracer l'intersection (d) des plans (IJK) et (BDC) .
3. Démontrer que (d) est parallèle aux droites (IJ) et (BC) .



EXERCICE 8

$OABC$ est un tétraèdre dont les faces OAB , OAC et OBC sont des triangles rectangles isocèles en O , et ABC est un triangle équilatéral. On pose $OA = OB = OC = a$ (on a donc $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$).



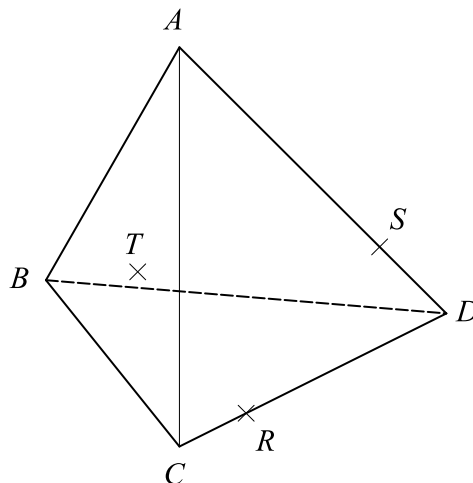
1. Démontrer que la droite (OA) est orthogonale au plan (OBC) .
2. Calculer en fonction de a le volume du tétraèdre $OABC$.
3. H est le pied de la hauteur issue de O dans OBC (H est donc le milieu de $[BC]$).

Exprimer OH en fonction de a , puis montrer que $AH = a \frac{\sqrt{6}}{2}$.

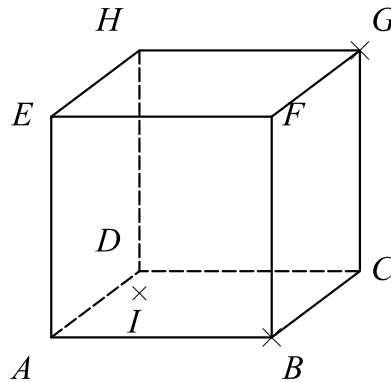
4. Calculer l'aire du triangle ABC .
5. Dédire des questions 2. et 4. la longueur de la hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$.

EXERCICE 9

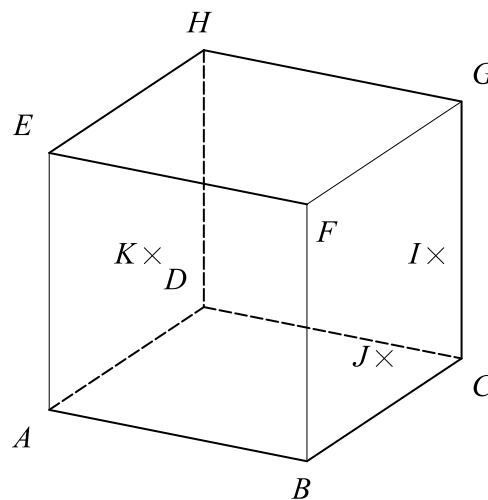
1. $ABCD$ est un tétraèdre, $T \in (ABC)$, $S \in [AD]$ et $R \in [CD]$. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (RST) .



2. $ABCDEFGH$ est un cube, et I est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IBG) .



3. $ABCDEFGH$ est un cube, I et J sont dans la face $BCGF$, et K est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IJK) .



SOLUTIONS

EXERCICE 1

1. Dans les triangles AIJ, AIK et AJK rectangles en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$JI^2 = AI^2 + AJ^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$IK^2 = AI^2 + AK^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$JK^2 = AJ^2 + AK^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$

Ainsi : $IJ^2 = IK^2 = JK^2$, d'où $IJ = IK = JK$ donc le triangle IJK est équilatéral.

Soit L le pied de la hauteur issue de I dans le triangle IJK.

Le triangle IJK est équilatéral, donc : $IL = \frac{JK\sqrt{3}}{2}$. Or $JK^2 = 2x^2$ donc $JK = x\sqrt{2}$. D'où

$$IL = \frac{x\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{6}}{2}.$$

$$A_{IJK} = \frac{IL \times JK}{2}$$

$$A_{IJK} = \frac{x\sqrt{2} \times \frac{x\sqrt{6}}{2}}{2}$$

$$A_{IJK} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

2. AIJK a quatre faces, donc c'est un tétraèdre.

$$V_{AIJK} = \frac{1}{3} \times A_{AIJ} \times AK$$

$$V_{AIJK} = \frac{1}{3} \times \frac{AI \times AJ}{2} \times AK$$

$$V_{AIJK} = \frac{1}{3} \times \frac{x \times x}{2} \times x$$

$$V_{AIJK} = \frac{x^3}{6}$$

3. [AH] est une hauteur du tétraèdre AIJK donc :

$$V_{AIJK} = \frac{1}{3} \times A_{IJK} \times AH$$

$$V_{AIJK} = \frac{1}{3} \times \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \times AH$$

$$V_{AIJK} = \frac{x^2\sqrt{3}}{6} \times AH$$

$$\text{Or } V_{AIJK} = \frac{x^3}{6}, \text{ donc } \frac{x^3}{6} = \frac{x^2\sqrt{3}}{6} \times AH$$

$$\text{donc : } AH = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

EXERCICE 2

1. [BD] est une diagonale du carré ABCD, donc $BD = BC\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm.

Dans ABE et ADE rectangles en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$BE^2 = AE^2 + AB^2 \text{ et } DE^2 = AE^2 + AD^2$$

$$BE^2 = 8^2 + 4^2 \text{ et } DE^2 = 8^2 + 4^2$$

$$BE^2 = 80 \text{ et } DE^2 = 80$$

$$BE = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm et } DE = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm.}$$

2. Ainsi, $BE = DE = 4\sqrt{5}$ cm. Donc le triangle BDE est isocèle en E.

3. ABCD est un carré donc ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu. Donc O milieu de [BD]. D'où, dans le triangle BDE, [EO] est une médiane. Or le triangle BDE est isocèle en E donc [EO] est aussi une hauteur. D'où (EO) perpendiculaire à (BD).

$$\text{O milieu de [BD] donc } BO = \frac{BD}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Dans le triangle BEO rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
 BE^2 &= BO^2 + EO^2 \text{ donc : } EO^2 = BE^2 - BO^2 \\
 EO^2 &= (4\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2 \\
 EO^2 &= 72 \\
 EO &= \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad V_{EABCD} &= \frac{1}{3} \times A_{ABCD} \times EA \\
 V_{EABCD} &= \frac{1}{3} \times BC^2 \times EA \\
 V_{EABCD} &= \frac{1}{3} \times 4^2 \times 8
 \end{aligned}$$

$$V_{EABCD} = \frac{128}{3} \text{ cm}^3$$

EXERCICE 3

1. Hauteur de la pyramide :

IK est la moitié de la longueur de la diagonale du carré YKER de côté 108,5 m, donc $IK = \frac{108,5 \times \sqrt{2}}{2} = 54,25\sqrt{2}$ m.

Dans le triangle MIK rectangle en I, on applique le théorème de Pythagore :

$$MK^2 = MI^2 + IK^2$$

$$MI^2 = MK^2 - IK^2$$

$$MI^2 = 101,2^2 - 2 \, 943,062 \, 5 \times 2 = 4 \, 355,315$$

Donc : **MI = 66,0 m** (arrondi à 10^{-1} m).

2. ► Dans le triangle MIK rectangle en I, on a :

$$\widehat{MKI} = \frac{IK}{MK} = \frac{54,25\sqrt{2}}{101,2}$$

Donc : $\widehat{MKI} \approx 40,7^\circ$

► MYK est un triangle isocèle en M. N est le milieu de [YK], donc la droite (MN) est médiane et hauteur issue de M. Le triangle MNK est donc rectangle en N et on a :

$$\cos \widehat{MKN} = \frac{NK}{MK} = \frac{54,25}{101,2}$$

Donc : $\widehat{MKY} \approx 57,6^\circ$

3. On a vu que la droite (MN) est la hauteur issue de M du triangle MYK, donc la droite (YK) est perpendiculaire à la droite (MN).

I est le point d'intersection des diagonales du carré YKER, donc $YI = IK$. Le triangle YIK est donc isocèle en I. N est le milieu du segment [YK], donc (IN) est la médiane et la hauteur du triangle YIK issue de I. Les droites (YK) et (IN) sont donc perpendiculaires.

D'où : la droite (YK) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (MNI), (YK) est donc perpendiculaire au plan (MNI).

4. Calculons la mesure de l'angle $\widehat{MNI}$:

Dans le triangle MNI rectangle en I, on a :

$$\tan \widehat{MNI} = \frac{MI}{NI} = \frac{66}{54,25}$$

Donc $\widehat{MNI} \approx 50,6^\circ$.

5. Comme les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu et perpendiculairement, alors les droites (YE) et (IK) sont perpendiculaires.

(MI) est la hauteur de la pyramide MYKER et (YE) appartient à la base de cette pyramide, donc les droites (YE) et (MI) sont perpendiculaires.

Donc : la droite (YE) est perpendiculaire à la face (MIK) et donc orthogonale à toute droite appartenant à cette face, en particulier (MK).

D'où : **les droites (YE) et (MK) sont orthogonales.**

EXERCICE 4

Pour démontrer que l'arête (AB) est orthogonale à l'arête (CD), il suffit de montrer que (CD) est orthogonale à un plan P qui contient (AB).

Mais quel plan P choisir ?

Comment trouver des droites orthogonales à la droite (CD) ?

Le fait que toutes les faces soient des triangles équilatéraux devant être utilisé, considérons le milieu M de [CD].

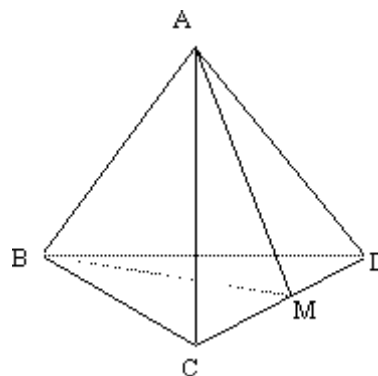
ACD est un triangle équilatéral, donc la médiane (AM) est aussi hauteur, donc (AM) perpendiculaire à (CD).

De même, puisque le triangle BCD est équilatéral, on a : (BM) perpendiculaire à (CD).

Le plan (ABM) contient donc deux droites sécantes perpendiculaires à (CD); il est par conséquent perpendiculaire à (CD).

Puisque (AB) est dans ce plan, (AB) est orthogonale à (CD).

Une démonstration identique montrerait que (BC) et (AD), ainsi que (AC) et (BD) sont orthogonales.



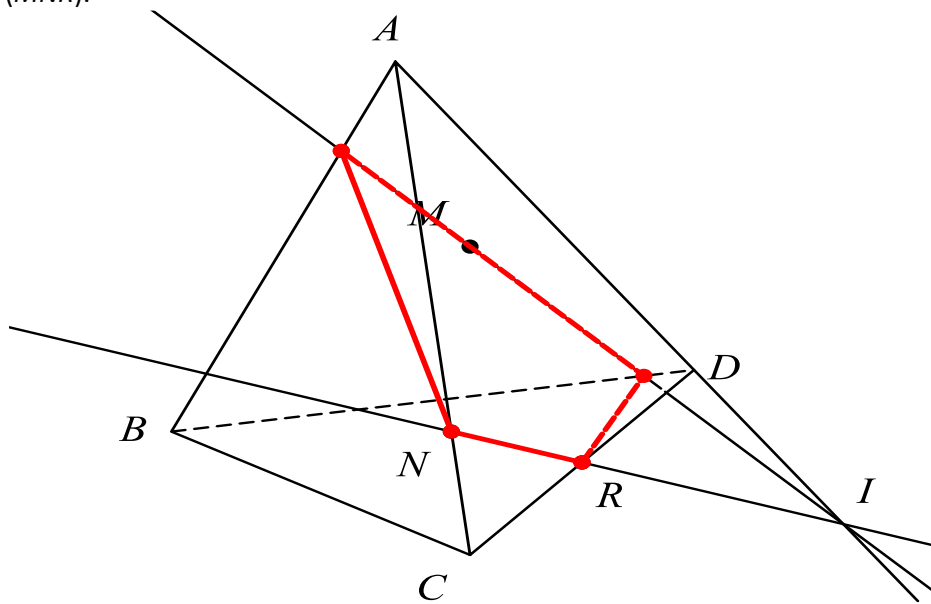
EXERCICE 5

Il est évident que la droite (NR) est l'intersection des plans (MNR) et (ACD).

M est un point de la face ABD, et les droites (NR) (de (ACD)) et (AD) (de (ABD)) se coupent en I (car sécantes dans le plan (ACD)).

La droite (MI) est donc l'intersection des plans (MNR) et (ABD).

(MI) coupe les arêtes $[BD]$ et $[AB]$, ce qui permet d'obtenir la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (MNR) .



EXERCICE 6

1. (AD) et (MN) sont parallèles à la droite (BC) , donc elles sont parallèles.

2. Dans le plan (ADM) , les droites (AN) et (DM) se coupent en P .

a. La droite (AN) appartient au plan (SAB) , donc P aussi (car $P \in (AN)$).

La droite (DM) appartient au plan (SDC) , donc P aussi (car $P \in (DM)$).

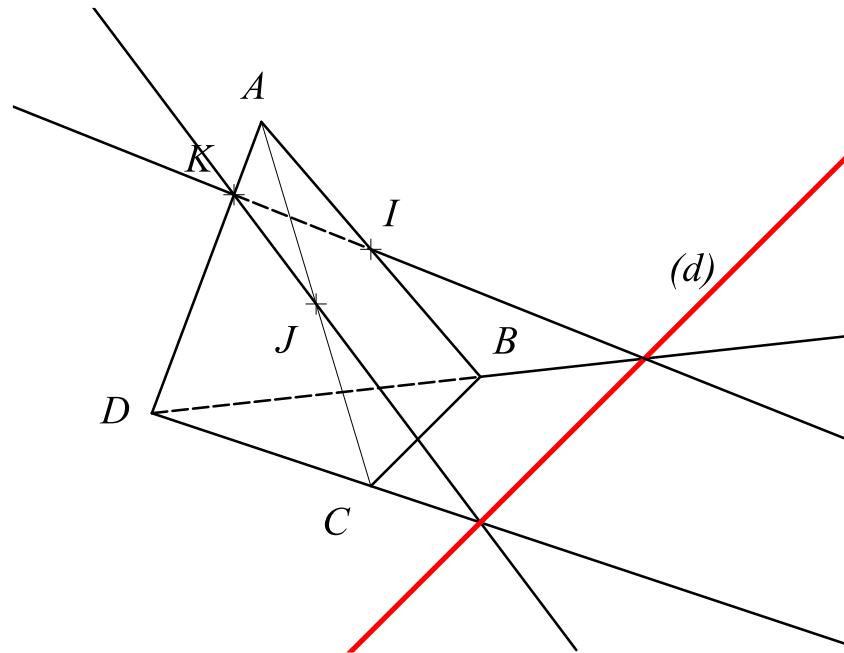
b. S et P appartiennent aux plans (SAB) et (SDC) , donc la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est la droite (SP)

c. (AB) (du plan (SAB)) et (CD) (du plan (SDC)) sont parallèles donc, d'après le théorème du toit, elles sont parallèles également à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la droite (SP) .

EXERCICE 7

1. Dans le triangle ABC , I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$ donc, d'après le théorème des milieux, (IJ) est parallèle (BC) .

2. Voir figure ci-contre.



3. Les plans (DCB) et (IJK) sont sécants suivant (d) . De plus, les droites (IJ) (de (IJK)) et (BC) (de (DCB)) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème du toit, (d) est parallèle aux droites (IJ) et (BC) .

EXERCICE 8

1. (OA) est perpendiculaire aux droites (OB) et (OC) (sécantes dans le plan (OBC)), donc (OA) est orthogonale au plan (OBC) .

$$2. \text{Volume}(OABC) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(OBC) \times AO = \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = \frac{a^3}{6}.$$

3. H étant le milieu de $[BC]$, $[OH]$ est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle OBC rectangle en O , donc $OH = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(OA) est orthogonale au plan (OBC) donc AOH est rectangle en O .

D'après le théorème de Pythagore : $AH^2 = AO^2 + OH^2$, $AH^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{6a^2}{4}$, $AH = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{6}}{2}$.

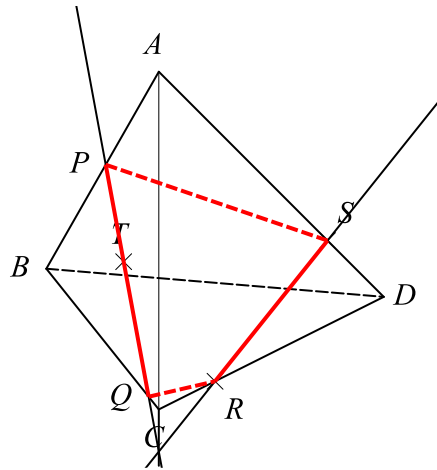
$$4. \text{Aire}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times a \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{12}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{4 \times 3}}{4} = a^2 \frac{2\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Soit h la longueur de la hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$.

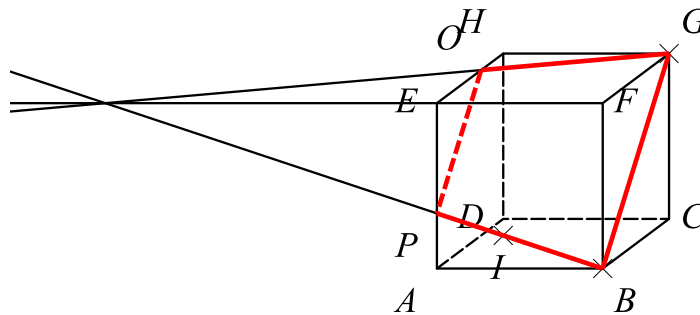
$$\text{Volume}(OABC) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABC) \times h, \text{ soit } \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times h = a^2 \frac{\sqrt{3}}{6} \times h \text{ donc } h = \frac{a^3}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

EXERCICE 9

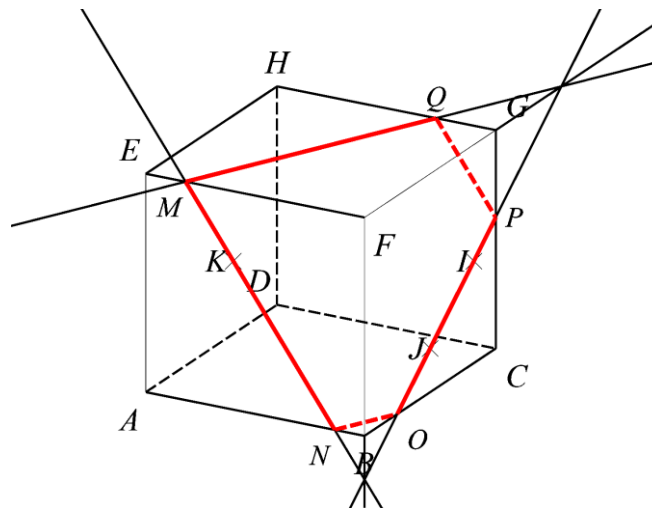
1. $ABCD$ est un tétraèdre, $T \in (ABC)$, $S \in [AD]$ et $R \in [CD]$. Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (RST) . $PQRS$ est la section cherchée.



2. $ABCDEFGH$ est un cube, et I est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IBG) . $BGOP$ est la section cherchée.



3. $ABCDEFGH$ est un cube, I et J sont dans la face $BCGF$, et K est dans la face $ABFE$. Construire la section du cube par le plan (IJK) . $MNOPQ$ est la section cherchée.



RECUEIL DE SUJETS DE DEVOIRS

DEVOIR N°1 DE MATHÉMATIQUES

Exercice1

1. Soit a un nombre différent de 0 et de -1 . On pose $A = \frac{1}{a+1} - \frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}$. Ecrivez A sous forme de

quotient.

2. Ecrire les nombres suivants sous forme de fraction irréductible :

$$a = \frac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}} \quad b = \frac{\frac{150}{71} \times \frac{13}{58}}{\frac{9}{29} \times \frac{38}{71}} \quad c = \frac{14^2 \times 121^2}{55^3 \times 49} \quad d = \frac{5}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} \times \frac{21}{3} \quad e = \frac{\frac{71}{29} \times \frac{58}{71}}{\frac{9}{29} \times \frac{19}{38}}$$

$$f = \frac{3 - \frac{5}{7} + \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{7} - \frac{1}{2}} \quad g = \frac{3}{7} \times \frac{14}{2} \times \frac{(-11)}{8} \times (-5) \times \frac{44}{55} \times \frac{2}{3}.$$

3. Simplifiez les expressions suivantes :

$$a = \frac{4}{3} + \frac{5}{4} ; b = \frac{7}{8} \times \frac{6}{13} ; c = 2 \times (3 + \frac{1}{4}) ; d = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times 9 ; e = \frac{\frac{6}{35}}{3} ; f = \frac{6}{\frac{35}{3}}$$

$$a = \frac{9}{10} - \frac{1}{100} ; b = \frac{7}{4} : \frac{35}{26} ; c = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} ; d = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} ; e = \frac{\frac{6}{35}}{\frac{3}{5}}.$$

Exercice2

1. Choisir deux nombres strictement positifs et vérifier que le quotient de leur produit par leur somme est inférieur au quart de cette somme.

2. Ce qui a été constaté sur un exemple est toujours vrai.

En effet : démontrer que si $a > 0$ et si $b > 0$ alors on a $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

3. En déduire que si $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ alors $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$.

Exercice3

L'année lumière (a.l.) est la distance parcourue par la lumière pendant une année. La vitesse de la lumière est environ $c = 300\,000$ km/s.

1. Mettre c en écriture scientifique.

- Donner une valeur approchée d'une a.l. sous la forme $n.10^p$ km où n et p sont des nombres entiers, n compris entre 0 et 9.
- On considère que une a.l. correspond environ à 10^{13} km. La distance Terre-Soleil étant d'environ 15 millions de km combien de temps la lumière met-elle pour nous parvenir du Soleil ?
- Une Unité Astronomique (U.A.) est une unité de mesure égale à la distance Terre-Soleil. Combien y-a-t'il d'U.A. dans une a.l. (environ) ?

DEVOIR N°2 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

- Si les deux inégalités $a' < a$ et $b' < b$ sont vraies, **démontrer avec soin** que l'on a alors : $a' + b' < a + b$
- Énoncer la propriété ainsi démontrée.
- On suppose que $a < b$ où a et b sont deux nombres négatifs.

En justifiant chaque étape, montrer que $-6a^2 + 1 \leq -6b^2 + 1$.

Exercice 2

En moins d'une minute donner une fraction égale à la somme

$$S = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}.$$

Indication : Calculer d'abord $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ puis $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$. Enfin, calculer S .

Exercice 3

A, B, C, D sont quatre points. Démontrer que :

- Erreur ! – Erreur ! – (Erreur ! – Erreur !) = Erreur !**
- Erreur ! + Erreur ! = Erreur ! + Erreur !.**

Exercice 4

On définit trois droites de la manière suivante :

* (D_1) passe par $A(-4 ; -1)$ et a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$;

* (D_2) passe par $B(0 ; 2)$ et $C(3 ; 0)$;

* (D_3) est parallèle à l'axe (Oy) et passe par C .

- Représenter ces trois droites.
- Ecrire une équation de chacune de ces droites.
- Déterminer leur(s) point(s) d'intersection deux à deux. Sont-elles concourantes ?

Exercice 5

Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on place le carré $OCBA$ où A a pour coordonnées $(0 ; 4)$, $B(4 ; 4)$ et $C(4 ; 0)$.

1. E le milieu de $[BC]$ et F le point tel que $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CO}$; montrer que les coordonnées de E sont $(4 ; 2)$ et celles de $F(-2 ; 0)$.

2. Calculer les longueurs AE , AF et FE ; montrer que le triangle AFE est rectangle isocèle.

3. Soit (d) la droite passant par O et parallèle à (AE) et (d') la droite (BF) . Déterminer une équation de (d) et une équation de (d') ; calculer les coordonnées de leur point d'intersection I . Tracer (d) et (d') et contrôler graphiquement votre résultat.

4. On admet que I a pour coordonnées $\left(-\frac{8}{7} ; \frac{4}{7}\right)$. Soit G le point d'ordonnée négative tel que le triangle OFG soit rectangle isocèle de sommet F . Placer G sur la figure ; déterminer les coordonnées de G et prouver que les points A , I et G sont alignés.

DEVOIR N°3 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1. a) On donne $a = 3,1415926$

$$b = 3,571428571428$$

1) Donner une valeur approchée de a et b à 10^{-4} près.

2) Est-il normal d'utiliser une valeur approchée de a à 10^{-4} près par défaut dans les calculs ? Pourquoi ?

3) a et b sont-ils rationnels ou irrationnels ?

b) Par la méthode de Dichotomie, déterminer un encadrement de $\sqrt{12}$ à 10^{-3} près.

c) Simplifier
$$A = \frac{(0,15)^3 \cdot 27^5 \cdot (0,9)^{-12}}{(-2,5)^{-5} \cdot 6^2 \cdot (-5)^{-6}}$$

Exercice 2. a) En remarquant que $x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, factoriser $x^2 - 2x - 3$.

Faites de même pour $x^2 - 4x - 5$

Donner alors le domaine de définition de $B(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$. Simplifier si possible $B(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x+7 - |3-x| = 4$

Exercice n°3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $(3x-4)^2 = x^2 + 2x + 1$

$$\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{5x}{4} + 1 \quad \frac{(x-1)^2(x+5)}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{x-5}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x(x+1)} \quad \frac{(x-1)(x+5)}{x-4} \leq 0 \quad \frac{3x-2}{2} - x > \frac{x-1}{5} + 1.$$

b) Résoudre par la méthode du déterminant dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2x-5y+8=0 \\ x+7y-15=0 \end{cases}$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x + y = -13 \\ (y-3)(y-5) = 0 \end{cases}$$

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 4 - 2x \geq 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases}$$

e) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les systèmes

$$\begin{cases} x - y + 2 < 0 \\ 3x - y + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} y < x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

DEVOIR N°4 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1. (7 points)

1 – Ecrire sous forme canonique

$$f(x) = x^2 - 6x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -2x^2 - 6x + 2$$

2 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 ; \quad x^2 + 2x + 2 = 0 ; \quad 2x^2 - 8x + 6 - 3|x-2| = 0$$

3 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$-x^2 + 3x - 5 > -9 ; \quad -x^2 + 3x - 5 \leq -3 ; \quad -9 < -x^2 + 3x - 5 \leq -3$$

4 – a) Exprimer $x^2 + y^2$ à l'aide de $(x+y)^2$ et xy b) Deux nombres sont tel que leur produit est $\frac{91}{4}$ et la somme de leurs carrésest $\frac{109}{2}$. Calculer $x + y$ puis x et y .

Exercice 2. (6 points)

1 – Soit le polynôme $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 14x - 8$ a) Vérifier que -2 est une racine de $P(x)$ b) Déterminer le polynôme q tel $P(x) = (x + 2) q(x)$ c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ 2 – Préciser dans chacun des cas suivants, pour quelle (s) valeur(s) de α lepolynôme $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$, puis déterminer le polynôme $q(x)$ tel que $P(x) = (x-1) q(x)$.a) $P(x) = 3x^2 - 2x - \alpha$ b) $P(x) = \alpha^2 x^4 - 2x^2$

Exercice 3. (7 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A ; les côtés $[AB]$ et $[AC]$ mesurent respectivement 10 cm et 4 cm. On appelle D un point du segment $[AB]$ et E un point du segment $[AC]$ tels que $BD = 2 AE$.1 – On pose $AE = x$. Exprimer l'aire $A(x)$ du triangle DAE en fonction de x .2 – Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $A(x)$, exprimée en cm^2 est égale à

$$\frac{25}{4} ?$$

3 – Démontrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0 ; 4]$

$$A(x) \leq \frac{25}{4}$$

4 – Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles :

a) $A(x) = 4$; b) $A(x) = \frac{9}{4}$

DEVOIR N°5 DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°1. (5 pts)

- a) Vérifier que -1 est racine de $-3x^3 + 10x^2 - x - 14$

En déduire par division euclidienne sa factorisation.

Résoudre alors $\frac{-3x^3 + 10x^2 - x - 14}{4x^2 - 5x + 1} \leq 0$

- b) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x}{|x-1|} \quad f_2(x) = |x| - 4x$$

$$f_3(x) = \frac{4x}{(2x-1)^2-9} \quad f_4(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$f_5(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}} \quad f_6(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$$

Exercice n°2. (7 pts)

- a) Soit $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

Montrer que f est croissante sur $] -\infty ; \frac{3}{4}]$ et décroissante sur $[\frac{3}{4} ; +\infty [$

- b) Soit $g(x) = x^2 - 5x + 4$

- i) Donner le domaine de définition de g
- ii) Calculer son taux d'accroissement r et étudier la variation de g .
Dresser son tableau de variation.
- iii) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes de coordonnées.
- iv) Calculer $f(-2)$ $f(-1)$ $f(1)$ $f(2)$ $f(3)$.
Que se passe-t-il d'après vous lorsque $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$
- v) Tracez la courbe (C_f) en positionnant bien le repère.

Exercice n°3 (8 pts)

Soit la fonction homographique $h(x) = \frac{2-x}{2+x}$

- a) Donner le domaine de définition de h
- b) Montrer que h est décroissante sur $] -\infty ; -2]$ et sur $[-2 ; +\infty [$ et dresser son tableau de variation.
- c) Déterminer les points d'intersection de la courbe C_h avec (OX) et (OY)
- d) Calculer $h(-5)$ $h(-4)$ $h(-3)$ $h(-1)$ $h(1)$ $h(3)$

Que se passe-t-il d'après vous lorsque $x \rightarrow -2$ par valeurs inférieures et par valeurs supérieures.

Ecrire $h(x)$ sous la forme $h(x) = a + \frac{b}{2+x}$ et déduire une asymptote horizontale.

e) En prenant en compte toutes les informations recueillies, tracer la courbe C_h .

DEVOIR N°6 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1. (7 pts)

1 – Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

(Ecrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles).

$$a) f(x) = 2x^2 - 3x + 4 ; \quad b) g(x) = \frac{x^2+5}{x^2-25} ; \quad c) h(x) = \frac{3x-1}{x^2+2x+2}$$

$$d) j(x) = \frac{-x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+2x+3}} ; \quad k(x) = \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} ; \quad m(x) = \frac{\sqrt{-2+|x|}}{-3+|x|}$$

2 – Après avoir préciser leur ensemble de définition, étudier la parité des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = \frac{|x|}{x^3-2x} ; \quad b) g(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|+1}} ; \quad c) h(x) = 1 - 3x^2$$

Exercice 2. (6 pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

1 – a) Déterminer le domaine de définition de $f(x)$.

b) Déterminer les réels a et b tel que $f(x) = a + \frac{b}{x+1}$

c) Montrer que f est croissante sur $] -\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; +\infty [$ puis dresser son tableau de variation.

2 – Soit (C) la courbe représentative de f .

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes (Ox) et (Oy)

b) Calculer $f(-5)$; $f(-4)$; $f(-3)$; $f(-2)$
 $f(-0,5)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$

.../...

Exercice 3. (7 pts)

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $BC = 3$; x désignant un nombre compris entre 0 et 3, placer respectivement sur $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ et $[DA]$ les points A' , B' , C' et D' tels que $AA' = BB' = CC' = DD' = x$.

1 – Montrer que l'aire $A(x)$ du quadrilatère $A'B'C'D$ est :

$$A(x) = 2x^2 - 8x + 15$$

2 – Considérons la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 15$.

- Montrer que quelque soit x , $f(x) \geq 7$
- Montrer que la fonction f est décroissante sur $[0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; 3]$. Dresser le tableau de variation de f .
- Représenter graphiquement f .

DEVOIR N°7 DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°1. (Trigonométrie)

- Placer les angles suivants sur le cercle trigonométrique :

$$\frac{8\pi}{3} ; -\frac{15\pi}{4} ; -\frac{25\pi}{2} ; \frac{22\pi}{6}$$

Calculer alors leur sinus et leur cosinus.

- Démontrer que : $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = \text{constante}$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

- Ecrire les expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

$$A(x) = 2 \cos x + 3 \cos(\pi + x) + 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$B(x) \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{31\pi}{2} - x\right) + \cos(5\pi + x) - \sin(11\pi - x)$$

- On donne $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Déterminer $\sin \frac{\pi}{8}$

Exercice n°2. (Approfondissement étude de fonction)

A°/ Tracer la courbe de $\sin x$ sur $[-\pi, \pi]$ et en déduire celle de

$$f(x) = 1 - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

B°/ Soit f la fonction définie par $f : x \rightarrow \frac{2x+1}{x-3}$

- Donner l'ensemble de définition de f
- On veut étudier la fonction f sur sa restriction à l'intervalle $I = [-5, 5]$
 - Déterminer le taux d'accroissement r de f
 - Après avoir étudié le signe de r sur I , dresser le tableau de variation de f sur I .
 - Expliquer comment les droites $x = 3$ et $y = 2$ sont asymptotes à la courbe C_f de f .
 - Représentez graphiquement la courbe C_f de f sur I .
- On donne C_g le translate de C_f par rapport au vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Déduire de C_f la courbe C_g .
- Donner l'expression de f dans le nouveau repère d'origine $\Omega(3,2)$. f est-elle paire ou impaire dans ce repère ?

Bon Courage !!!

DEVOIR N°8 DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°1.

- a) Un carré et un triangle équilatéral ont même périmètre.
Le côté du triangle mesure 12 cm de plus que celui du carré. Quelles sont les longueurs des côtés de chaque polygone ?
- b) Résoudre avec la méthode de votre choix le système
- $$\begin{cases} x - 4y + 3z = 2 \\ 3x - 4y + 5z = -1 \\ 2x + 3y + z = 5. \end{cases}$$
- c) Résoudre sur $[-2\pi, 2\pi]$
- a) $-2 \sin x = \sqrt{3}$
 b) $-\sqrt{2} \cos^2 x + \cos x + \sqrt{2} = 0$
 c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) > \cos \frac{\pi}{3}$

Exercice n°2

- a) Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, avec
 $\vec{u} (m-1 ; m+2)$ et $\vec{v} (m ; 2)$
 Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux, avec
 $\vec{u} (m-1 ; m)$ et $\vec{v} (m+2 ; 2m-1)$
- b) Soient $A(-3,1) ; B(1,5) ; C(3,-3) \in P(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 Montrer que l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que
 $2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 0$ est une droite du plan.
- c) Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1, -2)$ et $B(-1, -2)$.
 L'équation $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$ est-elle celle d'un cercle ?
- d) Soient $\vec{u} (1,3)$ et $\vec{v} (-2,4)$. Déterminer l'angle α formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère direct avec $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$
 .../...
- e) Le système suivant est celle d'une translation ou d'une homothétie ?
- $$\begin{cases} x' = -x + \frac{1}{2} \\ y' = -y - \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{Préciser les caractéristiques.}$$

Exercice n°3

- a) Soient ABC un triangle rectangle en A et isocèle ($AB = AC = 4$)
 Soit A' le milieu de $[BC]$ et M un point de $]AA'[,$
 On pose $AM = x$.

La parallèle à (BC) passant par M, coupe (AB) en N et (AC) en P.

Soit f la fonction qui à x fait correspondre la mesure du périmètre du trapèze BNPC. Calculer $f(x)$ et former le tableau de variation de f .

b) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

i) Donner l'ensemble de définition de f . Etablir que f est impaire.

ii) Calculer le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 . En déduire la variation de f sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

iii) Etablir que $\forall x$ positif on a $0 < f(x) < \frac{1}{x}$

En déduire que lorsque $x \rightarrow +\infty$ alors $y = f(x) \rightarrow 0$ et interpréter ce résultat.

iu) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et tracer la courbe de f sur $[0, +\infty[$ et par symétrie sur tout $\mathbb{R}$.

DEVOIR N°9 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Dans cet exercice, $f(x)$ est définie par une expression algébrique. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition de f .

a) $f(x) = 2x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2x} + 3x$

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{(x-4)(x+1)}$

f) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$

g) $f(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

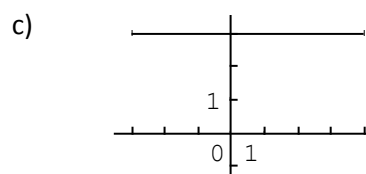
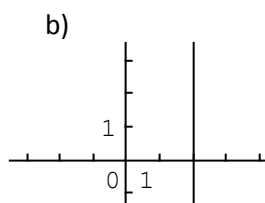
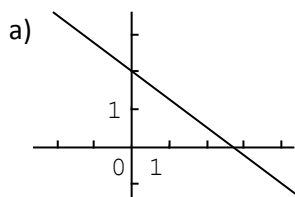
Exercice 2

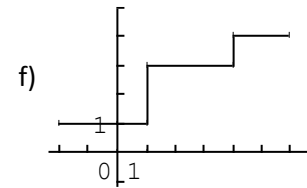
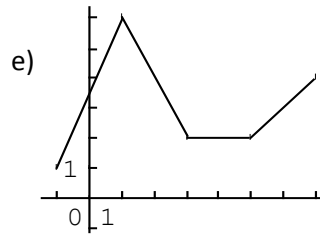
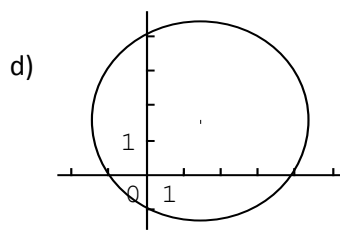
Pour chaque fonction de l'exercice précédent, déterminer lorsque c'est possible les images des nombres suivants :

0 ; 1 ; $\frac{1}{2}$; $-\sqrt{2}$; -4

Exercice 3

Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer si c'est celle d'une fonction et, dans ce cas, préciser son ensemble de définition.

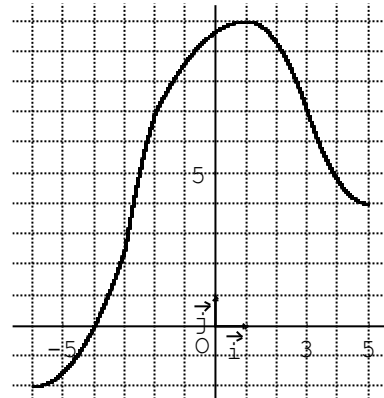




Exercice 4

Soit f la fonction représentée ci-contre.

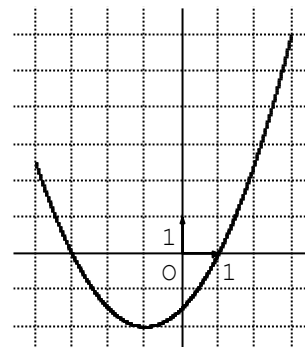
- Donner l'ensemble de définition.
- a) Lire l'image de 3 par f ; $f(1)$; $f(-4)$; $f(-2)$ et $f(5)$.
b) Lire les antécédents de 7 par f .
c) Lire les antécédents de 0 par f .



Exercice 6

La courbe C ci-contre représente dans ce repère une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$ par $f(x) = 0,5(x + 1)^2 - 2$.

- A l'aide du graphique, dire si chacun des points suivants appartient ou non à la courbe C:
A(0 ; -1,5) ; B(1 ; 0) ; C(2 ; 2) ; D(-3 ; 0) ;
E(1,5 ; 1) ; F(-1 ; -2)
- Déterminer par le calcul l'image de 0, de -1 et de $\sqrt{2}$.
Retrouver les résultats sur la courbe.
- Déterminer par le calcul les antécédents de 0, -3 et -2. Retrouver les résultats sur la courbe.



DEVOIR N°10 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 Propriété du centre de gravité d'un triangle

ABC est un triangle ; A' est le milieu de [BC].

On se propose de démontrer la propriété :

« Dire que G est le centre de gravité de ABC équivaut à dire que G est le point tel que

Erreur ! + Erreur ! + Erreur ! = Erreur !. »

1. Quelle égalité vectorielle entre **Erreur !** et **Erreur !** caractérise le centre de gravité ?

2. a) Prouver que : **Erreur ! + Erreur ! = 2Erreur !.**

b) En déduire que : « **Erreur ! = -2 Erreur !** équivaut à : **Erreur ! + Erreur ! + Erreur ! = Erreur !** ».

Conclure.

Exercice 2

ABC est un triangle tel que le point A' est le milieu de [BC], B' celui de [CA] et C' celui de [AB].

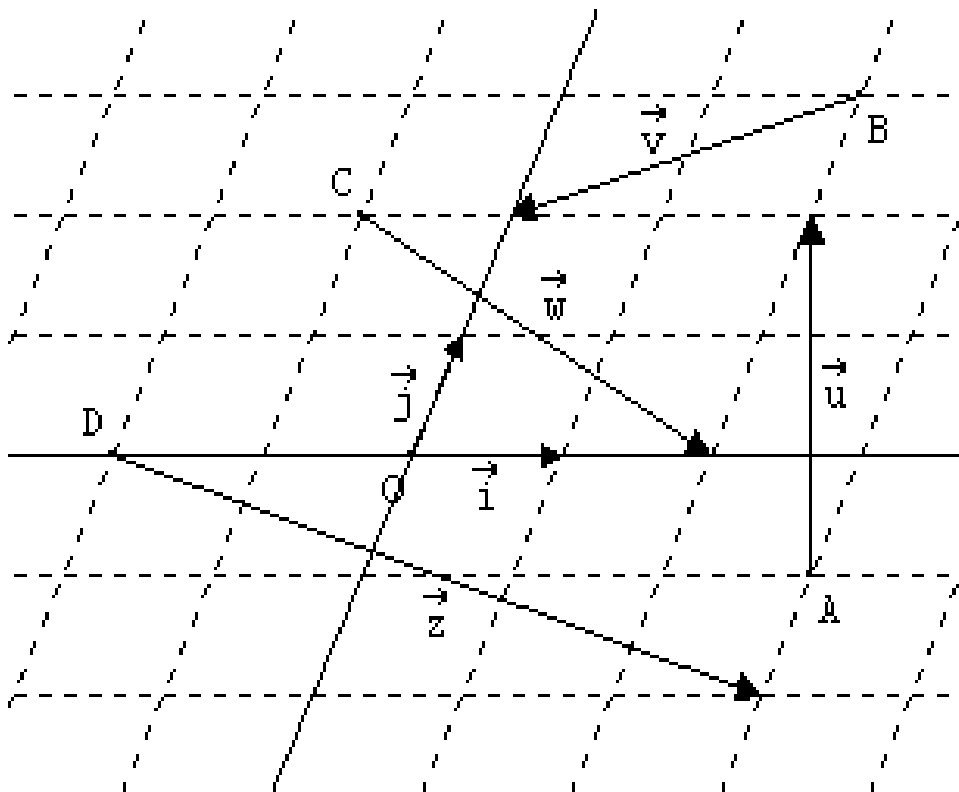
1. a) Justifier que **Erreur ! + Erreur ! = 2Erreur !.**

b) De même, exprimer **Erreur ! + Erreur !** et **Erreur ! + Erreur !** en fonction d'un seul vecteur.

2. En déduire que **Erreur ! + Erreur ! + Erreur ! = Erreur !.**

Exercice 3

Lire les coordonnées des points A, B, C, D et celles des vecteurs **Erreur !, Erreur !, Erreur !, Erreur !.**



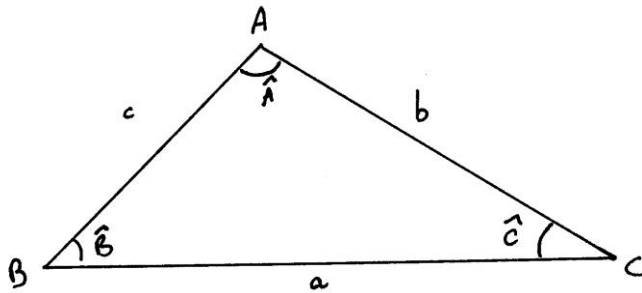
Exercice 4

Dans un repère (O ; **Erreur !**, **Erreur !**)

1. Placer les points A(4 ; 2), B(-2 ; 1), C(-3 ; 5).
2. Représenter le vecteur **Erreur !** = 2**Erreur !** – **Erreur !**.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs **Erreur !**, **Erreur !** et **Erreur !** ; déterminer alors les coordonnées du point M.

DEVOIR N°11 DE MATHÉMATIQUES

Soit le triangle quelconque suivant :



Dans ce triangle, on a les relations suivantes : (Ne cherchez pas à les retenir...)

$$(1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$(2) \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

$$(3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où } S \text{ est l'aire du triangle et } p \text{ le demi-périmètre du triangle.}$$

$$(4) S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \quad S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

$$(5) S = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Hauteur}$$

Exercice 1 J'appelle h la hauteur issue du sommet A.

Utiliser les formules ci-dessus pour calculer l'aire des triangles indiqués.

L'unité de longueur est le centimètre

$$1. a=5 \quad h=\frac{5}{2}$$

$$2. \hat{A}=90^\circ \quad b=\frac{2}{3} \quad c=\frac{5}{2}$$

$$3. a=2 \quad b=3 \quad c=4$$

$$4. a=\frac{2}{3} \quad b=\frac{1}{3} \quad c=2$$

5. $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{6}$ $c = \frac{1}{2}$

6. $\hat{A} = 60^\circ$ $\hat{B} = 60^\circ$ $c = 8$

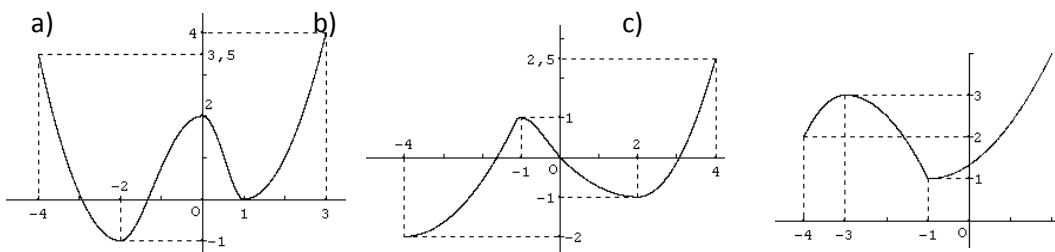
7. $\hat{A} = 30^\circ$ $b = 5$ $c = 8$

8. $\hat{A} = 45^\circ$ $\hat{B} = 100^\circ$ $\hat{C} = 35^\circ$

Exercice 2

Dans chacun des cas, la fonction est donnée par sa courbe.

Dresser son tableau de variation.



Exercice 3

Dans les deux cas suivants, tracer une courbe susceptible de représenter f à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

a) $D_f = \mathbb{R}$; $f(-4) = -3$; $f(1) = 3$; $f(4) = 2$.

Pour tout $x > 2$, $f(x) > 0$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
f		4		4	
		↗	↘	↗	↘
			1		

b) $D_f = \mathbb{R}$; $f(-1) = 0$; $f(-3) = 2$.

Pour tout $x < -3$, $f(x) < 3$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f			3	

DEVOIR N°12 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

O et A sont deux points distincts :

1. Placer les points M, N, P tels que :

a) **Erreur !** = 2**Erreur !** b) **Erreur !** = -3,5**Erreur !** c) **Erreur !** = -7**Erreur !**

2. a) Exprimer le vecteur **Erreur !** + **Erreur !** en fonction de **Erreur !**.

b) Exprimer le vecteur **Erreur !** en fonction de **Erreur !**.

Exercice 2

ABCD est un trapèze rectangle de base AD = 6 cm, CB = 2 cm, de hauteur AB = 4 cm. H est le projeté orthogonal de C sur [AD]. Un point M décrit le segment [AB] et on pose AM = x.

La parallèle à (AD) passant par M coupe [CD] en N et la parallèle à (AB) passant par N coupe [AD] en P.

1. a) Démontrer que le triangle CHD est un triangle rectangle isocèle.

b) Démontrer que AMNP est un rectangle et NPD un triangle rectangle isocèle.

2. On appelle $f(x)$ l'aire du rectangle AMNP lorsque x décrit l'intervalle $[0 ; 4]$.

a) Montrer que $f(x) = x(6 - x)$ et vérifier que $f(x) = 9 - (x - 3)^2$.

b) Compléter le tableau suivant :

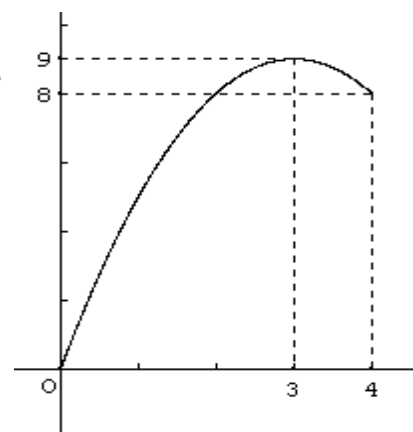
longueur AM, x	0	1	2	2,5	3	4
aire de AMNP, $f(x)$						

3. Le graphique ci-contre est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a) Lorsque $AM = \frac{1}{4} AD$, quelle est l'aire de AMNP ?

b) Pour quelle position de M l'aire du rectangle AMNP semble-t-elle maximale ?



- c) Sur quel segment faut-il choisir le point M pour que l'aire du rectangle soit supérieure ou égale à 8 cm^2 ?
- d) Vérifier qu'il existe deux points M pour lesquels l'aire du rectangle est égale à $\frac{17}{2} \text{ cm}^2$.
4. Répondre aux questions suivantes en choisissant pour $f(x)$ l'expression la mieux adaptée.
- a) Démontrer que $f(x) \leq 9$.
Peut-on affirmer cette fois que l'aire du rectangle est maximale lorsque $x = 3$? Quelle est la nature de AMNP lorsque $x = 3$?
- b) Démontrer que l'aire du rectangle AMNP est égale à $\frac{17}{2} \text{ cm}^2$ lorsque $x = \text{Erreur ! ou Erreur !}$.

Exercice3

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points $A(2 ; -4)$ et $B(4 ; 2)$

- a. Tracez la droite (AB) et expliquez comment obtenir une équation de cette droite par simple lecture graphique.
- b. Déterminez par le calcul une équation de la droite (AB).
- c. Déterminez une équation de la droite (D) parallèle à (AB) et passant par le point $C(0 ; 3)$.
- d. Déterminez une équation de la médiane issue de A dans le triangle ABC.

