163103.4

Collection
La Réussite

Mathématiques

Manuel

2nde A



Vallesse

Préacquis

Calcul littéral

Puissances

a et b sont des nombres réels non nuls. n et m sont des entiers naturels.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$
- Par convention : $a^0 = 1$.
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$;
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
- $(ab)^n = a^n \times b^n$
- $10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ fois}}$;
- $10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ fois}}$

Quotients

a, b, c et d sont des nombres réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$;
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Égalités remarquables

a et b sont des nombres réels.

Développer

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Factoriser

Racines carrés

Propriétés

a et b sont des nombres réels positifs.

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
- $(\sqrt{a})^2 = a$.
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, avec $b \neq 0$.

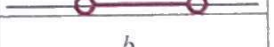
Valeur absolue d'un nombre réel

- $\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \text{ est positif} \\ |x| = -x \text{ si } x \text{ est négatif} \end{cases}$
- Si a est un nombre réel, alors $\sqrt{a^2} = |a|$.

Calcul numérique

Intervalles

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Le tableau ci-dessous résume des types d'intervalles, leurs lectures, leurs significations et leurs représentations graphiques sur une droite graduée.

Intervalle	Lecture	Ensemble des réels x tels que :	Représentation sur la droite réelle
$[a\,;\,b]$	Intervalle fermé a ; b.	$a \leq x \leq b$	
$[a\,;\,b[$	Intervalle a, b ; fermé en a et ouvert en b	$a \leq x < b$	
$]a\,;\,b[$	Intervalle ouvert a ; b.	$a < x < b$	
$]\leftarrow\,;\,b\,]$	Intervalle des nombres inferieurs ou égaux à b .	$x < b$	
$]a\,;\,\rightarrow[$	Intervalle des nombres plus grands que a.	$x > a$	

Comparaison

▪ a, b, c et d sont des nombres réels,
si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

▪ a, b, c et d sont des nombres réels positifs,
si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

▪ a et b sont des nombres positifs,
$a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$.

▪ a et b sont deux nombres de même signe et différents de 0, $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Équation de droites

▪ Une équation de droite de la forme : $y = ax + b$ ou $x = c$ est appelée **équation réduite** de cette droite.
a est appelée **coefficient directeur** de la droite (D) ou pente de la droite (D).
b est appelée **ordonnée à l'origine** de la droite (D).

▪ Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$.
Le coefficient directeur de la droite passant par A et B est : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

▪ Le plan est muni du repère.
Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$
(D) // (D') équivaut à $a = a'$

▪ Le plan est muni du repère orthonormé.
Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b$.
(D)⊥(D') équivaut à $a \times a' = -1$.

Équation dans $\mathbb{R}$

a, b, c et d sont des nombres réels.

▪ $ax + b = 0$ équivaut à $x = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$

▪ $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$

▪ $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}, a \geq 0$.

Application affine

▪ a et b sont deux nombres réels.
f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.
- f est croissante lorsque $a > 0$.
- f est décroissante lorsque $a < 0$.
- f est constante lorsque $a = 0$.

▪ On appelle application linéaire, une application affine définie par : $f(x) = ax$, a étant un nombre réel.

Statistique

▪ **L'effectif cumulé croissant** d'une modalité est la somme des effectifs de toutes les modalités inférieures ou égales à cette modalité.

▪ **La fréquence cumulée croissante** d'une modalité est la somme des fréquences de toutes les modalités inférieures ou égales à cette modalité

▪ La médiane d'une série statistique est un nombre qui partage cette série statistique en deux groupes de même effectif ; l'un contient les valeurs plus petites que ce nombre et l'autre les valeurs plus grandes que ce nombre.

▪ La moyenne d'une série statistique regroupée en classes est le nombre noté $\bar{x}$, tel que :
$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_pc_p}{n}$; où $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sont les centres des classes d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Équation et inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Résolution par substitution

Pour résoudre un système par substitution :
1) On utilise l'une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre.

2) Dans l'autre équation, on remplace cette inconnue par son expression exprimée en 1) et on obtient une équation à une inconnue qu'on résout.

3) Dans l'équation obtenue au 1), on remplace l'inconnue par la valeur trouvée et on trouve la deuxième inconnue.

Résolution par combinaison

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par combinaison :

1) On choisit l'inconnue que l'on veut éliminer ; par exemple x.

2) On multiplie les deux membres de l'une des équations (ou les deux équations, si nécessaire) par des coefficients de sorte que la variable x ait des coefficients opposés.

3) On additionne membre à membre les deux équations obtenues en 2).

4) On obtient une nouvelle équation du premier degré à une inconnue y et on trouve la valeur de y.

5) On élimine la deuxième inconnue en suivant les mêmes étapes.

Systèmes d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Exemple

Résous graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ x + y + 3 > 0 \end{cases}$$

- Soit la droite (D) d'équation $2x - y + 1 = 0$.

Construisons la droite (D).

Vérifions si le point O(0 ; 0) est dans le demi-plan vérifiant $2x - y + 1 < 0$.

On a : $2 \times 0 - 0 + 1 = 1$ et 1 n'est inférieur à 0, donc O n'appartient pas au demi-plan, c'est le demi-plan ne contenant pas O qui vérifie l'inéquation.

- Soit la droite (D') d'équation $x + y + 3 = 0$.

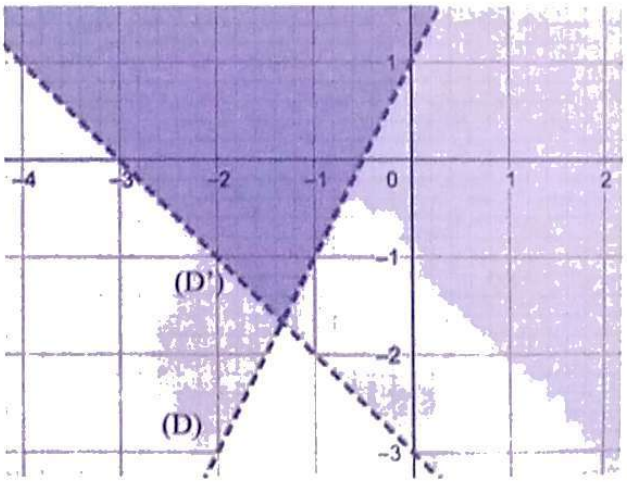
Construisons la droite (D').

Vérifions si le point O(0 ; 0) est dans le demi-plan vérifiant $x + y + 3 > 0$.

On a : $0 + 0 + 3 = 3$ et $3 > 0$. Donc O appartient au demi-plan vérifiant $x + y + 3 > 0$.

- L'ensemble solution du système : $\begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ x + y + 3 > 0 \end{cases}$ est l'intersection des deux demi-plan trouvés où il y a les deux couleurs .

Remarque : si la droite passe par le point O, on choisit un autre point pour la vérification.



Collection
La Réussite

Mathématiques

Manuel

VALI
SPECIM
LE 02 .03. 2021
Par Mr .....

2nde A

BENGALY
KALIFA

Auteurs

KONÉ Talnan Lucien Benoit
Inspecteur en chef
Coordonnateur régional disciplinaire

ARRICO Lucie
Professeur de lycée

AKÉ Djebri Antonin
Professeur de lycée

VALI
SPECIM
LE 02 .03. 2021
Par Mr .....

Vallesse

Avant-Propos

Toutes les leçons de ce manuel sont conformes au programme en vigueur.

On y trouve successivement :

- **Le titre de la leçon** : il est conforme à celui du programme.
- **Une image** : elle illustre et suscite une réflexion sur le titre de la leçon.
- **Une situation d'apprentissage** : les caractéristiques sont un contexte, une circonstance et des tâches.
- **Habiletés et contenus** : ils sont organisés pour faire apparaître le plan suivant lequel sera traitée la leçon.
- **Installation des habiletés** : c'est une succession d'activités en rapport avec le plan précédant et permettant le développement des habiletés et contenus. Chaque activité est suivie d'exercices de fixation.
- **Apprentissage de la rédaction** : un ou plusieurs exercices sont proposés et corrigés. Ces exercices peuvent être suivis de points méthodes
- **Résumé de cours** : il présente l'essentiel de la leçon à retenir.
- **Exercices** : les exercices sont rangés en trois groupes :
  - les exercices de renforcement ;
  - les exercices d'approfondissement ;
  - les situations d'évaluation.
- **Coups de pouce** : pour certains exercices, des indications sur les exercices d'approfondissement ou les situations d'évaluation sont données à l'utilisateur.

Les auteurs

© Vallesse Éditions, Abidjan, 2019
ISBN : 978-2-916532-97-4
Toute reproduction interdite sous peine de poursuites judiciaires.

Sommaire

Leçon 1 CALCUL NUMÉRIQUE 05

1. Simplification d'un quotient
2. Addition, multiplication et division de quotients
3. Calcul avec des puissances
4. Calcul avec des radicaux
5. Proportionnalités
6. Pourcentages
7. Approximations décimales, arrondis
8. Traitement de situation

Leçon 2 CALCUL LITTÉRAL 23

1. Développement et factorisation d'expressions littérales
2. Produits remarquables
3. Polynômes
4. Traitement de situation

Leçon 3 DÉNOMBREMENT 33

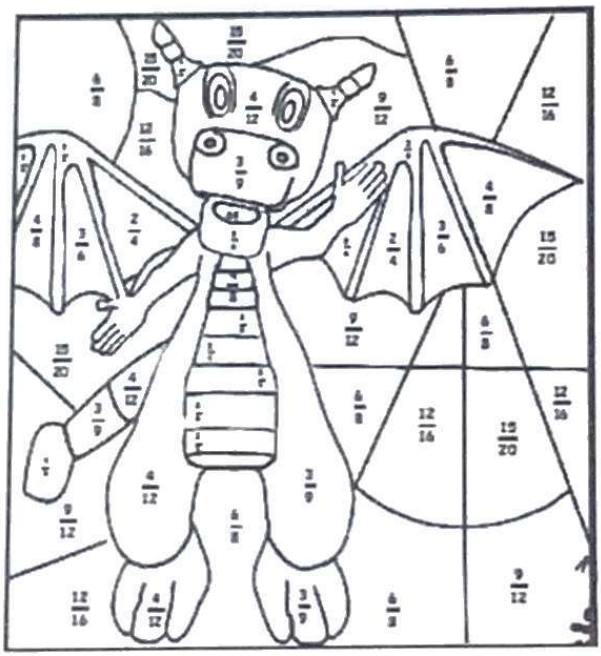
1. Réunion de deux ensembles finis
2. Intersection de deux ensembles finis
3. Cardinal d'un ensemble fini
4. Dénombrement à l'aide d'un arbre de choix
5. Dénombrement à l'aide d'un tableau
6. Dénombrement à l'aide d'un diagramme
7. Traduction des expressions du langage courant utilisant « et », « ou », « au moins », « au plus » en langage mathématique
8. Traitement de situation

Leçon 4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$ 47

1. Résolution d'équations du type : $ax + b = 0$
2. Résolution d'équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$
3. Traduction d'inégalités à l'aide d'intervalle et d'intervalle à l'aide d'inégalités
4. Représentation de réunion ou d'intersection de deux intervalles sur une droite graduée
5. Résolution d'inéquations d'un des types : $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$
6. Détermination du signe de : $(ax + b)(cx + d)$
7. Inéquations du type : $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou $(ax + b)(cx + d) \leq 0$
8. Traduction d'un problème de la vie courante par une équation ou une inéquation
9. Traitement de situation

Leçon 1

CALCUL NUMÉRIQUE



Cette image est un tableau inachevé laissé par un peintre à son élève qui devra y ajouter les couleurs. Quelle consigne lui a-t-il laissé en marquant chaque zone du dessin par un nombre ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE



C'est la fête de fin d'année au Lycée Municipal de la ville. Le stand de tir permet de se mesurer au jeu de fléchette pour 200 F CFA la fléchette. Six élèves du Lycée tentent leur chance, mais ils n'ont pas tous la même somme d'argent.

Tous les joueurs qui ont participé au jeu dans la journée sont invités à revenir le soir pour la grande finale. Les six Lycéens ne manquent pas le rendez-vous. Voici leurs résultats :

	Nombre de cibles touchées	Nombre de flèches tirées
Julien :	7	10
Sébastien :	6	9
Pauline :	8	11
Thérèse :	5	8
Philippe :	8	12
Sophie :	12	17

Le responsable du stand de tir est très ennuyé car il n'arrive pas à classer les joueurs.
Informés, les élèves de la Seconde A décident d'approfondir leurs connaissances sur le calcul numérique afin d'aider le responsable du stand.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Simplification d'un quotient

- Simplifier un quotient

2 Addition, multiplication et division de quotients

- Additionner des quotients
- Multiplier des quotients
- Diviser des quotients

3 Calcul avec des puissances

- Calculer en utilisant les règles sur les puissances

4 Calcul avec des radicaux

- Écrire un quotient sans le symbole « radical » au dénominateur.
- Calculer avec les radicaux

5 Proportionnalité

- Traduire une situation de proportionnalité par un tableau
- Compléter un tableau de proportionnalité
- Calculer un coefficient de proportionnalité à l'aide d'un tableau de proportionnalité

6 Pourcentages

Traduire :

- un pourcentage en fraction décimale
- un pourcentage en un nombre décimal

Calculer :

- p% d'une quantité donnée où p est un nombre réel positif donné
- le pourcentage d'une augmentation ou d'une réduction
- la quantité obtenue après une augmentation ou une réduction de p% où p est un nombre réel positif donné.
- un pourcentage de pourcentage

7 Approximations décimales, arrondis

Trouver :

- une approximation décimale d'ordre n par excès ou par défaut d'un nombre réel
- l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel

8 Traitement de situation

- Traiter une situation faisant appel au calcul numérique

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Simplification d'un quotient

Recopie et complète les égalités suivantes :

$\frac{18}{10} = \frac{9 \times ....}{5 \times ....}$; $\frac{27}{15} = \frac{9 \times ....}{5 \times ....}$; $\frac{9\pi}{5\pi} = \frac{9 \times ....}{5 \times ....}$; $\frac{-36}{-20} = \frac{9 \times ....}{5 \times ....}$;

$\frac{9}{5} = \frac{18 : ....}{5 : ....}$; $\frac{9}{5} = \frac{27 : ....}{15 : ....}$; $\frac{9}{5} = \frac{9\pi : ....}{5\pi : ....}$; $\frac{9}{5} = \frac{-36 : ....}{-20 : ....}$.

Synthèse

Pour simplifier une fraction, on peut diviser ou multiplier son numérateur et son dénominateur par un même nombre réel non nul.

Exercices de fixation

1-1 Recopie et complète les pointillés par les nombres qu'il faut :

- $\frac{27}{15} = \frac{9 \times \ldots}{5 \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$; $\frac{24}{20} = \frac{6 \times \ldots}{\ldots \times 4} = \frac{\ldots}{\ldots}$;
- $\frac{1,8}{1,2} = \frac{0,6 \times \ldots}{0,6 \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$;
- $\frac{126}{90} = \frac{\ldots \times 2}{\ldots \times 2} = \frac{\ldots}{\ldots} \times \frac{9 \times 2}{9 \times 2} = \frac{\ldots}{5}$.

1-2 Simplifie, si possible, les fractions suivantes :

a) $\frac{-5 \times 2}{2 \times 7}$ b) $\frac{-5 + 2}{7 + 2}$

c) $\frac{4 \times (-11)}{4 \times (-11) \times 3}$ d) $\frac{8 \times (-3) \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 8 \times 7}$

1-3 Parmi les quotients suivants, indique ceux qui sont égaux à $\frac{3}{7}$

$\frac{-3}{7}$; $\frac{0,3}{0,7}$; $\frac{-9}{-27}$; $\frac{0,6}{1,4}$;

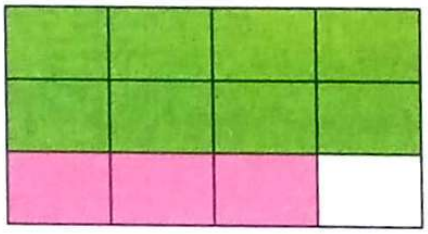
$\frac{15}{-35}$; $\frac{2\pi}{3\pi}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{300}{700}$.

1-4 Recopie le tableau et complète par vrai si l'égalité est vraie et par faux si l'égalité est fausse.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{-4}$	
$\frac{7,2}{9,4} = \frac{36}{47}$	
$\frac{105}{93} = \frac{35}{31}$	
$\frac{41}{21} = \frac{17}{7}$	
$\frac{43}{23} = \frac{23}{3}$	

Activité 2 Addition, multiplication et division de quotients

1. Le rectangle ci-contre est constitué de 12 petits rectangles identiques.



a) Complète les phrases suivantes :

- L'aire de la région verte représente $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ de l'aire totale ;
- L'aire de la région rose représente $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ de l'aire totale.

b) Détermine, sous forme de quotient, l'aire que représente la région coloriée par rapport à l'aire totale.

2. On donne les nombres réels a, b, c et d. Complète les égalités suivantes :

a) Si b est différent de 0, alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$;

b) Si b et d sont différents de 0, alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$;

c) Si b et d sont différents de 0, alors $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$;

d) Si c et d sont différents de 0, alors l'inverse de $\frac{c}{d}$ est $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$;

e) Si b, c et d sont différents de 0, alors $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

Synthèse

- Pour additionner deux quotients de même dénominateur, on additionne les numérateurs et on garde le même dénominateur.
- Pour additionner deux quotients de dénominateurs différents, on les rend au même dénominateur et on procède comme ci-dessus.
- Pour multiplier deux quotients, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
- L'inverse du quotient $\frac{a}{b}$ (a et b étant des nombres réels non nuls) est le quotient $\frac{b}{a}$.
- Pour diviser deux quotients, on multiplie le quotient qui est au numérateur par l'inverse de celui qui est au dénominateur.

Exercices de fixation

2-1 Le tableau ci-dessous comporte quatre affirmations. Pour chaque affirmation, il est proposé trois réponses parmi lesquelles une seule est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation et la lettre qui correspond à la réponse exacte.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Si e est différent de 0, alors $\frac{a}{e}+\frac{b}{e}=$	$\frac{ae+be}{e}$	$\frac{a+b}{e}$	$\frac{a-b}{e}$
2	Si g et h sont différents de 0, alors $\frac{e}{g}\times\frac{f}{h}=$	$\frac{e+f}{g+h}$	$\frac{e\times h+g\times f}{g\times h}$	$\frac{e\times f}{g\times h}$
3	Si f, g et h sont différents de 0, alors $\frac{e}{g}:\frac{f}{h}=$	$\frac{e\times f}{g\times h}$	$\frac{e\times h}{g\times f}$	$\frac{e+h}{g+f}$
4	Si e et g sont différents de 0, alors l'inverse de $\frac{e}{g}$ est	$\frac{e}{g}$	$\frac{g}{e}$	$e\times g$

2-2 Le tableau ci-dessous comporte cinq affirmations. Pour chaque affirmation, il est proposé trois réponses parmi lesquelles une seule est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation et la lettre qui correspond à la réponse exacte.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$\frac{7}{4}+\frac{2}{3}=$	$\frac{7+2}{4+3}$	$\frac{7\times 2}{4\times 3}$	$\frac{7\times 3+4\times 2}{4\times 3}$
2	$\frac{5}{6}+\frac{7}{6}=$	3	2	1
3	$\frac{9}{5}\times\frac{3}{2}=$	$\frac{9\times 3}{5\times 2}$	$\frac{9\times 2+5\times 3}{5\times 2}$	$\frac{9\times 2}{5\times 3}$
4	$3\times\frac{6}{7}=$	$\frac{3\times 6}{3\times 7}$	$\frac{3\times 6}{7}$	$\frac{6}{3\times 7}$
5	$\frac{7}{4}:\frac{2}{3}=$	$\frac{2}{3}\times\frac{7}{4}$	$\frac{7\times 2}{4\times 3}$	$\frac{21}{8}$

Activité 3 Calcul avec des puissances

1. Recopie puis complète les égalités suivantes :

$2^2 \times 2^3 = \ldots\ldots\ldots = 2^{\ldots\ldots}$

$(2 \times 5)^3 = (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)(\ldots\ldots) = 2^{\ldots\ldots} \times 5^{\ldots\ldots}$

$\dfrac{5^7}{5^3} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = 5^{\ldots\ldots}$

2. Soient a et b deux nombres réels non nuls, n et p deux entiers relatifs.
Recopie puis complète les égalités suivantes :

$a^n \times b^n = \ldots\ldots\ldots$; $a^n \times a^p = \ldots\ldots\ldots$; $(a^n)^p = \ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{a^n}{b^n} = \ldots\ldots\ldots$; $\dfrac{a^n}{a^p} = \ldots\ldots\ldots$

Synthèse

Pour tous nombres réels a et b non nuls et pour tous nombres entiers relatifs n et p, on a :

$a^n \times b^n = (ab)^n$; $a^n \times a^p = a^{n+p}$; $(a^n)^p = a^{n \times p}$; $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$; $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Exercices de fixation

3-1 Pour chaque ligne, indique la réponse exacte (Exemple : 6-B).

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	« 3 puissance 4 s'écrit »	3×4	3^4	4^3
2	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ s'écrit	6×5	6^5	5^6
3	$(-10)^2 =$	-10×10	-2×10	$(-10) \times (-10)$
4	$-10^2 =$	-10×10	-2×10	$(-10) \times (-10)$
5	$2^6 =$	2×6	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

3-2 Pour chaque ligne, indique la réponse exacte (Exemple : 8-A).

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$1^{100} =$	100	0	1
2	$35^0 =$	35	0	1
3	$0^{2019} =$	0	1	2019
4	$(-1)^6 =$	-1	1	6
5	$(-1)^9 =$	1	-1	9
6	$4^{-1} =$	-4	4	0,25
7	$\dfrac{1}{2^{-3}} =$	$-\dfrac{1}{8}$	8	-8

3-3 Soient a et b deux nombres réels non nuls, n et p deux entiers relatifs.
Pour chaque ligne, indique la réponse exacte.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	$(a \times b)^n =$	$a^n + b^n$	$a^n \times b^n$	$a \times b^n$
2	$a^n \times a^p =$	$a^{n \times p}$	$a \times n \times p$	a^{n+p}
3	$(a^n)^p =$	$a^{n \times p}$	$a \times n \times p$	a^{n+p}
4	$\frac{a^n}{b^n} =$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$	$n \times \left(\frac{a}{b}\right)$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$
5	$\frac{a^n}{a^p} =$	a^{n-p}	a^{n+p}	$a^{n \times p}$

3-4 Recopie et complète les égalités suivantes :

- $a^n \times a^p =$ .....
- $\frac{a^n}{a^p} =$ .....
- $(a^n)^p =$ .....
- $6^5 \times 6^3 = 6^{\cdots\cdots}$
- $\frac{5^7}{5^2} = 5^{\cdots\cdots}$
- $(4{,}8^2)^3 = 4{,}8^{\cdots\cdots}$
- $2^7 \times 2^4 = 2^{\cdots\cdots}$
- $\frac{(-8)^{16}}{(-8)^{15}} = (8)^{\cdots\cdots}$
- $(13^4)^4 = 13^{\cdots\cdots}$
- $7^5 \times \ldots\ldots = 7^{15}$
- $\frac{15^{12}}{\ldots\ldots} = 15^3$
- $(9^2)^{\cdots\cdots} = 9^{14}$
- $3^5 \times 3^2 \times 3^6 = 3^{\cdots\cdots}$
- $\frac{\ldots\ldots}{11^2} = 11^8$
- $(2^{\cdots\cdots})^{-5} = 2^{-35}$

Activité 4 Calcul avec des radicaux

1. Justifie que les produits suivants sont des nombres entiers relatifs.

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$; b) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$; c) $(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)$.

2. Soient a et b des nombres réels positifs.
Écris les produits suivants sans radical.

a) $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$; b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

3. Utilise les résultats de la question 2 pour écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$; c) $\frac{3}{2\sqrt{3}-3}$.

Synthèse

Pour écrire un quotient sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercices de fixation

4.1 Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.
Écris pour chaque numéro, la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Expressions	Réponses A	B	C	D
1	$\sqrt{x} \times \sqrt{y} =$	$x \times y$	$\sqrt{x-y}$	$\sqrt{x \times y}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$
2	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} =$	$\sqrt{x} - \sqrt{y}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$	$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x} \times \sqrt{y}$
3	$\sqrt{x^{2n}} =$	x^n	x^{n-2}	x^{n+2}	$2x^n$
4	$\sqrt{x} \times \sqrt{x} =$	$\sqrt{2x}$	$2x$	x^2	x
5	$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$	$x + y$	$x - y$	xy	$(x-y)(x+y)$

4.2 Écris sans radical chacune des expressions suivantes :

a) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$; b) $\sqrt{4,5} \times \sqrt{2}$; c) $\sqrt{\frac{49}{25}}$; d) $(2\sqrt{3})^2$.

4.3 Écris chacun des nombres suivants sans radical au dénominateur.

a) $\frac{25}{\sqrt{7}}$; b) $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}$.

Activité 5 Proportionnalité

1. Pour le premier devoir de maths, Lucie a révisé pendant une heure et a obtenu la note de 11 sur 20.
Pour le deuxième devoir, elle a révisé deux fois plus longtemps et a obtenu la note de 16 sur 20.
Justifie que la note obtenue à un devoir par Lucie n'est pas proportionnelle à son temps de révision.

2. Pour se rendre au collège, Yéo emprunte toujours le même chemin à l'aller et au retour.
Il effectue 10 fois ce trajet par semaine et parcourt ainsi 4,5 km.
Au cours d'une semaine, Yéo était malade et n'a pu effectuer que 6 fois ce trajet.
a) Justifie que la distance parcourue par Yéo est proportionnelle au nombre de fois qu'il effectue le trajet.
b) Détermine la distance parcourue par Yéo pendant la semaine de maladie.

3. Parmi les tableaux suivants, indique ceux qui sont des tableaux de proportionnalité. Justifie ta réponse.

Tableau 1

5	10	15
10	15	20

Tableau 2

6	9
4	6

Tableau 3

1,2	5,4
9,6	48,6

Tableau 4

12	19
25	32

Tableau 5

12	18	15
8,4	12,6	10,5

Tableau 6

1	3
2	4

Tableau 7

7	9
5,6	7,2

Tableau 8

1	3
2,5	7,5

Synthèse

Le tableau 2 est un tableau de proportionnalité car $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$.

Exercices de fixation

5-1 Complète les tableaux suivants pour obtenir des tableaux de proportionnalité.

7,5	9	
	3	5

6	9	
8		20

5-2 Parmi les trois tableaux suivants, un seul est un tableau de proportionnalité. Indique-le et justifie ta réponse.

10	12	9
15	18	12

Tableau 1

70	−21	0,42
20	−6	0,12

Tableau 2

15	30	50
10	20	30

Tableau 3

5-3 Le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité. On donne e, f, g, x, y et z des nombres réels non nuls.

a) Donne le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la première ligne à la deuxième ligne.

b) Donne le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la deuxième ligne à la première ligne.

e	f	g
x	y	z

Activité 6 Pourcentages

1. En partant en vacances au village, un élève en classe de Seconde A a acheté un carton de 25 morceaux de savon identiques pour ses parents. Arrivé au village, il décide de donner 60 % du savon à sa maman. Détermine le nombre de morceaux de savon offerts à sa maman.

2. Un fonctionnaire a un salaire mensuel S. Après deux ans d'activité, son salaire a été augmenté de 5%. Exprime en fonction de S son nouveau salaire.

3. Lors d'une solde générale, les prix ont baissé de 20 % dans un magasin. Avant la solde, une chemise coûtait X FCFA. Exprime en fonction de X le nouveau prix de la chemise pendant la période de solde.

Synthèse

Pour prendre t% de x, on multiplie x par $\frac{t}{100}$: on obtient $x \times \frac{t}{100}$.

Pour augmenter x de t%, on ajoute $x \times \frac{t}{100}$ à x : on obtient $x\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Pour diminuer x de t%, on retranche $x \times \frac{t}{100}$ de x : on obtient $x\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Exercices de fixation

6-1 Parmi les quatre réponses, une seule est bonne. Donne le numéro de la bonne réponse.

	1	2	3	4
x % d'une quantité Q est égale à	$\frac{x}{100} : Q$	$\frac{x}{100} + Q$	$\frac{x}{100} \times Q$	$100\,x \times Q$

6-2 Parmi les quatre réponses, une seule est bonne. Donne le numéro de la bonne réponse.

	1	2	3	4
Augmenter de x % une quantité Q revient à	$\frac{x}{100} + Q$	$(1 + \frac{x}{100})\,Q$	$\frac{x}{100} \times Q$	$1 + \frac{x}{100} Q$

6-3 Parmi les quatre réponses, une seule est bonne. Donne le numéro de la bonne réponse.

	1	2	3	4
Diminuer de x % une quantité Q revient à	$Q - \frac{x}{100}$	$1 - \frac{x}{100} Q$	$\frac{x}{100} - Q$	$(1 - \frac{x}{100})\,Q$

6-4 a) Calcule 12 % de 370.
b) Le prix d'un article vendu à 4 200 FCFA est augmenté de 15 %. Calcule le nouveau prix.
c) Le prix d'un article vendu à 6 000 FCFA est réduit de 8 %. Calcule le nouveau prix.

Activité 7 Approximations décimales, arrondis

Le nombre π

On sait que ce nombre n'est pas un nombre décimal. On ne connaît pas le nombre de chiffres qui composent sa partie décimale. On a l'habitude de donner une valeur approximative avec 5 ou 6 chiffres dans cette partie décimale.

L'écriture de π avec les 5 premières décimales est : 3,14159.

1. Encadre π par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 : ..... $< \pi <$ .....
2. Des deux nombres décimaux précédents lequel est le plus proche de π ?

Synthèse

Pour trouver les approximations décimales d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) d'un nombre réel a, on encadre a par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre n.

L'approximation décimale d'ordre n par défaut (resp.excès) de x est le plus petit (resp.grand) de ces deux nombres décimaux.

Exercices de fixation

7-1 Complète le tableau.

Nombre décimal	13,4574895	248,0707845
Approximation décimale d'ordre 1 par défaut		
Approximation décimale d'ordre 1 par excès		
Arrondi d'ordre 1		
Approximation décimale d'ordre 3 par défaut		
Approximation décimale d'ordre 3 par excès		
Arrondi d'ordre 3		

7-2 Complète le tableau.

Nombre décimal	−13,4574895	−248,0707845
Approximation décimale d'ordre 1 par défaut		
Approximation décimale d'ordre 1 par excès		
Arrondi d'ordre 1		
Approximation décimale d'ordre 3 par défaut		
Approximation décimale d'ordre 3 par excès		
Arrondi d'ordre 3		

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice Compléter un tableau de proportionnalité

Une personne distribue l'argent de poche à ses trois enfants, Zoé, Xavier (5 ans) et Yannick proportionnellement à leur âge. Elle donne 4 000 FCFA à Zoé, 2 500 FCFA à Xavier, et le reste à Yannick. On sait que la somme des âges des enfants est 23 ans.

1. a) Détermine les âges de Zoé et de Yannick.
   b) Détermine l'argent de poche de Yannick.
2. Calcule la somme totale distribuée.

Corrigé

1. Puisqu'il s'agit ici d'un problème de proportionnalité, regroupons toutes les données dans un tableau de proportionnalité.

Enfants	Zoé	Xavier	Yannick	Total
Âge		5		23
Argent (FCFA)	4 000	2 500		

Remplissons ce tableau en appliquant « le produit en croix ».

a) *Âge de Zoé* : $\frac{4\,000 \times 5}{2\,500} = 8$

b) *Âge de Yannick* : $23 - (8 + 5) = 10$

Argent de Yannick : $\frac{10 \times 2\,500}{5} = 5\,000$

2. *Somme totale* : $\frac{2\,500 \times 23}{5} = 11\,500$

Méthode

Utiliser un tableau de proportionnalité et déterminer les coefficients de proportionnalités.

Résumé

Enfants	Zoé	Xavier	Yannick	Somme
Âge	8	5	10	23
Argent (FCFA)	4 000	2 500	5 000	11 500

Réponses : En lisant le tableau, on peut écrire :

- L'âge de Yannick est 10 ans et celui de Zoé est 8 ans.
- L'argent de poche de Yannick est 5 000 FCFA.
- La somme totale distribuée est 11 500 FCFA.

Résumé de cours

1 Simplification d'un quotient

Propriété a, b et k désignent des nombres réels tels que : $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}.$$

2 Addition, multiplication et division de quotients

Propriété Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que b et d ne soient pas nuls, on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \; ; \; \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \; ; \; \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Si de plus c n'est pas nul, $\dfrac{1}{\frac{c}{d}} = \dfrac{d}{c}$; $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$.

3 Calcul avec des puissances

Définition Soient a un nombre réel et n un entier naturel non nul.
On appelle puissance n-ième de a, le nombre réel noté a^n tel que :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Exemple : La puissance 5ième de 3 est le nombre 3^5 tel que :
$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$.

Remarque
Si a est un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel, alors on a : $a^1 = a$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
Pour tout nombre réel non nul a, on pose $a^0 = 1$.

Propriété Pour tous nombres réels non nuls a et b et pour tous nombres entiers relatifs n et p, on a :

$$a^n \times b^n = (ab)^n \; ; \; a^n \times a^p = a^{n+p} \; ; \; (a^n)^p = a^{n \times p} \; ; \; \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \; ; \; \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}.$$

4 Calcul avec des radicaux

Propriété Soient a et b deux nombres réels positifs et n un entier relatif. On a :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \; ; \; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \; (b \neq 0) \; ; \; \sqrt{a^{2n}} = a^n \; ; \; \sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a} \; ;$$
$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \; ; \; (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.$$

Méthode

Pour écrire un quotient sans radical au dénominateur :
Étape 1 : On identifie le dénominateur.
Étape 2 : On détermine l'expression conjuguée du dénominateur.
Étape 3 : On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.
Astuce : On utilise l'égalité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ au dénominateur.

Remarque : méthode pour trouver le conjugué

Nombre	Expression conjuguée
$\sqrt{a}$	$-\sqrt{a}$ / $\sqrt{a}$
$a+b\sqrt{c}$	$a-b\sqrt{c}$
$a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$	$a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$

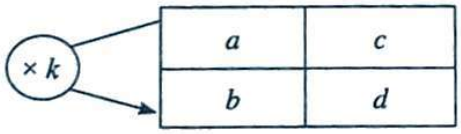
5 Proportionnalité

Définition Soient a, b, c et d des nombres réels non nuls.

a	c
b	d

Ce tableau est un tableau de proportionnalité signifie que $ad = bc$.

Le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la première ligne à la seconde ligne est le nombre réel k tel que : $k = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.



Remarque

Pour un tableau de proportionnalité, il existe deux coefficients de proportionnalité :
- Un coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la 1ère ligne à la 2ème ligne.
- Un coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la 2ème ligne à la 1ère ligne.

Exemple

La vitesse moyenne d'un objet, l'échelle et les pourcentages sont des coefficients de proportionnalité.

6 Pourcentages

Propriété

- Prendre t % d'un nombre revient à le multiplier par $\frac{t}{100}$.
- Augmenter un nombre de t % revient à le multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Diminuer un nombre de t % revient à le multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

7 Approximations décimales, arrondi

Méthode 1

Lorsqu'un nombre réel x est encadré par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) :
- Le plus petit des deux nombres décimaux est l'approximation décimale d'ordre n par défaut de x.
- Le plus grand des deux nombres décimaux est l'approximation décimale d'ordre n par excès de x.
- Parmi ces deux nombres décimaux consécutifs, le plus proche de x est l'arrondi d'ordre n de x.

Exemple

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

approximation décimale d'ordre 2 par défaut de π — *approximation décimale d'ordre 2 par excès de π*

Méthode 2

Pour trouver l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel x écrit sous forme décimale, on procède comme suit :
- Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre après la virgule est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4, alors l'arrondi d'ordre n de x est l'approximation décimale d'ordre n par défaut de x.
- Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre après la virgule est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ou 9 alors l'arrondi d'ordre n de x est l'approximation décimale d'ordre n par excès de x.

Exemple

On donne : $\sqrt{3} = 1{,}732050807569\ldots$

Déterminons l'arrondi d'ordre 4 de $\sqrt{3}$.

On a : $1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$.

Le $5^{ème}$ chiffre après la virgule est 5. Donc l'arrondi d'ordre 4 de $\sqrt{3}$ est 1,7321.

Exercices

Exercices de renforcement

1 Écris chacun des nombres suivants sous forme irréductibles avec comme numérateur et dénominateur des nombres entiers relatifs.

$\frac{14}{35}$; $\frac{-42}{56}$; $\frac{65}{-15}$; $\frac{1,8}{1,2}$; $\frac{-0,06}{-2,4}$; $\frac{2}{0,75}$.

2 Écris chaque nombre sous la forme d'une fraction puis simplifie la fraction obtenue.

a) $\frac{1,2}{2}$; b) $\frac{7,68}{1,4}$; c) $\frac{28}{3,5}$;

d) $\frac{0,96}{0,84}$; e) $1,2$; f) $2,25$.

3 Effectue les opérations suivantes puis simplifie les résultats lorsque c'est possible.

a) $\frac{18}{7}+\frac{22}{7}$; b) $\frac{8}{11}+\frac{-2}{11}$; c) $\frac{-3}{5}+\frac{-22}{5}$;

d) $\frac{8}{7}-\frac{2}{7}$; e) $\frac{-9}{17}-\frac{22}{17}$; f) $\frac{18}{13}-\frac{-3}{13}$;

g) $\frac{-18}{71}-\frac{-22}{71}$.

4 Effectue les opérations suivantes puis simplifie les résultats lorsque c'est possible.

a) $\frac{18}{7}+\frac{23}{3}$; b) $\frac{7}{5}+\frac{-2}{11}$; c) $\frac{-3}{5}+\frac{-22}{15}$;

d) $\frac{5}{27}-\frac{2}{7}$; e) $\frac{-7}{24}-\frac{21}{8}$; f) $\frac{16}{15}-\frac{-31}{33}$;

g) $\frac{-8}{71}-\frac{-2}{7}$.

5 Effectue les opérations suivantes puis simplifie les résultats.

a) $\frac{7}{16}\times\frac{2}{7}$; b) $\frac{80}{11}\times\frac{-2}{5}$; c) $\frac{-3}{56}\times\frac{-20}{15}$;

d) $\frac{8}{21}\times\frac{2}{7}$; e) $\frac{-9}{43}\times\frac{17}{14}$; f) $\frac{18}{51}\times\frac{-13}{3}$;

g) $\frac{-108}{72}\times\frac{-22}{71}$.

6 Effectue les opérations suivantes puis simplifie les résultats

a) $\dfrac{\frac{7}{16}}{\frac{2}{7}}$; b) $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{14}}$; c) $\dfrac{\frac{-7}{106}}{\frac{12}{72}}$; d) $\dfrac{\frac{-24}{36}}{\frac{-42}{37}}$;

e) $\dfrac{\frac{122}{13}}{\frac{12}{23}}$; f) $\dfrac{\frac{91}{15}}{\frac{22}{62}}$.

7 Calcule :

a) $\frac{2}{3}-\frac{7}{3}\times\frac{8}{21}$; b) $\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)\times\frac{3}{2}$;

c) $11:\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{6}\right)$; d) $\frac{3}{7}-\frac{15}{7}:\frac{5}{24}$;

e) $\dfrac{3-\frac{7}{5}}{1-\frac{9}{10}}$; f) $\frac{7}{-8}+\dfrac{\frac{5}{6}}{-4}-1$.

8 Calcule :

a) $1-\frac{-7}{3}$; b) $\frac{-2}{10}+\frac{7}{25}$;

c) $\frac{3}{7}+\frac{7}{10}$; d) $\frac{-2}{3}+\frac{7}{8}-\frac{5}{6}$.

9 A, B et C sont des nombres réels tels que :

$A=\frac{4}{3}\times\frac{7}{5}$; $B=7\times\frac{1}{11}\times\frac{3}{14}$ et

$C=\frac{-2}{5}\times\frac{3}{-7}\times\frac{-7}{2}$.

Calcule A, B et C.

10 D, E et F sont des nombres réels tels que :

$D=\frac{-7}{3}:\frac{-21}{6}$; $E=\dfrac{-4}{\frac{7}{3}}$ et $F=\dfrac{\frac{-4}{7}}{\frac{3}{-5}}$.

Calcule D, E et F.

11 On donne les nombres réels A, B et C réels tels que :

$A=\frac{-45}{6}:\frac{-1}{6}$; $B=\dfrac{-14}{\frac{11}{3}}-3$ et

$C=\dfrac{\frac{35}{8}}{\frac{-3}{-55}}+5$.

Calcule A, B et C.

12 Écris chacun des produits de nombres suivants sous la forme d'une puissance d'un entier relatif.

a) $7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7$
b) $(-11)\times(-11)\times(-11)\times(-11)\times(-11)\times(-11)$
c) $2\times52\times52\times52\times52\times52\times2\times2\times2\times2$
d) $(-13)\times(13)\times(-13)\times(-13)\times(13)\times(-13)$

Exercices

13 Écris chacune des puissances suivantes sous la forme d'un produit de nombres réels.

a) $(15)^7$ b) $(2)^{-5}$

c) $(-\pi)^{-6}$ d) $\left(\sqrt{21}\right)^4$

14 Écris chacun des nombres suivants sous la forme 3^n, n étant un entier relatif.

a) $9^{\ 6} \times 3^{11}$; b) $(-3)^5 \times (-3)^{-3}$;

c) $3^{-5} \times 3^8 \times 3^{-1}$; d) $(3^4 \times 3^{-3})^3 \times (3^2)\ 3 \times 3^{-6}$.

15 Écris chacun des nombres A, B et C suivants sous la forme d'un nombre rationnel :

$A = 3^{-2} \times 2^{-4} \times 5^{-2}$; $B = (5 \times 2^3)^{-1}$;

$C = \left(\dfrac{1}{2^5 \times 5^5}\right)^{-2}$.

16 Recopie et complète :

$\sqrt{500} = \sqrt{5 \times \ldots\ldots} = \sqrt{5} \times \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\sqrt{5}$

$\sqrt{108} = \sqrt{3 \times \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\sqrt{\ldots\ldots}$

$\sqrt{112} = \sqrt{\ldots\ldots \times \ldots\ldots} = \sqrt{7} \times \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\sqrt{\ldots\ldots}$

$\sqrt{98} = \sqrt{\ldots\ldots \times \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots} \times \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\sqrt{2}$

17 Écris chacune des expressions suivantes sous la forme $p\sqrt{q}$ où p et q sont entiers naturels.

a) $\sqrt{50} + \sqrt{18} - 2\sqrt{8}$;

b) $\sqrt{12} - 7\sqrt{27} + \sqrt{3}$.

18 Écris chacun des nombres suivants sous la forme d'un quotient sans radical au dénominateur :

a) $\dfrac{14}{2\sqrt{7}}$; b) $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; d) $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$.

19 Développe et réduis les produits suivants :

a) $\sqrt{3}\,(2-5\sqrt{3})$; b) $(\sqrt{6}+2)\sqrt{2}$;

c) $(7-2\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{16})$; d) $(\sqrt{11}+4)^2$;

e) $(4-9\sqrt{2})^2$; f) $(\sqrt{13}+4)(\sqrt{13}-4)$.

20 Dans le tableau ci-dessous, le prix est-il proportionnel à la quantité ? Justifie ta réponse.

Quantité (en kg)	1	3	8
Prix (en FCFA)	2 500	7 500	20 000

21 Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Si oui, donne le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la première ligne à la deuxième ligne

20	25	30
50	55	60

50	100
200	400

140	180	300	360	540	7 000
0,7	0,9	1,5	1,8	2,7	35

22 Dans une société immobilière, le prix de vente d'un lot est proportionnel à sa superficie (en m²). Complète le tableau ci-dessous :

Superfcie (en m²)	400			2 400	3 000
Prix (en millions de FCFA)	2	6	8		

23 On donne une carte de la Côte d'Ivoire à l'échelle 1/100 000.

1. Sur cette carte, deux villes sont distantes de 6 cm. Détermine la distance réelle entre ces deux villes.
2. La distance à vol d'oiseau Abidjan-Yamoussoukro est 218,5 km.

Détermine la distance qui les sépare sur la carte.



Exercices

24 Trois mètres de câble coûtent 3 250 F.

1. Sachant que le prix est proportionnel à la longueur, détermine le prix d'achat de 15 mètres de câble.

2. Avec un budget de 130 000 F, calcule la longueur de câble qu'on peut acheter.

25 1. Exprime les vitesses ci-dessous en km/h :
a) 20 m/s ; b) 14 m/s ; c) 200 m/s.

2. Exprime les vitesses ci-dessous en m/s :
a) 90 km/h ; b) 5 km/h ; c) 1 200 km/h.

26* Dans un centre d'examen, 240 candidats ont échoué. 75 % des candidats sont admis.
1. Détermine le nombre de candidats qui ont composé.
2. Détermine le nombre de candidats admis.

27 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1) Pour augmenter un prix de 20,6 % on le multiplie par 1,206.
2) 71 750 FCFA représentent 1,25 % du salaire d'un riche homme d'affaires.
Il gagne donc 5 740 000 FCFA.
3) Quand on augmente de 17 % puis on diminue de 17 %, on ne change rien.
4) Il revient au même d'augmenter le prix d'un article de 20 % puis de 30% que de l'augmenter de 30 % puis de 20 %.
5) Une balance augmente les masses réelles de 20%. On pèse de la farine et on lit 160 g. Il y a en fait 128 g de farine.

28 Calcule le pourcentage d'or d'un alliage pesant 150 g et contenant 60 g d'or.

29 Le loyer mensuel moyen d'un appartement en 2002 était de 92 500 F. En 2018, ce loyer a augmenté de 35 %.
Calcule le loyer de cet appartement en 2018.

30 Lors d'une coupe du monde de football, 31 000 spectateurs ont assisté à un match d'un pays africain alors que le stade compte 34 000 places. Détermine le taux de remplissage de ce stade.

31 Un sondage est effectué parmi 1 200 habitants d'une ville. Parmi eux, 1 020 déclarent utiliser les transports en commun. Détermine la proportion d'habitants de cette ville qui utilisent les transports en commun.

32 

Suite à une réforme du gouvernement d'un pays, le prix moyen des lunettes a baissé de10 % en 2019 par rapport à 2018.

Sachant qu'en 2018, le prix moyen était de 122 200 FCFA, détermine le prix moyen des lunettes en 2019.

33 On donne les pourcentages suivants :
64% ; 99% ; 25% ; 7% ; 34,8% ; 0,5% ; 120%.

1. Traduis chacun de ces pourcentages par un nombre décimal.

2. Traduis chacun des ces pourcentages par une fraction.

34 Écris sous forme de pourcentage chacun des nombres décimaux suivants :
0,47 ; 0,71 ; 0,125 ; 0,6542 ; 0,0038 ; 0,0701 ; 1,28.

35* Un concessionnaire propose à ses clients quatre formules de réduction sur le prix d'une voiture qu'il vend à 20 000 000 F.

Formule 1 : une réduction de 8% suivie d'une réduction de 10%.

Formule 2 : une réduction de 10% suivie d'une réduction de 8%.

Formule 3 : une réduction de 9% suivie d'une réduction de 9%.

Formule 4 : une réduction de 18%.

Détermine la formule la plus avantageuse pour les clients.

36 1. À partir de ta calculatrice, donne une écriture décimale de $\sqrt{5}$ avec 9 chiffres après la virgule.

2. Détermine l'encadrement de $\sqrt{5}$ par deux décimaux consécutifs :
a) d'ordre 0 ;
b) d'ordre 1 ;
c) d'ordre 2.

3. Détermine l'arrondi de $\sqrt{5}$:
a) d'ordre 0 ;
b) d'ordre 1 ;
c) d'ordre 2.

Exercices d'approfondissement

37 Pascal participe à un triathlon :
- $\frac{1}{24}$ de la distance totale se parcourt à la nage,
- $\frac{1}{3}$ de la distance totale se fait en courant,
- le reste s'effectue à vélo.

Détermine la fraction de la distance totale parcourue à vélo.

Exercices

38 B et C sont deux nombres réels tels que :

$B = \sqrt{17} + 3.1^2$ et $C = \dfrac{5.9^3 - 4.2^2}{8}$.

Calcule B et C et arrondis les résultats au dixième près.

39 Écris sous forme de quotient, chacun des nombres suivants :

a) $\dfrac{2 + \dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4} - 5}$; b) $\dfrac{35 \times 10^{22} \times 2 \times 10^{-12}}{42 \times 10^{-10}}$.

40 1. Écris $\frac{3}{5}$ et $\frac{11}{20}$ sous forme d'un pourcentage puis compare les deux fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{11}{20}$.

2. Une élection oppose 2 candidats C_1 et C_2.

Dans le village A, $\frac{3}{5}$ des 1 030 électeurs ont voté pour le candidat C_1 et le reste pour le candidat C_2.

Dans le village B, $\frac{11}{20}$ des 1 140 électeurs ont voté pour le candidat C_2 et le reste pour le candidat C_1.

Qui des deux candidats a obtenu le plus de voix lors de ces élections ? Justifie ta réponse.

41 Soient A et B les nombres réels définis ci-après :

$A = \sqrt{7} + 2$ et $B = \sqrt{7} - 2$.

1. Calcule A^2, B^2 et $A \times B$.

2. Démontre que $\dfrac{A}{B} + \dfrac{B}{A}$ est un entier naturel.

3. a) Compare 11 et $4\sqrt{7}$ puis donne le signe de $11 - 4\sqrt{7}$.

b) Écris avec une seule radical $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

4. Encadre $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2, sachant que $2{,}918 < \sqrt{5} < 2{,}919$.

42* Lors d'une enquête auprès des élèves d'un lycée, on a interrogé 700 garçons et 1 100 filles sur le réseau social qu'ils ont utilisé au cours de leur soirée du 31/12/2018 au 01/01/2019.

On a obtenu les réponses suivantes.

Pour les garçons :

- 4% ont utilisé WhatsApp ;
- 20% ont utilisé YouTube ;
- tous les autres ont utilisé Facebook.

Pour les filles :

- 18% ont utilisé WhatsApp ;
- 30% ont utilisé YouTube ;
- toutes les autres ont utilisé Facebook.

1. Reproduis et complète le tableau suivant :

	Garçons	Filles	Total
WhatsApp			
YouTube			
Facebook			
Total	700	1 100	

2. Détermine le pourcentage des garçons ayant utilisé Facebook .

Détermine le pourcentage des filles ayant utilisé Facebook.

3. Détermine le pourcentage de jeunes ayant utilisé WhatsApp.

4. Il y a 20% des garçons et 30% des filles qui ont utilisé YouTube.

Justifie si, en faisant la moyenne, on peut affirmer que 25% des jeunes ont utilisé YouTube.

43 Lorsque sa température passe de 10° C à 40° C, une barre métallique augmente en longueur de 0,15% (dilatation).

1. Détermine le nombre par lequel il faut multiplier la longueur de barre métallique lorsque sa température est 10°C pour avoir sa longueur lorsque sa température est 40°C.

2. Si ℓ est la longueur d'une barre à la température de 10° C, détermine sa longueur ℓ' à 40° C en complétant le tableau suivant.

ℓ (Longueur à 10° C)	100	15	47	153	240	325
ℓ' (Longueur à 40° C)						

Situations d'évaluation

44* Au retour des vacances de Toussaint, Monsieur Silué le bibliothécaire de ton établissement, fait un sondage auprès des élèves d'une classe de 2nde A.

Les résultats sont les suivants :

- $\frac{1}{6}$ des élèves de la classe n'ont lu aucun livre.
- $\frac{1}{3}$ des élèves de la classe ont lu un livre.
- $\frac{5}{12}$ des élèves de la classe ont lu deux livres.
- $\frac{1}{12}$ des élèves de la classe ont lu trois livres ou plus de trois livres.

Au vu de ces résultats, le bibliothécaire affirme que $\frac{3}{4}$ des élèves de la classe ont lu un ou deux livres.

Le professeur de maths te demande de donner ton avis sur l'affirmation du bibliothécaire.

1. Justifie que $\frac{9}{12}$ des élèves de la classe ont lu un ou deux livres.

2. Donne ton avis sur l'affirmation du Bibliothécaire.

45* Pour les congés de pâques, alors que tes camarades et toi êtes allés faire les magasins, une affiche devant une boutique de vente de vêtements attire votre attention. Il est écrit : « Tous mes articles ont subi une baisse de 20 % puis encore de 30 %, au final, ils ont baissé de 50 % ».

Une discussion s'engage entre tes camarades, ceux-ci demandent ton arbitrage.

En partant de l'exemple d'une robe qui coûte 5 000 FCFA avant les différentes réductions :

Donne ton avis sur cette affiche.

46* Pour l'embellissement de la cour de leur établissement, les élèves du club environnement d'un lycée ont reçu des jeunes plants de fleurs d'une ONG spécialisée dans le domaine de l'aménagement.



Le responsable de l'ONG leur fait la proposition suivante lors de la livraison des fleurs au sein du lycée.

« Vu que l'espace à aménager est subdivisé en cinq parties, la répartition des fleurs s'effectuera de la façon suivante :

• un cinquième des fleurs sera planté dans la première partie ;

• le quart des fleurs restantes sera planté dans la deuxième partie ;

• le tiers des autres fleurs sera planté dans la troisième partie ;

• la moitié des dernières fleurs sera plantée dans la quatrième partie.

• les toutes dernières fleurs seront plantées dans la cinquième partie. »

Un élève en classe de Terminale C présent à la cérémonie affirme que les fleurs seront équitablement réparties sur les cinq parties.

Le président du club environnement, élève en classe de Terminale A, n'est pas convaincu par l'affirmation de cet élève.

Donne ton avis argumenté sur l'affirmation de l'élève.

Coup de Pouce

26 Poser n le nombre d'admis puis résoudre l'équation $\frac{n}{n+240} = \frac{75}{100}$.

35 Déterminer le prix de la voiture pour chaque formule puis comparer les résultats obtenus.

40 Déterminer le nombre total d'électeurs pour chaque candidat.

42 4. - Déterminer le nombre d'élèves ayant utilisé Facebook.

- Déterminer le nombre total d'élèves.

- Calculer le pourcentage des élèves ayant utilisé Facebook.

44 1. Comparer la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+\frac{1}{12}$ à 1.

Calculer $\frac{1}{3}+\frac{5}{12}$.

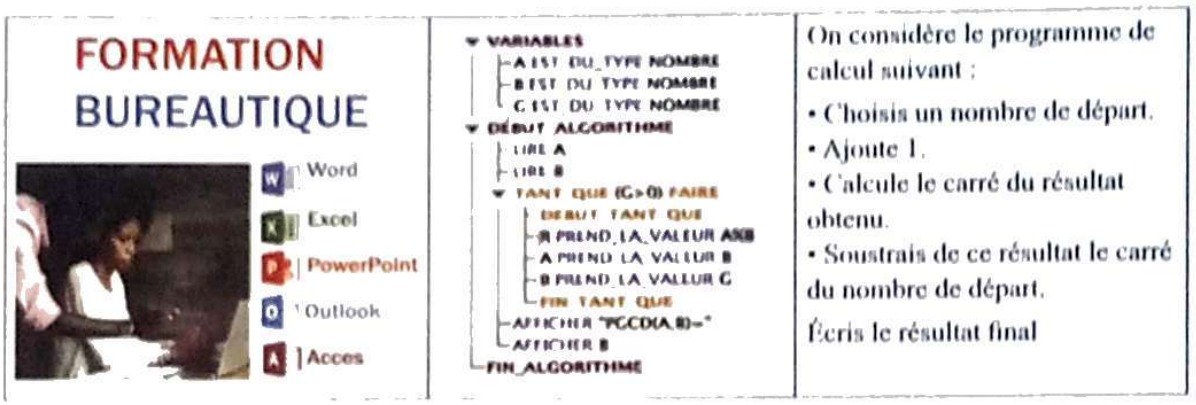
2. Simplifier $\frac{9}{12}$ et le comparer à $\frac{3}{4}$.

45 Appliquer les différentes réductions sur un même prix x.

46 Déterminer la proportion de fleur à planter sur chaque partie de l'espace à aménager.

Leçon 2

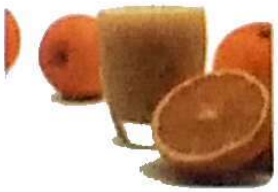
CALCUL LITTÉRAL



Quel est le but de cet algorithme et le programme de calcul suivant ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE

La vendeuse de jus de la coopérative de votre établissement vend un certain nombre de gobelets de jus de fruits : les uns remplis de jus d'orange à 40 francs le gobelet et les autres remplis de jus de bissap à 60 francs le gobelet. En fin de journée, elle a une recette de 16 000 francs. Sachant qu'elle a vendu 500 gobelets de jus de bissap de plus que de gobelets de jus d'orange, elle vous sollicite pour l'aider à calculer le nombre de gobelets de chaque sorte. Vous décidez de vous organiser en groupe pour déterminer le nombre de gobelet de chaque sorte.



HABILETÉS ET CONTENUS

1 Développement d'expressions littérales Factorisation d'expressions littérales

- Développer des expressions littérales
- Réduire des expressions littérales
- Factoriser des expressions littérales en utilisant un facteur commun

2 Produits remarquables

- Connaître les produits remarquables :
  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- Reconnaître le développement d'un produit remarquable
- Calculer de manière performante avec les produits remarquables

3 Polynômes

- Ordonner un polynôme
- Factoriser
  - un polynôme en utilisant un facteur commun
  - un polynôme en utilisant le développement d'un produit remarquable
- Calculer une valeur numérique d'une expression littérale

4 Traitement de situation

- Traiter une situation faisant appel au calcul littéral

Activité 1 Développement d'expressions littérales - Factorisation d'expressions littérales

1.1. Développement d'expressions littérales

1. Sur les figures 1 et 2 ci-dessous, ABCD est un rectangle de longueur x et de largeur a. Le rectangle ABCD est scindé en deux rectangles AEFD et EBCF (voir figure 2).

Figure 1

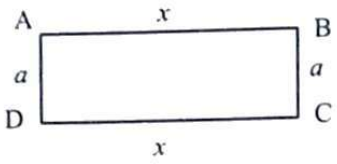
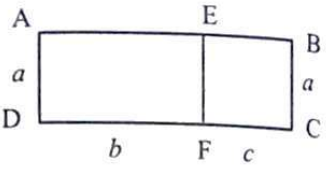


Figure 2



a) Écris la formule de l'aire du rectangle ABCD de la figure 1.
b) Écris la formule de l'aire de chacun des deux rectangles AEFD et EBCF de la figure 2.
c) Déduis-en une relation entre la formule de l'aire du rectangle ABCD et celles des aires des rectangles AEFD et EBCF.
d) Dans la relation obtenue à la question précédente, remplace x par $b + c$.

2. On veut développer $(a + b)(c + d)$ où a, b, c et d sont des nombres réels.
Complète les égalités suivantes en suivant les instructions.

Instructions	Résultats obtenus
Pose $\alpha = c + d$	$(a + b)(c + d) = (a + b) \times \alpha$
Développe $(a + b) \times \alpha$	$= a \times \alpha + b \times \alpha$
Remplace α par $c + d$	$= a \times (\ldots + \ldots) + b \times (\ldots + \ldots)$
Développe les deux produits obtenus	$= \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$

Synthèse

Développer une expression (ou développer un produit), c'est la (ou le) transformer en somme algébrique.

Exercices de fixation

1-1-1 Le tableau ci-dessous comporte des produits à développer. Pour chaque produit, il est proposé quatre développements dont un seul est exact. Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond au développement juste.

		Développements			
N°	Produits	A	B	C	D
1	$x(y + z) =$	$x + y + z$	$x\,y + xz$	$xy + z$	xyz
2	$x(y - z) =$	$xy - xz$	$-xy + xz$	$xy - z$	$-xyz$
3	$5(x + 2) =$	$5x \times 7$	$5 + x + 2$	$5x + 10$	$x + 10$
4	$(x + y)(z + t) =$	$x + y + z + t$	$xz + xt + yz + yt$	$xy + zt + xz + yt$	$xz + xt + yz + zt$
5	$(x + 7)(t - 3) =$	$xt - 3x + 7t + 21$	$-3t - 3x + 7t - 21$	$7x - 3t + 7t - 21$	$xt - 3x + 7t - 21$

1-1-2 Développe les expressions suivantes :

a) $(2 + x)(y + z)$; b) $(a - b)(8 + t)$; c) $(-2x + 1)(y - t)$; d) $(-x - 36)(t - 2)$.

1.2. Factoriser des expressions littérales en utilisant un facteur commun

Rappel : Dans un produit $a \times b$, a et b sont appelés « facteurs ».

1. Identifie le facteur commun dans chacune des expressions suivantes :

$A = 7x + 7y$; $B = 4a - 12$; $C = 9x^2 + 5x$; $D = 15y - 18y^2$; $E = (a + 3)(2a - 5) + 4(a + 3)$.

2. Factorise chacune des expressions précédentes.

Synthèse

Factoriser une expression (ou bien factoriser une somme ou une différence) c'est la transformer en un produit.

Exercices de fixation

1-2-1 Recopie le numéro de chaque ligne suivi de la lettre correspondant au facteur commun correct.

		Facteurs communs			
N°	Sommes	A	B	C	D
1	$2ay + xy$	2	y	z	x
2	$2xy + 7xz$	x	y	z	7
3	$5x + 10y$	5	x	y	10
4	$30x - 3t$	30	x	3	t
5	$gx + 21g$	gx	x	21	g

1-2-2 Le tableau ci-contre comporte des sommes à factoriser. Pour chaque somme, il est proposé quatre factorisations dont une seule est exacte. Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à la factorisation juste.

		Factorisations			
N°	Sommes	A	B	C	D
1	$xy + xz =$	$y(x + z)$	$z(x + y)$	$x(y + z)$	$xy(1 + xz)$
2	$-xy - xz =$	$-x(y + z)$	$-x(y - z)$	$-x(y - xz)$	$x(-y + z)$
3	$5x + 10 =$	$15x$	$5(x + 10)$	$10(x + 2)$	$5(x + 2)$
4	$3x - 15 =$	$3(x - 5)$	$-45x$	$3(x - 15)$	$3(-x - 5)$
5	$-7x + 21 =$	$7(x - 3)$	$-7(x - 3)$	$-14x$	$-7(x + 3)$

1-2-3 Recopie et complète les expressions suivantes :

a) $3a + 3b =$.....$(a + b)$; b) $3x^2 + x = x($.....$+$.....$)$;

c) $3x - 6 = 3($.....$-$.....$)$; d) $ab^7 - a^3b^2 = ab^2($.....$-$.....$)$;

e) $5a^2 - 5b^2 =$ .....$(a^2 - b^2)$.

Activité 2 Produits remarquables

2.1. Produits remarquables

En utilisant l'égalité $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, recopie et complète le tableau suivant :

	Forme développée	Forme réduite
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$		
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) =$		
$(a - b)(a + b) =$		

Synthèse

Pour tous nombres réels a et b :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Exercices de fixation

2-1-1 Pour chaque tableau, écris l'égalité correcte.

$(3x+2)^2 =$	$9x^2+4$
	$9x^2+12x+4$
	$3x^2+6x+2$

$(3x-1)(3x+1)$	$9x^2-1$
	$1-9x^2$
	$3x^2-1$

$(7x-2)(7x+2) =$	$49x^2-4$
	$49x-4$
	$4-49x^2$

$(1-4a)^2 =$	$1-4a+4a^2$
	$1-16a^2$
	$16a^2-8a+1$

2-1-2 Recopie et complète les expressions suivantes.

a) $(\ldots\ldots+4)^2 = x^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots$;

b) $(y - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 6y + \ldots\ldots$;

c) $(\ldots\ldots+6)(\ldots\ldots-\ldots\ldots) = k^2 - \ldots\ldots$;

d) $(3x + \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + 4$;

e) $(1-\ldots\ldots)(\ldots\ldots+\ldots\ldots) = \ldots\ldots - 49x^2$;

f) $(\ldots\ldots-8)^2 = \ldots\ldots - 48x + \ldots\ldots$.

2-1-3 Développe chaque expression.

a) $(x-7)^2$; b) $(2x-3)(2x+3)$; c) $(11+8x)^2$.

2-1-4 Le tableau ci-dessous comporte des produits à développer. Pour chaque produit, il est proposé quatre développements dont un seul est exact. Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond au développement juste.

		Développements			
N°	Produits	A	B	C	D
1	$(x+y)^2 =$	x^2+xy+y^2	$x^2+2xy+y^2$	x^2+y^2	x^2-y^2
2	$(s-t)^2 =$	$s^2-2st-t^2$	s^2-t^2	$s^2+2st-t^2$	$s^2-2st+t^2$
3	$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) =$	$\alpha^2-\beta^2$	$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	$\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$	$\alpha^2+\beta^2$
4	$(2a-3b)^2 =$	$4a^2-9b^2$	$4a^2-6ab-9b^2$	$4a^2-12ab+9b^2$	$4a^2+6ab-9b^2$

2-1-5 Le tableau ci-dessous comporte des sommes à factoriser. Pour chaque somme, il est proposé quatre factorisations dont une seule est exacte. Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à la factorisation juste.

		Factorisations			
N°	Sommes	A	B	C	D
1	$x^2-2xy+y^2$	$(x-y)^2$	$(x+y)^2$	$(x-y)(x+y)$	$(x-2)^2$
2	$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	$(\alpha-\beta)^2$	$(\alpha+\beta)^2$	$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$	$(-\alpha+\beta)^2$
3	s^2-t^2	$(-s-t)^2$	$(s-t)^2$	$(s+t)^2$	$(s-t)(s+t)$
4	$25a^2+30ab+9b^2$	$(5a+3b)(5a-3b)$	$(5a-3b)^2$	$(5a+3b)^2$	$15(a+b)$

2.2. Factorisation d'expressions littérales en utilisant les produits remarquables

a et b sont des nombres réels.
Recopie et complète :

$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$
$= a(.... + ...) + b(.... + ...)$
$= (.... + ...)(a + b)$
$= (.... + ...)^2$

$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$
$= a(.... - ....) + b(.... - ....)$
$= (.... - ....)(.... + ...)$

Synthèse

Pour factoriser, on peut utiliser les égalités suivantes :
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Exercices de fixation

2-2-1 Recopie et complète.

$x^2 + 14x + 49 = ... ^2 + 2 \times .... \times x + ... ^2$
$= (.... + ...)^2$

$x^2 - 2x + 1 = ...^2 - 2 \times .... \times x + ... ^2$
$= (.... - ....)^2$

$x^2 - 64 = ... ^2 - .... ^2$
$= (.... - ....)(.... + ...)$

$25x^2 + 60x + 36 = (....)^2 - 2 .... \times ....+ .... ^2$
$= (.... + ...)^2$

$81x^2 - 121 = (....)^2 - .... ^2$
$= (.... - ....)(.... + ...)$

2-2-2 Factorise chacune des expressions suivantes en utilisant le développement d'un produit remarquable.

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $81x^2 - 36x + 4$

c) $49x^2 - 1$

d) $\frac{x^2}{4} + x + 1$

e) $9 - 144x^2$

Activité 3 Polynômes

1. On donne l'expression P telle que : $P = (-3x^4 + 5x^3)(x^2 - 3x - 2)$.
   a) Développe, réduis et ordonne P.
   b) Quel nom donne-t-on à P ?
   c) Trouve la valeur numérique de P pour $x = -1$.
2. On donne l'expression Q telle que : $Q = (x^2 - 4)(x - 1) + (x - 2)(-x + 1)$.
   a) Développe, réduis et ordonne Q.
   b) Donne le degré de Q.
   c) Cite les coefficients de Q.

Synthèse

P et Q sont des polynômes. Le degré de P est 6 et celui de Q est 3.

Exercices de fixation

3-1 Recopie puis écris le coefficient et le degré de chacun des monômes.

Monômes	Coefficients	Degrés
$-3x^5$		
$1{,}2x^2$		
$-5x^3$		
-12		
$13x^4$		
πx^6		

3-2 Donne le degré de chacun des polynômes P, Q, R et S définis ci-dessous.

$P = -x^3 - 2x^2 + 3$ $\quad R = 12 + 13x^4 + \pi x^6$

$Q = 2x^2 + -5x^3 + 3x$ $\quad S = 4x^{18} - 3x^3 + 1$

3-3 Factorise les polynômes suivants :

a) $3x^2 - x$

b) $(y - 3)(2 + y) + (y - 3)(2y - 1)$

c) $25x^2 - 1$

d) $x^2 + 4x + 4$

e) $x^2 - 14x + 49$

3-4 Ordonne suivant les puissances croissantes de x le polynôme P telle que : $P = 3x^2 - 4x^3 + 2 - 5x$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice Développer et factoriser des expressions

On considère l'expression F telle que : $F = (2x + 1)^2 - 4$.

1. Développe et réduis l'expression F.
2. Factorise l'expression F.
3. Calcule la valeur numérique de F pour $x = 0{,}5$.

Corrigé

1. Développons et réduisons l'expression de F.

On a : $F = (2x + 1)^2 - 4$

Donc : $F = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 - 4$

$F = 4x^2 + 4x + 1 - 4$

$F = 4x^2 + 4x - 3$

2. Factorisons l'expression de F.

$F = (2x + 1)^2 - 2^2$

$F = [(2x + 1) - 2]\,[(2x + 1) + 2]$

$F = (2x + 1 - 2)\,(2x + 1 + 2)$

$F = (2x - 1)\,(2x + 3)$

3. Calculons la valeur numérique de F pour $x = 0{,}5$.

On a : $F = (2x + 1)^2 - 4$

Pour $x = 0{,}5$

$F = (2 \times 0{,}5 + 1)^2 - 4$

$F = 2^2 - 4$

$F = 4 - 4$

$F = 0$

0 est la valeur numérique de F pour $x = 0{,}5$.

Méthode

On utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour développer $(2x + 1)^2$.

Il faut ensuite réduire l'expression obtenue.

Méthode

Ici, il n'y a pas de facteur commun. On va penser donc aux produits remarquables, plus précisément à $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$.

Méthode

Pour calculer la valeur numérique de F, on peut utiliser l'une ou l'autre des trois expressions de F : ($F = (2x + 1)^2 - 4$ ou $F = 4x^2 + 4x - 3$ ou $F = (2x - 1)\,(2x + 3)$).

Dans tous les cas, on obtient le même résultat. Mais il est prudent de prendre l'expression de l'énoncé. Ici il est plus judicieux de prendre la forme factorisée.

Résumé de cours

1 Développement et factorisation d'expressions littérales

Propriété 1 Soient a, b et c trois nombres réels.
On a : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Vocabulaire

- Quand on passe de $a \times (b + c)$ à $a \times b + a \times c$, on dit qu'on développe $a \times (b + c)$.
- Quand on passe de $a \times b + a \times c$ à $a \times (b + c)$, on dit qu'on factorise $a \times b + a \times c$.

Ici le facteur commun est a.

Développement $a \times (b + c) \quad = \quad a \times b + a \times c$ Factorisation	Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme de produit de facteurs. Développer une expression, c'est l'écrire sous la forme de somme algébrique de termes sans aucune parenthèse.

Propriété 2 Soient a, b, c et d des nombres réels.
On a : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Vocabulaire

Quand on passe de $(a + b)(c + d)$ à $ac + ad + bc + bd$, on dit qu'on développe $(a + b)(c + d)$.

2 Produits remarquables

Soient a et b deux nombres réels quelconques.
On a :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Pour développer	Pour factoriser
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

3 Polynômes

Définition L'expression ax^n, où a est un nombre réel et n un entier naturel, est appelée monôme.
Si a est différent de 0, alors ax^n est un monôme de coefficient a et de degré n.

Exemple : $-\pi x^7$ est un monôme en x de coefficient $-\pi$ et de degré 7.

Remarque : $0x^n$ est un monôme qui n'a pas de degré car $0x^1 = 0x^2 = 0x^3 = 0x^{1000} = 0x^{3000} = 0$.

Définition Un polynôme est une somme de plusieurs monômes.
Le plus grand degré des monômes est appelé degré du polynôme.

Exemple : $6x^9 + 11x^5 - 3x^2 - 7$ est un polynôme de degré 9.

Exercices

Exercices de renforcement

1 Développe chacune des expressions suivantes :

a) $2(5 - a)$ b) $3(-2x + 5)$
c) $-2x(x - 3)$ d) $-5(3 - 4a)$

2 Développe chacune des expressions suivantes :

a) $5(3x + 2)$ b) $-3(2x - 5)$
c) $5x(-3x + 2)$ d) $-4(5x - 2)$

3 Développe chacune des expressions suivantes :

a) $(8x + 2y)(-2x + 5)$;
b) $3(2x - 4) + 5(3 - x)$;
c) $2x(5 + 3x) - 4(x + 5)$;
d) $(4x - 8)(3x - 7) + (-2x + 3)$;
e) $(4x + 5)(3x + 2)$;
f) $(5x - 2)(x + 7)$;
g) $(4x - 3)(5x - 2)$.

4 Factorise chacune des expressions suivantes :

a) $6x + 6y$ b) $20 - 30a$
c) $15a - 25b$ d) $9a^2 + 12a$
e) $15x^2 + 5x$ f) $16x^2 + 24x$

5 Factorise chacune des expressions suivantes :

a) $2x(5 - a) - 2x(2a + 7)$;
b) $(x - 3)(5a + 8) - (x - 3)(-14a + 5)$;
c) $(1 - 2x)(y - 3) + (2x - 1)(5y - 3)$;
d) $(a - b)(3 - x) + (a - b)(18x - 5)$.

6 On désigne par a et b des nombres réels positifs. Sur les figures ci-dessous, MNOP est un carré.

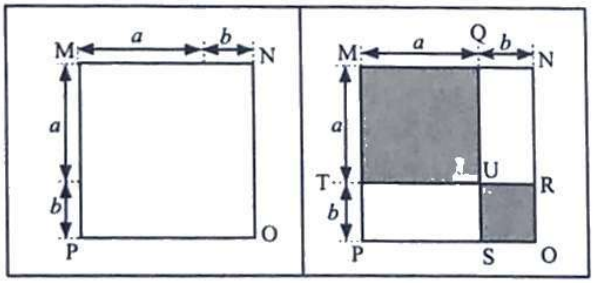


Figure 1

Figure 2

a) En te servant de la figure 1, calcule l'aire du carré MNOP.

b) On découpe ce même carré en carrés et en rectangles (voir figure 2)
Recopie et complète :
- l'aire du carré MQUT est : .....
- l'aire du carré UROS est : .....
- l'aire du rectangle QNRU est : .....
- l'aire du rectangle TUSP est : .....

c) Les deux carrés étant identiques, trouve une relation entre l'aire calculée au a) et les aires calculées au b).

7 Développe chacune des expressions suivantes.

a) $(2y - 1)(2y + 1)$;
b) $(-3y + 8a)(3y + 8a)$;
c) $(8p - 5a)(8p + 5a)$;
d) $(9a - 8)(9a + 8)$.

8 Développe chacune des expressions suivantes.

a) $(2y - 1)^2 + (2y + 1)^2$;
b) $(-3y + 8a)^2 - (3y + 8a)^2$;
c) $(5p - 8a)^2 + (8p + 5a)$;
d) $(8a - 9)^2 - (9a - 8)^2$.

9 Recopie et complète chacune des égalités suivantes :

$4a^2 - 9b^2 = (...)^2 - (...)^2 = (...+...)(...-...)$

$\frac{1}{4}x^2 - 49y^2 = (...)^2 - (...)^2 = (...+...)(...-...)$

$9x^2 - 30x + 25 = (...)^2 - 2 \times ... \times ... + ... = (...-...)^2$

$x^2 - 4x + 4 = (...)^2 - 2 \times ... \times ... + ...^2 = (...-...)^2$

10 Développe chacune des expressions suivantes :

a) $(3x + 17y)(3x - 17)$;
b) $(4x + 1)^2$;
c) $(5x - 4)^2$;
d) $(11x - 7y)(11x + 7y)$.

11 Factorise chacune des expressions suivantes :

a) $49 - y^2$;
b) $9a^2 - 24a + 16$;
c) $25a^2 - 90a + 81$;
d) $-4a + a^2 + 4$;
e) $-81b^2 + 25$;
f) $16p^2 + 25 - 40p$;
g) $4a^2 - 32ab + 64b^2$;
h) $a^2 - 625$;
i) $4a^2 + 81 + 36a$.

Exercices

12 Factorise chacune des expressions suivantes :

a) $\frac{1}{9}x^2 + 4x + 36$;

b) $(2x + 1)^2 + (4x^2 - 1)$;

c) $9x^2 + 12x + 4 - 2x(3x + 2) + 3(4 - 9x^2)$.

13 Développe et réduis chacun des polynômes A, B, C et D suivants :

$A = 3(-2x + 5) + (-2x + 5)(x - 3)$;
$B = (2a - 5)(3 - 4a) - 2(5 - a)$;
$C = (x - 2)^2 - 6(3x - 5)^2$;
$D = 9 + 4x^2 - (2x + 7)(2x - 7)$.

14 a) Développe et réduis chacun des polynômes A, B, C, D et E suivants.

$A = (x - 5)(3x + 5) + (4x - 2)(5x - 2)$.
$B = (3x + 2)(2x - 5) - (6x - 5)(4x + 2)$.
$C = (4x - 5)(2x - 5) - (4x + 1)(2x - 3)$.
$D = (6x^2 - 5x + 7)(4x^2 - 5x - 5)$.
$E = (3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - 2x + 8)$.

b) Donne le degré de chacun des polynômes A, B, C, D et E ci-dessus.

15 On donne les polynômes P, Q et R tels que :

$P(x) = -3x - x^3 + 7x^2 - x^4$;
$Q(x) = 4x^3 - 8 - 2x^2 + 6x$;
$R(x) = 10x^4 - 4x^3 + 7 + x^3 - 7$.

1. Ordonne P suivant les puissances décroissantes de la variable x.
2. Ordonne Q suivant les puissances croissantes de la variable x.
3. Réduis et ordonne R suivant les puissances croissantes de la variable x.

16 Factorise les polynômes suivants :

a) $(6x + 3)(4x - 5) + (3x + 1)(6x + 3)$;

b) $(4x - 5)(2 - x) + (4x - 5)^2$;

c) $(3x + 5)(3 - 2x)\ 3) - (3x + 5)(2 + 5x)$;

d) $(3x + 4)^2 - (3x + 4)(5x + 6)$;

e) $(4x + 3)(3 - 2x) - (4x + 3)(5 - 4x)$.

17 Factorise chacun des polynômes suivants :

a) $(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3)$;
b) $(x - 3)^2 - (x - 3)(4x + 1)$;
c) $2ab + 8b^2$;
d) $(x + 1)(x + 2) - 5(x + 2)$;
e) $(x + 2)(x + 1) + (x + 2)(7x - 5)$;
f) $(x - 6)(2 - x) - (2 - x)(3 + 4x)$.

18 On donne le polynôme Q tel que
$Q = 9x^2 - 6x + 1 - (6x - 2)(x + 3)$.

1. *a*) Justifie que $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$;
   b) Justifie que $(6x - 2) = 2(3x - 1)$.

2. Déduis des questions précédentes que
$Q = (3x - 1)(x - 7)$.

19 On considère le polynôme I tel que :
$I = 7x^2 - 4x + 8$.
Calcule I pour :

a) $x = 3$; b) $x = -4$; c) $x = -3$.

Exercices d'approfondissement

20 Soit l'expression G telle que :
$G = a(a - b) + b(a - b)$
a) Développe et réduis G.
b) Factorise G en mettant $(a - b)$ en facteur.
c) Déduis-en une égalité remarquable.

21* On pose : $K = (x + 15)^2 - (x - 15)^2$.
a) Justifie que : $K = 60x$.
b) Déduis-en le résultat de $1215^2 - 1185^2$.

22 On donne l'expression A telle que :
$A = (3x - 2)^2 + (4x + 7)(3x - 2)$.
1. Développe et réduis A.
2. Factorise A.
3. Calcule A pour $x = 0$, $x = 2$; ou $x = -3$.
(*On précisera pour chaque calcul la forme de A la mieux adaptée*).

23 On considère les expressions H et G telles que :

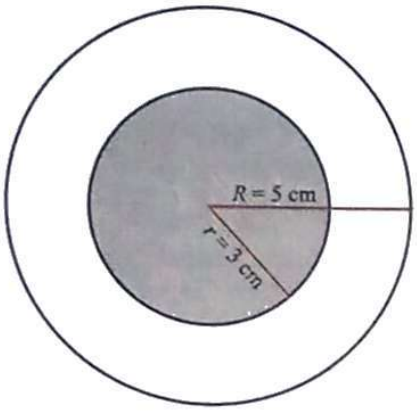
$H = 4\left(x + \sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{3}\left(x + \sqrt{3}\right) + 3$ et

$G = \left(2x + \sqrt{3}\right)^2$.

1. Développe, réduis et ordonne H et G.
2. Déduis-en une factorisation de H.

24* Soit n un nombre entier. On pose :
$A = (3n + 1)^2 + 16n^2 - 26n + 3$.
a) Développe et réduis A.
b) Justifie que A est le carré d'un nombre entier.

25



Récopie puis effectue les calculs suivants :
(On prendra $\pi \approx 3{,}1$)

Aire du grand cercle	πR^2	$25 \times \pi$	.....
Aire du petit cercle	πr^2	$9 \times \pi$	.....
Aire de la couronne	$\pi R^2 - \pi r^2$	.... $\times \pi$	.....

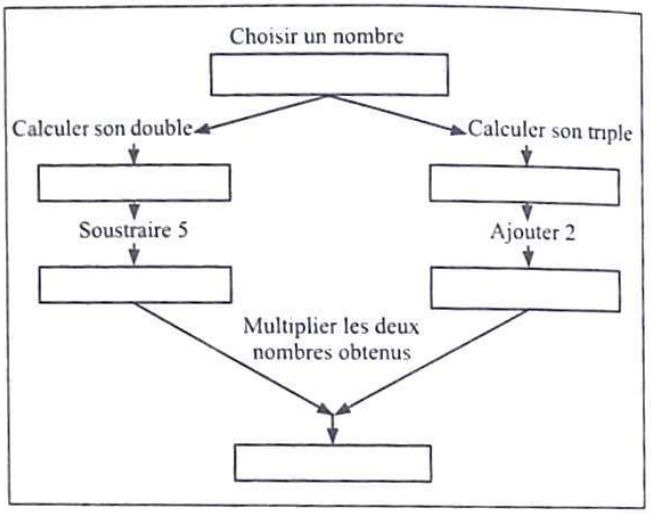
$R^2 = \ldots$; $r^2 = \ldots$; $R^2 - r^2 = \ldots$;
$\pi(R^2 - r^2) = \ldots \pi = \ldots$
Déduis-en une comparaison des expressions $\pi R^2 - \pi r^2$ et $\pi(R^2 - r^2)$.

Situations d'évaluation

26* Marie, élève en classe de Seconde A dans ton établissement, dit à son voisin de classe qu'en ajoutant deux nombres pairs, on obtient toujours un nombre pair. Mais le voisin pense que ce n'est pas toujours le cas. Tu dois les départager.
1. Explique pourquoi un nombre pair peut s'écrire sous la forme $2n$ où n est un nombre entier naturel.
2. Conclus.

27* Pour ses activités de fin du premier trimestre, le club de mathématiques d'un lycée vient d'organiser un concours dont les résultats seront connus au retour des congés de Noël. L'une des questions posées a porté sur le schéma de calcul ci-dessous.

Question posée :
Si on choisit un nombre quelconque x comme nombre de départ, parmi les expressions suivantes, quelle est celle qui, après factorisation, donne le résultat obtenu par le programme de calcul ?
A = $(3x + 2)^2 - (x - 7)(3x + 2)$;
B = $(3x + 2)^2 + (x + 7)(3x + 2)$;
C = $(3x + 2)^2 - (x + 7)(3x + 2)$.



Lily, l'une des participantes à ce concours, a choisi la réponse C. Son voisin est convaincu que c'est plutôt la réponse A.
Départage Lily et son voisin.

Coup de Pouce

21 b) Transformer
$1215 = 1200 + 15$;
$1185 = 1200 - 15$.

24 b) Utiliser l'égalité remarquable :
$a^2 - 2ab + b = (a - b)^2$.

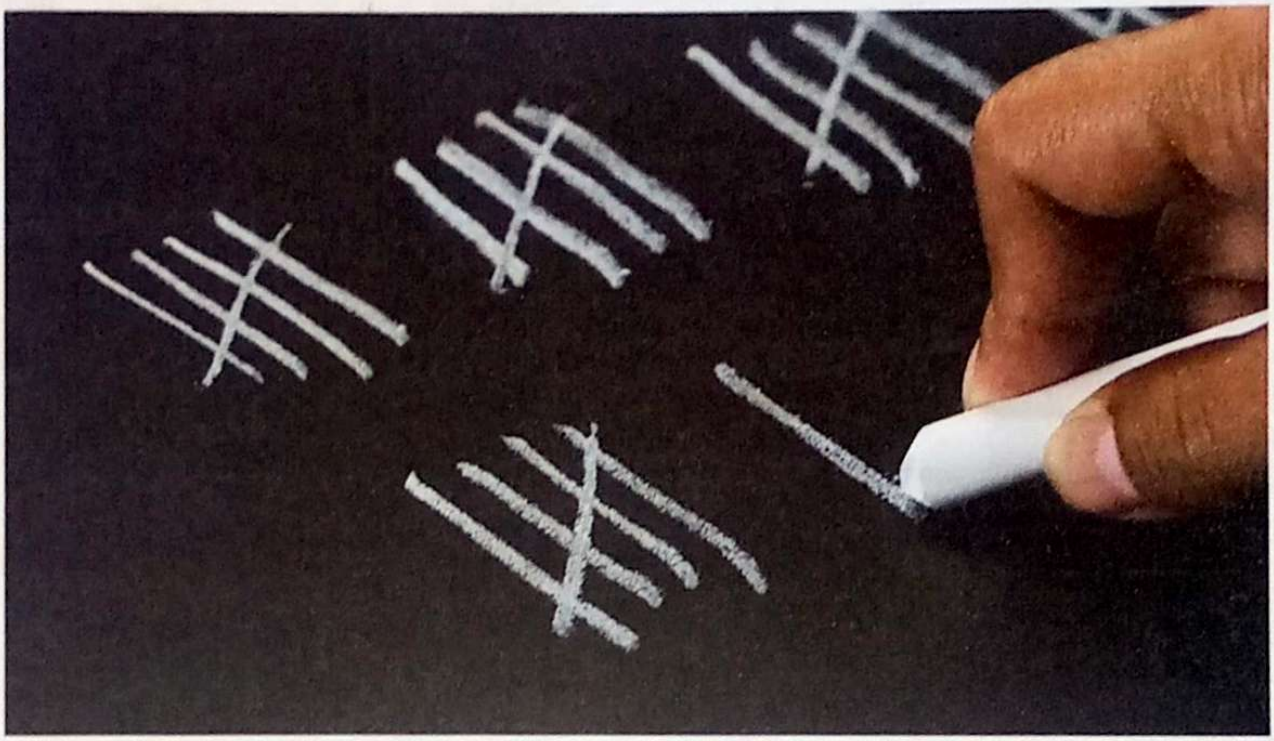
26 Tester cette affirmation sur deux exemples.

27 Si on choisit un nombre quelconque x comme nombre de départ, déterminer le résultat obtenu par le programme de calcul.

Justifier que pour toutes les valeurs de x l'expression C choisie par Lily est égale à l'expression $(2x - 5)(3x + 2)$.

Leçon 3

DÉNOMBREMENT



Compte le nombre de voix du candidat.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les trois classes de 2nde A d'un lycée ont organisé l'élection de leur délégué auprès de l'administration de leur établissement. Il y a eu trois candidats à cette élection.
Les résultats sont donnés par le tableau ci-dessous.

Candidats	ZAKRO	BATRI	ALAKIS	Abstention
Nombre de voix en 2ndeA1	12	7	17	4
Nombre de voix en 2ndeA2	22	4	8	2
Nombre de voix en 2ndeA3	9	25	10	1

Impatients, les élèves décident d'apprendre à dénombrer pour connaître le score de chaque candidat, le taux de participation et le vainqueur de ce scrutin en attendant les résultats officiels de leur éducateur.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Réunion de deux ensembles finis

- Connaître la définition de la réunion de deux ensembles finis
- Noter la réunion de deux ensembles finis
- Lister les éléments de A∪B, A et B étant deux ensembles finis

2 Intersection de deux ensembles finis

- Connaître la définition de l'intersection de deux ensembles finis
- Noter l'intersection de deux ensembles finis
- Lister les éléments de A∩B, A et B étant deux ensembles finis

3 Cardinal d'un ensemble fini

- Connaître la définition du cardinal d'un ensemble fini
- Noter le cardinal d'un ensemble fini
- Connaître la propriété relative au cardinal de la réunion de deux ensembles finis
- Dénombrer en utilisant la formule du cardinal de la réunion de deux ensembles finis

4 Dénombrement à l'aide d'un arbre de choix

- Dénombrer en utilisant un arbre de choix

5 Dénombrement à l'aide d'un tableau

- Dénombrer en utilisant un tableau

6 Dénombrement à l'aide d'un diagramme

- Dénombrer en utilisant un diagramme.

7 Traduction des expressions du langage courant utilisant « et », « ou », « au moins », « au plus » en langage mathématique

- Traduire des expressions du langage courant utilisant « et », « ou », « au moins », « au plus » en langage mathématique

8 Traitement de situation

- Traiter une situation faisant appel au dénombrement

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Réunion de deux ensembles finis

M. Kitan a trois enfants : René, Thibaut et Aude.
Veuve Atoli a deux enfants : Jude et Bertrand.
M. Kitan et Mme Atoli se sont mariés et ont eu trois enfants : Murielle, Nadège et Carmel.

1. Écris en extension l'ensemble E des enfants nés de M. Kitan.
2. Écris en extension l'ensemble F des enfants nés de Mme Atoli.
3. Écris en extension l'ensemble G des enfants nés de M. Kitan ou de Mme Atoli.

Synthèse

La réunion de deux ensembles finis A et B est l'ensemble composé de tous les éléments de A et de tous les éléments de B, chaque élément étant pris une seule fois.

Exercices de fixation

1-1 E et F sont deux ensembles finis.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. Si *a* appartient à la réunion de E et F, alors *a* appartient uniquement à E.
2. Si *a* appartient à la réunion de E et F, alors *a* appartient uniquement à F.
3. Si *a* appartient à la réunion de E et F, alors *a* appartient à E ou à F.
4. Si *a* appartient à la réunion de E et F, alors *a* appartient à E et à F.
5. La réunion de E et F se note : « E⊂F ».

1-2 On donne les ensembles A et B de nombres tels que :
A = {2 ; 4 ; 6 ; 12} et B = {1 ; 2 ; 3 ; 6}
Recopie l'ensemble qui correspondant à la réunion de A et B.

{2 ; 4 ; 5 : 6 ; 12} {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6}

{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12} {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

Activité 2 Intersection de deux ensembles finis

Au grand marché d'Abobo, Maria vend la tomate (t), des aubergines (a), du piment frais (p) et des oignons (o). La voisine de Maria vend des carottes (c), des oignons (o), des gombos frais (g) et des aubergines (a).
1. Écris en extension, l'ensemble K des légumes vendus par Maria.
2. Écris en extension l'ensemble H des légumes vendus par la voisine de Maria.
3. Écris en extension l'ensemble L des légumes vendus à la fois par les deux commerçantes.

Synthèse

L'intersection de deux ensembles finis est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois aux deux ensembles.

Exercices de fixation

2-1 M et N sont deux ensembles finis.
Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. Si *x* appartient à l'intersection de M et N, alors *x* appartient uniquement à M.
2. Si *x* appartient à l'intersection de M et N, alors *x* appartient uniquement à N.
3. Si *x* n'appartient pas à l'intersection de M et N, alors *x* appartient à M ou à N.
4. Si *x* appartient à l'intersection de M et N, alors *x* appartient à M et à N.
5. L'intersection de M et N se note : « M ∩ N ».

2-2 On donne les ensembles A et B de nombres tels que :
A = {2 ; 4 ; 6 ; 12} et B = {1 ; 2 ; 3 ; 6}.
Parmi les ensembles ci-dessous, recopie l'intersection de A et B.

{1 ; 3 ; 4 ; 12} ; {2 ; 6}

{4 ; 12} ; {1 ; 3}

Activité 3 Cardinal d'un ensemble fini

1. Complète le tableau ci-dessous en se référant au corps humain d'un adulte

Organe	doigt	oreille	tête	dent	vertèbre
Nombre					

L'ensemble des doigts, l'ensemble des oreilles et l'ensemble des vertèbres d'un être humain ont chacun un nombre fini d'éléments.

2. On donne deux ensembles finis A et B tels que :
A = {o ; r ; p ; h ; e ; l ; i ; n ; s} ; B = {s ; o ; c ; i ; a ; l ; e}.
a) Écris en extension A∪B et donne Card(A∪B).
b) Écris en extension A∩B et donne Card(A∩B).
c) Calcule CardA + CardB − Card(A∩B).
d) Compare Card(A∪B) et CardA + CardB − Card(A∩B).

Synthèse

- Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note Card A.
- A et B étant deux ensembles finis, on a : Card(A∪B) = CardA + CardB − Card(A∩B).

Exercices de fixation

3-1 Dans un lycée, on compte 546 élèves de seconde A dont 304 filles.
Parmi ces élèves, 315 apprennent l'espagnol, 244 apprennent l'allemand.
On note : S l'ensemble des élèves, F l'ensemble des filles, G l'ensemble des garçons, A l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand et E l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol.
Relie chaque ensemble à son cardinal.

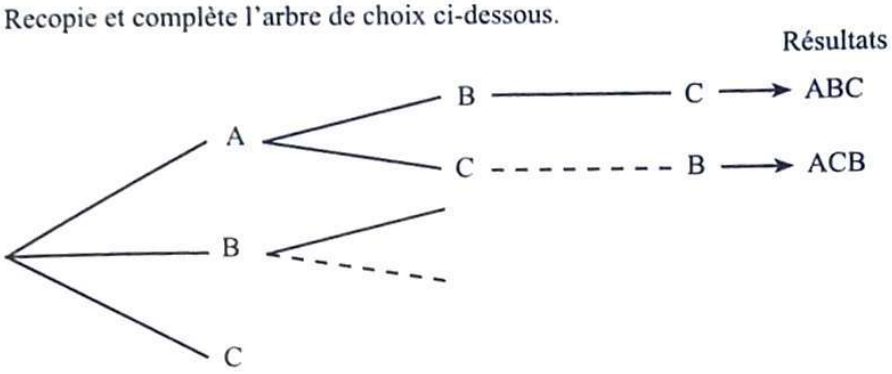
S	315
F	242
G	546
A	244
E	304

3-2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.
1. Le cardinal d'un ensemble fini est un entier relatif.
2. Le cardinal de l'ensemble vide est 1.
3. Le nombre d'éléments que compte un ensemble fini est son cardinal.
4. Card(E∪F) = CardE − CardF + Card(E∩F).

3-3 En vue d'un meilleur encadrement affectif, le ministère des affaires sociales a réalisé l'enquête suivante dans un orphelinat :
• À la question « es-tu orphelin de père ? », 22 enfants ont répondu « Oui » ;
• À la question « es-tu orphelin de mère ? », « 43 enfants ont répondu « Oui » ;
• À la question « es-tu orphelin de père et de mère ? », 13 enfants ont répondu « Oui ».
Détermine le nombre d'enfants interrogés en supposant que tous les enfants interrogés ont répondu.

Activité 4 Dénombrement à l'aide d'un arbre de choix

Un élève de seconde A veut appeler au téléphone, successivement et une seule fois trois de ses amis Api (A), Bouazo (B) et Cissé (C).
Il est libre de choisir l'ordre de ses appels.
Recopie et complète l'arbre de choix ci-dessous.



Dénombre les résultats possibles.

Synthèse

On peut dénom.. .r en utilisant un arbre de choix.

Exercices de fixation

4-1 À son anniversaire, Jeanine propose à ses invités le menu suivant.
- Plats de résistance : tchep rouge ou tchep vert.
- Boissons : sucrerie ou jus de fruits.
- Dessert : yaourt, banane ou orange.

Chaque invité a droit à un repas constitué d'un plat de résistance, une boisson et un dessert.
Utilise un arbre de choix pour déterminer le nombre de repas distincts à servir aux invités.

4-2 Une banque veut générer des codes de carte bancaire en utilisant sans répétition un nombre de trois chiffres de l'ensemble A = {5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.
Utilise un arbre de choix pour déterminer le nombre de codes que l'on peut générer.

Activité 5 Dénombrement à l'aide d'un tableau

1. On dispose de deux dés cubiques de couleurs différentes. Les faces du dé rouge sont marquées de 1 à 6 et les faces du dé bleu sont marquées de 0 à 5.
On lance les deux dés et on forme un nombre de deux chiffres avec les numéros des faces supérieures.
Le dé rouge donne le chiffre des dizaines et le dé bleu, le chiffre des unités.

a) Recopie et complète le tableau ci-dessous.

b) Utilise le tableau pour dénombrer les nombres inférieurs à 50 que l'on peut obtenir.

Dizaines \ Unités	0	1	2	3	4	5
1	10					
2						
3						
4						
5						
6						

2. À la fin du premier trimestre, une ONG a réalisé un sondage auprès de 150 élèves de la seconde A. Voici les résultats :
À la question « As-tu la moyenne en Mathématiques ? », 50 élèves ont répondu OUI.
À la question « As-tu la moyenne en Français ? », 80 élèves ont répondu OUI.
À la question « As-tu la moyenne en Français et en Mathématiques ? », 35 élèves ont répondu OUI.

a) Recopie et complète le tableau suivant :

	M	non M	Total
F			
non F			
Total			

b) Utilise le tableau précédent pour déterminer :
- Le nombre d'élèves n'ayant pas la moyenne en Mathématiques.
- Le nombre d'élèves n'ayant pas la moyenne en Français.
- Le nombre d'élèves ayant la moyenne en Mathématiques et n'ayant pas la moyenne en Français.
- Le nombre d'élèves ayant la moyenne en Français et n'ayant pas la moyenne en Mathématiques.
- Le nombre d'élèves n'ayant pas la moyenne en Mathématiques et en Français.
- Le nombre d'élèves ayant la moyenne en Mathématiques ou en Français.

Synthèse

On peut dénombrer en utilisant un tableau à double entrée.

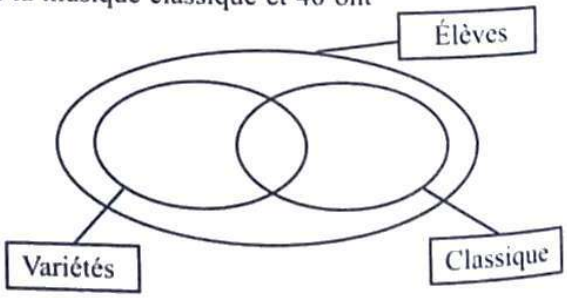
Exercices de fixation

5-1 Dans une classe de 31 élèves, 16 sont des filles et 25 % des filles sont boursières.
Deux tiers des garçons sont non-boursiers.
Utilise un tableau pour déterminer le nombre d'élèves boursiers.

5-2 On dispose de deux dés cubiques parfaitement équilibrés. Les faces de l'un sont numérotées de 1 à 6 et les faces de l'autre sont coloriées deux en rouges, deux en vert, une en blanc et la dernière en jaune. On lance les deux dés simultanément, on note la couleur et le chiffre obtenu. Exemple : (**R ; 1**).
Utilise un tableau à double entrée pour déterminer le nombre de résultats possibles.

Activité 6 Dénombrement à l'aide d'un diagramme

En vue de créer un club artistique, un professeur de musique a fait une enquête auprès de 140 élèves d'un collège. 116 élèves ont déclaré aimer les variétés, 52 la musique classique et 40 ont affirmé aimer à la fois les variétés et la musique classique.



1. Reproduis la figure ci-contre et colorie :
   - en rouge la partie du diagramme représentant les élèves qui n'aiment que les variétés ;
   - en bleu la partie du diagramme représentant élèves qui n'aiment que la musique classique.
2. a) Détermine le nombre d'élèves de chaque partie coloriée.
   b) Détermine le nombre d'élèves qui n'aiment ni les variétés, ni la musique classique.

Synthèse

On peut dénombrer en utilisant un diagramme.

Exercice de fixation

32 élèves composent le Club Sport d'un lycée.
14 jouent au handball, 22 jouent au volley-ball et 7 élèves jouent aux deux sports.
Détermine le nombre d'élèves du club qui ne pratiquent aucun de ces deux sports.

Activité 7 Traduction des expressions du langage courant utilisant « et », « ou », « au moins », « au plus » en langage mathématique

Lors d'un test de recrutement, les candidats sont soumis à des questionnaires tirés au choix. Le tirage se fait de la manière suivante :
Dans une urne, on place 2 jetons blancs, 2 jetons rouges et 2 jetons noirs tous identiques et indiscernables au toucher. Le candidat tire au hasard et en une seule fois deux jetons de l'urne. Un jeton blanc tiré correspond à une question de mathématiques, un jeton rouge tiré correspond à une question de français et un jeton noir tiré correspond à une question de culture générale.

1. Dénombre les cas où le candidat obtient deux questions de mathématiques ou deux questions de français.
2. Dénombre les cas où le candidat obtient une question de culture générale et une question de français.
3. Dénombre les cas où le candidat obtient au moins une question de mathématiques.
4. Dénombre les cas où le candidat obtient au plus une question de culture générale.

Synthèse

- « et » se traduit par une intersection.
- « ou » se traduit par une réunion.

Exercices de fixation

7-1 Dans une classe de seconde A, on appelle B l'ensemble des filles qui aiment le basket-ball et par H celui des filles qui aiment le handball. On a : B = {Mariette, Amandine Mariam, Bertille, Khadidja, Charlotte, Marie, Aicha, Marina, Nathalie, Chérifa, Julie} et H ={ Khadidja, Sylvie, Mariam, Fanta, Bertille, Carine, Chérifa , Bintou, Marie, Flora, Fatou, Marina Claire, Rose }.
a) Établis la liste des filles qui aiment le Basket-ball et le Handball.
b) Établis la liste des filles qui aiment le Basket-ball ou le Handball.

7-2 Après un devoir surveillé, le professeur de maths a relevé les notes suivantes.

Notes	1	2	4	7	8	10	11	13	14	15	16	17	19	**Total**
Nombre d'élèves	1	4	3	2	4	14	11	9	8	5	4	2	1	68

a) Détermine le nombre d'élèves qui ont eu au moins 10.
b) Détermine le nombre d'élèves qui ont eu au moins 12.
c) Détermine le nombre d'élèves qui ont eu au plus 8.
d) Détermine le nombre d'élèves qui ont eu au plus 19.

73 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. « Prendre au moins 4 boules dans une urne contenant 6 boules » signifie prendre soit 1 boule, soit 2 boules, soit 3 boules.
2. « Prendre au moins 4 boules dans une urne contenant 6 boules » signifie prendre soit 4 boules, soit 5 boules, soit 6 boules.
3. « Prendre au plus 2 boules dans une urne contenant 6 boules » signifie prendre soit 0 boule, soit 1 boule, soit 2 boules.
4. « Prendre au plus 2 boules dans une urne contenant 6 boules » signifie prendre soit 2 boules, soit 3 boules, soit 4 boules ; soit 5 boules, soit 6 boules.
5. A et B étant deux ensembles, l'expression « A ou B » signifie en mathématiques $A \cap B$.
6. A et B étant deux ensembles, l'expression « A ou B » signifie en mathématiques $A \cup B$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Dénombrer à l'aide d'un tableau

Les 80 membres du personnel d'un établissement scolaire se répartissent en catégories :
- le personnel enseignant ;
- le personnel administratif.

Parmi les 80 membres du personnel, on compte 32 hommes dont 20 professeurs.
Le personnel enseignant compte deux fois plus de femmes que d'hommes.
Détermine la répartition du personnel par sexe et par catégorie.

Corrigé

Remplissons progressivement le tableau à double entrée ci-dessous pour déterminer la répartition du personnel.
- PE : Personnel Enseignant ;
- PA : Personnel Administratif ;
- H : Hommes ;
- F : Femmes.

Étape 1 : l'effectif total du personnel de l'établissement est : 80.
On remplit la case des totaux :

	PE	PA	Total
H			
F			
Total			80

Étape 2 : parmi les 80 membres du personnel, on compte 32 hommes.
On déduit le nombre de femmes : 48.

Méthode

Utiliser un tableau à double entrée avec toutes les catégories et les sexes.

	PE	PA	Total
H			32
F			48
Total			80

Étape 3 : parmi les 32 hommes, on compte 20 professeurs.
On déduit le nombre de femmes du personnel administratif : 12.

	PE	PA	Total
H	20	12	32
F			48
Total			80

Étape 4 : Le personnel enseignant compte deux fois plus de femmes que d'hommes.
On déduit le nombre d'enseignantes :
40 et le total du personnel enseignant : 60.

	PE	PA	Total
H	20	12	32
F	40		48
Total	60		80

Étape 5 : On calcule le nombre de femmes du personnel administratif : $48 - 40 = 8$ et le total du personnel administratif : 20.

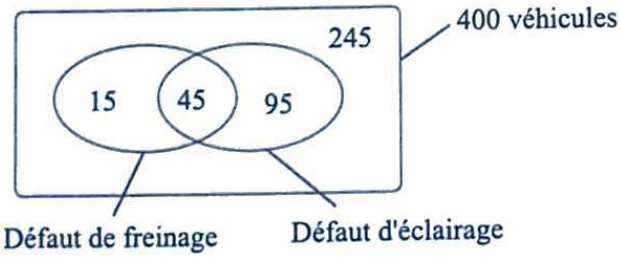
	PE	PA	Total
H	20	12	32
F	40	8	48
Total	60	20	80

Exercice 2 Dénombrer à l'aide d'un diagramme

Une campagne de prévention routière s'intéresse aux défauts constatés sur le freinage et sur l'éclairage de 400 véhicules.
60 des 400 véhicules présentent un défaut de freinage.
140 sur 400 véhicules présentent un défaut d'éclairage.
45 véhicules présentent à la fois un défaut de freinage et un défaut d'éclairage.
a) Détermine le nombre de véhicules présentant un défaut de freinage mais pas un défaut d'éclairage.
b) Détermine le nombre de véhicules présentant un défaut d'éclairage mais pas un défaut de freinage.
c) Détermine le nombre de véhicules présentant au moins un des deux défauts.
d) Détermine le nombre de véhicules présentant aucun des deux défauts.

Corrigé

Utilisons un digramme pour résoudre ce problème



Méthode

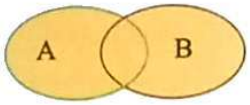
- Construire un digramme et le remplir en commençant par l'intersection des ensembles.
- Au moins un défaut signifie un défaut ou deux défauts.

a) 15 véhicules présentent un défaut de freinage mais pas un défaut d'éclairage.
b) 95 véhicules présentent un défaut d'éclairage mais pas un défaut de freinage
c) $15 + 45 + 95 = 155$.
155 véhicules présentent au moins un des deux défauts.
d) $400 - 155 = 245$
245 véhicules présentent aucun des deux défauts.

Résumé de cours

1 Réunion de deux ensembles finis

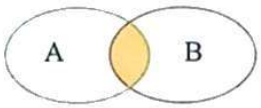
Définition

A et B sont deux ensembles finis. On appelle réunion de A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.	 Réunion de A et B C'est la partie coloriée en jaune

La réunion de A et B se note A∪B, on lit "A union B".
$x \in A \cup B$ signifie que $x \in A$ ou $x \in B$.

2 Intersection de deux ensembles finis

Définition

A et B sont deux ensembles finis. On appelle intersection de A et B, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.	 Intersection de A et B C'est la partie coloriée en jaune

L' intersection de A et B se note : A∩B et se lit "A inter B".
$x \in A \cap B$ signifie que $x \in A$ et $x \in B$.

Définition Deux ensembles sont disjoints lorsque leur intersection est vide, c'est-à-dire s'ils n'ont pas d'éléments en commun.

3 Cardinal d'un ensemble fini

Définition Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Notation

Le cardinal d'un ensemble fini A se note : Card A.

Remarque

- Le cardinal d'un ensemble fini est un nombre entier naturel.
- Le cardinal de l'ensemble vide est zéro.

Propriété Si A et B sont deux ensembles finis, alors A∪B est un ensemble fini et on a :
Card(A∪B) = CardA + CardB − Card(A∩B).

Remarque

Si A et B sont deux ensembles finis disjoints, alors Card(A∪B) = Card(A) + Card(B).

Résumé de cours

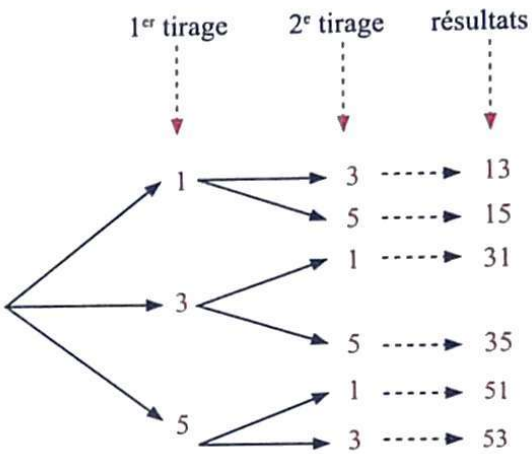
4 Dénombrement à l'aide d'un arbre de choix

Méthode

Pour construire un arbre de choix, on peut :
- représenter les branches correspondant au nombre de choix à la première étape ;
- représenter pour chaque branche de la première étape, les branches correspondant au nombre de choix à la deuxième étape ;
- on réitère l'opération jusqu'à la dernière étape.

Le nombre de choix possibles correspond au nombre de branches obtenues à la dernière étape.

Exemple d'arbre de choix



5 Dénombrement à l'aide d'un tableau

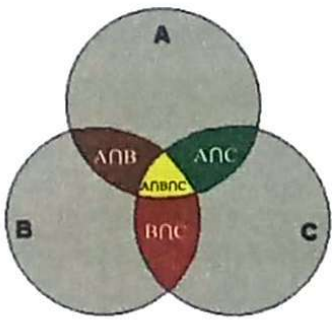
Point méthode

Lorsque les résultats sont des couples ou des pairs, pour les dénombrer, on peut utiliser un tableau à double entrée.

6 Dénombrement à l'aide d'un diagramme

Méthode

Pour dénombrer à l'aide d'un diagramme, on peut :
- représenter chaque ensemble par un diagramme de Venn en faisant apparaître les intersections de ces ensembles s'il y a lieu ;
- renseigner chaque partie du diagramme par son effectif.



7 Traduction des expressions du langage courant utilisant « et », « ou », « au moins », « au plus » en langage mathématique

Point méthode

langage courant	Langage mathématique
« et » (A et B)	Intersection de A et B (A∩B)
« ou » (A ou B)	Réunion de A et B (A∪B)
« au moins » (par exemple « tirer au moins 2 boules »)	Au moins 2 signifie qu'on prend les valeurs supérieures ou égales à 2.
« au plus » (par exemple « tirer au plus 3 boules »)	Au plus 3 signifie qu'on prend les valeurs inférieures ou égales à 3.

Exercices

Exercices de renforcement

1 On donne les ensembles suivants :
A = {a ; b ; c ; d ; e ;1 ; 3 ; 5},
B ={i ; e ; a , t ; 7 ; 5 ; 2} et
C = {h ; i ; t ; c ; 1 ; 2 ; 3 ; e ; 5}.
Détermine A∪B ; A∪C et B∪C.

2 Dans un village de 3 000 âmes, 1 022 hommes ont moins de 60 ans et 1 224 femmes ont moins de 60 ans. Détermine le nombre d'hommes et de femmes qui ont 60 ans et plus.

3 On donne les ensembles suivants :
A = {a ; b ; c ; d ; e ; 1 ; 3 ; 5},
B = {i ; e ; a, t ; 7 ; 5 ; 2} et
C = {h ; i ; t ; c ; 1 ; 2 ; 3 ; e ; 5}
Détermine A∩B ; A∩C ; B∩C.

4 A, B et C sont deux ensembles finis.
Complète le tableau ci-dessous :

Card (AUB)	Card A	Card B	Card (A∩B)
100		45	15
74	37		19
224	99	148	
	76	50	0

5* Au restaurant, un menu propose trois entrées, deux plats principaux et deux desserts.
Détermine le nombre de repas différents que l'on peut composer avec ce menu (un repas est composé d'une entrée, d'un plat est d'un dessert).

6 Un couple a trois enfants après 3 accouchements.
À l'aide d'un arbre de choix, dénombre les distributions possibles des sexes des enfants du couple.

7* Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste.
Détermine le nombre de façons différentes dont elle peut s'habiller.

8* 1. On dispose des chiffres 1 ; 5 ; 7.
Dénombre les nombres de trois chiffes que l'on peut trouver en utilisant chacun de ces chiffres une et une seule fois.

2. On dispose des chiffres : 1 ; 3 ; 5 ; 7.
Dénombre les nombres de quatre chiffes que l'on peut trouver en utilisant chacun de ces chiffres une et une seule fois.

9 Une boîte contient trois jetons de couleur : un bleu, un jaune et un rouge.
Les jetons sont indiscernables au toucher.
Chaque jeton bleu rapporte 2 points, chaque jeton jaune rapporte 1 point et chaque jeton rouge fait perdre 2 points.
1. On tire un premier jeton, on note sa couleur, on le remet dans le sac, puis on tire un second jeton.
a) Utilise un tableau à double entrée pour déterminer les gains positifs ou négatifs à chacun des tirages. (Un gain négatif est une perte).
b) Détermine les gains possibles à l'issue d'une partie.
c) Dresse un tableau indiquant le nombre de façons possibles d'obtenir chacun des gains.
2. On tire un premier jeton, on note sa couleur, puis on tire un second jeton sans remettre le premier dans le sac.
Détermine tous les gains possibles dans ce cas.

10* On lance successivement un dé rouge à 6 faces numérotées de 1 à 6 puis un dé vert à 4 faces numéroté de 1 à 4.
Détermine tous les couples obtenus.

11 Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e).
1. Réalise un schéma des trajets.
2. Détermine le nombre de trajets de X à Z en passant par Y.

12 L'association culturelle d'un lycée agricole compte 125 élèves. Elle propose différentes activités dont le jonglage et la photographie. 12 élèves participent à l'atelier jonglage, 26 à l'atelier photographie et 7 participent aux deux ateliers.
Complète le tableau ci-dessous.

	Photographes	Non-Photographes	Totaux
Jongleur			
Non-Jongleurs			
Totaux			

Exercices

13* Le professeur de musique a fait une enquête auprès de 150 élèves d'un collège : 116 élèves déclarent aimer les variétés, 52 la musique classique et 40 aiment à la fois les variétés et la musique classique.
1. Calcule le nombre d'élèves qui n'aiment que la musique classique.
2. Détermine le nombre d'élèves qui n'ont pas donné leur avis.

14* Parmi 35 élèves d'une classe de musique, 20 jouent d'un instrument et 30 font du solfège.
Calcule le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois le solfège et un instrument.



15* Un centre de loisirs accueille 100 enfants.
Deux sports leur sont proposés : le football et le tennis.
- À la question : aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main ;
- À la question : aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main ;
- À la question : aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.
Détermine le nombre d'enfants n'aimant aucun des deux sports.

16* Dans un Lycée, trois langues vivantes seulement sont enseignées : Anglais, Allemand et Espagnol.
On a relevé dans ce lycée, les informations suivantes :

- Chaque élève de ce Lycée étudie au moins une des trois langues.
- 32 élèves étudient l'allemand et parmi eux 25 étudient l'anglais et 7 l'espagnol.
- 65 élèves étudient l'anglais et parmi eux 30 étudient l'espagnol
- 42 élèves étudient l'espagnol et 4 parmi eux apprennent les trois langues.

Détermine le nombre total d'élèves de ce lycée.

17* Un jeu de 16 cartes est composé de 4 couleurs : le trèfle, le pique, le carreau et le cœur.
Chaque couleur comprend l'As, le Roi, la Dame, le Valet.



Dans un jeu de 16 cartes, on prend simultanément 2 cartes au hasard.
1. Détermine de nombre de cas possibles.
2. Dans un lot de 2 cartes, on veut avoir au moins un Roi. Dénombre le nombre de lots de 2 cartes qu'on peut avoir.
3. Dans un lot de 2 cartes, on veut avoir au plus un Roi. Dénombre le nombre de lots de 2 cartes qu'on peut avoir.
4. Dans un lot de 2 cartes, on veut avoir exactement un Roi et une Dame. Dénombre le nombre de lots de 2 cartes qu'on peut avoir.

Exercices d'approfondissement

18 On désigne par :
- R, l'ensemble des quadrilatères qui sont des rectangles ;
- L, l'ensemble quadrilatères qui sont des losanges ;
- C, l'ensemble quadrilatères qui sont des carrés.
Détermine R∩L et RUC.

19* Dans une classe de Seconde A de 60 élèves, 37 élèves pratiquent le Football et 28 le Karaté.
9 élèves ne pratiquent aucune des deux disciplines.



Détermine le nombre d'élèves qui pratiquent :
a) le Football ou le Karaté ;
b) le Football et le Karaté ;
c) uniquement le Football ;
d) uniquement le Karaté.

20 Au vestiaire d'une soirée, cinq personnes sont venues déposer leur chapeau. Malheureusement, ceux-ci ont été mélangés et rendus au hasard aux cinq personnes à la fin de la soirée.
Dénombre les possibilités de remettre ces chapeaux.



Exercices

21* À leur entrée en Licence 1, les étudiants choisissent une langue (Anglais ou Allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 étudiants inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.
Indique la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

22 Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués.
Détermine le nombre de femmes célibataires syndiquées.

23 Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.
Détermine le nombre de réponses possibles à ce questionnaire.

24* Un technicien doit visiter quatre exploitations A, B, C et D pour présenter son plan de travail.
1. Dénombre tous les trajets possibles.
2. Dénombre les trajets possibles dans chacun des cas suivants :
   a) Le technicien doit passer par l'exploitation C en premier.
   b) Le technicien préfère passer par B avant C et D.

Situations d'évaluation

25 Assalé doit acheter trois types de cahier : 200 pages, 300 pages et TP.
La librairie propose des cahiers de 200 pages à 450 F et à 500 F, des cahiers de 300 pages à 800 F et 850 F enfin des cahiers TP à 1 200 F, 1 250 F et 1 300 F.
Arrivé à la maison, Assalé a oublié le prix de chaque type de cahier qu'il a acheté mais se souvient avoir dépensé moins de 2 000 F.
Aide Assalé à retrouver le prix de chaque type de cahier qu'il a payé.

Coup de Pouce

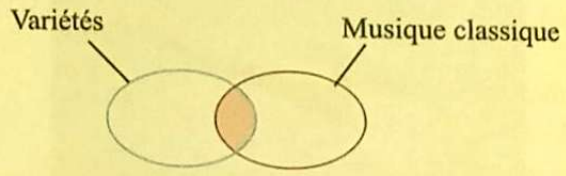
5 Utiliser un arbre de choix.

7 Utiliser un arbre de choix.

8 Utiliser un arbre de choix.

10 Utiliser un tableau à double entrées.

13 Remplir le diagramme suivant.



14 Utiliser la formule des quatre cardinaux.

15 Utiliser un diagramme.

16 Utiliser un diagramme.

17 Utiliser un arbre de choix.

19 Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport puis utiliser la formule des quatre cardinaux.

21 Utiliser un tableau à double entrées.

24 Utiliser un arbre de choix.

Leçon 4

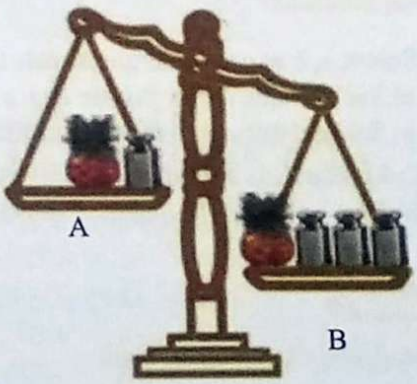
ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$



En partance pour le marché en vue d'écouler les produits champêtres, les villageois vietnamiens utilisent un mécanisme très ingénieux (un bambou, deux corbeilles et des fils) pour faciliter le transport de leurs marchandises. Comment doivent-ils repartir les produits sur le mécanisme pour ne pas subir l'effet de balance durant le trajet ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Monsieur Koffi est un vendeur d'ananas. Il veut savoir la masse d'un ananas. Malheureusement il ne sait pas s 'y prendre avec les poids de 1 kg chacun. Après quelques essais sur sa balance, il obtient la position comme le montre l'image ci-contre. Lorsque Monsieur Koffi enlève l'ananas du plateau B, la balance prend un équilibre parfait. Les amis du fils de Monsieur Koffi qui sont en Seconde A veulent trouver la masse de l'ananas du plateau A. Pour cela, ils décident d'étudier les équations et inéquations dans $\mathbb{R}$.



HABILETÉS ET CONTENUS

1 Résolution d'équations du type $ax + b = 0$

- Résoudre des équations du type : $ax + b = 0$

2 Résolution d'équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$

- Résoudre des équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$

3 Traduction d'inégalités à l'aide d'intervalle et d'intervalle à l'aide d'inégalités.

- Traduire des inégalités à l'aide d'intervalle
- Traduire un intervalle à l'aide d'inégalité
- Représenter un intervalle sur une droite graduée

4 Représentation de réunion ou d'intersection de deux intervalles sur une droite graduée.

- Représenter la réunion de deux intervalles sur une droite graduée
- Représenter l'intersection de deux intervalles sur une droite graduée

5 Résolution d'inéquations d'un des types : $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$

- Déterminer le signe de $ax + b$ suivant les valeurs de x
- Résoudre des inéquations du type $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$

6 Détermination du signe de $(ax + b)(cx + d)$

- Déterminer le signe de $(ax + b)(cx + d)$ suivant les valeurs de x ($a \neq 0$, $c \neq 0$)

7 Inéquations du type $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou $(ax + b)(cx + d) \leq 0$

- Résoudre des inéquations du type $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou $(ax + b)(cx + d) \leq 0$
- Écrire l'ensemble des solutions d'une inéquation sous forme d'intervalle ou d'une réunion d'intervalle

8 Traduction d'un problème de vie courante par une équation ou une inéquation

- Traduire un problème de vie courante par une équation ou inéquation

9 Traitement de situation

- Traiter une situation faisant appel aux équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Résolution d'équations du type : $ax + b = 0$

1. Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a = b$. On sait que $a = b$ équivaut à $a - b = 0$.
   a) Sachant que $a = b$, justifie que $a + c = b + c$ puis énonce la propriété.
   b) Sachant que $a = b$ et $c \neq 0$, justifie que $a \times c = b \times c$ puis énonce la propriété.
2. a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x + 3 = 0$ en appliquant les propriétés énoncées ci-dessus.
   b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $ax + b = 0$ où a et b sont des nombres réels.

Synthèse

a et b sont des nombres réels.

Lorsque $a \neq 0$, l'équation $ax + b = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ l'unique solution : $-\frac{b}{a}$.

Exercices de fixation

1-1 Dans chaque cas, complète les pointillés par le nombre réel qui convient.

a) $x = 3$
$x + 5 =$

b) $x = -7$
$5 + x =$

c) $x = \frac{5}{7}$
$x + 7 =$

d) $x = -9$
$x - 9 =$

e) $x = \frac{-6}{11}$
$x +$ ..... $= 0$

1-2 Dans chaque cas, complète les pointillés par le nombre réel qui convient.

a) $x = 6$
$3x =$

b) $x = -7$
$-5x =$

c) $x = \frac{5}{7}$
$7x =$

d) $x = -9$
$0x =$

e) $x = \frac{-5}{1}3$
$-5x =$

1-3 Dans chaque cas suivant, remplace les pointillés par un nombre réel pour que l'égalité soit vraie.

a) $3 \times$.....$+ 6 = 0$
b) $-2 \times$.....$+ 7 = 0$
c) $5 \times$..... $- 9 = 0$
d) $2 \times$... $+ 5 = -1$
e) $-3 \times$... $+ 8 = -5$

1-4 Écris la solution de chacune des équations dans le tableau ci-dessous.

Équations	Valeurs de x		
$x + 3 = 0$	3	0	–3
$x - 5 = 0$	5	2	10
$-x + 2 = 0$	–2	12	2
$-x - 4 = 0$	0	–4	4

1-5 Dans chaque cas, recopie le numéro de l'équation suivie de la lettre correspondant à la solution.

N°	Équations	A	B	C
1	$2x - 4 = 0$	4	–2	2
2	$3x + 9 = 0$	6	–3	9
3	$5x - 11 = 4$	3	2	–4
4	$-4x + 6 = -2$	1	–2	2
5	$-2x - 5 = -18$	6	–6	–6,5

Activité 2 Résolution d'équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$

a) Soient a et b deux nombres réels. Complète : $ab = 0$ équivaut à ..... .
b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x + 2)(x - 3) = 0$.

Synthèse

Pour résoudre une équation du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, on utilise la propriété :
Pour tous nombres réels A et B, on a : $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercices de fixation

2-1 Écris les solutions de chacune des équations.

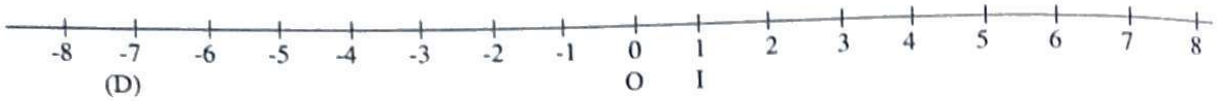
Équations	Solutions			
$(x - 3)(2x + 1) = 0$	$\frac{1}{2}$	3	1	$\frac{-1}{2}$
$x^2 + x - 6 = 0$	6	2	–2	–3

2-2 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $x(x + 2) = 0$.
b) $(x - 3)(3x - 4) = 0$.
c) $(5x + 4)(2x - 3) = 0$.

2-3 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $2(x + 2) - (x + 2)(3x - 5) = 0$.
b) $4x^2 - x(x - 5) = 0$.
c) $(3x + 2)(2x - 7) = (5x + 9)(2x - 7)$.

Activité 3 Traduction d'inégalité(s) à l'aide d'intervalle et d'intervalle à l'aide d'inégalité(s)

(D) est une droite munie du repère (O, I) comme le présente la figure ci-dessous.



- A, B, C, D, E et F sont des points de la droite (D) d'abscisses respectives -5 ; -2 ; 0 ; 3 et 6.
- Reproduis la droite (D) en prenant le centimètre comme unité.
- Place ces points sur la droite (D).
- Trace en bleu et juste au-dessus de (D) l'ensemble des points dont l'abscisse est un nombre plus grand ou égal à -2.
- Trace en vert et juste en dessus de (D) l'ensemble des points dont l'abscisse est un nombre strictement plus petit que 3.
- Donne un autre nom à chacune des représentations définies ci-dessus.
- Soit x l'abscisse d'un point de (D) appartenant au tracé en vert, traduis par une inégalité cette représentation.
- Trace en rouge sur (D) l'ensemble des points dont l'abscisse est un nombre plus petit ou égal à 3 et plus grand ou égal à -5. Nomme les bornes de cet intervalle et calcule son amplitude.

Synthèse

Pour traduire un intervalle en inégalité(s), il faut tenir compte du (ou des) nombre(s) réel(s) qui intervient (ou interviennent) dans l'intervalle et des crochets de l'intervalle (ouvert ou fermé).
Pour traduire une inégalité (ou des inégalités) en intervalle, il faut tenir compte du (ou des) nombre(s) réel(s) qui intervient (ou interviennent) dans l'inégalité (ou les inégalités) et du fait que l'inégalité soit stricte ou large.

Exercices de fixation

3-1 Représente sur une droite graduée les intervalles suivants :

$]-4\,;\,2[$; $]-3\,;\,3]$; $[-6\,;\,-1]$; $]-\infty\,;\,-2]$; $[3\,;\,+\infty[$.

3-2 Écris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres définis ci-dessous :

$-3 \leq x < 2$; $x \geq -4$; $x < 1$; $1 \leq x \leq 5$; $-7 < x < -1$.

3-3 Traduis à l'aide d'inégalité(s) chacune des expressions suivantes :

$x \in]-\infty\,;\,-1]$; $x \in]-3\,;\,2]$; $x \in [1\,;\,5]$; $x \in [-2\,;\,+\infty[$.

Activité 4 Représentation de réunion ou d'intersection de deux intervalles sur une droite graduée

En reprenant l'activité 3 :

a) Traduis par une inéquation le fait que x est l'abscisse d'un point appartenant à la fois à la représentation en vert et à la représentation en bleu.

b) Traduis par une inéquation le fait que x est l'abscisse d'un point appartenant à la représentation en vert ou à la représentation en bleu.

Synthèse

Pour représenter la réunion ou l'intersection de deux intervalles sur une droite graduée, on peut tracer une droite graduée puis représenter chacun de deux intervalles à l'aide de cette droite.

Exercices de fixation

4-1 Représente sur une droite graduée et écris plus simplement :

$]-4 ; 2[\cap]-3 ; 3]$; $[-5 ; +\infty[\cap]-8 ; 3]$;

$]-2 ; 5]\cap[0 ; 12[$.

4-2 Représente sur une droite graduée et écris plus simplement :

$]-3 ; 3]\cup[-6 ; -1]$; $[-5 ; +\infty[\cup]-\infty ; 0]$;

$]-2 ; 5]\cup[8 ; 12[$.

Activité 5 Résolution d'inéquations d'un des types : $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$

1. Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \geq b$.

On sait que $a \geq b$ équivaut à $a - b \geq 0$.

a) Sachant que $a \geq b$, justifie que $a + c \geq b + c$ puis énonce la propriété.

b) Sachant que $a \geq b$ et $c > 0$, justifie que $a \times c \geq b \times c$ puis énonce la propriété.

c) Sachant que $a \geq b$ et $c < 0$, justifie que $a \times c \leq b \times c$ puis énonce la propriété.

2. a) Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations : $3x + 2 \geq 0$ et $-5x + 6 \geq 0$ en appliquant les propriétés énoncées ci-dessus.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations : $ax + b \geq 0$ et $ax + b \leq 0$ $(a \neq 0)$ en appliquant les propriétés énoncées ci-dessus.

c) Déduis-en le signe de $ax + b$.

Synthèse

Pour résoudre une inéquation dont le 1er membre est de la forme $ax + b$, $a \neq 0$, et le 2nd membre est 0, on utilise les propriétés relatives « aux inégalités et opérations ».

Exercices de fixation

5-1 Dans chaque cas, remplace les pointillés par l'expression qui convient.

a) $x \leq 11$

$x + 89 \leq$ .....

b) $x < -21$

$15 + x <$ .....

c) $x \geq \frac{5}{7}$

$x + 5 \geq$ .....

d) $x > -3$

$x - 13 >$ .....

5-2 Dans chaque cas, remplace les pointillés par l'expression qui convient.

a) $x < 6$

$3x$ .....

b) $x \leq -7$

$-5x$ .....

c) $x > \frac{5}{7}$

$7x$ .....

d) $x \geq -9$

$-3x$ .....

5-3 Détermine le signe de chacune des expressions suivantes :

$2x + 4$; $3x - 5$; $-6x + 18$; $-x - 7$; $\frac{2}{3}x - 1$; $-0{,}5x + 8$.

5-4 Dans chaque cas, remplace les pointillés par l'expression mathématique qui convient.

a) $3x \geq 6$

x .....

b) $19x < 5$

x .....

c) $-5x > -35$

x .....

d) $-6x \leq 12$

x .....

5-5 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1) $x - 4 > 0$ équivaut à $x < 2$.

2) $x - 4 > 0$ équivaut à $x > 10$.

3) $x + 3 < 0$ équivaut à $x \in [-5 ; -1]$.

4) $2x - 5 \leq 0$ équivaut à $x \leq \frac{5}{2}$.

5) $x + 3 < 0$ équivaut à $x \in [12 ; 21]$.

5-6 Pour chaque inéquation, quatre solutions sont proposées dont seulement une est juste. Écris la solution juste de chaque inéquation

Inéquations	Valeurs de x			
$x + 3 \geq 0$	$[-3 ; +\infty[$	$[3 ; +\infty[$	$]-\infty ; -3]$	$]-\infty ; 3]$
$x - 5 < 0$	$[-5 ; +\infty[$	$[5 ; +\infty[$	$]-\infty ; 5[$	$]-\infty ; -5[$
$-x + 2 > 0$	$]-2 ; +\infty[$	$[2 ; +\infty[$	$]-\infty ; -2]$	$]-\infty ; 2[$
$-x - 4 \leq 0$	$[-4 ; +\infty[$	$[4 ; +\infty[$	$]-\infty ; 4]$	$]-\infty ; -4]$

5-7 Pour chaque inéquation, quatre solutions sont proposées dont une seule est juste. Écris la bonne réponse.

1	$4x - 8 \geq 0$	$[-2 ; +\infty[$	$[2 ; +\infty[$	$]-\infty ; -2]$	$]-\infty ; 2]$
2	$-3x + 6 \leq 0$	$[2 ; +\infty[$	$[2 ; +\infty[$	$]-\infty ; -2]$	$]-\infty ; 2]$
3	$5x - 10 > 4$	$]-\frac{14}{5} ; +\infty[$	$]\frac{14}{5} ; +\infty[$	$]-\infty ; -\frac{14}{5}[$	$]-\infty ; \frac{14}{5}[$
4	$-4x + 20 < -1$	$]-\frac{21}{4} ; +\infty[$	$]\frac{21}{4} ; +\infty[$	$]-\infty ; -\frac{21}{4}[$	$]-\infty ; \frac{21}{4}[$
5	$-2x - 15 \geq -18$	$[-\frac{3}{2} ; +\infty[$	$[\frac{3}{2} ; +\infty[$	$]-\infty ; -\frac{3}{2}]$	$]-\infty ; \frac{3}{2}]$

Activité 6 Détermination du signe de $(ax + b)(cx + d)$

Détermination du signe de $(-x + 3)(3x + 4)$.

a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(-x + 3)(3x + 4) = 0$.

b) Détermine le signe de $-x + 3$ suivant les valeurs de x.

c) Détermine le signe de $3x + 4$ suivant les valeurs de x.

d) Résume les informations du b) et c) dans un même tableau puis conclus.

Synthèse

Pour déterminer le signe de $(ax + b)(cx + d)$, on peut donner dans un même tableau de signe les signes de $ax + b$ et de $cx + d$, puis utiliser les règles relatives « aux produits de signes » pour conclure.

Exercices de fixation

6-1 Le tableau ci-dessous donne le signe de $(2x + 4)$ et $(-4x)$. Recopie le tableau et complète la dernière ligne.

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$-4x$	+		+	0	−
$2x + 4$	−	0	+		+
$-4x(2x + 4)$		0		0	

6-2 a. Détermine le signe $(x + 3)(x - 1)$ suivant les valeurs de x.

b. Détermine le signe $(x - 2)(-2x + 3)$ suivant les valeurs de x.

Activité 7 Inéquations du type $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou $(ax + b)(cx + d) \leq 0$

a) Parmi les nombres réels suivants, 2 ; −2 ; 0 ; 4 ; 0,5 et 5, détermine ceux qui sont solutions de l'inéquation $(2x + 31)(-x + 4) \geq 0$.

b) Étudie le signe de $2x + 3$ suivant les valeurs de x.

c) Étudie le signe de $-x + 4$ suivant les valeurs de x.

d) Dresse un tableau récapitulatif des signes de $2x + 3$ et $-x + 4$.

e) Déduis du d), l'ensemble solution de l'inéquation $(2x + 31)(-x + 4) \geq 0$.

Synthèse

Pour résoudre une inéquation dont le 1er membre est de la forme $(ax + b)(cx + d)$ et le 2nd membre est 0, on peut étudier le signe de $(ax + b)(cx + d)$ dans un tableau puis conclure.

Exercices de fixation

7-1 Pour chaque inéquation, quatre réponses sont proposées.
Écris dans ton cahier la bonne réponse.

N°	Inéquations	Réponses proposées			
		A	B	C	D
1	$(x-3)(x-1)\leq 0$	$]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$	$]-\infty;1]$	$[3;+\infty[$	$[1;3]$
2	$(x-3)(x+1)\leq 0$	$]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$	$]-\infty;-1]$	$[3;+\infty[$	$[-1;3]$
3	$(x+3)(x-1)\leq 0$	$]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$	$]-\infty;-3]$	$[1;+\infty[$	$]-3;1[$
4	$(x+3)(x+1)\leq 0$	$]-\infty;-3]\cup[-1;+\infty[$	$]-\infty;-3[$	$]-1;+\infty[$	$]-3;-1[$

7-2 Pour chaque inéquation, quatre réponses sont proposées.
Écris dans ton cahier la bonne réponse.

N°	Inéquations	Réponses proposées			
		A	B	C	D
1	$(x-2)(x-4)\leq 0$	$]-\infty;2]\cup[4;+\infty[$	$]-\infty;2]$	$[4;+\infty[$	$[2;4]$
2	$(-x-2)(x-4)\geq 0$	$]-\infty;-2]\cup[4;+\infty[$	$]-\infty;-2]$	$[4;+\infty[$	$[-2;4]$
3	$(x-2)(-x-4)\leq 0$	$]-\infty;-4]\cup[2;+\infty[$	$]-\infty;-4[$	$]2;+\infty[$	$]-4;2[$
4	$(-x+2)(-x+4)\geq 0$	$]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$	$]-\infty;2[$	$]4;+\infty[$	$]2;4[$

7-3 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(x-2)(x+1)>0$;
b) $(2x+3)(-x+5)\leq 0$;
c) $(x-1)(-3x+8)<0$;
d) $(2x-3)(-x+6)\geq 0$.

Activité 8 Traduction d'un problème de vie courante par une équation ou une inéquation

Une maison d'édition recrute des vendeurs à domicile pour placer des collections de livres de mathématiques.
Elle propose, au choix, deux types de contrats :
- Contrat A : salaire mensuel fixe 31 500 F plus 1 650 F par collection vendue ;
- Contrat B : pas de salaire fixe, mais 2 400 F par collection vendue.

Soit x le nombre de collections vendues.

a. Exprime en fonction de x, le salaire mensuel $A(x)$ avec le contrat A.
b. Exprime en fonction de x, le salaire mensuel $B(x)$ avec le contrat B.
c. Détermine les valeurs de x pour lesquelles $A(x)\geq B(x)$.
d. Détermine le contrat le plus avantageux pour le vendeur.

Synthèse

Pour traduire un problème de la vie courante en équation (respectivement inéquation), on procède par étapes :

1. **Choisir l'inconnue (c'est souvent le ou les nombres demandés dans l'énoncé) ;**
2. **Mettre en équation (resp. inéquation) le problème en traduisant les données de l'énoncé par une égalité (resp. inégalité) ;**
3. **Résoudre l'équation (resp. inéquation) ;**
4. **Conclure en faisant une phrase cohérente avec le problème.**

Exercices de fixation

S-1 Un amateur de casse-tête donna ainsi son âge : « Prends trois fois mon âge dans trois ans et enleve trois fois mon âge il y a trois ans, tu obtiendras mon âge actuel. » Trouve mon âge.
En désignant par x l'âge de l'amateur de casse-tête aujourd'hui, traduis le problème par une équation.

S-2 Un magicien demande à ses spectateurs de penser à un nombre ; de le multiplier par deux ; de retrancher 3 à ce produit ; de multiplier le tout par 6.
Un spectateur annonce comme résultat 306. Quel nombre ce dernier a pris au départ ?
Traduis ce problème par une équation.

S-3 Un camion pesant à vide 2 tonnes doit passer sur un pont limité à 6 tonnes.
Combien de caisses de 118 kg peut-il transporter ?
Traduis ce problème par une inéquation.

S-4 Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 75 000 F par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 375 F par livre.
Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 600 F ?
Traduis ce problème par une inéquation.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(-x-2)(3x-2) \geq 0$.

Corrigé

On sait que $-x-2$ s'annule pour -2 et $3x-2$ s'annule pour $\frac{2}{3}$.

Méthode

Utiliser un tableau de signe.

En utilisant le signe de « $ax+b$ », on construit le tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $-x-2$	$+$	$\|$	0	$-$	$\|$	$-$	
Signe de $2x-3$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	0	$+$	
Signe de $(-x-2)(2x-3)$	$-$	$\|$	0	$+$	0	$-$	

Par lecture du tableau, l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $[-2 ; \frac{2}{3}]$.

Résumé de cours

1 Résolution d'équations du type : $ax + b = 0$

Propriété 1 Lorsqu'on ajoute ou retranche un même nombre réel à chaque membre d'une équation, on obtient une nouvelle équation de même(s) solution(s) que la première.

Propriété 2 Lorsqu'on multiplie ou divise par un même nombre réel non nul chaque membre d'une équation, on obtient une nouvelle équation de même(s) solution(s) que la première.

Propriété 3

- Si $a \neq 0$, alors l'équation : $ax + b = 0$ a pour unique solution $\frac{-b}{a}$.
- Si $a = 0$ et $b = 0$, alors tous les nombres réels sont solutions de l'équation : $0\,x = 0$.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors l'équation : $0x = b$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exemple de résolution 1

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1) : 2x - 3 = 5$.
Ajoute 3 à chaque membre de l'équation. L'équation devient : $2x = 8$.
Multiplie chaque membre par $\frac{1}{2}$ on obtient : $x = 4$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est $\{4\}$.

Exemple de résolution 2

Résolvons l'équation $(E_2) : -3x + 3 = 2x - 5$.
Ajoute $-2x$ à chaque membre de l'équatio. L'équation devient : $-5x + 3 = -5$.
Ajoute -3 à chaque membre de la nouvelle équation. L'équation devient : $-5x = -8$.
Multiplie chaque membre par $\frac{-1}{5}$ on obtient : $x = \frac{8}{5}$.
Donc l'ensemble des solutions de (E_2) est le singleton $\{\frac{8}{5}\}$.

2 Résolution d'équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$

Propriété 1 $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.

Point méthode

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $(ax + b)(cx + d) = 0$ où a, b, c et d sont des nombres réels donnés tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$.
Pour résoudre l'équation (E) on résout chacune des équations. (E_1) : $x \in \mathbb{R}$, $ax + b = 0$ et $(E_2) : x \in \mathbb{R}$, $cx + d = 0$.
L'ensemble des solutions de (E) est la réunion des ensembles solutions de (E_1) et (E_2).

Exemple de résolution 1

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_3) : (3x - 4)(x + 2) = 0$.
On a $(3x - 4)(x + 2) = 0$ équivaut à $3x - 4 = 0$ ou $x + 2 = 0$.
L'équation $3x - 4 = 0$ a pour solution $\frac{4}{3}$.
L'équation $x + 2 = 0$ a pour solution -2.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est $\left\{-2 ; \frac{4}{3}\right\}$.

Exemple de résolution 2

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_4) : $3x(x+3) = (x-4)(x+3)$.
Pour résoudre (E_4) il faut la transformer en : $3x(x+3) - (x-4)(x+3) = 0$.
Puis faire une factorisation : $3x(x+3) - (x-4)(x+3) = (x+3)[3x - (x-4)] = (x+3)(2x+4)$.
Après avoir fait la factorisation, résoudre l'équation (E_4) : $(x+3)(2x+4) = 0$ comme dans l'exemple de résolution 1.

3 Traduction d'inégalité(s) à l'aide d'intervalle et d'intervalle à l'aide d'inégalité(s)

a et b sont des nombres réels tels que $a < b$.

- Les nombres a et b sont les bornes de chacun des intervalles : $[a\,;b]$; $[a\,;b[$; $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$.
- La distance $|a-b|$ de ces nombres a et b est appelée l'amplitude de ces intervalles.
- À un élément x de chacun de ces intervalles, on peut associer respectivement l'encadrement : $a \leq x \leq b$; $a \leq x < b$; $a < x \leq b$; $a < x < b$.
- $|a-b|$ est aussi l'amplitude de ces encadrements.

Écriture	Lecture	Ensemble des x tels que	Représentation
$[a\,;b]$	Intervalle fermé a et b	$a \leq x \leq b$	
$[a\,;b[$	Intervalle a, b fermé en a, ouvert en b.	$a \leq x < b$	
$]a\,;b]$	Intervalle a, b ouvert en a fermé en b	$a < x \leq b$	
$]a\,;b[$	Intervalle ouvert en a et b	$a < x < b$	
$]-\infty\,;b[$	Intervalle des nombres plus petits que b	$x < b$	
$]-\infty\,;b]$	Intervalle des nombres plus petits ou égaux à b	$x \leq b$	
$]a\,;+\infty[$	Intervalle des nombres plus grands que a	$x > a$	
$[a\,;+\infty[$	Intervalle des nombres plus grands ou égaux à a	$x \geq a$	

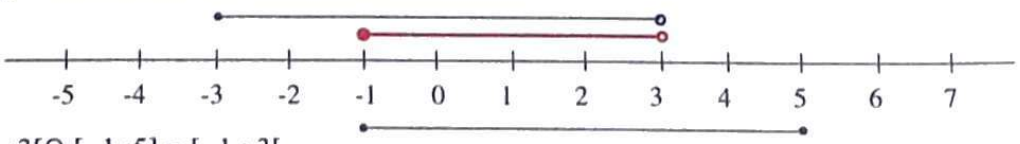
4 Représentation de réunion ou d'intersection de deux intervalles sur une droite graduée

Point méthode

Pour déterminer l'intersection ou la réunion de deux intervalles E et F, tu pourras les représenter sur une droite.

Exemple

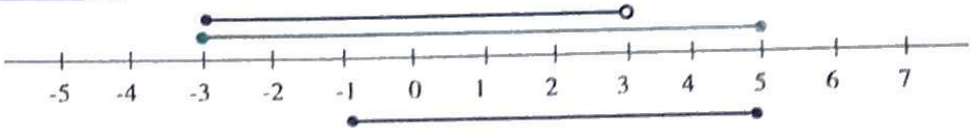
a) Déterminons l'intersection des intervalles $[-3\,;3[$ et $[-1\,;5]$.
Représente d'abord sur la droite graduée les intervalles $[-3\,;3[$ et $[-1\,;5]$ ensuite trace avec une couleur rouge l'intersection des deux intervalles.



On a : $[-3\,;3[\cap [-1\,;5] = [-1\,;3[$.

b) Déterminons la réunion des intervalles $[-3\,;3[$ et $[-1\,;5]$.
Représente d'abord sur la droite graduée les intervalles $[-3\,;3[$ et $[-1\,;5]$ ensuite trace avec la couleur verte la réunion des intervalles.

Résumé de cours



On a : $[-3\,;3[\cup [-1\,;5] = [-3\,;5]$

Remarque : La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle.

5 Résolution d'inéquations d'un des types : $ax + b \geq 0$ et $ax + b \leq 0$

a) Propriétés

Propriété 1 Lorsqu'on ajoute ou retranche un même nombre réel à chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation de mêmes solutions que la première.

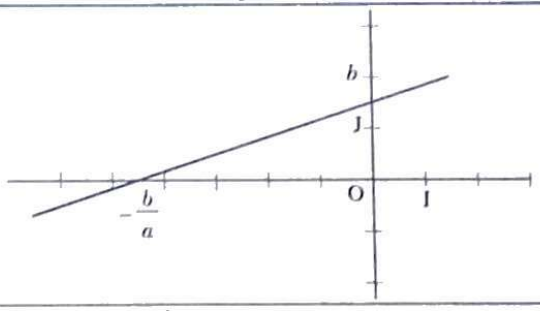
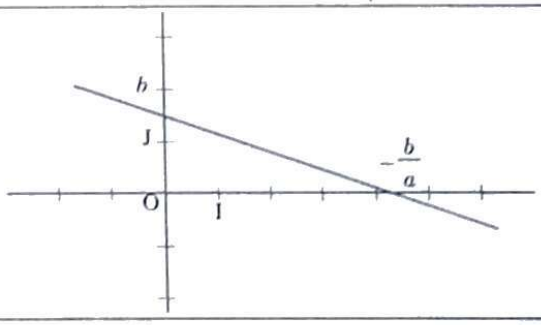
Propriété 2 Lorsqu'on multiplie ou divise par un même nombre réel strictement positif chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation qui est de même sens et qui a les mêmes solutions que la première.

Propriété 3 Lorsqu'on multiplie ou divise par un même nombre réel strictement négatif chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation qui est de sens contraire et qui a les mêmes solutions que la première.

b) Inéquations du type : $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $ax + b \geq 0$ $(a \neq 0)$, c'est trouver les valeurs de x pour lesquelles $ax + b$ est positif.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $ax + b \leq 0$ $(a \neq 0)$, c'est trouver les valeurs de x pour lesquelles $ax + b$ est négatif.

a	Signe de $ax + b$	Droite d'équation $y = ax + b$
$a > 0$	• $ax+b \geq 0$ si et seulement si $x \geq -\frac{b}{a}$ • L'expression $ax+b$ est positive si et seulement si $x \geq -\frac{b}{a}$ • L'expression $ax+b$ est négative si et seulement si $x \leq -\frac{b}{a}$	
$a < 0$	• $ax+b \geq 0$ si et seulement si $x \leq -\frac{b}{a}$ • L'expression $ax+b$ est positive si et seulement si $x \leq -\frac{b}{a}$ • L'expression $ax+b$ est négative si et seulement si $x \geq -\frac{b}{a}$	

Le signe de $ax + b$ $(a \neq 0)$ est résumé comme ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de l'opposé de a	0	Signe de a

Exemple

Déterminons le signe de $3x + 4$.

L'équation $3x + 4 = 0$ a pour solution $-\frac{4}{3}$. Dans l'expression $3x + 4$, le coefficient de x est 3.

On obtient le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x + 4$		$-$	0	$+$	

Donc : $3x + 4 < 0$ si et seulement si $x < -\frac{4}{3}$.

$3x + 4 > 0$ si et seulement si $x > -\frac{4}{3}$.

Point méthode 1

Pour résoudre l'inéquation (I) : $3x - 6 \leq 0$.

Ajouter 6 à chaque membre de l'inéquation. L'inéquation devient : $3x \leq 6$.

Diviser chaque membre de l'inéquation par 3. On obtient : $x \leq 2$.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $]-\infty ; 2]$.

Point méthode 2

Transformation utilisée pour résoudre l'inéquation (I) : $-x - 5 \leq 2x + 9$.

- Ajouter $-2x$ à chaque membre de l'inéquation. L'inéquation devient : $-3x - 5 \leq 9$.
- Ajouter 5 à chaque membre de l'inéquation. L'inéquation devient : $-3x \leq 14$.
- Diviser chaque membre de l'inéquation par -3 : on obtient $x \geq -\frac{14}{3}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est $[-\frac{14}{3} ; +\infty[$.

6 Détermination du signe de $(ax + b)(cx + d)$

Point méthode

Pour déterminer le signe de $(ax + b)(cx + d)$ où a, b, c et d sont des réels tels que a et c sont différents de zéro, on peut résumer dans un même tableau, les signes de $ax + b$ et $cx + d$ puis tirer une conclusion en faisant le produit de ces signes.

Exemple

Déterminons le signe de $(-x + 3)(3x + 4)$.

a) L'équation $-x + 3 = 0$ a pour solution 3 et le coefficient de x est -1.

b) L'équation $4x + 3 = 0$ a pour solution $-\frac{4}{3}$ et le coefficient de x est 4.

c) On obtient le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$-x + 3$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x + 3)(3x + 4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Donc :

$(-x + 3)(3x + 4) = 0$ si et seulement si $x \in \left\{-\frac{4}{3} ; 3\right\}$;

$(-x + 3)(3x + 4) > 0$ si et seulement si $x \in \left]-\frac{4}{3} ; 3\right[$;

$(-x + 3)(3x + 4) < 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty ; -\frac{4}{3}\right[\cup \left]3 ; +\infty\right[$.

Résumé de cours

7 Inéquations du type : $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou $(ax + b)(cx + d) \leq 0$

Point méthode

Pour résoudre une inéquation du type $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ ou $(ax + b)(cx + d) \leq 0$, on peut procéder comme suit :

- Étudier le signe de $(ax + b)(cx + d)$ à l'aide d'un tableau ;
- Lire l'ensemble des solutions de l'inéquation dans ce tableau.

Exemple

Résolvons l'inéquation (I) : $(3x + 4)(-x + 2) \geq 0$.

L'équation $3x + 4 = 0$ a pour solution $\frac{-4}{3}$.

L'équation $-x + 2 = 0$ a pour solution 2.

On place les nombres $\frac{-4}{3}$ et 2 dans le tableau de signe et dans l'ordre croissant.

On détermine le signe de chacune des expressions $(3x + 4)$ et $(-x + 2)$.

En utilisant la règle des signes, on détermine alors le signe du produit $(3x + 4)(-x + 2)$.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$3x + 4$	$-$	0	$+$		$+$		
$-x + 2$	$+$		$+$	0	$-$		
$(3x + 4)(-x + 2)$	$-$	0	$+$	0	$-$		

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) est $[-\frac{4}{3} ; 2]$.

8 Traduction d'un problème de vie courante par une équation ou une inéquation

Point méthode

Pour traduire un problème de vie courante en problème mathématique, on procède comme suit :

a) Choisir les inconnues ;
b) Traduire les données par des équations ou inéquations ;
c) Résoudre ces équations ou inéquations ;
d) Donner la solution au problème posé.

Exercices

Exercices de renforcement

1 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $x - 2 = 0$; d) $5 + x = 0$;

b) $-x - 2 = 0$; e) $x + 3 = -5$;

c) $x - 3 = 1$; f) $2 - x = -3$.

2 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $2x - 1 = 0$; d) $-4x + 13 = 0$;

b) $3x + 5 = 0$; e) $5 - 3x = -13$.

c) $5x + 7 = 1$;

3 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : 3x - 2 = 2x - 5$; $(E_4) : 5 + x = -2x - 10$;

$(E_2) : 5 - x = 4x$; $(E_5) : 8x - 5 = 3x - 5$;

$(E_3) : -5x - 3 = 1 - 2x$; $(E_6) : -2x - 5 = -13x - 15$.

4 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $3x = 6$; d) $0x = 0$;

b) $5x = -35$; e) $0x = 11$.

c) $-7x = 5$;

5 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : (x - 2)(x + 3) = 0$; $(E_4) : (x - 2)^2 = 0$;

$(E_2) : (2x - 3)(x - 4) = 0$; $(E_5) : x(-3x + 4) = 0$;

$(E_3) : (2 - x)(3x - 1) = 0$; $(E_6) : (2x + 3)^2 = 1$.

6 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : x^2 = x(x - 2)$;

$(E_2) : (2x - 3)^2 + (2x - 3)(x - 4) = 0$;

$(E_3) : 9x^2 = 4(3x - 1)^2$;

$(E_4) : (3x - 2)^2 = (4x + 1)^2$;

$(E_5) : (2x + 3)^2 = 1$;

$(E_6) : (-3x + 4)^2 = 2(9x^2 - 16)$.

7 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : x^2 + 2x + 1 = (2x - 3)(x + 1)$;

$(E_2) : x^2 - 6x + 36 = (2 - x)(x - 3)$;

$(E_3) : 2(3x - 1)(2x + 1) = 3x^2 - x$;

$(E_4) : (x^2 - 9)(2x + 1) = (x - 3)(4x^2 - 1)$;

$(E_5) : x^3 - x = 2x^2 - 2$;

$(E_6) : x^3 + 6x^2 + 36x = 0$.

8 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : (x - 2)(x + 3) = 3x(x - 2)$;

$(E_2) : (x - 2)(x - 1) + (x - 2)(3x + 1) = 0$;

$(E_3) : (4x - 3)(2x + 5) = 2x(4x + 1) + 12$.

9 Traduis par une inéquation puis représente sur une droite graduée chacun des intervalles suivants :

$[-3 ; 5]$, $[-6 ; -1]$, $[-5 ; 0[$,

$]1 ; 6[$, $]-\infty ; -1]$, $]-2 ; +\infty[$.

10 Traduis chacune des inégalités suivantes à l'aide d'intervalles.

a) $x > -3$; b) $x \leq 2$; e) $0 < x$;

c) $-2 \leq x < 3$; f) $1 < x < 5$.

d) $-1 \leq x \leq 1$;

11 Représente chacun des ensembles suivants sur une droite graduée puis écris-les sous forme d'intervalle.

a) $[-2 ; 1[\cup]0 ; 3]$; c) $]-2 ; 5[\cup [-1 ; 1]$;

b) $[-5 ; 3[\cap]-1 ; 5]$; d) $]-\infty ; 2[\cap [0 ; 5]$.

12 Étudie suivant les valeurs de x le signe de chacune des expressions suivantes :

a) $x - 1$; d) $-2x + 5$;

b) $x + 3$; e) $3x - 6$;

c) $-x - 1$; f) $-2x + 3$.

13 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : x - 2 \geq 0$; $(I_4) : x + 3 \leq 0$;

$(I_2) : 2x + 3 > 0$; $(I_5) : -2x - 5 < 0$;

$(I_3) : -3x + 8 \geq 0$; $(I_6) : 2x + 2 \leq 0$.

14 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$(I_1)\ x + 2 < -6$; $(I_4)\ 3x - 2 \geq -4$;

$(I_2) - 2x + 3 \leq 7$; $(I_5) - x + 2 > -12$;

$(I_3) - x - 1 < 8$; $(I_6) - x - 1 \geq 4$.

15 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $2x - 1 \geq 4x + 5$; d) $7x + 17 < 2x + 3$;

b) $-3x + 5 \leq 8x + 2$; e) $-13x + 3 \geq 8x - 3$.

c) $2x - 19 > 4x - 6$;

16 Étudie suivant les valeurs de x le signe de chacune des expressions suivantes :

a) $(x - 1)(x + 3)$; d) $(2x - 1)(-x + 3)$;

b) $(x + 2)(x - 5)$; e) $(-3x + 1)(-x + 4)$;

c) $(x - 2)(x - 4)$; f) $(-5x - 2)(4x - 1)$.

Exercices

17 Étudie suivant les valeurs de x le signe de chacune des expressions suivantes :

a) $(2x - 1)(x - 1) + 3(x - 1)$;

b) $(2x - 3)^2 - (2x + 3)^2$;

c) $(x + 3)(5x - 2) + (5x - 2)(7x + 1)$;

d) $(3x - 2)(x^2 + 1) - 2(3x - 2)$.

18 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1) : (x - 1)(-2x + 3) \leq 0$;

$(I_2) : (2x + 3)(x - 4) > 0$.

19 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $(x + 1)(2 - x) \geq x^2 - 1$.

b) $(2x + 1)(3 - 2x) \leq (x + 1)(-3 + 2x)$.

20 Ainsi parle un riche commerçant : « En augmentant le tiers de ma fortune de 4 000 000 F, j'obtiens la même somme qu'en augmentant la moitié de cette somme de 3 000 000 F ».
Détermine la fortune de ce commerçant.

21 Lors d'une élection municipale, 5 218 bulletins furent déposés dans l'urne. Le vainqueur battait ses trois concurrents de respectivement 22 ; 30 et 72 voix obtenues par chaque candidat.
Trouve le nombre de voix de chaque candidat.

Exercices d'approfondissement

22 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : (2x - 3)(x - 1) = 2x^2 - 2$.

$(E_2) : (2 - x)^2 = 4$.

$(E_3) : (2x + 3)^2 = (x + 2)^2$.

23 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : x^2 - 1 = (x - 1)(3x + 4)$.

$(E_2) : x + x^2 = 0$.

$(E_3) : x(x + 1) = x^2 + x$.

24 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : (x + 2)(x - 3) \leq 3x(x + 2)$.

$(I_2) : (2x - 3)(x - 1) \geq 2x^2 - 2$.

$(I_3) : (2 - x)^2 < 4$.

25 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : (2x - 3)^2 \geq (x + 2)^2$.

$(I_2) : x^3 + 3x^2 + 2x < 0$.

$(I_3) : x^2 - 1 \leq (x - 1)(3x + 4)$.

$(I_4) : (x - 1)^2 - (3x + 2)^2 > 0$.

26 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : 1 + x^2 \leq 0$.

$(I_2) : (x - 2)(x - 1) - (x - 2)(3x + 1) < 0$.

$(I_3) : x + x^2 \leq 0$.

27* Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : \dfrac{x - 2}{x + 1} \leq 0$.

$(I_2) : \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x + 1} > 0$.

$(I_3) : \dfrac{-3}{x + 1} > x - 3$.

28 Étudie suivant les valeurs de x le signe de chacune des expressions suivantes :

a) $(x + 3)^2 - 4(5x - 2)^2$.

b) $(15x - 6)(7x + 1) + 49x^2 + 14x + 1$.

c) $(2x - 1)(x - 2) + x^2 - 4x + 4$.

d) $(3x - 2)(x^2 + 1) - (x^3 - 1)(2 - 3x)$.

29 On pose : $A(x) = x^3 - 9x$.

a) Factorise $A(x)$.

b) Détermine les nombres réels x pour lesquels $A(x) = 0$.

c) Détermine suivant les valeurs de x, le signe de $A(x)$.

30 Pris sur la copie d'un élève.

Je résous l'inéquation $(x + 3)(x - 1) \geq 0$.
Le produit de deux nombres est positif lorsque les deux facteurs sont positifs.
D'où $x + 3 \geq 0$ et $x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -3$ et $x \geq 1$.
L'ensemble de solutions est l'intervalle $[1 ; +\infty[$

a) Donne ton avis sur cette résolution.

b) Si tu n'es pas d'accord, donne ta résolution de cette inéquation.

31 Un escargot grimpe le long de la paroi d'un puits de 12 m de hauteur. La journée, il monte de 3 m et la nuit il descend de 2 m. Sachant qu'il est parti le lundi matin, trouve le jour de la semaine où l'escargot atteindra enfin le bord supérieur du puits.



Exercices

32* Jolie réussite au dernier contrôle de mathématiques : 15,2 de moyenne pour la classe dont 16 de moyenne pour les filles et 14 de moyenne pour les garçons.
Détermine le nombre de filles parmi les 30 élèves qui ont composé.

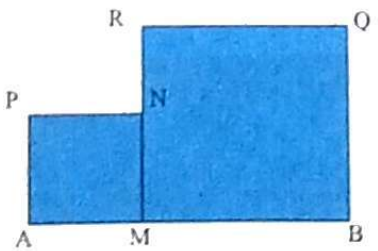
33 1. Recopie et complète le tableau suivant :

x	$-\infty$	-5		$\frac{2}{5}$		3	$+\infty$
	$-$	0	$+$		$+$		$+$
	$+$		$+$	0	$-$		$-$
						0	
$P(x)$	$+$		$-$	0	$+$		$-$

2. Donne une expression de $P(x)$.

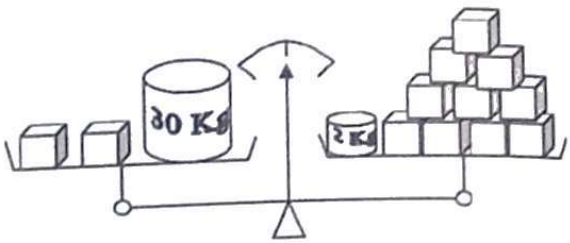
34 Koffi, qui a autant de frères que de sœurs, partage équitablement une boîte de bonbons avec eux. S'il prend sa part, chaque frère et chaque sœur recevra 12 bonbons. Mais il décide de laisser sa part aux autres qui reçoivent ainsi 14 bonbons chacun.
1. Détermine le nombre de sœurs de Koffi.
2. Trouve le nombre de bonbons dans la boîte.

35 Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeur réelle, [AB] est un segment de longueur 4 cm.
M est point mobile sur le segment [AB].
AMNP et MBQR sont deux carrés.
On note x la distance AM.
On cherche les positions de M telles que l'aire des deux carrés soit supérieure à 10 cm².
1. Donne l'intervalle auquel appartient x.
2. Justifie que le problème revient à résoudre l'inéquation $2x^2 - 8x + 6 \geq 0$.
3. Développe le produit $(2x - 6)(x - 1)$.
4. Déduis-en les solutions de l'inéquation $2x^2 - 8x + 6 \geq 0$.
5. Donne alors les positions de M cherchées.



Situations d'évaluation

36



Moussa, un vendeur de morceaux de savon, vient de recevoir un stock de marchandises.
Malheureusement, pour le conditionnement, le fournisseur a oublié d'imprimer le poids sur chaque carton de savon. Il dispose d'une balance, mais n'a que deux poids, un de 2 kg et l'autre de 30 kg. Pour savoir le poids de chaque morceau, il a eu l'ingénieuse idée de disposer sur sa balance des morceaux de savons et les deux poids à sa possession. Il réussit à obtenir un équilibre parfait comme l'indique la figure ci-dessus.
Après cette belle disposition, Moussa se demande comment trouver le poids de chaque carton de savon. Aide le vendeur à obtenir le poids de chaque carton de savon.

37 Aya veut se faire fabriquer un collier de 30 cm de circonférence. Pour cela, elle dispose de perles sphériques de 0,2 cm de diamètre et 0,4 cm de diamètre. Pour une très belle présentation de son collier Aya doit faire un montage avec les deux types de perles. La jeune fille veut savoir combien de perles de petite taille et de perles grande taille peut-elle utiliser pour réaliser son collier.
Aide Aya à trouver le nombre de perles de chaque type.



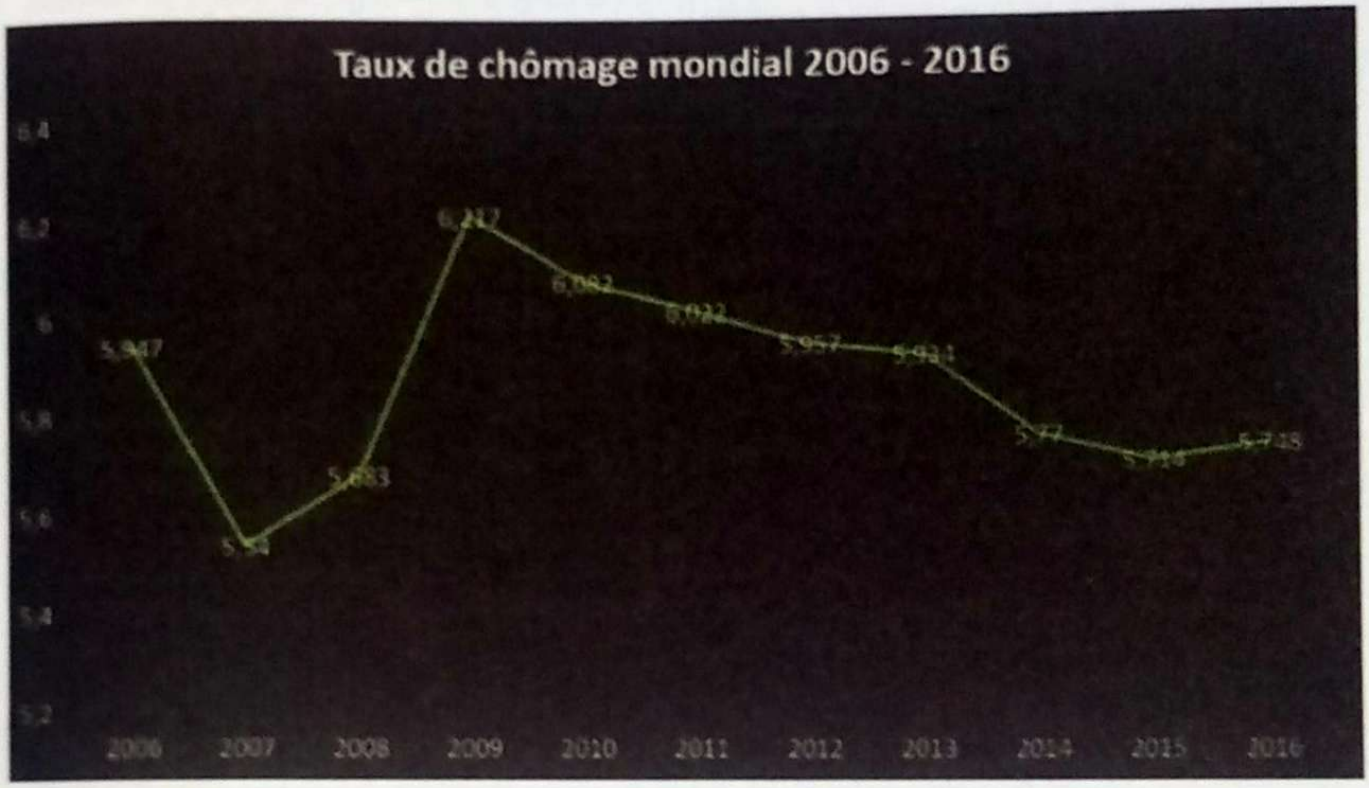
Coup de pouce

27 (I_1) Faire un tableau de signe.
(I_2) Faire un tableau de signe.
(I_3) • Écrire $\frac{-3}{x+1} - (x-3) > 0$.
• Trouver une inéquation équivalente de la forme $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$.
• Factoriser $A(x)$ puis utiliser un tableau de signe.

27 Choisir une inconnue, former une équation et trouver 18 filles.

Leçon 5

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS



La courbe en vert est la représentation graphique de l'évolution du chômage mondial de 2006 à 2016. En abscisse se trouvent les années et en ordonnées le taux.
a) Détermine le taux de chômage en 2007 ; 2011 ; 2015.
b) Détermine les années où les taux sont : 6.082% ; 5,77% ; 5,683% .

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre des activés du club de mathématiques, les élèves de la classe de 2nde A et leurs professeurs se rendent à une excursion dans une Société de distribution d'électricité. Pendant la visite, un élève de ce club demande au Directeur de la Société comment se fait la facturation.

Le Directeur dit aux élèves qu'il y a trois types de facturation selon le pouvoir d'achat des foyers. La facturation 1 est destinée aux foyers de faible revenu ; la facturation 2 pour les foyers de moyen revenu et la facturation 3 pour les foyers aisés.

La facture 1 est égale à une prime fixe de 1 500 F auquel s'ajoute un coût de 35 F par kw consommé.

La facture 2 est égale à une prime fixe de 2 000 F auquel s'ajoute un coût de 65 F par kw consommé.

La facture 3 est égale à une prime fixe de 2 500 F auquel s'ajoute un coût de 95 F par kw consommé.

À la fin de son exposé, le Directeur a étayé ses propos par des cas particuliers de consommations de 60 kw et de 205 kw.

De retour en classe, les élèves s'organisent pour apprendre à déterminer la facture liée à une consommation donnée.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Définition d'une fonction

- Connaître la définition d'une fonction numérique
- Déterminer l'image d'un élément de l'ensemble de définition d'une fonction numérique définie par un tableau, une formule explicite ou sa représentation graphique
- Déterminer le(s) antécédent(s) d'un nombre réel donné de l'ensemble image par une formule explicite ou sa représentation graphique

2 Ensemble de définition d'une fonction

- Connaître la définition de l'ensemble de définition d'une fonction
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction définie par sa représentation graphique

3 Variations d'une fonction

- Connaître la définition d'une fonction croissante
- Connaître la définition d'une fonction décroissante
- Déterminer les variations d'une fonction définie par une représentation graphique
- Dresser le tableau de variation d'une fonction définie par une représentation graphique

4 Minimum, maximum d'une fonction

- Connaître la définition du maximum d'une fonction sur un intervalle borné
- Connaître la définition du minimum d'une fonction sur un intervalle borné
- Connaître la définition d'un extrémum d'une fonction sur un intervalle borné
- Déterminer le maximum et le minimum d'une fonction définie par son tableau de variation ou sa représentation graphique.

5 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

- Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir une fonction définie par sa représentation graphique.

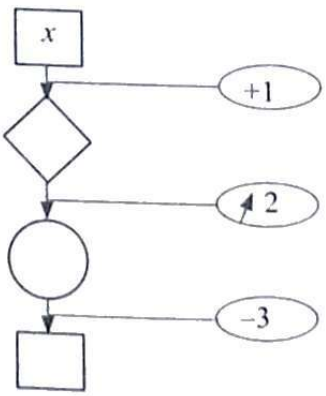
6 Traitement de situation

- Traiter une situation faisant appel aux généralités sur les fonctions

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Définition d'une fonction

On considère les instructions suivantes que l'on veut appliquer à un nombre réel x de l'intervalle $[-3 ; 5]$:
Instruction 1 : ajoute 1 à ce nombre ;
Instruction 2 : élève au carré le résultat obtenu à l'instruction 1 ;
Instruction 3 : retranche 3 au résultat obtenu à l'instruction 2.
Affiche le résultat y.
1. Affiche les résultats lorsque $x = -1$; $x = 0$; $x = 4$; $x = 6$.
2. Écris le résultat final y en fonction x.
3. Justifie que chaque nombre réel est associé à un autre nombre réel à la sortie du programme.



Synthèse

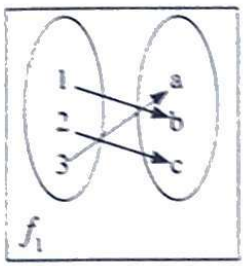
Une fonction est une correspondance qui, à chaque élément de l'ensemble de départ associe 0 ou 1 élément dans l'ensemble d'arrivée.
Si x est un élément de l'ensemble de départ associé à l'élément y de l'ensemble d'arrivée, alors y est l'image de x et x est un antécédent de y.

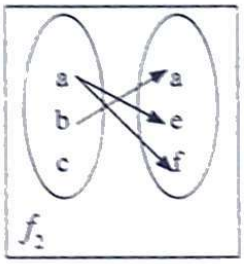
Exercices de fixation

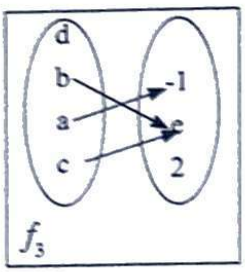
1-1 Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes.
A et B sont des ensembles non vides. On appelle fonction de A vers B toute correspondance f qui :

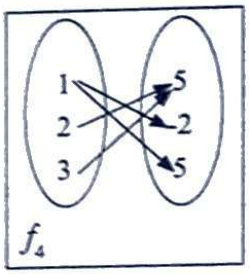
1. à chaque élément x de A, associe zéro élément de B.
2. à chaque élément x de A, associe zéro ou deux éléments de B.
3. à chaque élément x de A, associe zéro ou un élément de B.
4. à chaque élément x de A, associe au plus un élément de B.
5. à chaque élément x de A, associe au moins un élément de B

1-2 a) Parmi les correspondances f_1, f_2, f_3 et f_4 ci-dessous, nomme celles qui sont des fonctions.
b) Parmi celles qui sont des fonctions, indique celles qui sont des fonctions numériques (a, b, c, d, e, f ne sont pas des nombres).

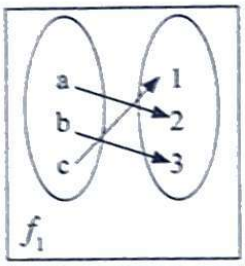


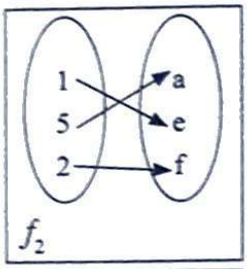


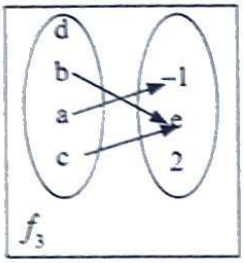


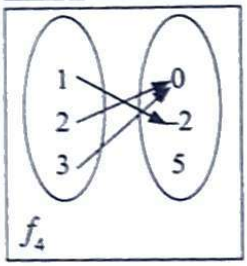


1-3 Les correspondances f_1, f_2, f_3 et f_4 ci-dessous sont des fonctions.





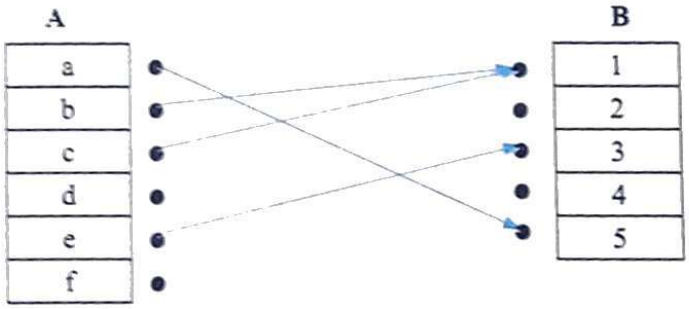




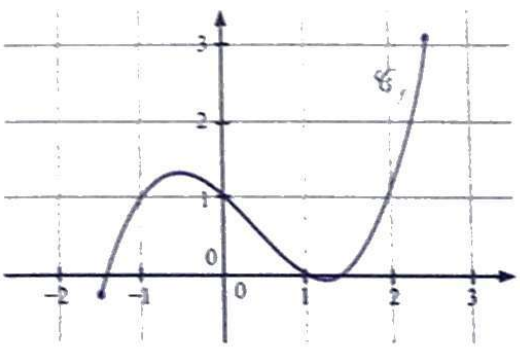
Nomme :
1. L'image de c par f_1.
2. L'image de 2 par f_2.
3. L'antécédent de -1 par f_3.
4. Les antécédents de 0 par f_4.

Activité 2 Ensemble de définition d'une fonction

Énoncé 1
Soit f la fonction définie ci-contre.
Détermine les éléments de l'ensemble de départ A qui ont une image par f dans B.



Énoncé 2
Sur la figure ci-contre, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère.
Détermine graphiquement l'intervalle I sur lequel tous les éléments ont une image par f.



Synthèse

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des éléments de son ensemble de départ qui ont une image dans son ensemble d'arrivée.

Exercices de fixation

2-1 Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes, des ensembles de définition sont proposés. Recopie la bonne réponse.

Fonction	Ensemble de définition			
	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3	Réponse 4
$x \longmapsto x^2-1$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$	$\mathbb{R}$	$]-1\,;\,1[$	$]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$
$x \longmapsto \frac{-x}{x-4}$	$\mathbb{R}\setminus\{4\}$	$\mathbb{R}$	$]0\,;\,4[$	$\mathbb{R}\setminus\{-4\}$
$x \longmapsto (x+2)^2$	$]-\infty\,;\,2[$	$]-\infty\,;\,-2[$	$\mathbb{R}$	$[-2\,;\,+\infty[$

2-2 Détermine l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie dans chacun des cas suivants :

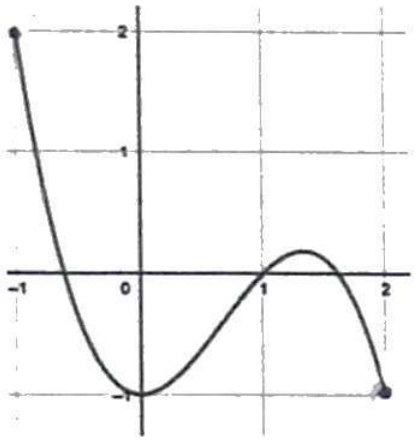
a) $f(x) = 2x - 1$

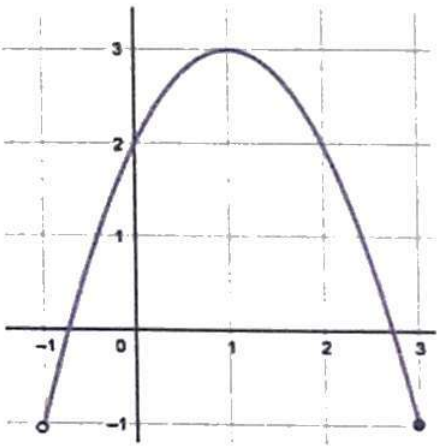
b) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + x + 13$

c) $(2x - 3)(x + 7)$

d) $f(x) = \frac{x}{x+3}$

2-3 Détermine, dans chacun des cas suivants, l'ensemble de définition de la fonction f définie par sa courbe représentative.

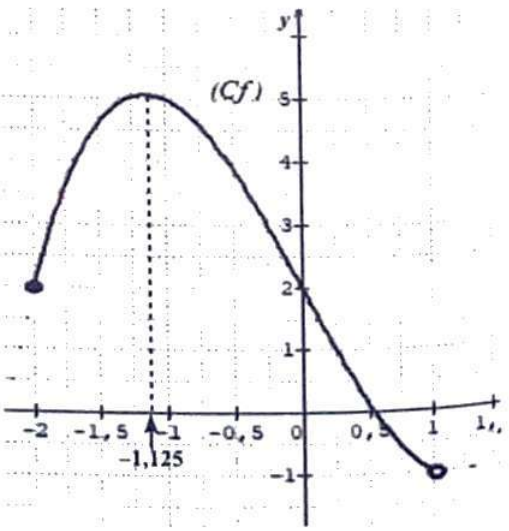




Activité 3 Variations d'une fonction

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. On considère deux nombres réels quelconques a et b sur l'intervalle $[-1{,}125\,;\,1[$ tels que $a < b$.
   a) Compare graphiquement $f(a)$ et $f(b)$.
   b) $f(a)$ et $f(b)$ sont-ils rangés dans le même ordre que a et b ?
   c) Déduis de ce qui précède, le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1{,}125\,;\,1[$.
3. Procède de la même manière en prenant deux nombres quelconques a et b sur $[-2\,;\,-1{,}125]$ tels que $a < b$.



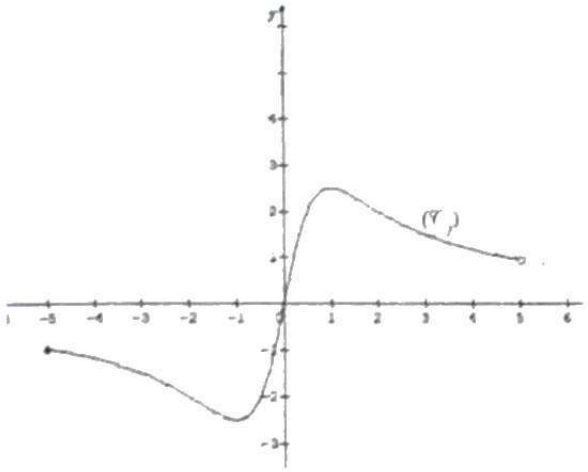
Synthèse

- Une fonction f est croissante sur un intervalle I lorsque pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \leq f(b)$.
  Si l'on a $f(a) < f(b)$, la fonction f est strictement croissante.
- Une fonction f est décroissante sur un intervalle I lorsque pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \geq f(b)$.
  Si l'on a $f(a) > f(b)$, la fonction f est strictement décroissante.
- Une fonction f est constante sur un intervalle I lorsque pour tous nombres réels a et b de I on a : $f(a) = f(b)$.

Les variations d'une fonction peuvent se résumer dans un tableau de variation.

Exercices de fixation

3-1 Dans la figure ci-dessous, $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.



a) Donne l'ensemble de définition de la fonction f.
b) Donne selon les valeurs de x, le sens de variation de la fonction f.
c) Dresse le tableau de variation de la fonction f.

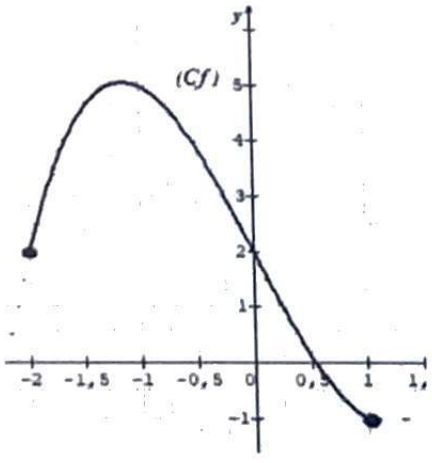
3-2 On donne la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 1$.
a) Détermine le sens de variation de f.
b) Dresse le tableau de variation de f.

3-3 On donne la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x + 5$.
a) Détermine le sens de variation de f.
b) Dresse le tableau de variation de f.

Activité 4 Minimum, maximum d'une fonction

La courbe ci-contre est la représentation graphique, dans le plan muni d'un repere, d'une fonction numérique f définie sur $[-2 ; 1]$.

1. a) Donne l'ordonnée y_0 du point le plus haut de la représentation de f.
   b) Donne l'antécédent x_0 de y_0. On a : $y_0 = f(x_0)$.
   c) Pour tout réel x de l'intervalle $[-2 ; 1]$, compare $f(x)$ et $f(x_0)$.
2. a) Donne l'ordonnée y_1 du point le plus bas de la représentation de f.
   b) Donne l'antécédent x_1 de y_1. On a : $y_1 = f(x_1)$.
   c) Pour tout réel x de l'intervalle $[-2 ; 1]$, compare $f(x)$ et $f(x_1)$.
3. Dresse le tableau de variation de f.



Synthèse

- Le maximum d'une fonction sur un intervalle est la plus grande valeur atteinte par cette fonction sur cet intervalle.
- Le minimum d'une fonction sur un intervalle est la plus petite valeur atteinte par cette fonction sur cet intervalle.
- Un extremum d'une fonction sur un intervalle est un maximum ou un minimum de cette fonction sur l'intervalle.

Exercices de fixation

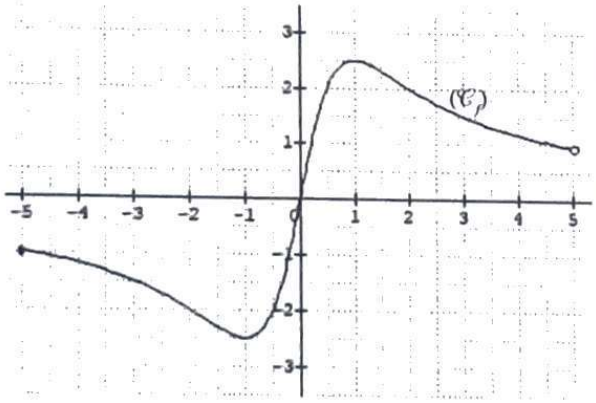
4-1 Soit g la fonction définie sur $\{-3 ; -1 ; 0 ; 2 ; \pi ; 4 ; 5 ; 6\}$ par :

x	-3	-1	0	2	π	4	5	6
$g(x)$	3,5	1	-2	1	3	4	2	-1

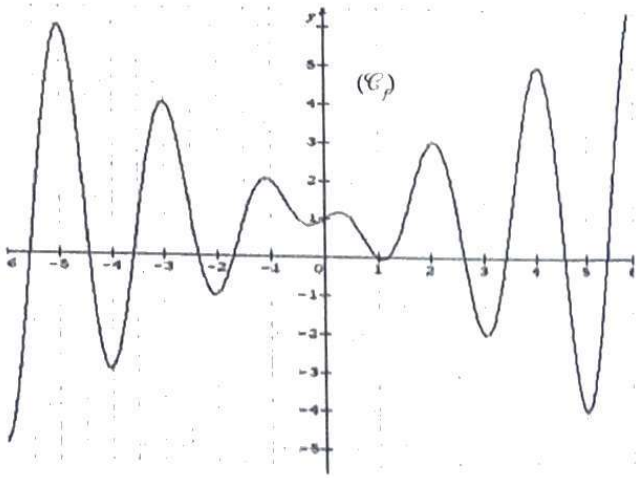
Pour chaque affirmation, écris le numéro et la lettre de la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses			
		A	B	C	D
1	Le maximum de la fonction g est	-3	6	5	4
2	Le maximum de la fonction g est atteint en	4	6	5	-3
3	Le minimum de la fonction g est	0	-2	6	-3
4	Le minimum de la fonction g est atteint en	-1	0	2	-3

4-2 Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative, dans le plan muni d'un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur $[-5 ; 5[$.
1. Détermine le maximum de f sur $\mathscr{D}_f$.
Précise la valeur en laquelle elle est atteinte.
2. Détermine le minimum de f sur $\mathscr{D}_f$.
Précise la valeur en laquelle elle est atteinte.

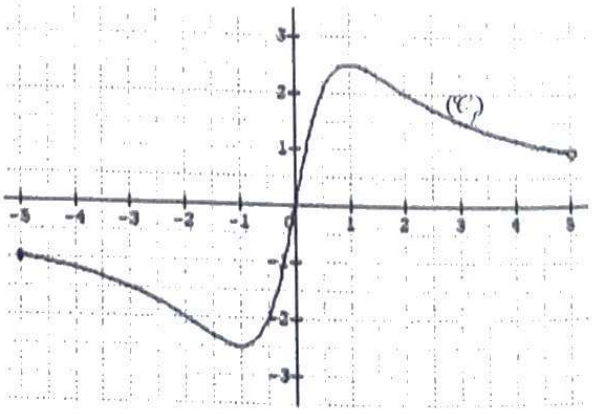


4-3 On donne ci-dessous la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ d'une fonction f dans le plan muni d'un repère.
1. Sur l'intervalle $[-6 ; -2]$ détermine les extremums de f et donne les valeurs en lesquelles ils sont atteints.
2. Sur l'intervalle $[-3{,}5 ; 4{,}5]$ détermine les extremums de f et donne les valeurs en lesquelles ils sont atteints.



Activité 5 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Le plan est muni d'un repère, $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 5[$.
a) Détermine graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = 2$.
b) Détermine graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) \leq -2$.

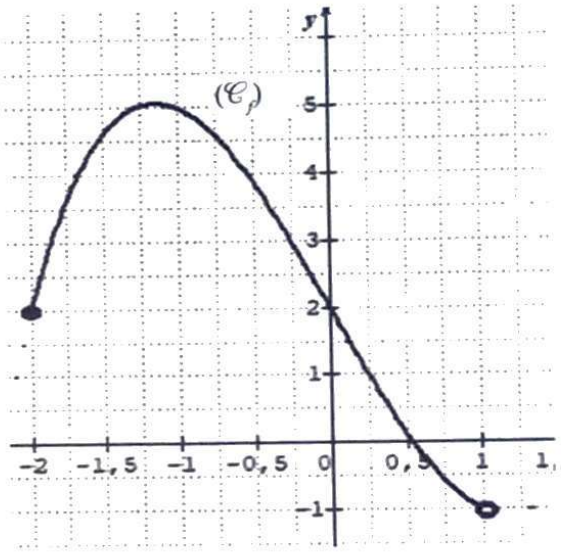


Synthèse

Soit f une fonction définie par sa représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$.
Pour résoudre l'équation $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, ou l'inéquation $f(x) \leq k$, ou l'inéquation $f(x) < k$, ou l'inéquation $f(x) \geq k$, ou l'inéquation $f(x) > k$, on trace la droite (D) d'équation $y = k$ et on se sert de la position de (D) par rapport à $(\mathscr{C}_f)$ pour lire le(s) résultat(s).

Exercices de fixation

5-1 Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction numérique f définie sur $[-2 ; 1[$.
Écris le numéro de chaque ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.



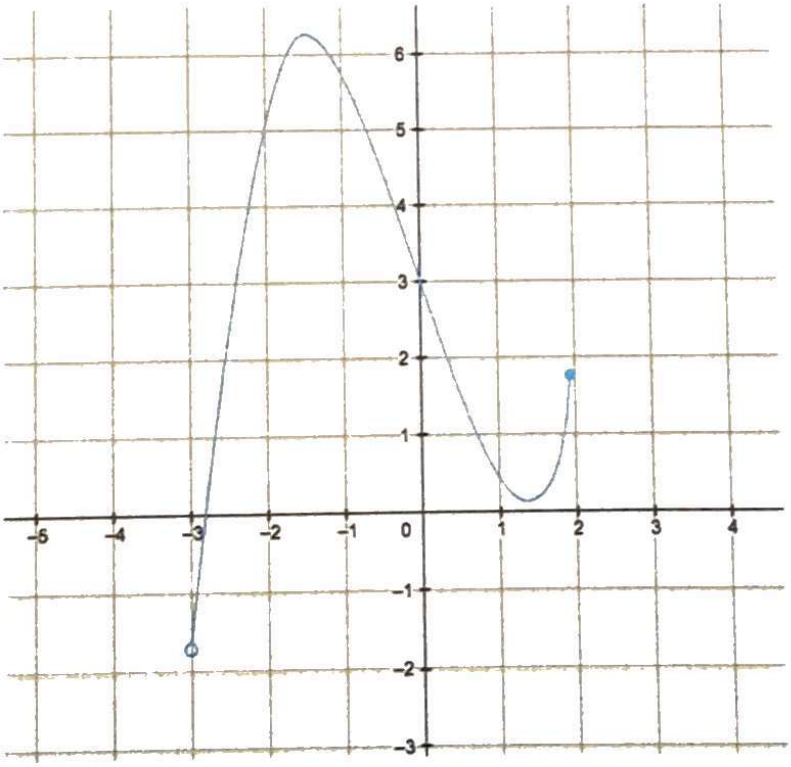
		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'image de 0 par f est	2	0	0,5
2	L'ensemble des solutions dans $[-2 ; 1[$ de l'équation $f(x) = 2$ est	$\{-2 ; 1\}$	$\{-2 ; 0\}$	$\{0 ; 1\}$
3	L'ensemble des solutions dans $[-2 ; 1[$ de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est	$[-2 ; 0,5]$	$[2 ; 5]$	$[0 ; 1[$

5-2 Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction numérique f définie sur $]-3 ; 2]$.

a) Résous graphiquement dans l'intervalle $]-3 ; 2]$, l'équation $f(x) = 3$.

b) Résous graphiquement dans l'intervalle $]-3 ; 2]$, l'inéquation $f(x) \geq -1$.

c) Résous graphiquement dans l'intervalle $]-3 ; 2]$, l'inéquation $f(x) \leq 3$.



APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Dresser le tableau de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par : $f(x) = x^2$.

a) Détermine le sens de variation de f sur $[-3 ; 4]$.

b) Dresse son tableau de variation sur $[-3 ; 4]$.

Corrigé

a) Pour comparer les carrés de deux nombres, ces nombres doivent avoir le même signe.

On a : $[-3 ; 4] = [-3 ; 0] \cup [0 ; 4]$.

• Pour tous a et b appartenant à $[-3 ; 0]$, si $a < b$ alors $a^2 > b^2$. Donc $f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc décroissante sur $[-3 ; 0]$.

• Pour tous a et b appartenant à $[0 ; 4]$, si $a < b$ alors $a^2 < b^2$. Donc $f(a) > f(b)$.

La fonction f est donc croissante sur $[0 ; 4]$.

Méthode

• f est croissante sur un intervalle I lorsque, pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \leq f(b)$.

• f est décroissante sur un intervalle I lorsque, pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \geq f(b)$.

b) Son tableau de variation $[-3 ; 4]$.

x	-3		0		4
$f(x)$	9	↘	0	↗	16

Exercice 2 Résoudre graphiquement des équations et des inéquations

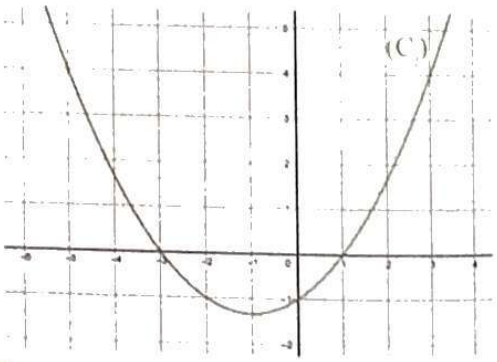
On donne ci-contre la courbe représentative (C_f) d'une fonction f définie sur $[-6 ; 4]$.

1. Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes :

a) $f(x) = 4$; b) $f(x) = 0$; c) $f(x) = -1$.

2. Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

a) $f(x) \leq 4$; b) $f(x) > 0$; c) $f(x) < -1$.



Corrigé

1. a) On trace la droite d'équation $y = 4$.

Les antécédents de 4 sont les solutions.

$S_R = \{-5 ; 3\}$.

b) En appliquant la même méthode, on a :

$S_R = \{-3 ; 1\}$.

c) En appliquant la même méthode, on a :

$S_R = \{-2 ; 0\}$.

2. a) On trace la droite d'équation $y = 4$.

L'ensemble des abscisses des points de la courbe qui se trouvent en dessous de la droite d'équation $y = 4$ est l'ensemble solution.

$S_R = [-5 ; 3]$

b) En appliquant la même méthode, on a :

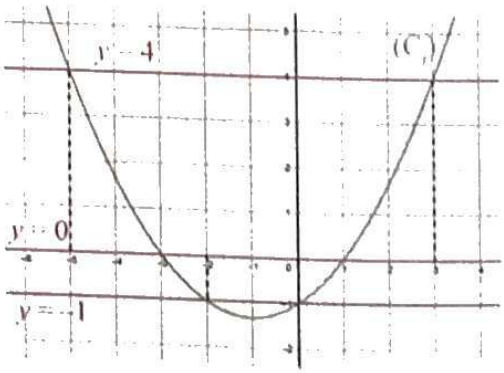
$S_R = [-6 ; -3[\cup]1 ; 4]$.

c) En appliquant la même méthode, on a :

$S_R =]-2 ; 0[$.

Méthode

Appliquer le point méthode de la page 73.

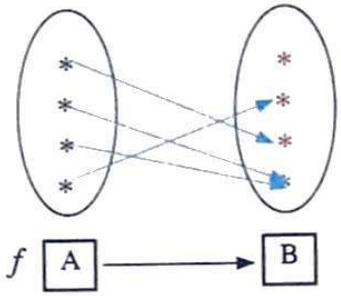


Résumé de cours

1 Définition d'une fonction

Définition A et B sont deux ensembles non vides.
On appelle fonction de A vers B toute correspondance f qui à chaque élément x de A, associe un ou zéro élément de B.

On note $f : A \longrightarrow B$
$x \longmapsto f(x)$.



Vocabulaire

f est la fonction de A vers B qui, à x, associe $f(x)$.
A est l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de f.
x est la variable et $f(x)$ l'image de x par f.
On note aussi : $y = f(x)$.
y est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f.

Définition d'une fonction numérique

Définition On appelle fonction numérique, toue fonction dont l'ensemble d'arrivée est une partie de $\mathbb{R}$.

2 Ensemble de définition d'une fonction

Définition Soit f une fonction de A vers B.
L'ensemble de définition de f est l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f dans B.

On le note très souvent $\mathcal{D}_f$.

Méthode

Pour déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f, on peut procéder comme suit :
- Écrire toutes les conditions d'existence de $f(x)$;
- Écrire $\mathcal{D}_f$ en extension ou avec des intervalles.

Exemple 1

Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.
$x \in \mathcal{D}_f$ équivaut à $x \geq 0$.
Par conséquence $\mathcal{D}_f = [0 ; +\infty[$.

Exemple 2

Détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$.
$x \in \mathcal{D}_f$ équivaut à $x^2 - 4 \neq 0$.
Résolvons l'équation : $x^2 - 4 = 0$
On a : $(x - 2)(x + 2) = 0$.
Donc : $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$.
C'est-à-dire : $x = 2$ ou $x = -2$.
On a donc $x \in \mathcal{D}_f$ équivaut à $x \neq 2$ et $x \neq -2$.
Par conséquent $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2 ; 2\}$.
Écriture de $\mathcal{D}_f$ à l'aide d'intervalles.
On a : $\mathcal{D}_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

Résumé de cours

3 Variations d'une fonction

Définition d'une fonction croissante

Définition Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante sur I lorsque, pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \leq f(b)$.

On dit que f est strictement croissante sur I lorsque, pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) < f(b)$.

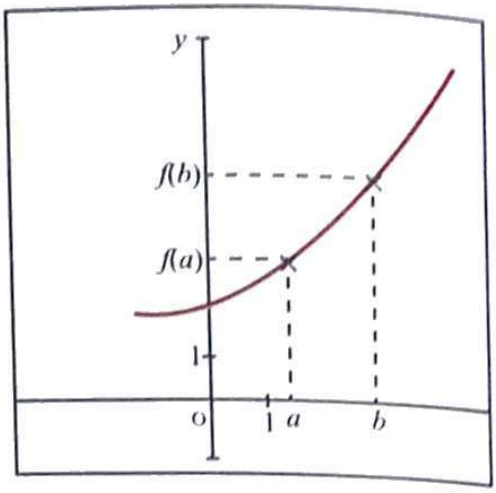


Tableau de variation d'une fonction croissante.

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	$f(b)$

Définition d'une fonction décroissante

Définition Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
On dit que f est décroissante sur I lorsque, pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) \geq f(b)$.

On dit que f est strictement décroissante sur I lorsque, pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, on a : $f(a) > f(b)$.

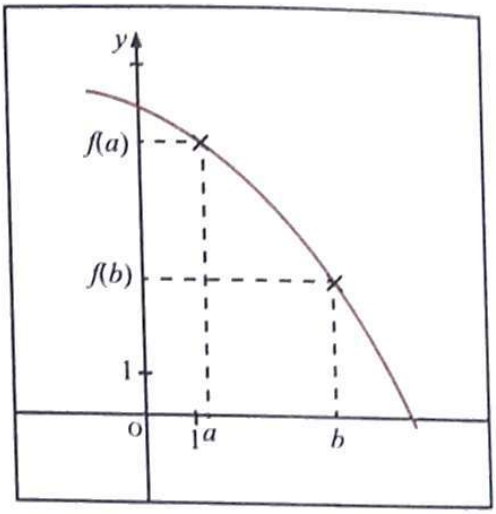


Tableau de variation d'une fonction décroissante.

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	$f(b)$

Définition d'une fonction constante

Définition Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
On dit que f est constante sur I lorsque, pour tous réels a et b de I, on a : $f(a) = f(b)$.

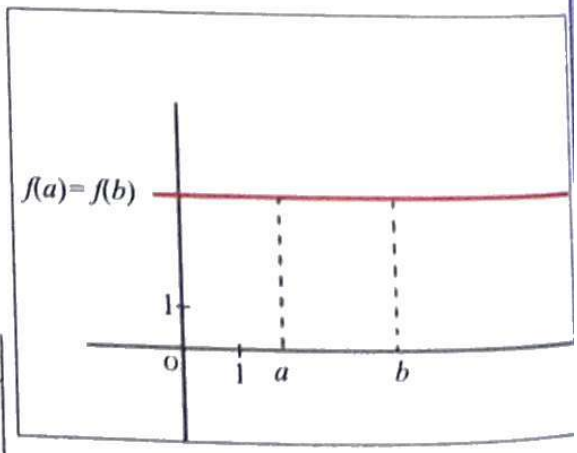


Tableau de variation d'une fonction constante.

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$ →	$f(b)$

Remarque

Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels cette fonction est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante. Ces résultats sont résumés dans un tableau appelé tableau de variation.

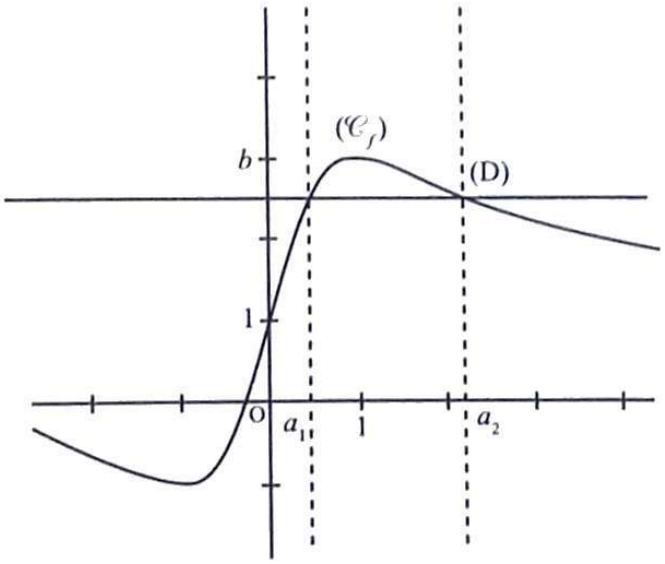
4 Minimum, maximum d'une fonction

Définition Soient f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble $\mathcal{D}$, I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}$ et a un élément de I.
Lorsque pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I.
On dit aussi que ce maximum $f(a)$ est atteint en a.
Lorsque pour tout x de I, $f(x) \geq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I.
On dit aussi que ce minimum $f(a)$ est atteint en a.
Les maximums et les minimums d'une fonction sont appelés les extremums (ou extrema) de f.

5 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

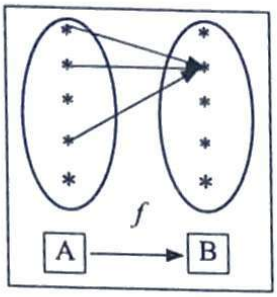
Point Méthode

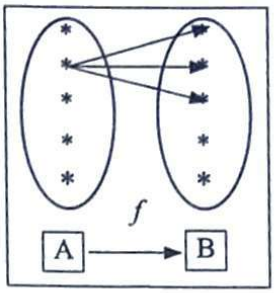
Pour déterminer graphiquement les antécédents d'un nombre réel b par une fonction f, on trace la droite (D) d'équation : $y = b$.
Les antécédents de b sont les abscisses des points d'intersection de (D) et $(\mathcal{C}_f)$ et sont les solutions de l'équation $f(x) = b$.
Pour déterminer graphiquement les nombres réels x de $\mathcal{D}_f$ tels que $f(x) \leq b$, on trace la droite (D) d'équation : $y = b$.
L'ensemble des abscisses des points de $(\mathcal{C}_f)$ qui se trouvent en dessous de la droite d'équation $y = b$ est l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq b$.

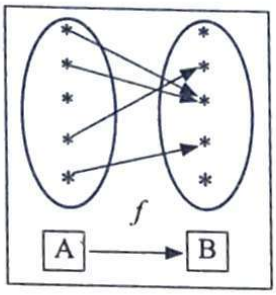


Exercices de renforcement

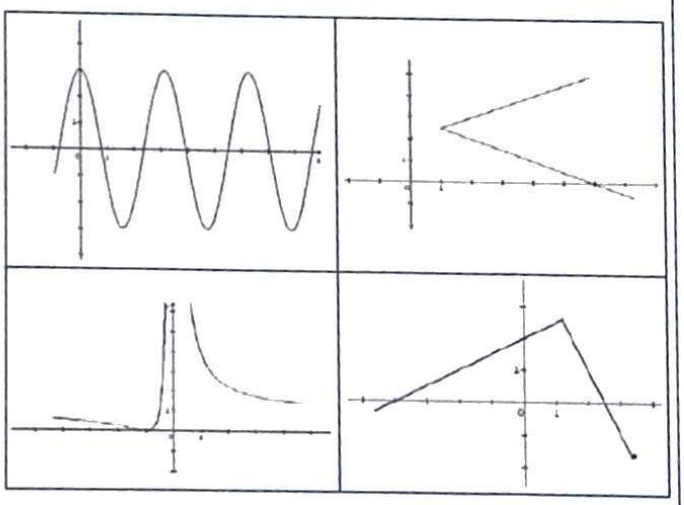
1 Les diagrammes suivants définissent des correspondances de A vers B.
Nomme celles qui sont des fonctions.





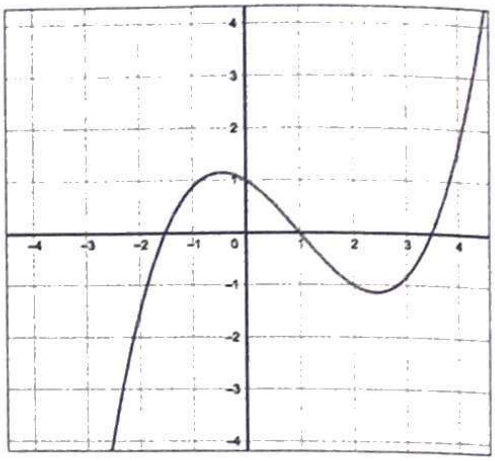


2 Parmi les courbes suivantes, indique celles qui sont des représentations graphiques de fonctions.

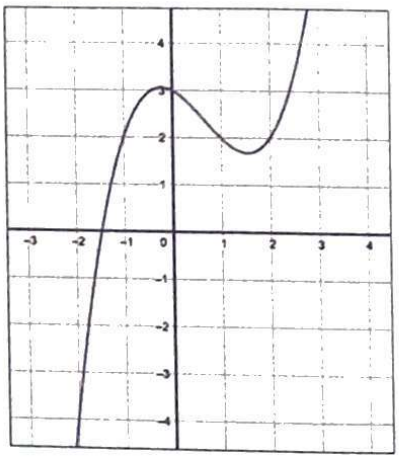


3 Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = x^2 + 3$.
1. Calcule $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(\frac{1}{2})$ et $f(-\sqrt{3})$.
2. Détermine l'image par f de chacun des nombres réels suivants : -2 ; 1 ; $\frac{-1}{3}$.
3. Détermine les antécédents par f de chacun des nombres réels suivants : 3 ; 4 ; 12 ; 1.

4 Le plan est muni d'un repère. La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.
1. Détermine graphiquement l'image par f de chacun des nombres suivants : -3 ; $-1{,}5$; 0 ; 1 ; $\frac{5}{2}$.
2. Détermine graphiquement les antécédents par f de chacun des nombres suivants : -2 ; -1 ; 0 ; 2.



5 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère.
1. Par lecture graphique, détermine les images par f de : -2 ; -1 ; 0 et 2.
2. Par lecture graphique, détermine les antécédents par f de : -2 ; 0 et 2.



6 Soit f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Le calcul de l'image d'un nombre réel x par cette fonction peut se faire à l'aide du programme suivant :

Prendre un nombre réel ;

Retrancher 3 ;

Élever au carré ;

Ajouter 2 ;

Prendre l'inverse du résultat.

a) Calcule l'image de -1 ; 0 ; 3 ; 4.

b) Écris la formule explicite de f.

Exercices

7 $f : \{-4 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2{,}5 ; 3 ; 4 ; 5\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x+2}{x^2-1}$

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Calcule l'image de chacun des nombres réels suivants : -2 ; 2,5 ; 3.
3. Détermine l'antécédent de 0.

8 On donne les fonctions f, g, h et k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = x(x-1)$;

$g(x) = x^2 - x - 3$; $h(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$; $k(x) = \sqrt{x+3}$.

Détermine l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.

9 On donne les fonctions f, g, h et k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$; $g(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$;

$h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; $k(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$.

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessus.

10 On donne les fonctions f, g, h et k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

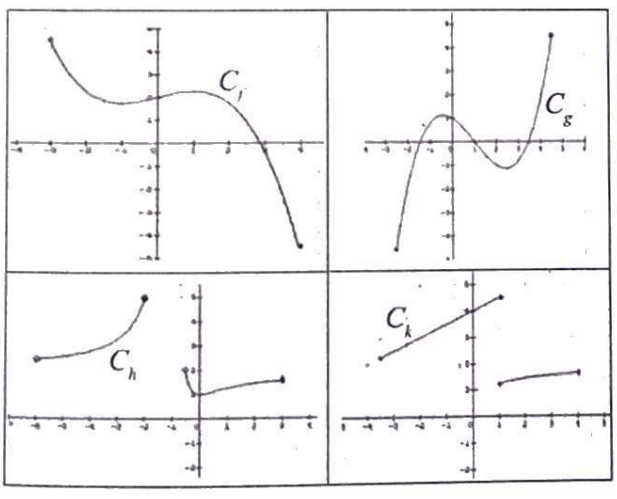
$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$; $g(x) = \sqrt{(x+3)(x-5)}$;

$h(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{(x-1)(x+5)}$;

$k(x) = \dfrac{x^2}{2x-3} + \sqrt{x+4}$.

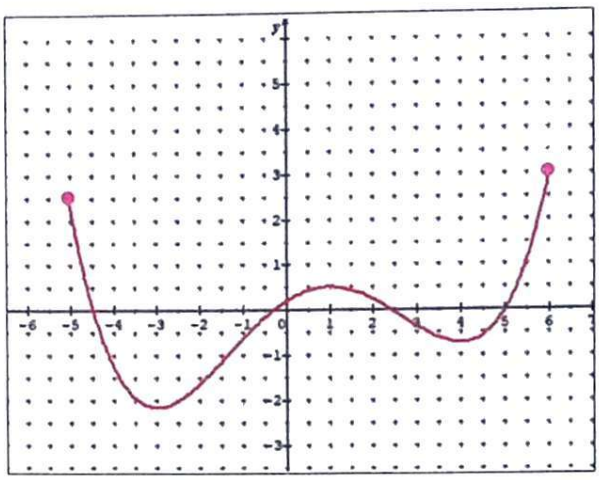
Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessus.

11 Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de fonctions numériques dans un repère. Détermine leur ensemble de définition.



12 La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur $[-5 ; 6]$.

1. Donne le sens de variation de f.
2. Dresse le tableau de variation de f.



13 f est une fonction définie sur $[-3 ; 5]$ avec un sens de variation définie comme suit : f est croissante sur $[-3 ; -1]$, f est décroissante sur $[-1 ; 1]$, f est égale à -2 sur $[1 ; 3]$ et décroissante sur $[3 ; 5]$. On donne $f(-3) = -1$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 2$, $f(5) = 0$. Dresse le tableau de variation de f sur $[-3 ; 5]$.

14 f est une fonction strictement croissante sur $[-3 ; 4]$. Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. $f(-3) < f(0)$.
2. $f(-1) > f(1)$.
3. $f(2) = f(-2)$.
4. Pour $x \in [-1 ; 2]$ $f(-1) \leq f(x) \leq f(2)$.

15 On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f. À partir de ce tableau, détermine le sens de variation de f suivant les valeurs de x.

x	-4		-1		0		3
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	1
	-5				-3		

16 Dans chaque cas, donne le sens de variation de chacune des fonctions dont les tableaux de variations sont ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↗		↘	

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
g		↗		↘		↗	

17 Les images de deux nombres réels donnés dans le tableau de variation ci-dessous d'une fonction f sont incorrectes. Corrige la deuxième ligne pour obtenir un tableau de variation correct de f, en inter-changeant deux nombres réels.

x	-1		0		2		3		10
$f(x)$	3	↘	-2	↗	-3	↘	0	↗	1

18 Corrige la première ligne pour obtenir un tableau de variation correct de g, en interchangeant deux nombres réels.

x	-3		$\frac{9}{2}$		4		8
$g(x)$	3	↗	5	↘	-2	↗	30

19 On a représenté ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-4		-2		1		5
$f(x)$	6	↘	3	↗	4	↘	0

1. Détermine les extremums de f.
2. Dis en quelles valeurs les extremums sont atteints.

20 Soit f une fonction strictement croissante sur $[-3 ; 4]$. Réponds par vrai ou par faux.

1. $f(0)$ est le minimum de f sur $[-3 ; 4]$.
2. $f(-3)$ est le minimum de de f sur $[-3 ; 4]$.
3. $f(4)$ est le minimum de de f sur $[-3 ; 4]$.
4. $f(-3)$ est le maximum de f sur $[-3 ; 4]$.
5. $f(0)$ est le maximum de f sur $[-3 ; 4]$.
6. $f(4)$ est le maximum de f sur $[-3 ; 4]$.

21 On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

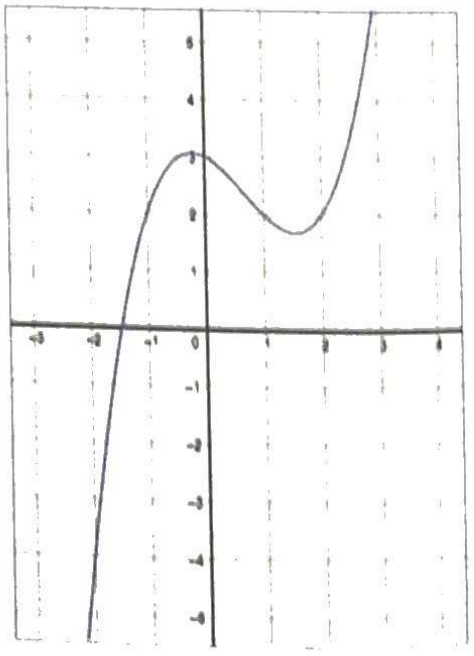
x	-4		-1		0		3
$f(x)$	-5	↗	2	↘	-3	↗	1

1. Détermine les extremums de f.
2. Dis en quelles valeurs les extremums sont atteints.

22 La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie sur $]-2,2 ; 2,8[$.

a) Par lecture, détermine les nombres réels x tels que : $f(x) = 2$.

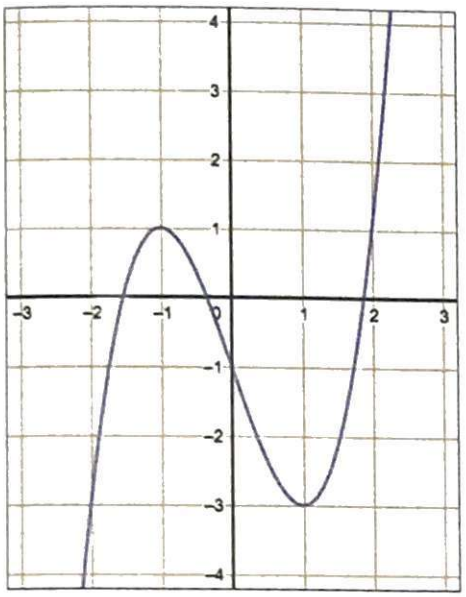
b) Par lecture, détermine les nombres réels x tels que : $f(x) \geq 0$.



Exercices d'approfondissement

23 Le plan est muni d'un repère. On donne la fonction f de représentation graphique ci-dessous.

1. Détermine les images par f des nombres suivants : $-1{,}5$; -1 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2.
2. Détermine les antécédents par f des nombres suivants : -3 ; -1 ; 1 ; 4.

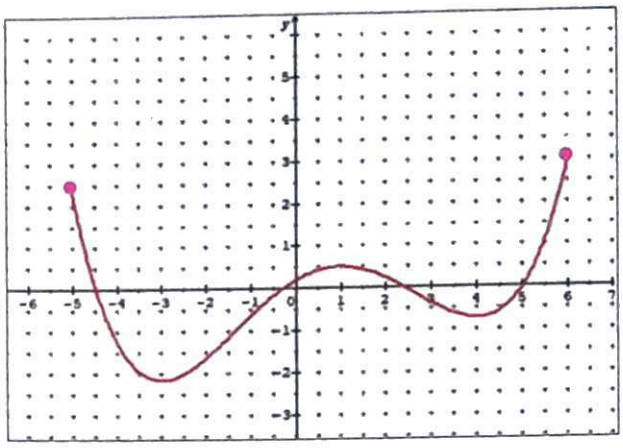


24 Précise si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

1. L'image de -1 par f est 6
2. $f(-3)$ est égal à 4.
3. Le point $(-5 ; 6)$ appartient à la courbe représentative de f dans un repère.
4. 3 est un antécédent de 10 par f.
5. Le point $(2 ; -3)$ appartient à la courbe représentative de f dans un repère.
6. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: 1 et $\frac{1}{2}$.

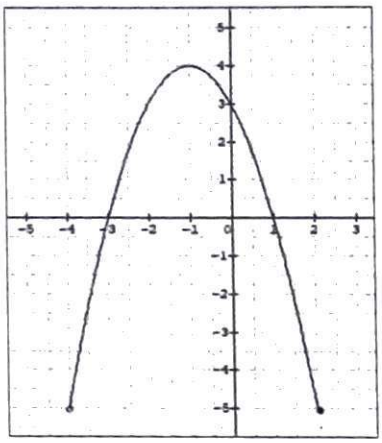
25 La courbe ci-après est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Donne le sens de variation de f.
3. Détermine les extremums de f et donne les valeurs en lesquelles ils sont atteints.
4. Dresse le tableau de variation de f.



26 La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]-4 ; 2]$ par :
$f(x) = -(x + 1)^2 + 4$.

1. Dresse le tableau de variation de f.
2. Résous graphiquement l'équation : $f(x) = 0$.
3. Détermine le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2 ; 1]$.
4. Résous graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq 0$.



27 g est la fonction numérique définie sur $[-5 ; 1]$ par : $g(x) = x^3 + 9x^2 + 17x - 1$.

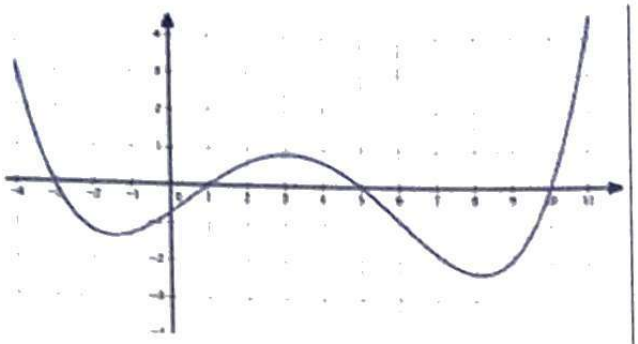
1. Calcule $g(-5)$, $g(-3)$, $g(0)$, $g(1)$.
2. Déduis-en que la fonction g n'est ni décroissante ni croissante sur $[-5 ; 1]$.

28 Chacune des courbes ci-après est la représentation graphique d'une fonction numérique f dans un repère orthonormé.

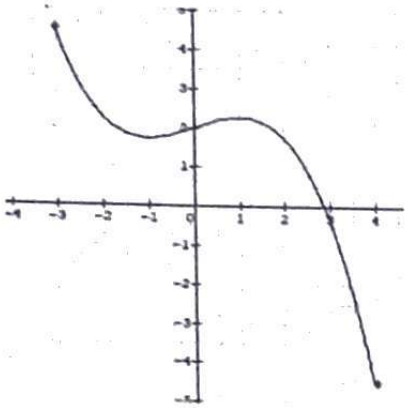
Dans chacun des cas :

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Étudie suivant les valeurs de x, le sens de variation de f.
3. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
4. Résous dans $\mathcal{D}_f$, l'équation : $f(x) = 0$.
5. Résous dans $\mathcal{D}_f$, l'inéquation : $f(x) > 2$.

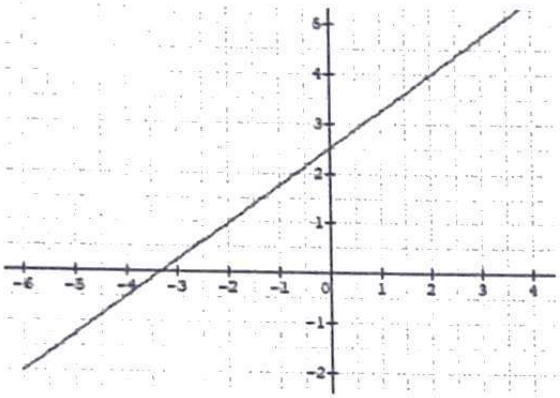
a)



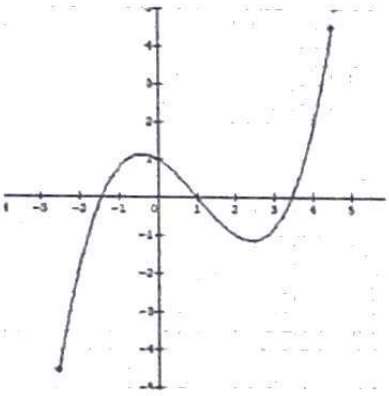
b)



c)



d)



29* L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un triangle rectangle en B tel que AC = x et BC = 5.

1. Calcule AB en fonction de x.
2. g est la fonction qui à x associe l'aire du triangle ABC.
   a) Exprime $g(x)$ en fonction de x.
   b) Détermine l'ensemble de définition de g.

30* On considère un rectangle d'aire X.
On augmente l'une de ses dimensions de 25% et on diminue l'autre de 10%. On obtient un nouveau rectangle d'aire A(X).
Exprime A(X) en fonction de X.

Situation d'évaluation

31 Lors d'une visite dans les locaux d'une Compagnie d'Électricité de la ville, les élèves de la classe de Seconde A, se font expliquer la facturation domestique de consommation périodique des foyers. En effet, l'agent de la compagnie leur explique qu'il y a trois types de facturation selon le pouvoir d'achat des foyers.



Facturation 1 pour les foyers de faible revenu.
Le montant de la facture est égal à une prime fixe de 1 500 F auquel s'ajoute un coût de 3 F par unité de consommation.
La facturation 2 pour les foyers de moyen revenu.
Le montant de la facture est égal à une prime fixe de 2 000 F à laquelle s'ajoute un coût de 65 F par unité de consommation.
Le montant de la facturation 3 pour les foyers aisés.
La facture est égale à une prime fixe de 2 500 F à laquelle s'ajoute un coût de 95 F par unité de consommation.
Après l'explication des différentes facturations, un élève affirme que la facturation 2 est plus avantageuse. Certains élèves ne sont pas d'accord.
Départage ces élèves en justifiant tes arguments.

Coup de Pouce

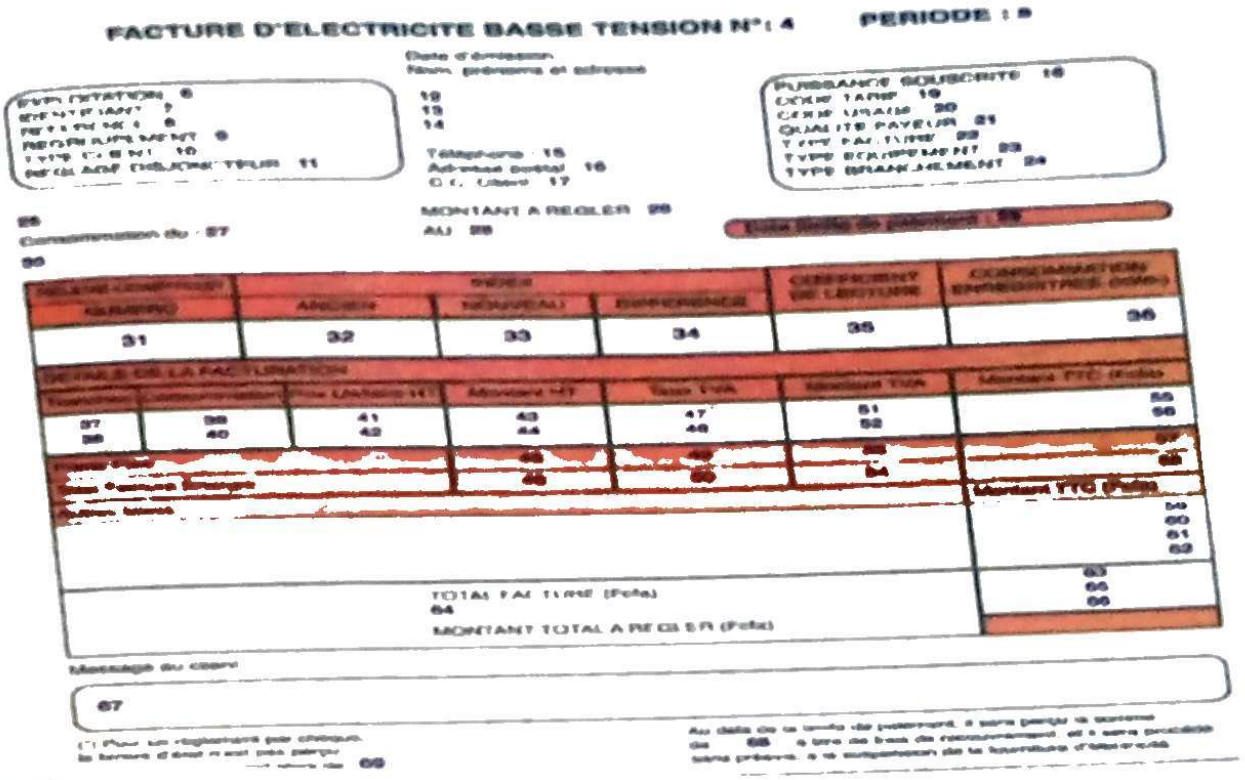
10 • Pour l'ensemble de définition de g ; utiliser un tableau de signe.
• Pour l'ensemble de définition de h ; résoudre l'inéquation $x + 3 \geq 0$ et l'équation $(x - 1)(x + 5) = 0$.
• Pour l'ensemble de définition de k; résoudre l'inéquation $x + 4 \geq 0$ et l'équation $2x - 3 = 0$.

29 1. Utiliser la propriété de Pythagore.
2. b) Utiliser un tableau de signe de $(x - 5)(x + 5)$.

30 Poser : X = L × l avec L, la longueur du rectangle et l, la largeur du rectangle.
Appliquer le pourcentage d'une augmentation et le pourcentage d'une réduction.

Leçon 6

ÉTUDE DE FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES


FACTURE D'ELECTRICITE BASSE TENSION N° : 4 PERIODE : 5

Pour déterminer le montant de la facture, on utilise des fonctions élémentaires sur différents intervalles.

Vérifie par calculs le montant d'une facture domestique.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un professeur de mathématiques a organisé les élèves de la Seconde A en groupes pour exposer sur des thèmes. Chaque groupe doit imprimer le travail saisi à l'ordinateur. Le prix du document imprimé dépend du nombre de feuilles de papier utilisées. Un premier groupe a payé 420 F pour 12 feuilles et un second a payé 595 F pour 17 feuilles au même endroit.
Les élèves veulent déterminer une formule leur permettant de déterminer rapidement le montant à payer après une impression de document.
Ils s'organisent pour faire des calculs.



HABILETÉS ET CONTENUS

1 Fonction linéaire

- Connaître la définition d'une fonction linéaire
- Connaître l'ensemble de définition des fonctions linéaires

2 Fonction affine

- Connaître la définition d'une fonction affine
- Connaître l'ensemble de définition des fonctions affines
- Déterminer l'ensemble de définition des fonctions affines
- Déterminer le sens de variation d'une fonction affine
- Dresser le tableau de variation d'une fonction affine
- Représenter graphiquement une fonction affine

3 Fonction affine par intervalles

- Connaître la définition d'une fonction affine par intervalles
- Dresser le tableau de variation d'une fonction affine par intervalles
- Représenter graphiquement une fonction affine par intervalles

4 Fonction carrée

- Connaître l'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto x^2$
- Déterminer :
  - l'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto x^2$
  - le sens de variation des fonctions : $x \mapsto x^2$
- Dresser le tableau de variation de la fonction : $x \mapsto x^2$
- Représenter graphiquement la fonction : $x \mapsto x^2$

5 Fonction inverse

- Connaître le sens de variation de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$
- Déterminer :
  - l'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$
  - le sens de variation de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$
- Dresser le tableau de variation de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$
- Représenter graphiquement la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$

6 Traitement de situation

- Traiter une situation faisant appel aux études de fonctions élémentaires

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Fonction linéaire

Une banque attribue 15% de taux d'intérêt annuel.
On place dans cette banque x FCFA
1. Détermine en fonction de x, le montant $I(x)$ de l'intérêt perçu au bout d'un an.
2. Calcule l'intérêt annuel pour un placement de 50 000 FCFA.
3. Représente graphiquement la fonction I qui à la somme x placée associe le montant $I(x)$.

Synthèse

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto 0{,}15x$ est une fonction linéaire.

Sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère.

Exercices de fixation

1-1 Parmi les fonctions f définies ci-dessous, indique celles qui sont des fonctions linéaires.

a) $f(x) = \frac{3}{2x}$ b) $f(x) = -\frac{4x}{5}$ c) $f(x) = 10\sqrt{x}$ d) $f(x) = 4x^2$ e) $f(x) = x\sqrt{7}$ f) $f(x) = x$.

1-2 Soit a un nombre réel. Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$ est une fonction linéaire.
2. La fonction $f : x \mapsto a + x$ est une fonction linéaire.
3. La fonction $f : x \mapsto ax$ est une fonction linéaire.
4. La fonction $f : x \mapsto \frac{a}{x}$ est une fonction linéaire.
5. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{ax}$ $(a \neq 0)$ est une fonction linéaire.

1-3 Recopie puis relie chaque case de gauche à la case de droite qui convient :

L'ensemble de définition d'une fonction linéaire est	x et $u(x)$ sont proportionnels
Si u est une fonction linéaire, alors	une droite qui passe par l'origine du repère
Toute fonction linéaire est représentée par	l'ensemble des nombres réels

Activité 2 Fonction affine

Une maison d'édition veut publier un livre de mathématiques.
Les frais de conception s'élèvent à 300 000 F et l'impression de chaque livre coûte 1 500 F.

1. Détermine le coût de production p(x) de x livres.
2. Calcule le coût de production de 200 livres.
3. Complète le tableau ci-dessous :

x	100	300	500
$p(x)$			

4. Représente graphiquement dans un repère la fonction p.
5. Étudie le sens de variation de p.
6. Étudie le sens de variation de la fonction $x \mapsto ax + b$ $(a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R})$.

Synthèse

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto 1\,500x + 300\,000$ est une fonction affine.

Comme $1\,500 > 0$, cette fonction est croissante.

Sa représentation graphique est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercices de fixation

2-1 Dans chaque cas, indique si la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donnée par son expression est une fonction affine.

a) $f(x) = \frac{7}{x} + 3$ b) $f(x) = -\frac{2x}{3}$ c) $f(x) = -\sqrt{x+5}$

d) $f(x) = x^2 - 1$ e) $f(x) = 1 - x\sqrt{5}$ g) $f(x) = x - 9 + \frac{1}{x}$

2-2 Soit a et b des nombres réels. Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. Pour a différent de 0, la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{a} - b$ est une fonction affine.
2. La fonction $f : x \mapsto a+bx$ est une fonction affine.
3. Pour b différent de 0, la fonction $f : x \mapsto ax + \frac{1}{b}$ est une fonction affine.
4. La fonction $f : x \mapsto \frac{a}{x} + b$ est une fonction affine.
5. Pour a différent de 0 et b différent de 0, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}$ est une fonction affine.

2-3 Détermine le sens de variation de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 13x + 3$ b) $f(x) = -\frac{x}{8} - 10$ c) $f(x) = -x\sqrt{2} + 5$ d) $f(x) = -3{,}6x$

e) $f(x) = 11 + x\sqrt{5}$ g) $f(x) = x - 9$.

2-4 Dresse le tableau de variation de chacune des fonctions affines définies ci-dessous.

a) $f(x) = 3x - 3$ b) $g(x) = -18x$ c) $h(x) = \frac{7}{4}x$ d) $k(x) = -2x\sqrt{3} - 20$.

2-5 Représente graphiquement chacune des fonctions affines définies ci-dessous dans un repère.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ b) $g(x) = \frac{3}{2}x$ c) $h(x) = 2x + 2$ d) $k(x) = -\frac{4}{3}x$.

Activité 3 Fonction affine par intervalles

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. Place dans le repère (O, I, J) les quatre points A(–3 ; 0), B(0 ; 2), C(3 ; 0) et D(5 ; 2) puis trace la ligne brisée ABCD.

On veut déterminer l'expression de la fonction f représentée par la ligne brisée ABCD.

2. Écris l'équation réduite de chacune des droites (AB), (BC) et (CD).
3. Déduis l'expression de f sur chacun des intervalles suivants : [–3 ; 0], [0 ; 3] et [3 ; 5].
4. Dresse le tableau de variation de f.

Synthèse

Sur chacun des intervalles [–3 ; 0], [0 ; 3] et [3 ; 5], l'expression de f est celle d'une fonction affine : on dit que f est une fonction affine par intervalles.

Sa représentation graphique est la ligne brisée ABCD.

Exercices de fixation

3-1 On donne les groupes de mots suivants : fonction affine ; fonction numérique ; réunion d'intervalles ; fonction affine par intervalles ; l'ensemble de définition.

Retrouve une définition en remplaçant les pointillés par le groupe de mots qui convient.

On appelle ..... toute ..... f dont ..... est une ..... sur chacun desquels l'expression de f est celle d'une .....

3-2 Parmi les fonctions ci-dessous, une seule n'est pas une fonction affine par intervalles. Retrouve-la.

1. La fonction u est définie par : $\begin{cases} u(x) = 2x + 7, \text{ si } x \leq 2 \\ u(x) = x - 3, \text{ si } x > 2 \end{cases}$.

2. La fonction r est définie par : $\begin{cases} r(x) = -2x^2 + 2, \text{ si } x \leq 10 \\ r(x) = 3x, \quad \text{si } x \geq 10. \end{cases}$

3. La fonction v est définie par : $\begin{cases} v(x) = 8x, & \text{si } x \leq 0 \\ v(x) = -4x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

4. La fonction t est définie par : $\begin{cases} t(x) = \frac{1}{4}, & \text{si } x \geq -1 \\ t(x) = -5x + 1, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$.

3-3 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = 2x + 1, & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) = -x + 7, & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

1. Dresse le tableau de variation de g.
2. Représente graphiquement g dans un repère orthonormé.

Activité 4 Fonction carré

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

1. Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. a) On considère deux nombres réels a et b de l'intervalle $]-\infty ; 0]$ tels que : $a < b$.
Démontre que : $a^2 > b^2$. Déduis-en le sens de variation de f sur $]-\infty ; 0]$.
b) On considère deux nombres réels a et b de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ tels que : $a < b$.
Démontre que : $a^2 < b^2$. Déduis-en le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
3. Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. a) Complète le tableau ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2							

b) Représente graphiquement f dans un repère.

Synthèse

La fonction : $x \longmapsto x^2$ est appelée fonction carré.

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

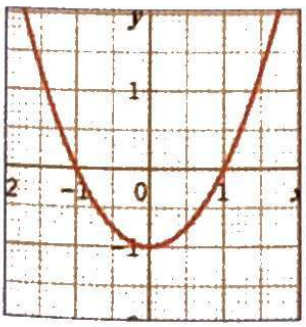
Elle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Exercices de fixation

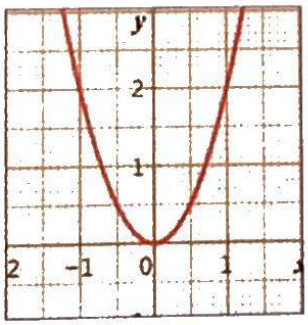
4-1 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. La fonction carré est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
2. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.
3. La fonction carré est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.
4. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

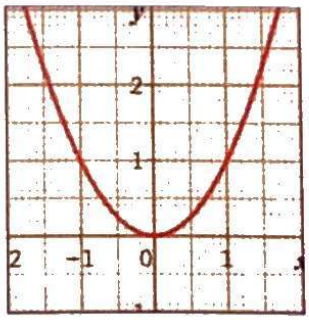
4-2 Parmi les représentations graphiques ci-dessous, indique celle de la fonction carré.



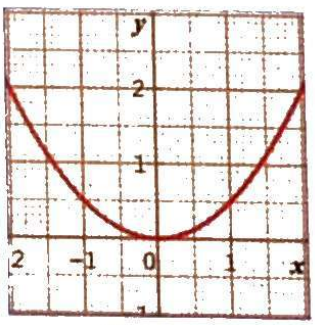
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Activité 5 Fonction inverse

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$

1. Justifie que l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2. a) On considère deux nombres réels a et b de l'intervalle $]-\infty ; 0[$ tels que : $a < b$.

Démontre que : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Déduis-en le sens de variation de g sur $]-\infty ; 0[$.

b) On considère deux nombres réels a et b de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ tels que : $a < b$.

Démontre que : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Déduis-en le sens de variation de g sur $]0 ; +\infty[$.

3. Dresse le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

4. a) Complète le tableau ci-dessous.

x	-4	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$	0	$0,25$	$0,5$	1	2	4
$\frac{1}{x}$											

b) Représente graphiquement g dans un repère orthonormé.

Synthèse

La fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est appelée fonction inverse.

Elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

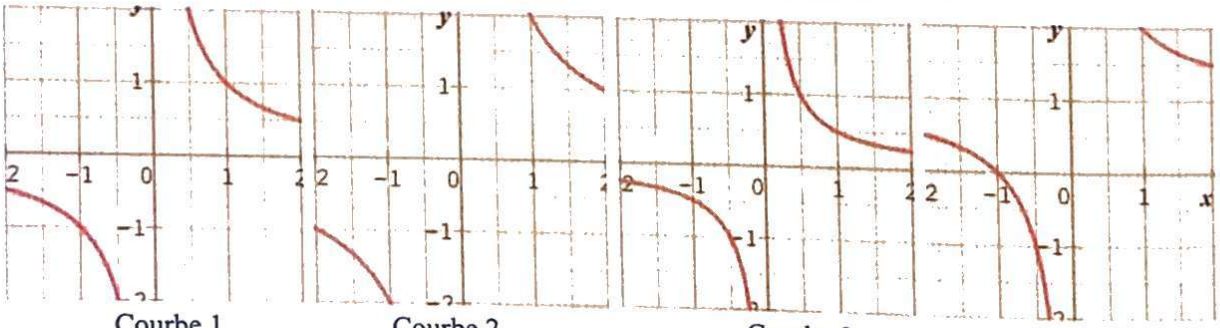
Elle est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

Exercices de fixation

5-1 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. La fonction inverse est croissante sur $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
2. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et croissante sur $]0 ; +\infty[$.
3. La fonction inverse est croissante sur $]-\infty ; 0[$ et croissante sur $]0 ; +\infty[$.
4. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

5-2 Parmi les représentations graphiques ci-dessous, indique celle de la fonction inverse.



Courbe 1 Courbe 2 Courbe 3 Courbe 4

Exercice 1 Déterminer l'expression d'une fonction affine

$f : x \mapsto ax + b$ est une fonction affine.
Détermine a et b sachant que : $f(3) = 1$ et $f(5) = 9$.

Corrigé

On sait que $f(x) = ax + b$ et $f(3) = 1$, donc $3a + b = 1$.
De même $f(x) = ax + b$ et $f(5) = 9$, donc $5a + b = 9$.
On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant : $\begin{cases} 5a + b = 9 \\ 3a + b = 1 \end{cases}$.

Résolution du système :

Par la méthode de combinaison,

on a : $\begin{cases} 5a + b = 9 \\ -3a - b = -1 \end{cases}$

$2a = 8$

Méthode

- Remplacer x par 3 puis x par 5 pour obtenir un système à résoudre.
- Vérifier que les valeurs de a et b trouvées sont bien solutions du système.

On obtient : $a = 4$.

En remplaçant a par 4 dans la deuxième équation, on a : $3 \times 4 + b = 1$, donc $b = -11$.

Conclusion : $f(x) = 4x - 11$.

Exercice 2 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x + 2$.
1. Donne le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Construis la courbe représentative (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
4. Trace la courbe représentative (C_g) de g dans le plan muni du repère (O, I, J).
5. Résous graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

Corrigé

1. g est une fonction affine de la forme $g(x) = ax + b$ où $a < 0$. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

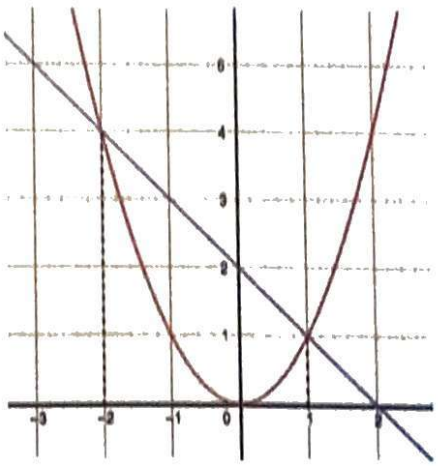
2.

x	$-\infty$	0	$-\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

3. Voir figure.
4. Voir figure.
5. Les abscisses des points d'intersections des deux courbes sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
$S_R = \{-2 ; 1\}$.

Méthode

Pour résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$, il suffit de déterminer graphiquement les abscisses des points d'intersections des courbes de f et de g.

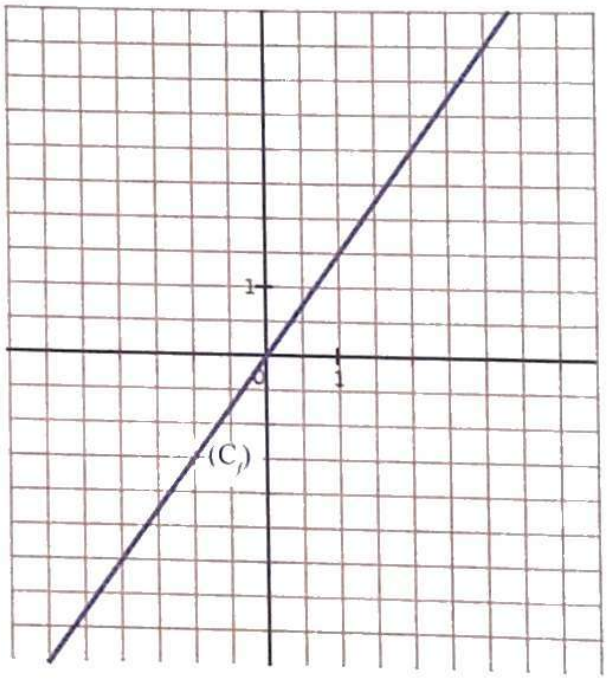


Résumé de cours

1 Fonction linéaire

Définition Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$, où $a \in \mathbb{R}$, est appelée fonction linéaire.

Propriétés
- Si f est une fonction linéaire, alors une suite de nombre réel et celle de leur image respective sont proportionnels.
- La représentation graphique d'une fonction linéaire dans le plan muni d'un repère est une droite passant par l'origine du repère.



2 Fonction affine

Définition Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée fonction affine.

Remarque

Toute fonction linéaire est une fonction affine.

Sens de variation d'une fonction affine

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$.

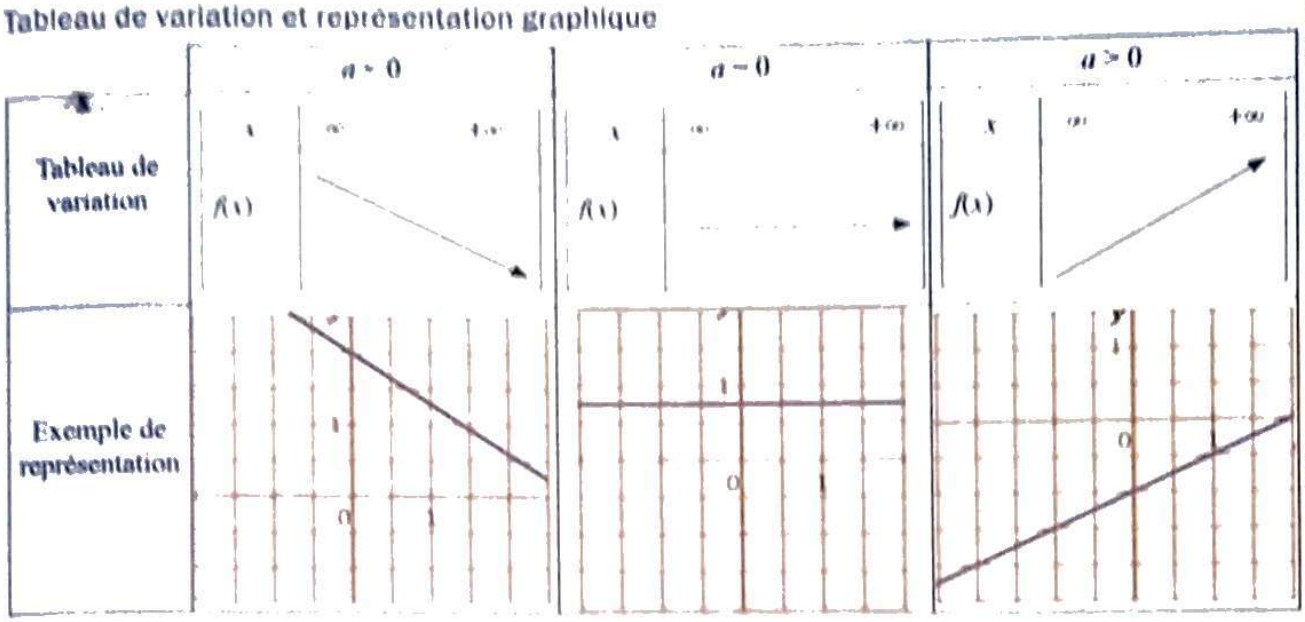
Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Résumé de cours

Tableau de variation et représentation graphique



3 Fonction affine par intervalles

Définition On appelle fonction affine par intervalles toute fonction numérique f dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels l'expression de f est celle d'une fonction affine.

Point Méthode

Pour représenter graphiquement une fonction affine f par intervalles, on représente sur chaque intervalle la fonction affine qui y est définie. La représentation graphique de f est alors la réunion des segments et/ou demi-droites obtenus.

4 Fonction carré

Définition La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

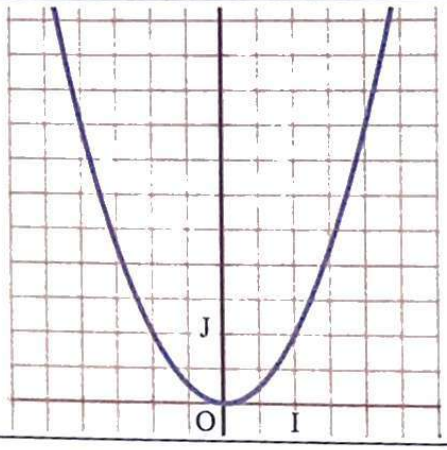
Sens de variation

- La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$;
- La fonction carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variation et représentation graphique

Tableau de variation	x : $-\infty$; 0 ; $+\infty$ $f(x)$: $+\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$

Résumé de cours

Représentation graphique de f	

Remarque

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction carré est appelée parabole.

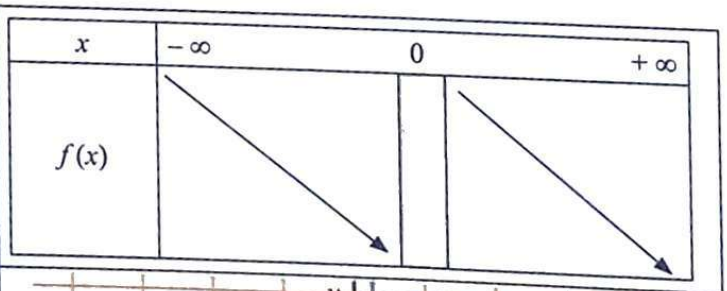
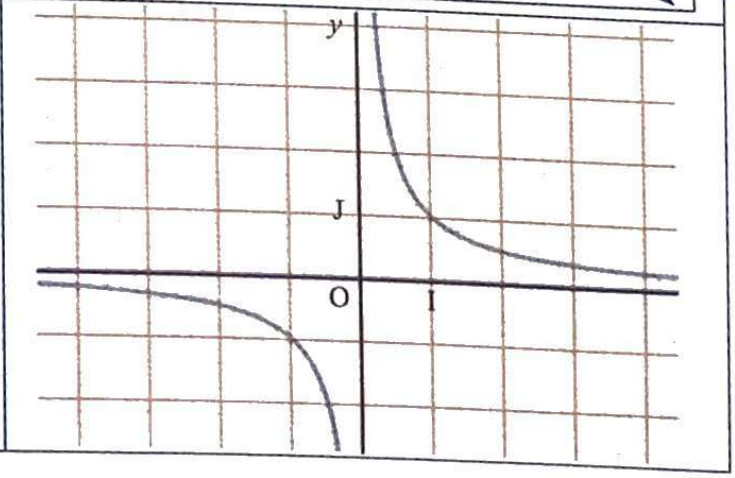
5 Fonction inverse

Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Sens de variation

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

Tableau de variation et représentation graphique

Tableau de variation	
Représentation graphique de f	

Remarque

Dans le plan muni d'un repère, la représentation graphique de la fonction inverse est appelée hyperbole.

Exercices

Exercices de renforcement

1 Détermine les fonctions linéaires f, g et h telles que :

a) $f(2) = 4$; b) $g(-3) = \frac{1}{6}$; c) $h(-\frac{5}{2}) = -\frac{2}{5}$.

2 Retrouve la fonction linéaire qui correspond à chaque phrase :

1. Prendre 15 % de x.
2. Augmenter x de 5 %.
3. Diminuer x de 25 %.

3 Recopie chaque phrase en remplaçant les pointillés par « augmenter » ou « diminuer ».

1. La fonction linéaire $x \longmapsto 0{,}97\,x$ correspond à ..... x de 3%.
2. La fonction linéaire $x \longmapsto 1{,}08\,x$ correspond à ..... x de 8%.
3. La fonction linéaire $x \longmapsto 0{,}5\,x$ correspond à ..... x de 50%.
4. La fonction linéaire $x \longmapsto 2{,}5\,x$ correspond à ..... x de 150%.

4 Voici les différents prix des denrées de première nécessité d'un magasin.

Denrées	Lait	Café	Sucre	Riz	Savon
Prix	515 F	325 F	150 F	1300 F	435 F

Le gérant décide d'une hausse de 17 % sur tous les prix de son magasin.

1. Détermine l'expression de la fonction qui permet de calculer les nouveaux prix.
2. Donne les nouveaux prix dans un tableau (arrondis à l'entier supérieur).

5 1. À l'occasion des soldes, un commerçant décide d'une baisse de 25 % sur tous les textiles.

a) Définis la fonction linéaire qui permet de passer du prix initial « x » au prix soldé « $f(x)$ ».

b) Détermine les nouveaux prix sur les étiquettes suivantes :

Chemise	Polo	Pantalon	Survêtement
~~5490 F~~	~~1990 F~~	~~4500 F~~	~~9990 F~~
.....	.....	.....	.....

(arrondis à l'entier supérieur)

2. Une paire de chaussures coûtait 45 900 F avant les soldes et coûte désormais 39 015 F

a) Détermine la fonction linéaire g telle que $g(45\,900) = 39\,015$.

b) Calcule le pourcentage de la réduction de la paire de chaussures.

6 On donne les fonctions linéaires f, g, h et k définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x$; $g(x) = \frac{x}{4}$; $h(x) = -5x$; $k(x) = \frac{-2}{3}x$.

1. Donne le sens de variation de chacune des fonctions linéaires ci-dessus.
2. Dresse le tableau de variation de chacune de ces fonctions linéaires.
3. Dans un même repère orthonormé, construis les droites représentatives des fonctions f, g, h et k.

7 Dans chaque cas, détermine l'expression de la fonction affine définie par :

a) $f(5) = 5$ et $f(0) = 1$;

b) $g(-2) = -8$ et $g(3) = 0$;

c) $h(-1/2) = -\frac{4}{5}$ et $h(1) = -1$.

8 Retrouve la fonction affine qui correspond à chaque phrase :

1. Augmenter x de 45 % et retrancher 30.
2. Diminuer x de 10 % et ajouter 20.
3. Augmenter x de 30 % et ajouter 100.
4. Diminuer x de 50 % et retrancher 45.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne la fonction affine f définie par : $f(x) = 2x + 1$.

1. Donne le sens de variation de f.
2. Dresse le tableau de variation de f.
3. Représente graphiquement f dans le repère (O, I, J).

10 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne la fonction affine g définie par :
$g(x) = -3x + 2$.

1. Donne le sens de variation de g.
2. Dresse le tableau de variation de g.
3. Représente graphiquement g dans le repère (O, I, J).

11 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne la fonction affine h définie par :
$h(x) = \frac{3}{2}x - 1$.

1. Donne le sens de variation de h.
2. Dresse le tableau de variation de h.
3. Représente graphiquement h dans le repère (O, I, J).

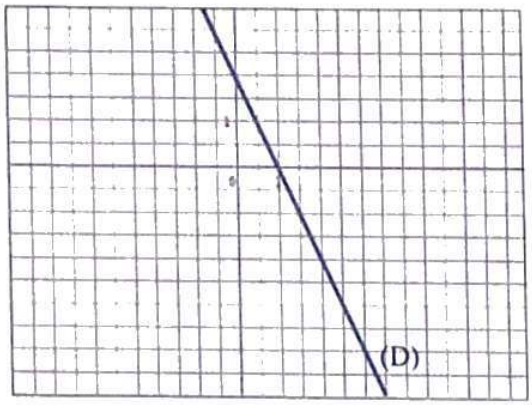
12 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne la fonction affine k définie par :
$k(x) = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2}$.

1. Donne le sens de variation de k.
2. Dresse le tableau de variation de k.
3. Représente graphiquement k dans le repère (O, I, J).

Exercices

13 1. Sans rechercher l'expression de $f(x)$, représente dans un repère orthonormé, la fonction affine f telle que : $f(1) = 2$ et $f(-3) = -1$.
2. Sans rechercher l'expression de $g(x)$, représente dans un repère orthonormé, la fonction affine g telle que : $g(-4) = 0$ et $g(2) = -3$.

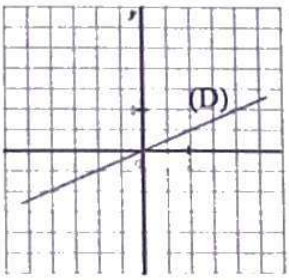
14 Sur la figure ci-dessous, la droite (D) est la représentation graphique d'une fonction affine t.



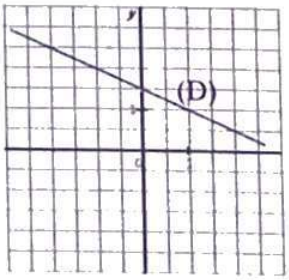
1. Détermine graphiquement le coefficient directeur de la droite (D).
2. Détermine graphiquement $t(0)$.
3. Détermine l'expression $t(x)$.

15 Détermine l'expression de la fonction affine représentée par la droite (D) dans chaque cas.

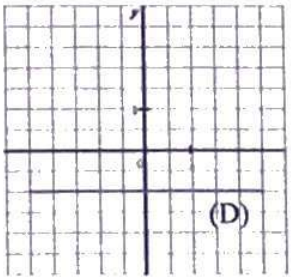
a)



b)



c)



16 Détermine l'ensemble de définition de la fonction affine par intervalles suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [-3\,;0], \text{ alors } f(x) = \dfrac{3}{2}x + 2 \\ \text{si } x \in]0\,;2], \text{ alors } f(x) = 2 \\ \text{si } x \in]2;5], \text{ alors } f(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

17 Représente graphiquement la fonction affine par intervalles suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [-\infty\,;-1], \text{ alors } f(x) = -2x + 2 \\ \text{si } x \in]-1\,;4], \text{ alors } f(x) = x + 5 \\ \text{si } x \in]4;8], \text{ alors } f(x) = -\dfrac{3}{2}x + 15 \end{cases}$$

18 1. Dresse le tableau de variation de la fonction affine par intervalles g suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [-\infty\,;0], \text{ alors } g(x) = x + 2 \\ \text{si } x \in]0\,;3], \text{ alors } g(x) = -2x + 2 \\ \text{si } x \in]3\,;+\infty], \text{ alors } g(x) = -x - 1 \end{cases}$$

2. Représente graphiquement la fonction g.

19 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A (–3, 0), B (0, 2), C (2, 2) et D (5 ; 0).
1. Place les points A, B, C et D.
2. On définit la fonction affine f par intervalles ayant pour représentation graphique les segments [AB], [BC] et [CD]. Détermine la formule explicite de f.

20 Calcule le carré des nombres suivants :
3 ; 5 ; –2 ; –7 ; 10 ; –11.

21 Parmi les fonctions f, g, h et k définies ci-après, reconnais celle qui est la fonction carrée.
$f(x) = 2x$; $g(x) = x^2$;
$h(x) = x \times x$; $k(x) = 3\sqrt{2}$.

22 Prouve que chacune des fonctions f, g et h définies ci-après est la fonction carré.
a) $f(x) = x(x + 1) - x$
b) $g(x) = -x^2 + 5x^2 - 3x^2$
c) $h(x) = (x - 1)^2 + 2x - 1$

23 On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2$.
1. Complète le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$							

2. Dans un repère, place les points de la courbe représentative de f correspondant aux valeurs du tableau et déduis-en le tracé de la courbe sur l'intervalle [0 ; 1,2].

24 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.
1. Un nombre réel non nul et son inverse sont de même signe.

Exercices

2. Deux nombres réels positifs non nuls sont rangés dans le même ordre que leurs inverses.

3. Deux nombres réels négatifs non nuls sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

25 Utilise le tableau de variation ou la représentation graphique de la fonction inverse pour dire à quel intervalle appartient $\frac{1}{x}$ lorsque :

a) $x \in [2 ; 7]$;
b) $x \in]0 ; 5]$;
c) $x \in]-2 ; -15]$.

26 On considère la fonction inverse f.
Calcule les images par f des nombres réels suivants :
57 ; -19 ; 49 ; 10^{-8} ; 10^{4}.

27 Pour chacune des affirmations suivantes, indique si elle est vraie ou fausse. Justifie la réponse.

a) Si $3 \leq x \leq 4$, alors $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$.

b) Si $-2 \leq x \leq 1$, alors $0,5 \leq \frac{1}{x} \leq 1$.

c) Si $1 \leq \frac{1}{x} \leq 10$, alors $0,1 \leq x \leq 1$.

28 Compare $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ dans chacun des cas suivants :

a) $2 < b < a$
b) $a < b < -2$
c) $a < 0 < b$
d) $a < 2 < b$

29 Détermine le maximum et le minimum de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur chacun des intervalles suivants :

a) $[1 ; 3]$
b) $[-4 ; -2]$
c) $\left[\frac{1}{5} ; \frac{1}{3}\right]$
d) $\left[-1 ; -\frac{1}{2}\right[$.

30 Résous dans $\mathbb{R}^*$, l'inéquation : $\frac{1}{x} < 3$.

31 Sans calcul, range dans l'ordre croissant les nombres réels suivants :

a) $\frac{1}{8} ; \frac{1}{20} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{0,7} ; \frac{1}{100} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{13}$

b) $\frac{1}{-2} ; \frac{1}{-9} ; \frac{1}{-3} ; \frac{1}{-11} ; \frac{1}{-32} ; \frac{1}{63} ; \frac{1}{-7} ; \frac{1}{-25}$

32 On donne la fonction g définie sur $[5 ; 15]$ par :
$g(x) = \frac{1}{x}$.
1. Étudie le sens de variation de g.
2. Dresse le tableau de variation de g.
3. Détermine le maximum et le minimum de g sur $[5 ; 15]$.

33 Dans un repère orthonormé du plan, on considère deux points A $(3 ; 2)$ et B $(7 ; -2)$.
1. Détermine une équation de la droite (AB)
2. Représente graphiquement l'hyperbole d'équation $y = \frac{4}{x}$.
3. Vérifie que pour tout nombre réel x, on a :
$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$.
4. Détermine les coordonnées des points d'intersection de cette hyperbole et de la droite (AB).

34 Résous les inéquations suivantes :

1) $\frac{1}{x} \geq -3$; 2) $\frac{1}{x} \geq 2$; 3) $\frac{1}{x} \leq 1$.

Exercices d'approfondissement

35 On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x + 6$ et $g(x) = x^2$.
1. Justifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ équivaut à $x^2 - x - 6 = 0$.
2. Trace les courbes représentatives de f et de g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
3. Par lecture graphique, donne les solutions de l'équation $x^2 - x - 6 = 0$.

36 On donne :
* la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2 - x$ et
* la fonction v définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $v(x) = \frac{1}{x}$.
1. Justifie que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u(x) = v(x)$ équivaut à $x^2 - 2x + 1 = 0$.
2. Trace les courbes représentatives de u et de v dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
3. Par lecture graphique, donne les solutions de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$.

37 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.
1. Étudie le sens de variation de f.
2. Dresse le tableau de variation de f
3. Encadre $f(x)$ sachant que $-5 < x < -2$.

38 Un nombre est-il toujours plus petit que son carré ? Justifie ta réponse
Un nombre non nul est-il toujours plus grand que son inverse ?
Justifie ta réponse.

39* 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis les représentations graphiques (C_f) et (C_g) des fonctions f et g définies par :
$f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{4}{9}x - 1$.
2. Justifie que : $\frac{4}{9}x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{(x-3)(4x+3)}{9x}$

3. Étudie suivant les valeurs de x, la position relative de (C_f) et (C_g).

40* Pour tout nombre réel non nul x, compare x^2 et $\frac{1}{x}$.

41 Dans une Librairie, un livre de mathématiques de seconde A coûte 1 500 F. Sur un site Internet, ce même livre coûte 1 000 F, avec des frais de livraison fixes de 4 000 F quel que soit le nombre de livres achetés.



1. Complète le tableau suivant :

Nombre de livres achetées	2	5	11	14
Prix à payer en librairie		7 500		
Prix à payer par Internet		9 000		

2. Le nombre de livres achetés est noté x.

a) On note $L(x)$ le prix à payer pour l'achat de x livres en Librairie.
Exprime $L(x)$ en fonction de x.

b) On note $I(x)$ le prix à payer, en comptant la livraison, pour l'achat de x livres par Internet.
Exprime $I(x)$ en fonction de x.

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal.

a) Trace la représentation graphique (D) de la fonction f définie par : $f(x) = 15x$.

b) Trace la représentation graphique (D') de la fonction g définie par : $g(x) = 10x + 40$.

4. En utilisant le graphique précédent, détermine le prix le plus avantageux pour l'achat des livres en fonction du nombre de livres achetés.

42* Des élèves de Seconde A visitent une usine de production de chaussures.
Le Directeur de la production les informe que :
« Lorsque 30 chaussures sont produites, le coût total de production est de 29 100 F.
Lorsque 50 chaussures sont produites, le coût total de production est 48 500 F.
La production varie de façon linéaire en fonction des quantités produites. »

1. Exprime le coût $C(n)$ de production en fonction du nombre n de chaussures.
2. Détermine le coût de production de 100 chaussures.

Situations d'évaluation

43* Trois entreprises de location de matériel industriel louent des tronçonneuses aux tarifs suivants :
Tarif A : 4 500 F par jour.
Tarif B : 3 000 F par jour avec le versement d'une caution non remboursable de 15 000 F le premier jour de location.
Tarif C : 75 000 F pour toute durée de location n'excédant pas 30 jours.



Pour faire ses champs d'hévéa, un planteur veut louer une machine pour un certain nombre de jours n'excédant pas 30 jours. Mais il a des difficultés à choisir la formule la plus avantageuse.
Aide ce planteur à faire le bon choix.

44 Les élèves d'une classe de Seconde A ont organisé une sortie d'étude dans une entreprise. Ils ont visité plusieurs départements dont l'entrepôt.
Le responsable de ce département leur a dit que :
« Le coût de possession du stock de l'entreprise est donné par la relation $y = \frac{1}{x}$ et le coût de passation des commandes est donné par la relation $z = 0{,}04x$; x étant le nombre de commandes passées dans l'année.
Nous devons faire sorte que le coût de passation des commandes est supérieur au coût de possession des commandes. »
De retour en classe, des élèves séduits par ces informations, cherchent à savoir le nombre de commandes à partir duquel le coût de passation des commandes est supérieur au coût de possession des commandes.

1. Représente graphiquement dans le même repère, pour x compris entre 1 et 12, les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 0{,}04x$.
2. Déduis-en la réponse à la préoccupation des élèves.

Coup de Pouce

39
- Rendre $\frac{4}{9}x - 1 - \frac{1}{x}$ au même dénominateur puis développer le numérateur.
- Développer le numérateur $(x-3)(4x+3)$.

40
- Représenter graphiquement la fonction carré et la fonction inverse dans le même repère.
- Comparer x^2 et $\frac{1}{x}$ par lecture graphique.

42 Poser que $C(n) = a \times n$, avec a élément de $\mathbb{R}$.

43 Noter x le nombre de jours pendant lesquels le planteur loue la machine.
Déterminer, en fonction de x, le prix à payer pour chaque tarif.

Leçon 7

STATISTIQUE



En Côte d'Ivoire, le climat est tropical, avec une saison sèche de décembre à février et une saison des pluies d'avril à octobre, en raison de la mousson africaine. Le long de la côte, les pluies sont assez abondantes également en mars et novembre, et même en décembre sur la partie la plus occidentale (v. San Pedro, Grand-Bassam).
Les précipitations sont plus abondantes sur la côte, où elles vont de 1 500 à 2 500 millimètres par an, tandis que dans les zones intérieures elles sont généralement moins intenses et vont de 1 200 à 1 500 mm, même si elles touchent les 2 000 mm dans la petite zone montagneuse occidentale.

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Un professeur des Sciences de la Vie et de la Terre (SVT) demande à ses élèves de faire des recherches sur internet et sur le terrain afin de déterminer la période de l'année favorable à la culture de riz dans leur région (pour bien pousser, le riz a besoin d'une grande pluviométrie).
Après leurs recherches, le professeur a regroupé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Jui	Jul	Août	Sep	Oct	Nov	Déc
Précipitations (mm)	12	5	7	14	258	350	321	185	100	58	20	7

Le jour du cours, aucun élève ne reconnaît les chiffres de la précipitation présentés par le tableau du professeur. Le professeur tente de donner une explication aux élèves en leur disant qu'ayant reçu beaucoup de tableaux, il a été obligé de faire une moyenne des données. Les élèves décident d'apprendre à calculer les moyennes.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Série chronologique

- Connaître la définition d'une série chronologique
- Représenter une série chronologique à l'aide d'un diagramme à bandes
- Représenter une série chronologique à l'aide d'un polygone des effectifs
- Interpréter une série chronologique

2 Moyenne d'une série statistique

- Définir la moyenne d'une série statistique
- Calculer une moyenne à partir d'un tableau d'effectifs

3 Effectifs cumulés décroissants

- Définir l'effectif cumulé décroissant
- Calculer des effectifs cumulés décroissants d'une série statistique
- Dresser un tableau des effectifs cumulés décroissants
- Construire le polygone des effectifs cumulés décroissants à partir d'un tableau d'effectifs
- Interpréter un effectif cumulé décroissant d'une modalité

4 Fréquences cumulées décroissantes

- Définir la fréquence cumulée décroissante.
- Calculer des fréquences cumulées décroissantes d'une série statistique
- Dresser un tableau des fréquences cumulées décroissantes
- Interpréter une fréquence cumulée décroissante d'une modalité
- Construire le polygone des fréquences cumulées décroissantes d'une série statistique

5 Médiane d'une série statistique

- Définir la médiane d'une série statistique
- Calculer la médiane d'une série statistique
- Déterminer graphiquement la médiane d'une série statistique
- Interpréter la médiane d'une série statistique

6 Traitement de situation

- Traiter une situation faisant appel à la statistique

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Série Chronologique

Le tableau suivant indique la hauteur de pluie à Abidjan en l'an 2000.

Mois	Jan	Fev	Mar	Avr	Mai	Jui	Juil	Aout	Sep	Oct	Nov	Déc
Précipitation (mm)	15	55	120	145	235	375	135	50	110	150	110	45

1. Donne le mois où la pluie est abondante.
2. Détermine les périodes auxquelles ces mesures sont faibles.

Synthèse

Les précipitations ont été relevées chaque mois.
Une suite de valeurs numériques représentant l'évolution d'un même phénomène au cours du temps est appelée série chronologique.

Exercices de fixation

1-1 Parmi les tableaux ci-dessous, indique celui qui représente le tableau d'une série chronologique.

Tableau 1

Articles	Paires de chaussures	Ceintures	Pantalons	Chemises
Nombre d'articles vendus	34	20	14	44

Tableau 2

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai
Quantités	48	2145	10	1000	1785

Tableau 3

Salaires	150 000	210 000	250 000	300 000
Nombre de fonctionnaires	25	20	22	45

1-2 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. Une série chronologique est une série dont les modalités sont des mois.
2. Une série chronologique est une série dont les modalités sont uniquement des jours.
3. Une série chronologique est une série dont les modalités sont les données d'une suite de mesures faites sur une variable au cours du temps.

1-3 On donne le tableau suivant :

Années	2005	2008	2011	2014	2017	2020
Effectifs	542	512	480	435	400	365

1. Donne les modalités de cette série.
2. Justifie que cette série est une série chronologique.

Activité 2 Moyenne d'une série statistique

Dans le tableau suivant, figurent les notes sur 20 obtenues en maths par trois élèves A et B au deuxième trimestre d'une année scolaire.

Notes	5	7	8	9	10	12	13	14	15	18	Total
Nombres (pour A)	1	1	2	1	3	1	2	1	2	1	15
Nombres (pour B)	1	1	2	2	1	3	1	2	1	1	15

Calcule la moyenne trimestrielle de chacun des deux élèves.

Synthèse

Pour obtenir les moyennes, il faut multiplier chaque note par son effectif, puis faire la somme de tous ces produits, enfin diviser cette somme par l'effectif total.

Exercices de fixation

2-1

Modalités	X	Y	Z	T	U	Total
Effectifs	m	n	p	q	r	N

Écris la formule qui permet de calculer la moyenne de cette série statistique à caractère quantitatif.

2-2 La répartition des salaires des travailleurs d'une société est donnée dans le tableau suivant :

Salaires (F CFA)	100 000	150 000	200 000	250 000
Nombre d'Agents	25	16	6	3

Le salaire moyen dans cette entreprise est : a) 127 000 ; b) 137 000 ; c) 147 000 ; d) 150 000.
Choisis la bonne réponse.

2-3 Le tableau suivant présente les tailles des dix joueurs de basket de l'équipe d'un lycée.

Élèves	Yao	Kouassi	Djè	Soro	Djédjé	Guéi	Koua	Karim	Dié	Sylla
Tailles (en cm)	189	201	175	200	198	182	194	200	187	190

Calcule la taille moyenne des joueurs de l'équipe de basket de ce lycée.

Activité 3 Effectifs cumulés décroissants

3.1. Effectifs cumulés décroissants

Un aviculteur a relevé les masses en grammes des œufs de poule de sa ferme un matin. Il a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant.

Masses	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Effectifs	18	23	72	130	281	210	165	61	21	12	7

1. Détermine le nombre d'œufs qui ont une masse supérieure ou égale à 75 g.
2. Détermine le nombre d'œufs qui ont une masse supérieure ou égale à 50 g.

Synthèse

Le nombre d'œufs qui ont une masse supérieure ou égale à 75 g est appelé effectif cumulé décroissant de 75.
Le nombre d'œufs qui ont une masse supérieure ou égale à 50 g est appelé effectif cumulé décroissant de 50.

Exercices de fixation

3-1-1 On donne les séries suivantes :
Série 1 : 1 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 7 ; 8.
Série 2 : 0 ; 5 ; 7 ; 16 ; 17 ; 14 ; 13 ; 15 ; 5 ; 2.

1. Détermine l'effectif cumulé décroissant de 4 dans la série 1.
2. Détermine l'effectif cumulé décroissant de 15 dans la série 2.

3-1-2 Les masses en kilogrammes de 15 élèves d'un lycée qui se sont rendus à l'infirmerie un jour donné sont les suivantes.
60 ; 45 ; 55 ; 70 ; 80 ; 65 ; 50 ; 62 ; 75 ; 58 ; 69 ; 82 ; 77 ; 90 ; 85.
Détermine l'effectif cumulé croissant de 70. Donne une interprétation du résultat obtenu.

3-1-3 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. L'effectif cumulé décroissant d'une modalité est inférieur à l'effectif de cette modalité.
2. L'effectif cumulé décroissant d'une modalité est supérieur ou égal à l'effectif de cette modalité.
3. L'effectif cumulé décroissant de la première modalité est égal à l'effectif total.
4. L'effectif cumulé décroissant de la dernière modalité est égal à l'effectif total.
5. L'effectif cumulé décroissant de la première modalité est égal à l'effectif de la première modalité.
6. L'effectif cumulé décroissant de la dernière modalité est égal à l'effectif de la dernière modalité.

3-1-4 1. On donne la série statistique suivante les âges des élèves d'une école primaire.

Âges	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	18	32	66	41	32	9	2

a) Détermine l'effectif cumulé décroissant de 6.
b) Détermine l'effectif cumulé décroissant de 10. Donne une interprétation du résultat obtenu.

2. On donne la série statistique suivante représentant les hauteurs des maisons et immeubles d'un quartier.

Modalités	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
Effectifs	3	7	5	6	4

a) Détermine l'effectif cumulé décroissant de la classe [5 ; 10[. Donne une interprétation du résultat obtenu.
b) Détermine l'effectif cumulé décroissant de la classe [20 ; 25[.

3.2. Tableau des effectifs cumulés décroissants

Le tableau suivant donne les notes obtenues par les élèves d'une classe de 2nde A à une interrogation écrite de Mathématiques notée sur 10.

Notes	02	03	04	05	06	07	08	10
Effectifs	3	5	5	7	4	6	7	3

Recopie et complète le tableau suivant en remplissant la dernière ligne.

Notes	02	03	04	05	06	07	08	10
Effectifs	3	5	5	7	4	6	7	3
Effectifs cumulés décroissants								

Synthèse

Le tableau obtenu après remplissage s'appelle le tableau des effectifs cumulés décroissants de la série statistique.

Exercices de fixation

3-2-1 Parmi les trois tableaux suivants, indique celui dont le calcul des effectifs cumulés décroissants est juste.

Tableau 1

Modalités	13	14	15	16
Effectifs	4	10	15	20
Effectifs cumulés décroissants	4	14	29	49

Tableau 2

Modalités	13	14	15	16
Effectifs	4	10	15	20
Effectifs cumulés décroissants	52	140	225	300

Tableau 3

Modalités	13	14	15	16
Effectifs	4	10	15	20
Effectifs cumulés décroissants	49	45	35	20

3-2-2 En sortie de fabrication, on choisit 100 plaquettes de chocolat au hasard et on les pèse (les masses sont en grammes). On obtient le tableau suivant :

Masses	320	330	340	350	360	370	380
Effectifs	2	3	20	25	22	20	8

Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série.

3-2-3 Les tailles en centimètre des jeunes plants d'une pépinière de cacao sont données dans le tableau suivant.

Tailles	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectifs	125	97	65	50	36

Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série.

3.3. Polygone des effectifs cumulés décroissants

Le tableau suivant donne les tailles en centimètre de 50 élèves d'une classe de 2nde A.

Tailles	[145 ; 150[	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170]
Effectifs	7	8	12	18	5
Effectifs cumulés décroissants	50	43	35	23	5

Le plan est muni d'un repère orthogonal. (On prendra 1 cm pour 5 ans sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 élèves sur l'axe des ordonnées).
Place chacun des points ayant pour abscisse la borne inférieure de chaque classe et pour ordonnée l'effectif cumulé décroissant correspondant.
Place le point d'abscisse 170 et d'ordonnée 0.
Trace les segments qui relient chaque point au suivant en partant du point de coordonnées (148 ; 50).



Synthèse

Dans chacune des questions, la ligne brisee obtenue s'appelle le polygone des effectifs cumulés décroissants de la série statistique.

Exercice de fixation

Les tailles des élèves d'un lycée sont résumées dans le tableau suivant :

Tailles (en cm)	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 180[	[180 ; 190[	[190 ; 200[	[200 ; 210[
Effectifs	34	42	80	59	50	35

Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants de cette série.

Activité 4 Fréquence cumulée décroissante

4.1. Fréquence cumulée décroissante

Un aviculteur a relevé les masses en grammes des œufs de poule de sa ferme un matin. Il a obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant.

Masses	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Effectifs	18	23	72	130	281	210	165	61	21	12	7

1. Détermine la fréquence en pourcentage d'œufs qui ont une masse supérieure ou égale à 60 g.
2. Détermine la fréquence en pourcentage d'œufs qui ont une masse supérieure ou égale à 80 g.



Synthèse

La fréquence en pourcentage d'œufs qui ont une masse supérieure ou égale à 60 g est appelée la fréquence cumulée décroissante de la modalité 60.
La fréquence en pourcentage d'œufs qui ont une masse supérieure ou égale à 80 g est appelée la fréquence cumulée décroissante de la modalité 80.

Exercices de fixation

4-1-1 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. La fréquence cumulée décroissante d'une modalité est inférieure à la fréquence de cette modalité.
2. La fréquence cumulée décroissante d'une modalité est supérieure ou égale à la fréquence de cette modalité.
3. La fréquence cumulée décroissante de la première modalité est égale à 1.
4. La fréquence cumulée décroissante de la dernière modalité est égale à 1.

4-1-2 On considère la série statistique suivante :

Modalités	−8	−2	0	4	13	16	Total
Effectifs	12	10	15	11	6	23	77
Fréquences	$\frac{12}{77}$	$\frac{10}{77}$	$\frac{15}{77}$	$\frac{11}{77}$	$\frac{6}{77}$	$\frac{23}{77}$	1

Écris le numéro de la ligne et la lettre de la réponse juste.

N°	Affirmations	Réponses			
		A	B	C	D
1	La fréquence cumulée décroissante de −8 est	1	$\frac{12}{77}$	$\frac{23}{77}$	$\frac{65}{77}$
2	La fréquence cumulée décroissante de −2 est	$\frac{10}{77}$	$\frac{65}{77}$	$\frac{6}{77}$	1
3	La fréquence cumulée décroissante de 13 est	$\frac{6}{77}$	$\frac{29}{77}$	$\frac{48}{77}$	$\frac{54}{77}$
4	La fréquence cumulée décroissante de 16 est	$\frac{23}{77}$	$\frac{54}{77}$	1	$\frac{47}{77}$

4-1-3 Le tableau suivant résume une étude portant sur le nombre d'années passées par des élèves dans un lycée.

Nombre d'années	1	2	3	4	5	6
Fréquences (en %)	5,4	12,1	21,9	27,6	18,6	14,4

1. Détermine la fréquence cumulée décroissante de 2.
2. Détermine la fréquence cumulée décroissante de 4. Donne une interprétation du résultat.

4-1-4 Voici la répartition des salaires mensuels (en milliers de F CFA) dans une entreprise.

Salaires	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Fréquences	0,25	0,284	0,296	0,14	0,03

1. Détermine la fréquence cumulée décroissante de la classe [10 ; 20[.
2. Détermine la fréquence cumulée décroissante de la classe [30 ; 40[.
   Donne une interprétation du résultat.

4.2. Tableau des fréquences cumulées décroissantes

On a lancé 200 fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Les résultats ont permis d'obtenir le tableau ci-dessous.

Numéros	1	2	3	4	5	6
Fréquences	0,15	0,2	0,1875	0,1	0,225	0,1375

Recopie et complète le tableau suivant.

Numéros	1	2	3	4	5	6
Fréquences	0,15	0,2	0,1875	0,1	0,225	0,1375
Fréquences cumulées décroissantes						

Synthèse

Le tableau obtenu après remplissage s'appelle le tableau des fréquences cumulées décroissantes de la série statistique.

Exercices de fixation

4-2-1 Le tableau suivant résume une étude portant sur le nombre d'années passées par des élèves dans un lycée.

Nombre d'années	1	2	3	4	5	6
Fréquences (en %)	5,4	12,1	21,9	27,6	18,6	14,4

Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes de cette série.

4-2-2 Voici la répartition des salaires mensuels (en milliers de F CFA) dans une entreprise.

Salaires	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Fréquences	0,25	0,284	0,296	0,14	0,03

Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes de cette série.

4.3. Polygone des fréquences cumulées décroissantes

Il a été demandé à des élèves d'un lycée d'estimer la quantité d'eau qu'ils boivent par jour en cochant une des cases prévues à cet effet. Les cinquante élèves interrogés ont donné des réponses qui ont permis de compléter le tableau suivant :

Quantités d'eau (en L)	[0 ; 0,5[	[0,5 ; 1[	[1 ; 1,5[	[1,5 ; 2[	[2 ; 2,5[	[2,5 ; 3[
Fréquences	0,16	0,38	0,20	0,12	0,08	0,06
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,84	0,46	0,26	0,14	0,06

Le plan est muni d'un repère orthogonal. (On prendra 2 cm pour 1 L sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,1 sur l'axe des ordonnées)
Place chacun des points ayant pour abscisse la borne inférieure de chaque classe et pour ordonnée la fréquence cumulée décroissante correspondante.
Place le point d'abscisse 3 et d'ordonnée 0.
Trace les segments qui relient chaque point au suivant en partant du point de coordonnées (0 ; 1).

Synthèse

La ligne brisée obtenue s'appelle le polygone des fréquences cumulées décroissantes de la série.

Exercice de fixation

On donne la série statistique suivante :

Classes	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75]
Fréquences (en %)	2,6	19	21,6	35,8	18,4	2,6
Fréquences cumulées décroissantes	100	97,4	78,4	56,8	21	2,6

Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes de cette série.

Activité 5 Médiane d'une série statistique à caractère continu

Le tableau suivant donne le nombre d'heures de voyages effectués par des touristes en un mois.

Nombre d'heures	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
Effectifs	4	14	20	12	4	6

On donne le tableau ci-dessous :

Nombre d'heures	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
Effectifs	13	20	27	18	12	10
Effectifs cumulés décroissants	100	87	67	40	22	10
Fréquences cumulées croissantes	1	0,87	0,67	0,4	0,22	0,1

1. Dans quelle classe se trouve la médiane ?
2. On muni le plan d'un repère orthogonal.
On prendra 1cm pour 5 h en abscisse et 1 cm pour 10 voyages en ordonnées.
a) Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants.
b) Détermine graphiquement l'abscisse du point de ce polygone dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total.



c) On suppose que la répartition est homogène à l'intérieur de chaque intervalle.
On note Me la médiane.
Soit A(10 ; 67) et B(15 ; 40) les extrémités du segment contenant le point P(M_e ; 50).
Détermine M_e en utilisant le fait que les droites (AB) et (AP) ont le même coefficient directeur.

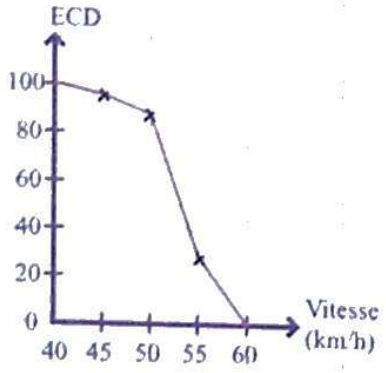
3. On muni le plan d'un repère orthogonal.
On prendra 1cm pour 5 h en abscisse et 1 cm pour 0,1 en ordonnées.
a) Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes.
b) Détermine graphiquement l'abscisse du point de ce polygone dont l'ordonnée est 0,5.
c) On suppose que la répartition est homogène à l'intérieur de chaque intervalle.
On note M_e la médiane.
Soit E(10 ; 0,67) et F(15 ; 0,40) les extrémités du segment contenant le point Q(M_e ; 0,5).
Détermine M_e en utilisant le fait que les droites (EF) et (EQ) ont le même coefficient directeur.

Synthèse

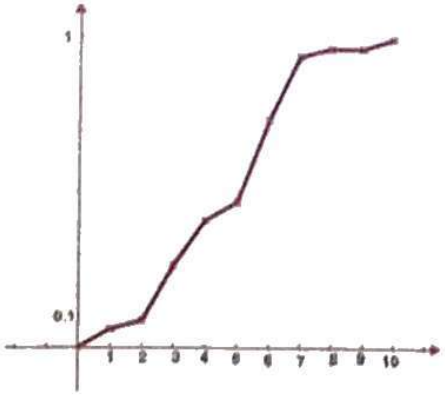
- La médiane est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés décroissants dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total.
- La médiane est l'abscisse du point du polygone des fréquences cumulées décroissantes dont l'ordonnée est 0,5.
- Dans les questions 2.c) et 3.c), la médiane a été déterminée par le calcul.
Cette méthode s'appelle « détermination de la médiane par interpolation linéaire ».

Exercices de fixation

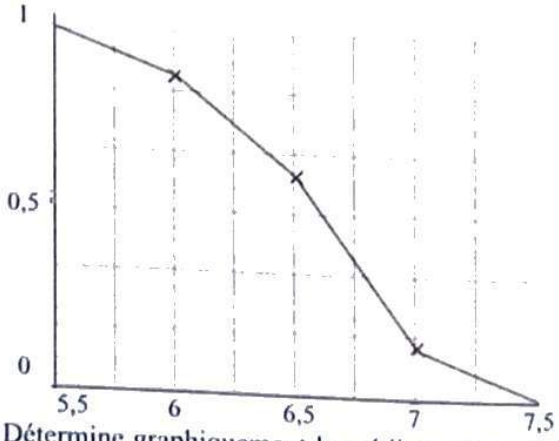
5-1 1. Détermine graphiquement la médiane de la série statistique dont le polygone des effectifs cumulés décroissants est donné ci-dessous.



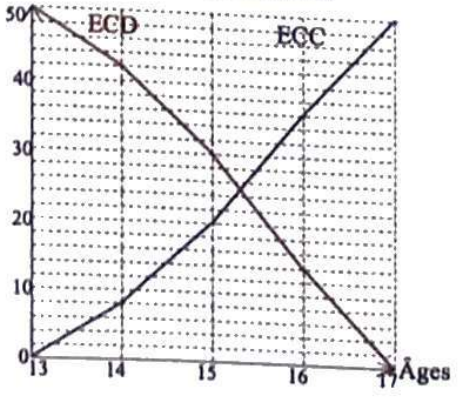
2. Détermine graphiquement la médiane de la série statistique dont le polygone des fréquences cumulées croissantes est donné ci-dessous.



3. Détermine graphiquement la médiane de la série statistique dont le polygone des fréquences cumulées décroissantes est donné ci-dessous.



4. Détermine graphiquement la médiane de la série statistique dont le polygone des effectifs cumulés décroissants est donné ci-dessous.



5-2 Une compagnie de taxis basée à Abidjan s'intéresse au kilométrage effectué par ses véhicules. Le tableau suivant donne le kilométrage de 50 de ses taxis pour une matinée de travail.

Classes (en km)	]10 ; 20]	]20 ; 30]	]30 ; 40]	]40 ; 60]	]60 ; 90]	]90 ; 130]
Nombre de taxis	7	10	20	6	3	4

1. Détermine la médiane de cette série par le calcul.
2. Donne une interprétation de ce résultat.

5-3 On donne ci-dessous la répartition du personnel d'un hôpital selon leur ancienneté :

Anciennetés (ans)	[0 ; 5[	[5 ; 15 [	[15 ; 20 [	[20 ; 30 [	[30 ; 35[	[35 ; 40 [
Fréquences	0,105	0,15	0,255	0,3	0,1	0,09

1. Détermine la médiane de cette série par le calcul.
2. Donne une interprétation de ce résultat.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

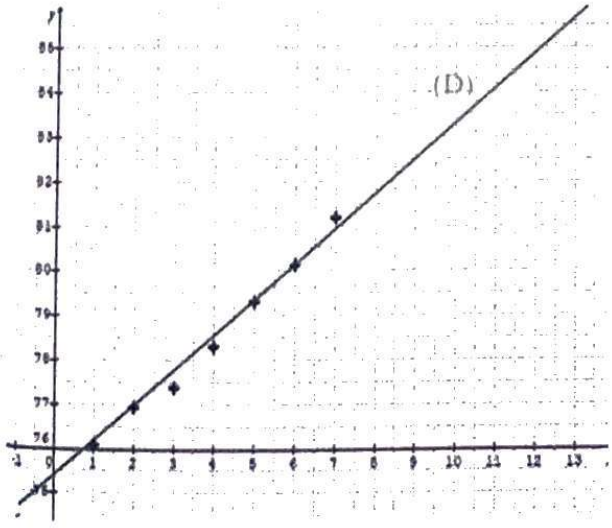
Exercice

Exemple d'application de série statistique chronologique.
Le taux de souscription à une mutuelle depuis l'année 2011 est donné par le tableau ci-contre.

Années	Rang de l'année x_i	Taux de souscription y_i (%)
2011	1	76,10
2012	2	76,95
2013	3	77,38
2014	4	78,18
2015	5	79,31
2016	6	80,15
2017	7	81,20

1. Représente cette série chronologique en vert (unité graphique : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour un taux de 1% sur l'axe des ordonnées).
2. On admet que la représentation graphique de la série chronologique est une droite (D) d'équation : $y = 0{,}79x + 75{,}4$. Trace en vert cette droite dans le même plan que le graphe précédent.
3. On suppose que la tendance ne change pas.
   a) Donne une estimation du taux de souscription pour l'année 2018 (on utilisera l'équation de (D)).
   b) Précise l'année à partir de laquelle on peut prévoir un taux de souscription supérieur à 82,5% si la tendance ne change pas.

Corrigé



Méthode

2. Trouver les coordonnées des deux points de la droite.
3. b) Résoudre une équation du premier degré.

1. Voir la courbe ci-contre en vert.
2. Voir la courbe ci-contre en rouge.
3. a) En 2018 l'estimation du taux de souscription est 81,10.
   b) Pour un taux de souscription supérieur à 82,5% cela sera à partir de l'année 2019.

Résumé de cours

1 Série Chronologique

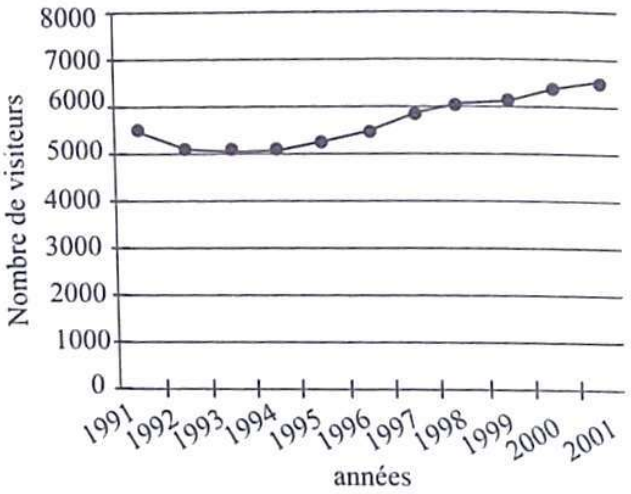
Définition Une série chronologique est une suite de valeurs numériques représentant l'évolution d'un même phénomène au cours du temps.

Exemple 1

Le tableau suivant donne le nombre de visiteurs d'un musée sur 10 ans.

Années	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Nombre de visiteurs	5402	5061	5069	5106	5308	5413	5875	6109	6237	6542	6728

La représentation graphique de cette série chronologique est donnée ci-contre (en abscisse les années et en ordonnées le nombre de visiteurs).



Exemple 2

Une entreprise de vente de Smartphones présente ses résultats des huit dernières années dans le tableau suivant :

Années	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre de ventes	6 900	9305	11250	14990	12050	15945	17000

Ce tableau donne une vente périodique de vente de produits. Il peut être exploité afin de prévoir les futures ventes et de prendre des dispositions pour ne pas être en rupture ou faire une surproduction.

2 Moyenne d'une série statistique

Définition La moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif discret est la somme de toutes les valeurs de cette série divisée par l'effectif total.

Exemple

Les notes obtenues par des élèves d'une classe de Seconde A à un devoir de maths sont résumées dans le tableau suivant :

Notes	5	7	8	9	10	12	13	14	15	18	Total
Nombre d'élèves	5	6	4	3	10	3	5	6	2	1	45

La moyenne de cette classe à ce devoir est :

$$\frac{5\times5+7\times6+8\times4+9\times3+10\times10+12\times3+13\times5+14\times6+15\times2+18\times1}{45}=\frac{459}{45}$$

$$=10{,}2$$

Remarque : Lorsque les modalités sont des classes, on utilise les centres des classes comme modalité.

3 Effectifs cumulés décroissants.

Définition On considère une série statistique à caractère quantitatif.
L'effectif cumulé décroissant d'une modalité x est la somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à x.

Exemple

On considère la série statistique à caractère quantitatif donnée par le tableau d'effectifs suivant.
Les effectifs cumulés décroissants sont donnés à la dernière ligne.

Modalités	6	8	9	10	11	13	14	16	17
Effectifs	7	8	12	13	3	19	1	14	7
Effectifs cumulés décroissants	90	83	75	63	50	41	22	21	7

Méthode de calcul des effectifs cumulés décroissants

On part de l'effectif de la dernière modalité pour revenir à la première modalité en suivant les flèches.

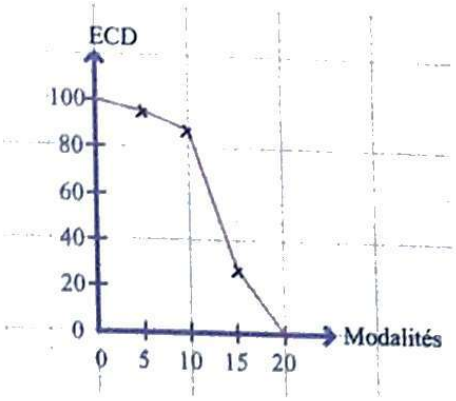
Modalités	6	8	9	10	11	13	14	16	17
Effectifs	7	8	12	13	9	19	1	14	7
Opérations	83 + 7	75 + 8	63 + 12	50 + 13	41 + 9	22 + 19	21 + 1	7 + 14	7
Effectifs cumulés décroissants	90	83	75	63	50	41	22	21	7

- L'effectif cumulé décroissant de la dernière modalité est égal à son effectif.
- L'effectif cumulé décroissant de la première modalité est égal à l'effectif total de la série statistique étudiée.

Polygone des effectifs cumulés décroissants

Le polygone des effectifs cumulés décroissants est la ligne obtenue en joignant les points dont l'abscisse est la borne inférieure de chaque classe et dont l'ordonnée est l'effectif cumulé décroissant correspondant.

Le dernier point est placé sur l'axe des abscisses et a pour abscisse la borne supérieure de la dernière classe.



4 Fréquences cumulées décroissantes

Définition d'une fréquence

Définition On appelle fréquence d'une modalité, le quotient de l'effectif de la modalité par l'effectif total.

$$\text{Fréquence d'une modalité} = \frac{\textit{effectif de la modalité}}{\textit{effectif total}}$$

Résumé de cours

Définition d'une fréquence cumulée décroissante

Définition On considère une série statistique à caractère quantitatif.
La fréquence cumulée décroissante d'une modalité x est la somme des fréquences des modalités supérieures ou égales à x.

La fréquence cumulée décroissante d'une modalité x est aussi le quotient de l'effectif cumulé décroissant de la modalité x par l'effectif total.

Exemple

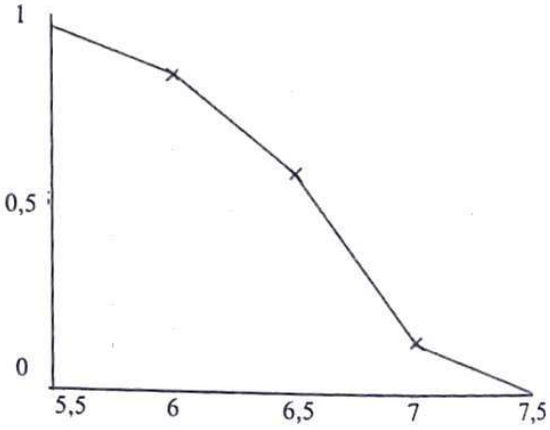
Âges	13	14	15	16
Effectifs	4	10	16	20
Fréquences	0,08	0,20	0,32	0,40
Fréquences cumulées croissantes	0,08	0,28	0,60	1
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,92	0,72	0,40

On peut exprimer aussi les fréquences en pourcentage (%).

Polygone des fréquences cumulées décroissantes

Le polygone des fréquences cumulées décroissantes est la ligne obtenue en joignant les points dont l'abscisse est la borne inférieure de chaque classe et dont l'ordonnée est la fréquence cumulée décroissante correspondante.

Le dernier point est placé sur l'axe des abscisses et a pour abscisse la borne supérieure de la dernière classe.



5 Médiane d'une série statistique

Définition La médiane d'une série statistique ordonnée en valeurs croissantes est tout nombre qui partage la population étudiée en deux groupes de même effectif.
Un groupe contient les valeurs inférieures ou égales à la médiane. L'autre groupe contient les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

Détermination d'une médiane

• Cas d'une série statistique à variable discrète

Pour déterminer la médiane d'une série statistique de N valeurs :
On range les valeurs de la série par ordre croissant ;
Si l'effectif total est impair, la médiane est alors la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$ de la série ordonnée ;
Si l'effectif total N est pair, on choisit pour médiane la moyenne des valeurs de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$ de la série ordonnée.

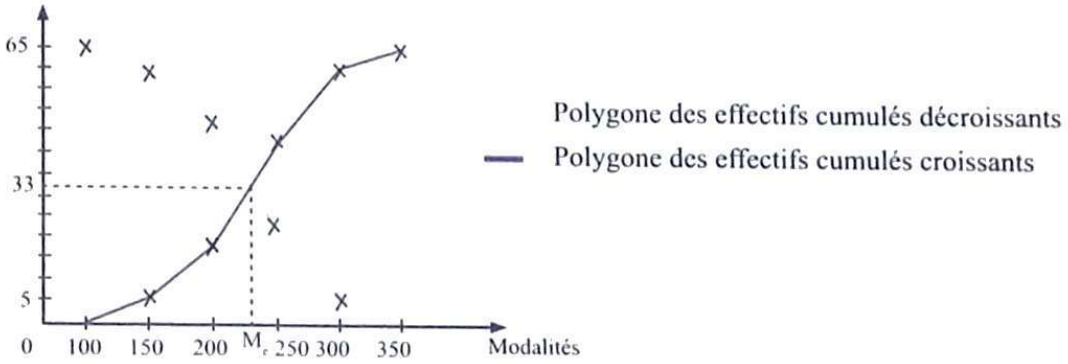
• Cas d'une série statistique à variable continue

Détermination graphique :

La médiane est l'abscisse du point :

- soit du polygone des effectifs cumulés croissants dont l'ordonnée est $\frac{N}{2}$;
- soit du polygone des effectifs cumulés décroissants dont l'ordonnée est $\frac{N}{2}$;
- soit du polygone des fréquences cumulées croissantes dont l'ordonnée est 0,5 (ou 50 si les fréquences sont en pourcentage) ;
- soit du polygone des fréquences cumulées décroissantes dont l'ordonnée est 0,5 (ou 50 si les fréquences sont en pourcentage) ;
- soit d'intersection du polygone des effectifs cumulés croissants et du polygone des effectifs cumulés décroissants.
- soit d'intersection du polygone des fréquences cumulées croissantes et du polygone des fréquences cumulées décroissantes.

Exemple



Détermination algébrique :

Si $[a\ ;\ b[$ est la classe dont l'effectif cumulé croissant (resp. fréquence cumulée croissante) est $\frac{N}{2}$ (resp. 0,5), alors la médiane le nombre Me tel que :

$\frac{d-c}{b-a} = \frac{\frac{N}{2}-c}{Me-a}\left(\text{resp. } \frac{d-c}{b-a} = \frac{0,5-c}{Me-a}\right)$ où d est l'effectif cumulé croissant (resp. fréquence cumulée croissante) de $[a\ ;\ b[$ et c celui (resp. celle) de l'intervalle qui précède $[a\ ;\ b[$.

Remarque

$\frac{d-c}{b-a} = \frac{\frac{N}{2}-c}{Me-a}$ équivaut à $\frac{Me-a}{b-a} = \frac{\frac{N}{2}-c}{d-c}$ et $\frac{d-c}{b-a} = \frac{0,5-c}{Me-a}$ équivaut à $\frac{Me-a}{b-a} = \frac{0,5-c}{d-c}$.

On utilise souvent la disposition pratique ci-contre pour écrire :

$\frac{d-c}{b-a} = \frac{\frac{N}{2}-c}{Me-a}\left(\text{resp. } \frac{d-c}{b-a} = \frac{0,5-c}{Me-a}\right)$.

a	M_e	b
c	$\frac{N}{2}$ (resp. 0,5)	d

Exemple

Déterminons la médiane de la série suivante

Notes	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20]
Effectifs	4	10	12	15	11	8
Effectifs cumulés croissants	4	14	26	41	52	60

L'effectif total est 60 et la moitié de 60 est 30, la médiane est ici la note correspondant à l'effectif cumulé 30.

Comme $26 < 30 < 41$, la médiane se trouve dans l'intervalle [10 ; 12[(appelée classe médiane).

10	M_e	12
26	30	41

$$\frac{Me - 10}{12 - 10} = \frac{30 - 26}{41 - 26}$$

$$\frac{Me - 10}{2} = \frac{4}{15}$$

$$Me - 10 = \frac{4}{15} \times 2$$

$$Me = 10 + \frac{4}{15} \times 2$$

$$Me \approx 10,53$$

La médiane est environ 10,53.

Interprétation : 50 % environ des élèves ont eu moins de 10,53 et 50 % ont eu plus de 10,53.

Exercices

Exercices de renforcement

1

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai
Précipitations (mm)	15	55	120	145	235

Jui	Juil	Août	Sep	Oct	Nov	Déc
375	135	50	110	150	110	45

1. Justifie pourquoi cette série statistique est une série chronologique.
2. Donne deux autres exemples de séries chronologiques.
3. Construis un diagramme à bandes de la série ci-dessus (on précisera une échelle pour le repère).

2 Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de séminaires organisés dans un grand hôtel de Grand-Bassam de 2000 (année 1) jusqu'année 2017 (année 8).

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4
Nombre de séminaires	22	25	28	31

5	6	7	8
34	37	40	43

Représente cette série chronologique dans un repère orthogonal tel que, 1 cm représente une année sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 2 séminaires sur l'axe des ordonnées. L'axe des ordonnées sera gradué à partir de 20.

3 Un professeur d'histoire présente le tableau suivant donnant la durée de vie moyenne des hommes dans un pays, de 1991 (année 1) à 2000 (année 10).

Année x_i	1991	1992	1993
Durée de vie en années	59,7	59,9	60,1

1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
60,2	60,2	60,4	60,2	61,2	61,4	61,5

Représente cette série chronologique dans un repère orthogonal.

4 On considère la série statistique suivante :

Modalités	1,2	1,5	1,7	1,9	2	2,6	3
Effectifs	4	16	18	24	20	12	6

Calcule la moyenne de cette série statistique.

5 Voici les âges (en années) des filles d'une classe de Seconde A d'un lycée :
19 – 21 – 14 – 20 – 20 – 17 – 17 – 21 – 19 – 15 – 15 – 16 – 18 – 14 – 14 – 13 – 13.
Dresse le tableau des effectifs de cette série.
Détermine l'âge moyen de ces filles.

6 Le tableau suivant donne le nombre de séminaires organisés dans un grand hôtel de Grand-Bassam de 2000 (année 1) jusqu'en 2017 (année 8).

Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4
Nombre de séminaires	22	25	28	31

5	6	7	8
34	37	40	43

Calcule le nombre moyen de séminaires organisés par an de 2000 à 2017.

7 Calcule la moyenne de chacune des séries statistiques suivantes.

Cas 1

Modalités	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	12	20	32	45	30	18	6

Cas 2

Modalités	−3	−2	0	1	3	4	7
Effectifs	5	15	20	15	5	2	1

Cas 3

Modalités	−15	−12	−7	−3	0	5	8
Effectifs	4	3	5	9	8	7	2

Cas 4

Modalités	2	2,1	2,3	2,5	2,8	3	4
Effectifs	5	7	8	10	8	2	2

8 Le responsable des cars de ramassage d'un collège a recensé le temps d'attente des élèves pour emprunter les cars chaque matin. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Temps d'attente (en min)	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[
Nombre d'ouvriers	15	18	30

[12 ; 16[	[16 ; 20]
33	19

Détermine le temps moyen d'attente de ces élèves.

9 La répartition des salaires journaliers en F CFA des ouvriers d'une exploitation agricole est indiquée dans le tableau suivant :

Salaires journaliers (en millier de francs)	[1 ; 1,2[	[1,2 ; 1,4[	[1,4 ; 1,6[
Nombre d'ouvriers	60	150	185

[1,6 ; 1,8[	[1,8 ; 2]
80	10

Calcule le salaire moyen journalier d'un ouvrier de cette exploitation agricole.

10 Une étude auprès des élèves d'un lycée sur le temps passé sur Internet pendant un week-end a permis d'établir le tableau suivant.

Temps (en min)	[5 ; 15[	[15 ; 25[	[25 ; 35[
Fréquences	0,04	0,17	0,32

[35 ; 45[	[45 ; 55[
0,33	0,14

1. Calcule la moyenne de cette série statistique.
2. Donne une interprétation de ce résultat.

11 Les notes obtenues par les élèves d'une classe de Secondes A à un devoir surveillé de maths sont transcrites dans le tableau suivant :

Notes	6	8	9	11	15	18
Effectifs	4	5	4	3	2	2
Effectifs cumulés décroissants						

Recopie ce tableau et remplie la dernière ligne.

12 On considère la série statistique donnée dans le tableau suivant :

Modalités	0	1	2	3	4	5	6
Effectifs	2	5	9	11	7	4	2

Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants.

13 Une étude auprès de 40 lycéens sur le temps qu'ils mettent chacun sur Facebook par jour a donné les résultats suivants :

Temps (en min)	0	15	30	45	60
Effectifs	4	12	6	10	8

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants.
2. Évalue le nombre d'élèves qui passent au moins une demie-heure par jour sur Facebook.

14 On considère la série statistique donnée dans le tableau suivant par ses modalités et ses effectifs cumulés décroissants.

Modalités	0	1	2	3	4	5	6
Effectifs cumulés décroissants	52	40	34	31	22	17	5
Effectifs							

Calcule l'effectif de chaque modalité.

15 On considère la série statistique donnée dans le tableau suivant par ses modalités et ses effectifs cumulés décroissants.

Modalités	1	2	3
Effectifs	10	14	15
Effectifs cumulés décroissants	70	60	46

4	5	6	7
9	11	5	6
31	22	11	5

Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants.

16 Le relevé des retraits effectués par les clients d'une agence bancaire en une demi-journée a donné les résultats portés dans le tableau suivant :

Montant des retraits (en millier de francs)	[0 ; 50[	[50 ; 100[
Nombre d'ouvriers	3	6

[100 ; 150[	[150 ; 200[	[200 ; 250]
40	8	5

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.
2. Interprète le nombre 53 dans ce tableau.

17 Une station-service a noté les achats de carburant pour une journée donnée.
Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Volume (en litres)	]0 ; 20]	]20 ; 40]	]40 ; 60]
Nombre de clients	155	264	313

]60 ; 80]	]80 ; 100]
243	25

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.

Exercices

18 On considère la série statistique donnée par le tableau d'effectifs suivant :

Modalités	0	1	2	3
Effectifs	8	14	12	1
Fréquences	$\frac{8}{60}$	$\frac{14}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{1}{60}$

4	5	6	7	Total
10	4	5	6	60
$\frac{10}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{6}{60}$	1

Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes.

19 Recopie et complète le tableau suivant.

Modalités	12	15	20	25
Effectifs	38	41	53	150
Effectifs cumulés décroissants	500	462	421	368
Fréquences cumulées décroissantes				

30	35	40	Total
95	72	51	500
218	123	51	

20 On considère la série statistique donnée par le tableau de fréquences cumulées suivant :

Modalités	3	4	5	6
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,95	0,87	0,64

7	5	9	10
0,57	0,39	0,27	0,10

Détermine la fréquence de chaque modalité.

21 On considère la série statistique donnée par le tableau de fréquences cumulées suivant :

Modalités	3	4	5	6	7
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,95	0,87	0,64	0,57

5	9	10	Total
0,39	0,27	0,10	1

Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes.

22 Lors d'un concours de pêche, on a relevé la taille approximative des carpes rapportées par les participants.

Tailles (en cm)	12	14	16
Nombre de carpes	5	7	4
Effectifs cumulés décroissants	88	83	76

18	20	22	24	26	28
8	16	15	18	10	5
72	64	48	33	15	5

1. Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes.
2. Détermine le pourcentage de carpe dont la taille est supérieure ou égale à 20 cm.
3. Interprète la fréquence cumulée décroissante de la taille 22 cm.

23 On considère la série statistique donnée par le tableau des fréquences suivant :

Modalités	2	5	8	10
Fréquences	4%	17%	12%	34%
Effectifs				

11	14	
28%	5%	Total
		900

Détermine l'effectif de chaque modalité de cette série statistique.

24 Durant une journée, un grand magasin de vente de pagnes a enregistré 45 ventes dont les montants, en milliers de francs, ont permis d'établir le tableau ci-dessous.

Montant	]0 ; 10]	]10 ; 20]	]20 ; 30]
Fréquences	0,03572	0,1	0,23571

1. Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.
2. Interprète le nombre 0,86428 dans ce tableau.

25 Lors d'une épreuve de course sur 400 m, les temps par les élèves d'un lycée ont permis d'établir le tableau suivant :

Temps mis (en s)	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[
Fréquences	0,135	0,185	0,28

[40 ; 50[	[50 ; 60]
0,23	0,17

1. Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.
2. Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.

26 Dans chaque cas, détermine la médiane de la série statistique.

a. 32 ; 21 ; 14 ; 40 ; 36 ; 21 ; 30 ; 15 ; 31 ; 32 ; 21 ; 12 ; 28.

b. 110 ; 99 ; 124 ; 150 ; 100 ; 111 ; 99 ; 132.

27 Chacun des deux tableaux représente une série statistique. Détermine la médiane de chaque série.

Cas 1

Modalités	2	4	5	7	10	3	11
Effectifs	5	7	8	10	8	2	2

Cas 2

Modalités	2	2,1	2,3	2,5	2,8	3	4
Effectifs	6	7	8	10	8	7	2

28 Le responsable des cars de ramassage d'un collège a recensé le temps d'attente des élèves pour emprunter les cars chaque matin. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Temps en (min)	3	6	9	12	15	18
Effectifs	15	18	30	20	13	19

1. Détermine le temps d'attente médian de ces élèves.
2. Interprète le résultat précédent.

29 Le tableau ci-dessous donne l'âge des professeurs d'un lycée.

Classes	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectifs	17	29	32	12

1. Détermine par le calcul, la médiane de cette série statistique.
2. Donne une interprétation de ce résultat.

30 Une étude auprès des élèves d'un lycée sur le temps passé sur internet pendant un week-end a permis d'établir le tableau suivant.

Temps (en min)	[5 ; 15[	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[
Fréquences	0,04	0,17	0,32	0,33	0,14

1. Détermine par le calcul, la médiane de cette série statistique.
2. Donne une interprétation de ce résultat.

31 Pour un jour donné, on a relevé les dépenses en millier de francs consacrées au repas de midi par 250 personnes dans un restaurant à Abidjan.

Montant des dépenses	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[
Effectifs	75	70	50	30	25

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.
3. Détermine graphiquement la médiane.

32 Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'un lycée en fonction de la durée du trajet domicile - lycée.

Durées (en min)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60]
Fréquences	0,18	0,22	0,15	0,2	0,15	0,1

1. Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.
2. Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes.
3. Détermine graphiquement la médiane.
Donne une interprétation de ce résultat.

Exercices d'approfondissement

33 On réalise une étude sur le nombre de téléviseurs par famille dans un immeuble. Les résultats sont les suivants :
1 ; 3 ; 5 ; 2 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 3 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 0 ; 1 ; 12 ; 3 ; 1 ; 2 ; 1.



1. Détermine la population étudiée.
2. Indique le caractère étudié et son type.
3. Donne l'effectif total.
4. Détermine l'effectif des familles ayant 3 téléviseurs.
5. Détermine l'effectif des familles ayant au moins 3 téléviseurs.
6. Calcule le pourcentage de famille ayant 3 téléviseurs.

Exercices

34 Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de séminaires organisés dans un grand hôtel de 2000 (année 1) jusqu'en 2017 (année 8).

Rang de l'année (x_i)	1	2	3
Nombre de séminaires	22	25	28

4	5	6	7	8
31	34	37	40	43

1. Représente cette série chronologique dans un repère orthogonal tel que, 1 cm représente une année sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 2 séminaires sur l'axe des ordonnées. L'axe des ordonnées sera gradué à partir de 20.
2. On admet que la fonction f donnant le nombre de séminaires en fonction du rang de l'année est définie par : $f(x) = 3x + 19$.
On note (D) la représentation graphique de f.
   a) Vérifie que les points A(3 ; 28) et B (8 ; 37) appartiennent à (D).
   b) Trace (D) sur le graphique précédent.
   c) En utilisant cette équation, donne une estimation du nombre de séminaires dans cet hôtel pour l'année 2020.

35 Un professeur d'histoire présente le tableau suivant donnant la durée de vie moyenne des hommes dans un pays, de 1991 (année 1) à 2000 (année 10).

Année x	1	2	3	4
Durée de vie en années	59,7	59,9	60,1	60,2

5	6	7	8	9	10
60,2	60,4	60,2	61,2	61,4	61,5

1. Représente graphiquement cette série chronologique en choisissant un repère convenable.
2. Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.
3. Interprète la médiane de cette série chronologique.

36 Voici les âges (en années) des filles d'une classe de Seconde A d'un lycée :
19 - 21 - 14 - 20 - 20 -17 - 17 - 21 - 19 - 15 - 15 - 16 - 18 - 14 -14 - 13 - 13.
1. Dresse le tableau des effectifs de cette série.
2. Détermine l'âge moyen de ces filles.
3. Détermine l'âge médian de ces filles.

37 Une étude auprès de 40 lycéens sur le temps qu'ils mettent chacun sur Facebook par jour a donné les résultats suivants :

Temps en (min)	0	15	30	45	60
Effectifs	4	12	6	10	8

1. Calcule le temps moyen que mettent ces élèves par jour sur Facebook.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants.
3. Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants.
4. Détermine graphiquement le temps médian que mettent ces élèves par jour sur Facebook.

38 Lors d'un concours de pêche, on a relevé la taille approximative des carpes rapportées par les participants au concours.

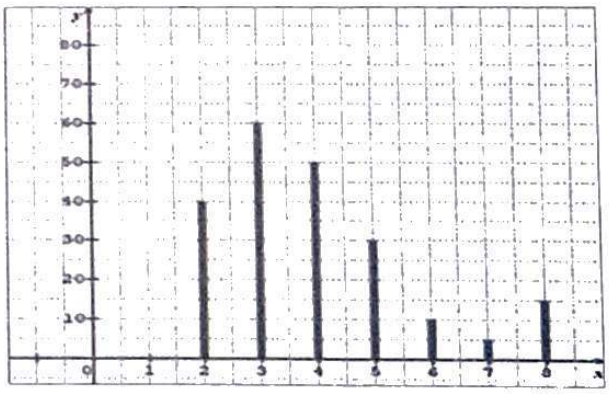


Tailles (en cm)	12	14	16	18
Nombre de carpes	5	7	4	8

20	22	24	26	28
16	15	18	10	5

1. Calcule l'effectif total de cette série statistique.
2. Calcule les fréquences cumulées décroissantes de toutes les valeurs du caractère étudié.
3. Trace la courbe des fréquences cumulées décroissantes.

39



1. Complète le tableau ci-dessous :

Modalités	2	3	4	5	6	7	8	Total
Effectifs								

2. Calcule les effectifs cumulés décroissants des modalités.
3. Calcule les fréquences cumulées décroissantes des modalités.
4. a) Calcule la moyenne de cette série statistique.
   b) Donne une interprétation du résultat précédent.
5. a) Calcule la médiane de cette série statistique.
   b) Donne une interprétation du résultat précédent.

40 Lors d'une étude sur les naissances dans un pays, on a relevé le nombre de naissances suivant l'âge des mères.

Âge des mères	Effectifs cumulés croissants (en milliers)	Effectifs (en milliers)
[15 ; 20[	35	
[20 ; 25[	275	
[25 ; 30[	555	
[30 ; 35[	735	
[35 ; 40[	815	
[40 ; 45[	840	
[45 ; 50[	850	

1. Recopie et complète le tableau.
2. Calcule la moyenne de cette série.
Donne l'interprétation du résultat.
3. Calcule la médiane de cette série.
Donne l'interprétation du résultat.
4. Détermine le pourcentage de mères dont l'âge est compris entre 20 et 40 ans.

41 Dans une ville touristique, les chambres d'hôtel sont réparties par catégories de prix.
Pour la journée du 31/12/2018, on a relevé le nombre de chambres louées et le nombre de chambres disponibles.

Catégories en milliers de francs	Chambres disponibles	Chambres louées	Chambres louées ECC*	Chambres louées ECD**
[10 ; 20[	400	225		
[20 ; 30[	500	436		
[30 ; 40[	1 000	826		
[40 ; 50[	300	162		
[50 ; 60[	200	72		
[60 ; 70[	100	27		

ECC* : Effectifs cumulés croissants ;
ECD** : Effectifs cumulés décroissants

1. a) Calcule le prix moyen d'une chambre disponible.
b) Calcule le prix moyen d'une chambre louée.
2. Calcule le taux d'occupation à l'unité près (Nombre de chambres louées divisé par nombre de chambres disponibles, multiplié par 100)
3. a) Recopie et complète le tableau.
b) Explique ce que représente le nombre 1487 dans la colonne des ECC.
c) Explique ce que représente le nombre 99 dans la colonne ECD.
4. a) Trace sur le même graphique le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
b) Déduis-en la valeur de la médiane.
Interprète le résultat.

42 On effectue une enquête dans cinquante magasins pour connaître le prix de vente d'un modèle d'ordinateur portable.
On obtient le tableau statistique suivant :



Prix de vente (en milliers de francs)	[200 ; 220[	[220 ; 240[	[240 ; 260[	[260 ; 280[	[280 ; 300[
Effectifs	8	12	21	3	6

1. Précise la population et le caractère.
2. Indique s'il s'agit d'un caractère qualitatif, quantitatif, discret ou continu.
3. Calcule la moyenne de cette série.
Donne l'interprétation du résultat.
4. a) Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.
b) Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.
c) Détermine graphiquement la médiane de cette série. Donne l'interprétation du résultat.

Situation d'évaluation

43 Un jeune fondateur d'école a noté le nombre des élèves inscrits dans son établissement pendant les 7 premières années de fonctionnement. Il a regroupé ces données dans le tableau suivant :

Années	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	102	121	140	171	190	199	221

Le jeune entrepreneur affirme que le nombre moyen d'inscrits par an est 171 élèves.
Son fils en Seconde A pense que le nombre donné par son père est plutôt la médiane.
Il pose le problème à ses camarades en classe.
Calcule la moyenne et la médiane de cette série statistique puis dis qui a raison.

Coup de Pouce

34 2. c) Déterminer le rang a de l'année 2020 puis calculer $f(a)$.

Leçon 8

SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$



Pour acheter 40 chaussures de deux types en gros avec un budget de 200 000 F, la commerçante résout un système d'équations.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un concours dénommé « Génies en herbe » est organisé dans un lycée entre les différents niveaux. Chaque équipe doit être composée de filles et de garçons. Le nombre de membres par équipe est 8. Le concours prévoit 12 questions pour une fille et 20 questions pour un garçon. Il y a autant de questions pour les filles que pour les garçons.

Pour connaître la composition de leur équipe, les élèves de la seconde A décident de résoudre un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Définition d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

- Définir un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

2 Résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par substitution

- Résoudre un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par substitution

3 Résolution de système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par combinaison

- Résoudre un système linéaire de deux équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par combinaison

4 Résolution graphique de système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

- Résoudre graphiquement un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

5 Traduction d'un problème de la vie courante à l'aide d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

- Traduire un problème de vie courante à l'aide d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

6 Traitement de situation

- Traiter une situation faisant appel aux systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activité 1 Définition d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Des élèves d'une classe de Seconde A veulent se constituer une petite bibliothèque de 15 livres de mathématiques et de français. Le livre de mathématiques au programme coûte 3 500 F et celui de français coûte 2 400 F. La collecte pour cette opération a donné 42 600 F.
Les élèves veulent déterminer le nombre de livres de mathématiques et le nombre de livres de français qu'ils peuvent acheter.
On note x le nombre de livres de mathématiques et y celui de français.

1. Traduis par une égalité que le nombre total de livres de la bibliothèque est 15.
2. a) Exprime le coût des livres de mathématiques à l'aide de x.
   b) Exprime le coût des livres de français à l'aide de y.
3. Donne deux égalités que x et y vérifie à la fois.

Synthèse

- **$x + y = 15$ et $3500x + 2400y = 42600$ sont des équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.**
- **Une équation linéaire dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels tels que $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$.**
- **$\begin{cases} x + y = 15 \\ 3500x + 2400y = 42600 \end{cases}$ est un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.**

Exercices de fixation

1-1 Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

a) $3x + 4y = 8$; b) $x^2 - 2y = 5$;

c) $\frac{-3}{x} + 5y = 2$; d) $-x + 2y + 4 = 0$.

1-2 Parmi les systèmes d'équations suivants, recopie ceux qui sont des systèmes de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - \sqrt{y} = 5 \\ -3x + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{-1}{x} + \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{1}{y} = -10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - y = \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 7y = 8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 12x = 12 \\ -3x + 3y = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 8 \\ \frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = \sqrt{5} \end{cases}$

1-3 On donne les nombres réels suivants : 4 ; x et y. Remplace les pointillés par les nombres ci-dessus pour obtenir un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$\begin{cases} 2..... - 7y = ... \\ 5x + 3..... = 12 \end{cases}$

Activité 2 Résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par substitution

La troupe théâtrale du Lycée a organisé une soirée artistique dans le centre culturel de la ville.
Le prix d'entrée pour les élèves était de 300 F et de 1 500 F pour les autres personnes.
Au total, 450 billets ont été vendus pour un montant de 345 000 F.
Le président de la troupe théâtrale veut savoir combien de billets de chaque catégorie ont été achetés.
On note X le nombre de billets achetés par les élèves et Y le nombre de billets achetés par les autres personnes.

1. Vérifie que le couple (X ;Y) est solution du système $\begin{cases} X + Y = 450 \\ 300X + 1500Y = 345000 \end{cases}$.

Méthode 1

2. a) Démontre que : $300X + 1\,500(450 - X) = 345\,000$.
   b) Déduis-en la valeur de X ; puis celle de Y.

Méthode 2

3. a) Démontre que : $450 - X = 230 - \frac{X}{5}$.
   b) Déduis la valeur de X ; puis celle de Y.

4. Détermine le nombre de billets de chaque type.

Synthèse

- La méthode utilisée dans la résolution du système est appelée méthode par substitution.
- Elle consiste à ramener une des équations du système à une équation dans $\mathbb{R}$.

Exercices de fixation

2-1 On donne le système suivant : $\begin{cases} x + 2y = 3 \ (1) \\ 2x + y = 1 \ (2) \end{cases}$

Deux méthodes de résolution te sont proposées. Indique celle qui est la résolution par substitution.

Méthode 1	Méthode 2
On multiplie les deux membres du (1) par -2. On obtient : $\begin{cases} -2x - 4y = -6 \ (1') \\ 2x + y = 1 \ (2) \end{cases}$ En additionnant les deux égalités membre à membre, on a : $-3y = -5$ $y = \frac{5}{3}$. Dans (2) on remplace y par $\frac{5}{3}$ et on obtient : $2x + \frac{5}{3} = 1$ $2x = 1 - \frac{5}{3}$ $2x = -\frac{2}{3}$ $x = -\frac{1}{3}$. Le couple $(-\frac{1}{3} ; \frac{5}{3})$ est solution du système.	Dans (1) on extrait x : $x = -2y + 3$. Dans (2) on remplace x par $-2y + 3$. On obtient : $2(-2y + 3) + y = 1$ $-3y + 6 = 1$ $-3y = -5$ $y = \frac{5}{3}$. Dans (2), on remplace y par $\frac{5}{3}$ et on obtient : $2x + \frac{5}{3} = 1$ $2x = 1 - \frac{5}{3}$ $2x = -\frac{2}{3}$ $x = -\frac{1}{3}$. Le couple $(-\frac{1}{3} ; \frac{5}{3})$ est solution du système.

2-2 Réordonne les étapes ci-dessous pour obtenir les étapes de résolution d'un système d'équations par la méthode de substitution.

a) Résous l'équation à une inconnue obtenue.
b) Détermine l'autre inconnue.
c) Exprime une des inconnues en fonction de l'autre à partir de l'équation choisie.
d) Remplace dans l'autre équation l'inconnue choisie.
e) Choisis une équation.
f) Remplace dans la première équation, la valeur de l'inconnue trouvée.

2-3 Résous par la méthode de substitution chacun des systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$.

2-4 Résous par la méthode de substitution chacun des systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ y = -x + 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$.

Activité 3 Résolution de système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par combinaison

Deux élèves de Seconde A ont chacun une somme de 1 000 F.
Pour le déjeuner, le premier élève dépense ses 1 000 F en achetant 3 gâteaux et 2 bouteilles de jus de fruits.
Le deuxième achète 4 gâteaux et une bouteille de jus de fruits et il lui reste 200 F.
Les gâteaux ont tous le même prix et les bouteilles de jus de fruits aussi.
Les autres élèves de la classe veulent connaître le prix d'un gâteau et le prix d'une bouteille de jus de fruits.

On note X le prix d'un gâteau et Y le prix d'une bouteille de jus de fruits.

1. Vérifie que le couple (X ; Y) est solution du système : $\begin{cases} 3X + 2Y = 1000 \\ 4X + Y = 800 \end{cases}$

2. En multipliant la deuxième équation par (-2) et en additionnant membre à membre, vérifie que : $-5X = -600$. Déduis-en la valeur de X.

3. En multipliant la première équation par (4), la deuxième équation par (-3) et en additionnant membre à membre, vérifie que $5Y = 1600$. Déduis la valeur de Y.

4. Donne le prix du gâteau et de la bouteille de jus de fruits.

Synthèse

- La méthode utilisée dans la résolution du système est appelée méthode par combinaison.
- Elle consiste à éliminer une des inconnues en additionnant membre à membre des équations équivalentes aux équations du système.

Exercices de fixation

3-1 Réordonne les étapes ci-dessous pour obtenir les étapes de résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de combinaison.

a) Choisir une inconnue.
b) Reprendre le processus en éliminant l'autre inconnue.
c) Additionner membre à membre les deux équations pour éliminer l'inconnue choisie.
d) Multiplier chaque équation par des nombres de sorte à obtenir des coefficients opposés.
e) Déterminer la valeur de l'autre inconnue.

3-2 Résous par la méthode de combinaison chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$.

3-3 Résous par la méthode de combinaison chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 349 \\ 2x + 4y = 158 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 10x + 9y = 30 \\ 11x + 10y = -15 \end{cases}$.

Activité 4 Résolution graphique de système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Deux amis veulent déterminer les deux nombres dont la somme vaut 15 et la différence 3.
On note x le plus grand et y le plus petit des deux nombres.

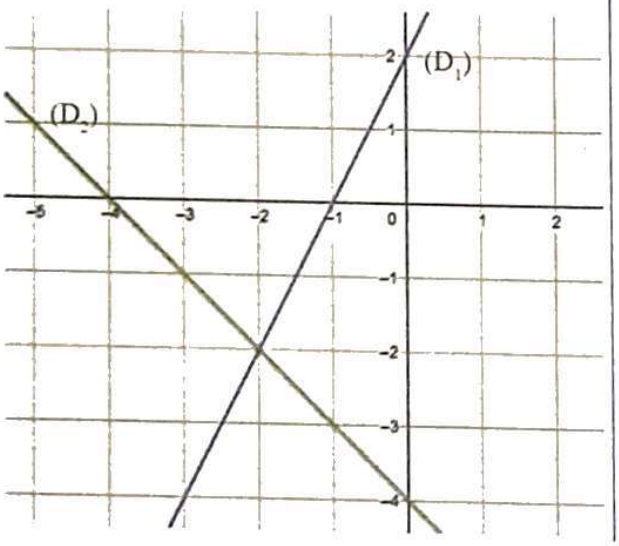
1. Justifie que les deux nombres cherchés vérifient le système suivant : $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$.
2. On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J).
   a) Trace la droite (D) d'équation : $x + y = 15$.
   b) Trace la droite (L) d'équation : $x - y = 3$.
   c) Détermine les coordonnées du point d'intersection des droites (D) et (L).
3. Résous le système précédent par la méthode de combinaison.
4. Compare les résultats trouvés aux questions 2. c) et 3).

Synthèse

- La méthode utilisée dans la résolution du système est appelée méthode graphique.
- Les équations du système sont des équations de droites.
- La méthode consiste à tracer ces droites et à lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection éventuel.

Exercices de fixation

4-1 On donne le graphique ci-dessous.
(D_1) est la droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ et
(D_2) est la droite d'équation $x + y + 4 = 0$.



Détermine graphiquement la solution du système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$.

4-2 Résous par la méthode graphique chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

4-3 Résous par la méthode graphique chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$.

Activité 5 Traduction d'un problème de la vie courante à l'aide d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Un boulanger a vendu à un premier client 3 croissants et 5 pains au chocolat à 1 900 F.
À un second client, le boulanger a vendu 4 croissants et 5 pains au chocolat de même type à 2 300 F.
Détermine le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat.

1. Note a le prix d'un croisant et b celui d'un pain au chocolat.
   a) Traduis à l'aide de a et b que 3 croissants et 5 pains au chocolat coûtent 1 900 F.
   b) Traduis à l'aide de a et b que 4 croissants et 5 pains au chocolat coûtent 2 300 F.
2. Donne le système dont une solution est le couple $(a ; b)$.
3. Résous le système obtenu.

Synthèse

Pour déterminer les prix recherchés, on a suivi la démarche suivante :

- on désigne respectivement par a et b le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat ;
- on traduit les données du problème par un système d'inconnues a et b ;
- on résout le système obtenu par une méthode au choix pour obtenir les prix.

Exercices de fixation

5-1 Le jardin rectangulaire d'un lycée a un périmètre de 220 m.
Sa largeur a 100 m de moins que sa longueur.
Donne les équations qui permettent de déterminer les dimensions du jardin.

5-2 Les élèves d'une classe de Seconde A décident de payer les médicaments de leur ami hospitalisé. Si chacun d'eux donne 600 F, il manque 350 F. Mais si chacun donne 700 F, ils ont 350 F en plus.
Le chef de classe veut savoir le coût des médicaments et le nombre d'élèves qui ont participé à cette opération de don.
1. Fais la mise en équation du problème.
2. Résous le système obtenu.
3. Donne la solution du problème.

5-3 20 élèves d'une classe de Seconde déjeunent ensemble. Ils décident que les filles prennent des plats de 1 200 F et les garçons des plats de 800 F. À la fin du repas, ils reçoivent une facture de 21 200 F.
Combien de filles et combien de garçons ont participé au repas.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Résoudre un système d'équations par la méthode de substitution

Résous par la méthode de substitution le système suivant : $\begin{cases} x + y = 21 \\ 20x + 50y = 750 \end{cases}$.

Corrigé

- $x + y = 21$ est l'équation du système la plus simple.
On a : $y = 21 - x$.
- En remplaçant dans la deuxième équation, on a :
$20x + 50(21 - x) = 750$
- On obtient : $20x - 50x = 750 - 1050$.
Donc $-30x = -300$. On trouve : $x = 10$.
- En utilisant la première équation, on trouve : $y = 11$.
- La solution du système est : (10 ; 11).

Méthode

Méthode de substitution

- Isoler une variable dans une des deux équations.
- Prendre l'autre équation et remplacer la variable isolée par son expression.
- Isoler la variable restante dans la deuxième équation.
- Remplacer la variable de l'étape 3 dans une des deux équations par la valeur trouvée.
- Vérifier que le couple trouvé est vraiment solution.

Exercice 2 Résoudre un système d'équations par la méthode de combinaison

Résous par la méthode de combinaison le système suivant : $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases}$.

Corrigé

- Éliminons x et calculons y.
En multipliant la première équation par 3 et la deuxième par –4, on obtient : $\begin{cases} 12x - 9y = 18 \\ -12x - 16y = -68 \end{cases}$.
En additionnant membre à membre, on obtient :
$-25y = -50$.
On trouve : $y = 2$.
- Éliminons y et calculons x.
En multipliant la première équation par 4 et la deuxième par 3, on obtient : $\begin{cases} 16x - 12y = 24 \\ 9x + 12y = 51 \end{cases}$.
En additionnant membre à membre, on obtient $25x = 75$.
On trouve : $x = 3$.
- La solution du système est (3 ; 2).

Méthode

Méthode de combinaison

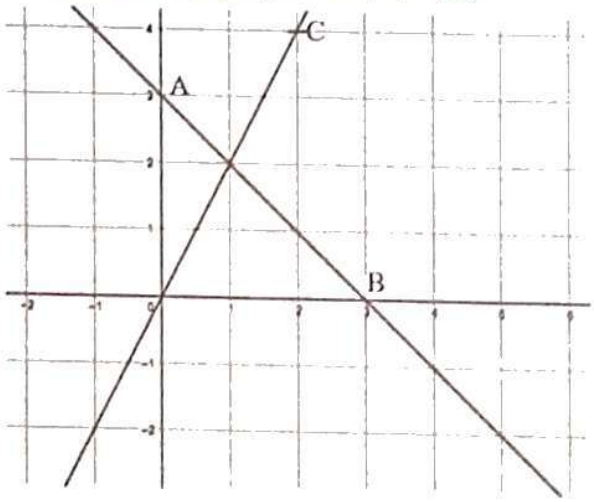
- Multiplier l'une des deux équations par un nombre réel tel que les coefficients de x soient égaux (ou opposés) dans les deux équations.
- Additionner ou soustraire membre à membre les deux équations pour que l'une des deux inconnues disparaisse.
- Résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
- Faire de même avec l'autre inconnue.
- Vérifier que le couple trouvé est vraiment solution.

Exercice 3 Résoudre graphiquement un système d'équations

Résous graphiquement le système suivant : $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

Corrigé

- Notons (D) la droite d'équation : $x + y = 3$.
(D) passe par les points A(0 ; 3) et B(3 ; 0).
- Notons (L) la droite d'équation : $2x - y = 0$.
(L) passe par les points O(0 ; 0) et C(2 ; 4).
- Représentons graphiquement (D) et (L).



Graphiquement, la solution du système est : (1 ; 2).

Méthode

Méthode graphique

Tracer les deux droites puis lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 4 Résoudre un problème conduisant à un système d'équations

Une papeterie vend deux sortes de cahiers aux librairies des collèges.
Des cahiers de 300 pages au prix de gros de 850 F.
Des cahiers de travaux pratiques au prix de gros de 1 400 F.
La papeterie reçoit une commande de 500 cahiers accompagnée d'un chèque de 524 000 F.
La commande ne précise pas le nombre de cahiers de chaque type.
Détermine le nombre de cahiers de chaque type que la papeterie doit fournir.

Corrigé

- Choix des inconnues :
Soit X le nombre de cahiers de 300 pages et Y le nombre de cahiers de travaux pratiques.
- Mise en équation :
Le nombre total de cahiers est 500.
Donc : X + Y = 500

- Choix des inconnues :
Soit X le nombre de cahiers de 300 pages et Y le nombre de cahiers de travaux pratiques.
- Mise en équation :
Le nombre total de cahiers est 500.
Donc : X + Y = 500.
Le prix des 500 cahiers est 524 000 F.
Donc : 850X + 1400Y = 524 000

On obtient le système suivant :
$\begin{cases} X + Y = 500 \\ 850X + 1400Y = 524\,000 \end{cases}$

Méthode

Méthode de résolution de problème

- Choisir les inconnues.
- Traduire les données en équations.
- Résoudre le système obtenu.
- Donner la solution au problème.

- Résolution du système par substitution :
On a : Y = 500 – X et 850X + 1400(500 – X) = 524 000.
Donc –550X = –176000.
On trouve : X = 320.
En remplaçant dans la première équation, on trouve : Y = 180.
La solution du système est : (320 ; 180).
- Pour satisfaire la commande, la papeterie doit fournir 320 cahiers de 300 pages et 180 cahiers de travaux pratiques.

Résumé de cours

1 Définition d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Définition a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels tels que $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ et $(a'\ ;\ b') \neq (0\ ;\ 0)$.

- $ax + by + c = 0$ est **une équation linéaire dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.**
- $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ **est un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.**

Exemples

- $x + y - 15 = 0$ et $3500x + 2400y - 42600 = 0$ sont **des équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.**
- $\begin{cases} x + y = 15 \\ 3500x + 2400y = 42600 \end{cases}$ **est un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.**

2 Résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par substitution

Méthode 1

Pour résoudre un système d'équations linéaires par la méthode de substitution, on peut procéder comme suit :

- Choisir une des deux équations et exprimer une des inconnues en fonction de l'autre à partir de l'équation choisie.
- Remplacer dans l'autre équation l'inconnue choisie et résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
- Remplacer dans la première équation choisie, la valeur de l'inconnue trouvée et déterminer l'autre inconnue.

Méthode 2

Pour résoudre un système d'équations linéaires par la méthode de substitution, on peut procéder comme suit :

- Exprimer dans chaque équation, la même inconnue en fonction de l'autre.
- Égaler les deux expressions obtenues et résoudre l'équation à une inconnue obtenue.
- Remplacer dans une des expressions l'inconnue trouvée et déterminer l'autre inconnue.

3 Résolution de système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par combinaison

Méthode

Pour résoudre un système d'équations linéaires par la méthode de combinaison, on peut procéder comme suit :

- Pour une inconnue choisie, multiplier chaque équation par des nombres non nuls de sorte à obtenir des coefficients opposés, additionner membre à membre les deux équations pour éliminer l'inconnue choisie et déterminer la valeur de l'autre inconnue ;
- Reprendre le processus en éliminant l'autre inconnue.

Résumé de cours

4 Résolution graphique de système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Méthode

Pour Résoudre graphiquement un système d'équations, on procède comme suit :
- On trace la droite dont une équation est la première équation du système.
- On trace la droite dont une équation est la deuxième équation du système.
- On détermine, s'il existe, le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites tracées.

La solution du système, si elle existe, est le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites tracées.

Remarque :

- Si les droites sont confondues alors le système admet une infinité de solutions.
- Si les droites sont disjointes alors le système n'a pas de solution.

5 Traduction d'un problème de la vie courante à l'aide d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Méthode

Pour résoudre un problème de la vie courante à l'aide d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on procède comme suit :
- On choisit les inconnues.
- On fait la mise en équation.
- On résout le système obtenu.
- On donne la solution du problème.

Exercices

Exercices de renforcement

1 On donne les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} 4x^2 + y = 2 \\ 6x^2 - y = -10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = -2 \\ 6x + 4y = 7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \sqrt{2x} + y = 1 \\ \frac{2}{3}x - 5y = 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -x + y = 9 \\ x - y = 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = -6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x - y = -12 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 6x + y = 11 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ x^2 + 6y^2 = 16 \end{cases}$

Indique les numéros qui correspondent à des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

2 Résous par la méthode de substitution chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 6x - y = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 13x + y = 169 \\ 15x + 31y = -223 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y = 145 \\ x - y = 63 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 3y = 400 \\ 2x + y = 250 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$

3 Résous par la méthode de substitution chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y = 0 \\ 7x - 4y = 12 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 5y = -9 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -x + 6y = 10 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 10y = 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x + 8y = 2 \\ 9x + 10y = -43 \end{cases}$

4 Résous par la méthode de substitution chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 8x + 5y = -4 \\ 4x + 15y = -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 7x + 8y = 2 \\ 9x - 10y = 4 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 12x + 7y = 41 \\ 4x - 15y = 239 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 7x - 5y = 3 \\ 5x - 3y = 5 \end{cases}$

5 Résous par la méthode de combinaison chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ -4x + 10y = -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x + 6y = -1 \\ -2x + 3y = 22 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x - 2y = -17 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + 2y = 100 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 7x - 13y = 11 \\ 25x + 44y = 12 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 100x - 31y = 131 \\ 3x + 31y = -28 \end{cases}$

6 Résous graphiquement chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 5y = 9 \\ 7x + 5y = 3 \end{cases}$

7 Résous graphiquement chacun des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$

Exercices

8 Fais la mise en équation de chacun des problèmes ci-dessous et résous-les.

1. Dans un service de pédiatrie, on compte 24 agents. Il y a deux fois plus de femmes que d'hommes. Détermine le nombre d'hommes dans ce service.
2. Deux nombres sont tels que : le plus grand est le triple du plus petit. Si on ajoute six à chacun, on obtient deux nouveaux nombres tels que le plus grand est le double du plus petit. Détermine ces deux nombres.

9 Un producteur a une exploitation de 100 hectares sur laquelle poussent du riz et du maïs.
Chaque hectare de riz nécessite 600 heures de travail pour le désherber et chaque hectare de maïs nécessite 400 heures de travail pour le désherber.
Les 100 hectares ont été désherbés en 45 000 heures de travail.
Trouve le nombre d'hectares de chaque céréale.

10 Deux paquets pèsent ensemble 5 kg. On les met chacun sur les plateaux d'une balance.
Pour obtenir l'équilibre il faut ajouter 250 g à l'un des plateaux.
Trouve le poids de chaque paquet.

11* Dans un lycée, il y a 32 professeurs. Parmi eux, 5 hommes et 3 femmes partent à la retraite et ne sont pas remplacés. Il y a alors 2 fois plus de professeurs hommes que de femmes dans ce lycée.
Détermine le nombre d'hommes et de femmes dispensant des cours dans ce lycée avant le départ à la retraite des 8 professeurs.

12 On dispose de 34 pièces de monnaie, les unes de 50 F, les autres de 200 F.
Au total, elles représentent une somme de 4250 F.
Détermine le nombre de pièces de chaque sorte.

Exercices d'approfondissement

13 Un hôpital remplace régulièrement son petit matériel. Lors d'une première commande, 15 thermomètres et 10 tensiomètres ont été achetés pour 69575 F. Il fait une deuxième commande de 10 thermomètres et 15 tensiomètres. Le montant de la commande s'élève à 73 425 F.
Calcule le prix d'un thermomètre et le prix d'un tensiomètre.



14 Une petite société d'ameublement fabrique des canapés et des fauteuils. La confection d'un canapé nécessite 8 heures de travail et 12 000 F de matériel, alors qu'un fauteuil peut être construit en 6 heures pour 7 000 F de matériel.
La société dispose de 340 heures de travail par semaine et peut acheter 45 000 F de matériel.
Détermine le nombre de fauteuils et de canapés que la société peut fabriquer s'il faut utiliser toutes les heures de travail et tout le matériel.

15 Soit x et y deux nombres réels tels que : $x > y$.
La somme de x et y est 206.
Si l'on divise x par y, le quotient est 4 et le reste est 1.
Détermine ces nombres.

16 $\frac{x}{y}$ (avec $y \neq 0$) est le quotient de deux nombres.
Si on augmente x de 2, le rapport devient 3.
Si on diminue x de 2, le rapport devient 4.
Détermine ces nombres.

17 La somme de deux nombres x et y est 29.
La différence de leurs carrés est 145.
Détermine ces nombres.

18 Dans un restaurant, on propose aux clients des plats au même prix. Des amis y consomment un plat chacun. S'ils paient 2 000 F chacun il manque 6 000 F au total. Sils paient 2 600 F chacun, il manque encore 3600 F.
Détermine le nombre d'amis et le coût de la consommation.

19* Au début d'une conférence sur les MST, il y a deux fois plus de garçons que de filles dans la salle. Six garçons quittent la salle et six filles entrent. Il y a alors deux fois plus de filles que de garçons.
Détermine le nombre de filles et le nombre de garçons au début de la conférence.

20* Une salle de cinéma compte 400 places. Les places VIP coûtent 2 500 F et les autres places coûtent 1 500 F. Quand la salle est pleine, la recette est de 732 000 F.
Détermine le nombre de place de chaque type.

21 Deux élèves de Seconde A conversent pendant la récréation :
Élève 1 : « Dans ma classe, il y a 28 élèves. Si je multiplie le nombre de garçons par 3, puis le nombre de filles par 2 et si j'additionne ces deux nombres je trouve 69 ».

Élève 2 : « Dans ma classe, il y a 30 élèves. Si je multiplie le nombre de garçons par 2, puis le nombre de filles par 5 et si j'additionne ces deux nombres je trouve 95 ».
Un des deux élèves ne dit pas la vérité. Identifie-le. Justifie ta réponse.

22 Afin d'encourager son fils en Seconde A à s'intéresser aux mathématiques, un père décide de donner 200 F pour chaque exercice de mathématique correctement traité. Mais il lui prend 300 F dans le cas contraire. Après 25 exercices, chacun a donné autant qu'il a reçu.
Détermine le nombre d'exercices que le fils a traités convenablement.

23 Pour connaître le fonctionnement des CHU, les élèves d'un lycée ont organisé une visite dans l'un de ces établissements. Au cours de cette visite, ils apprennent que :
Le service « Médecine générale » du CHU a déboursé la somme de 4 500 000F pour l'achat de lits médicalisés, tandis que le service « Pédiatrie » du même CHU a déboursé la somme de 4 400 000 F.
Le service « Médecine générale » a fait l'acquisition de 19 lits de type A et de 8 lits de type B. Le service « Pédiatrie » a fait l'acquisition de 15 lits de type A et de 10 lits de type B.
Les élèves veulent connaître le prix de chaque type de lit.

1. Effectue la mise en équation de ce problème
2. Détermine le prix d'un lit de chaque type.

Situations d'évaluation

24 Un marchand vend des glaces à la vanille au prix unitaire de 500 F et des glaces au chocolat à 750 F. Ce samedi, il se fait aider par sa fille en classe de Seconde A.



À la fin de la journée, s'adressant à sa fille, il affirme : « Si j'avais vendu les glaces à la vanille 750 F et les glaces au chocolat 500 F, j'aurais fait la même recette : 50 825 F. ». « Impossible ! » lui répond sa fille.
Le lendemain dimanche, n'ayant pas changé ses prix, pour vérifier les connaissances de sa fille, il affirme, à la fin de la journée : « La recette du jour est de 71 250 F. Si j'avais vendu les glaces à la vanille 750 F et les glaces au chocolat 500 F, j'aurais fait la même recette qu'hier ! ».
« Impossible ! » lui répond sa fille.
Départage le marchand et sa fille.

25* Pour équiper la bibliothèque d'un lycée, l'intendant a acheté d'abord 4 classeurs et 2 feutres à 1 450 F puis 3 classeurs et 4 feutres à 1 225 F.
Estimant insuffisant cet équipement, les élèves veulent connaître le prix d'un feutre et d'un classeur en vue d'acheter le supplément.
Détermine le prix d'un classeur et le prix d'un feutre.

26 Pour fêter l'anniversaire de l'un d'eux, un groupe d'élèves se sont invités dans un restaurant italien. Ils ont commandé quatre pizzas identiques et deux cafés. Cela leur a coûté 38 000 F.



La table voisine a commandé cinq pizzas identiques et quatre cafés. L'addition était 50 500 F.
Pour savoir si les mêmes prix ont été appliqués, les élèves veulent connaître le prix d'un café et le prix d'une pizza.
Détermine le prix d'un café et le prix d'une pizza.

Coup de Pouce

11 Soit h le nombre de professeurs hommes et f le nombre de professeurs femmes avant le départ à la retraite des 8 professeurs.
On a : $2(f-3) = h-5$

19 Le problème se ramène à la résolution du système

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 18 \end{cases}$$

20 Le problème se ramène à la résolution du système

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 5x + 3y = 1464 \end{cases}$$

25 Effectuer la mise en équation de ce problème.

Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 22410821/01916125
Maquette couverture : I Graph
Achevé d'imprimer en Côte d'Ivoire
1er trimestre 2020
Dépôt légal : N° 15405

Raisonnement

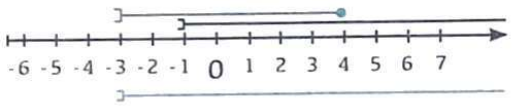
Comment résoudre une équation du type $(ax+b)(cx+d)=0$?

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $(ax + b)(cx+d) = 0$, où a, b, c et d sont des nombres réels donnés.
Pour résoudre l'équation (E) on résout chacune des équations (E_1) : $x \in \mathbb{R}$, $ax + b = 0$; (E_2) : $x \in \mathbb{R}$, $cx+d = 0$.
L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble constitué des solutions de (E_1) et (E_2).

Comment déterminer la réunion ou l'intersection de deux intervalles ?

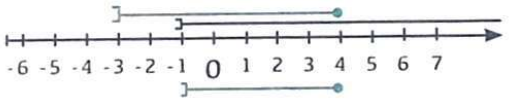
Pour déterminer l'intersection ou la réunion de deux intervalles I et J, on peut les représenter sur la droite graduée.

Exemple 1 : Réunion de deux intervalles
I =]-1 ; + ∞[, J =]-3 ; 4]



$I \cup J =]-3 ; +\infty[$

Exemple 2 : Intersection de deux intervalles
I =]-1 ; + ∞[, J =]-3 ; 4]



$I \cap J =]-1 ; 4]$

Comment déterminer le signe de $ax+b$?

On peut utiliser le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Comment déterminer le signe de $(ax+b)(cx+d)$?

Pour déterminer le signe de $(ax + b)(cx + d)$ on peut faire le tableau de signe de $ax + b$ et de $cx + d$ puis tirer la conclusion.

Comment résoudre une inéquation lu type $(ax+b)(cx+d)>0$?

Pour résoudre une inéquation du type $(ax + b)(cx+d) > 0$, on peut utiliser un tableau de signe.

Exemple : Résolvons l'inéquation :
$x \in \mathbb{R}$, $(3 - 6x)(x + 2) > 0$.
Le signe $(3 - 6x)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur $(3 - 6x)$ et $(x + 2)$.
$(3 - 6x)(x + 2) = 0$ signifie que $3 - 6x = 0$ ou $x + 2 = 0$

$6x = 3$ $\quad$ $x = -2$

$x = \frac{1}{2}$.

Résumons dans un même tableau le signe de $3 - 6x$ et celui de $x + 2$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$-\infty$
$3 - 6x$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$x + 2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(3 - 6x)(x + 2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que : $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ pour $x \in \left]-2 ; \frac{1}{2}\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ est $\left]-2 ; \frac{1}{2}\right[$.

Comment résoudre un problème du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

La résolution d'un problème conduisant à une équation, à une inéquation, à un système d'équation, ou à un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se fait en cinq étapes.

Étape 1 : Choix des inconnus

Étape 2 : Mise en équation

Traduire les données de l'énoncé en langage mathématique par une (ou des) équation(s) ou inéquation(s).

Étape 3 : Résolution mathématique
Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système de l'étape 2 en utilisant une méthode appropriée.

Étape 4 : Vérification
S'assurer que la (ou les) solution(s) trouvée(s) vérifie(nt) bien(s) l'équation, l'inéquation ou le système.

Étape 5 : Solution du problème
Retourner à l'énoncé pour ne retenir que les solutions qui conviennent.

Mémento

Calcul numérique

Tableau de proportionnalité

x, x', y et y' sont des nombres réels,

x	x'
y	y'

Le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité revient à dire que : $xy' = x'y$. Un coefficient de proportionnalité k est tel que : $k = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$.



Augmentation et réduction

Prendre p% de x, revient à : $\frac{p}{100}x$.

Augmenter x de p%, revient à : $\left(1 + \frac{p}{100}\right)x$.

Diminuer x de p%, revient à : $\left(1 - \frac{p}{100}\right)x$.

Généralité sur les fonctions

Variation d'une fonction

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est **croissante** sur I (respectivement **strictement croissante** sur I) signifie que : pour tous nombres réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$).

- f est **décroissante** sur I (respectivement **strictement décroissante** sur I) signifie que : pour tous nombres réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$ (respectivement si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$).

- f est constante sur I signifie que : pour tous nombres réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.

Minimum d'une fonction

Dire que $f(c)$ est le minimum de f sur l'intervalle $[a ; b]$ ($c \in [a ; b]$), signifie que $f(c)$ est la plus petite valeur de la fonction sur l'intervalle $[a ; b]$.

Pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq f(c)$.

Exemple :

x	-3		1		4
Variation de f	5	↘	-2	↗	2

Sur l'intervalle $[-3 ; 4]$, la fonction f admet un minimum en $x = 1$. Ce minimum vaut -2. $f(1) = -2$.

Maximum d'une fonction

Dire que $f(d)$ est le maximum de f sur l'intervalle $[a ; b]$ ($d \in [a ; b]$) signifie que $f(d)$ est la plus grande valeur de la fonction sur l'intervalle $[a ; b]$.

Pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq f(d)$.

Exemple :

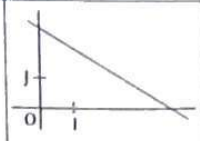
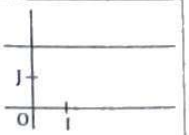
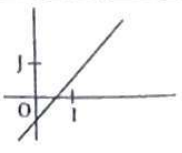
x	-4		-1		3
Variation de f	-1	↗	4	↘	-5

Sur l'intervalle $[-4 ; 3]$, la fonction f admet un maximum pour $x = -1$. Ce maximum vaut 4. $f(-1) = 4$.

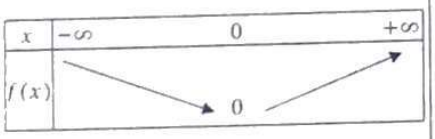
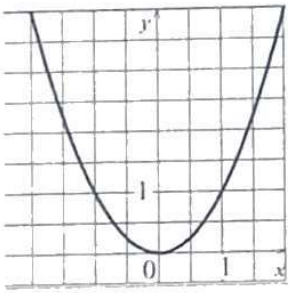
Étude de fonctions de références

Fonction affine

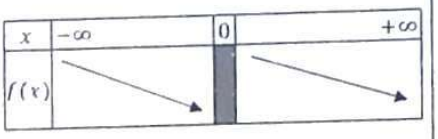
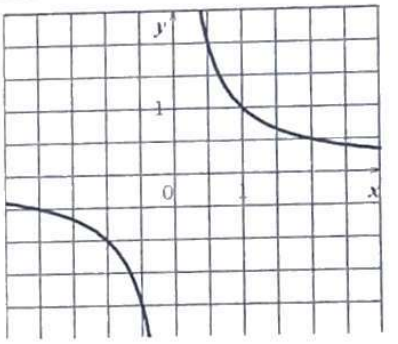
Une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Signe de a	Tableau de variation	Illustrations
$a < 0$	f : $-\infty$ ↘ $+\infty$ f est décroissante sur $\mathbb{R}$	
$a = 0$	f : $-\infty$ → $+\infty$ f est constante sur $\mathbb{R}$	
$a > 0$	f : $-\infty$ ↗ $+\infty$ f est croissante sur $\mathbb{R}$	

Fonction carré : $f : x \mapsto x^2$

Ensemble de définition	f est définie sur $\mathbb{R}$
Sens de variation	f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et f est croissante sur $]0 ; +\infty[$
Tableau de variation	
Repré-sentation graphique	

Fonction inverse : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Ensemble de définition	f est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
Sens de variation	f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$
Tableau de variation	
Repré-sentation graphique	

Dénombrement

Réunion de deux ensembles

$x \in A \cup B$ signifie que : $x \in A$ ou $x \in B$.

Intersection de deux ensembles

$x \in A \cap B$ signifie que : $x \in A$ et $x \in B$.

Formule des quatre cardinaux

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$.

Statistique

Médiane

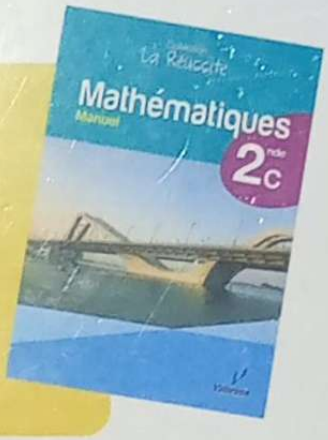
Étant donné une série statistique ordonnée, la médiane de cette série est une valeur qui partage cette série en deux groupes d'effectifs égaux :

- un groupe contient les valeurs inférieures ou égales à la médiane ;
- un groupe contient les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

Détermination graphique de la médiane

La médiane est l'abscisse du point du polygone des effectifs (resp. fréquences) cumulé(es) croissante(s) dont l'ordonné est la moitié de l'effectif total (resp. la fréquence totale).

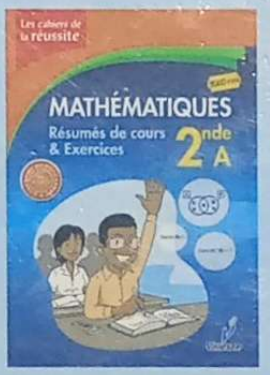
Collection
La Réussite



Une collection pour vous conduire sur le chemin de la Réussite.
On y trouve, pour chaque leçon :

- *Situations d'apprentissage*
- *Habiletés et contenus*
- *Installation des habiletés*
- *Apprentissage de la rédaction*
- *Résumés de cours*
- *Exercices*
- *Situation d'évaluation*
- *Coup de pouce*

Collection Les Cahiers de la Réussite















Des résumés de cours et des exercices élaborés par des professeurs et encadreurs pédagogiques chevronnés.

Disponibles pour toutes les classes

9 782916 532974
ISBN : 978-2-916532-97-4