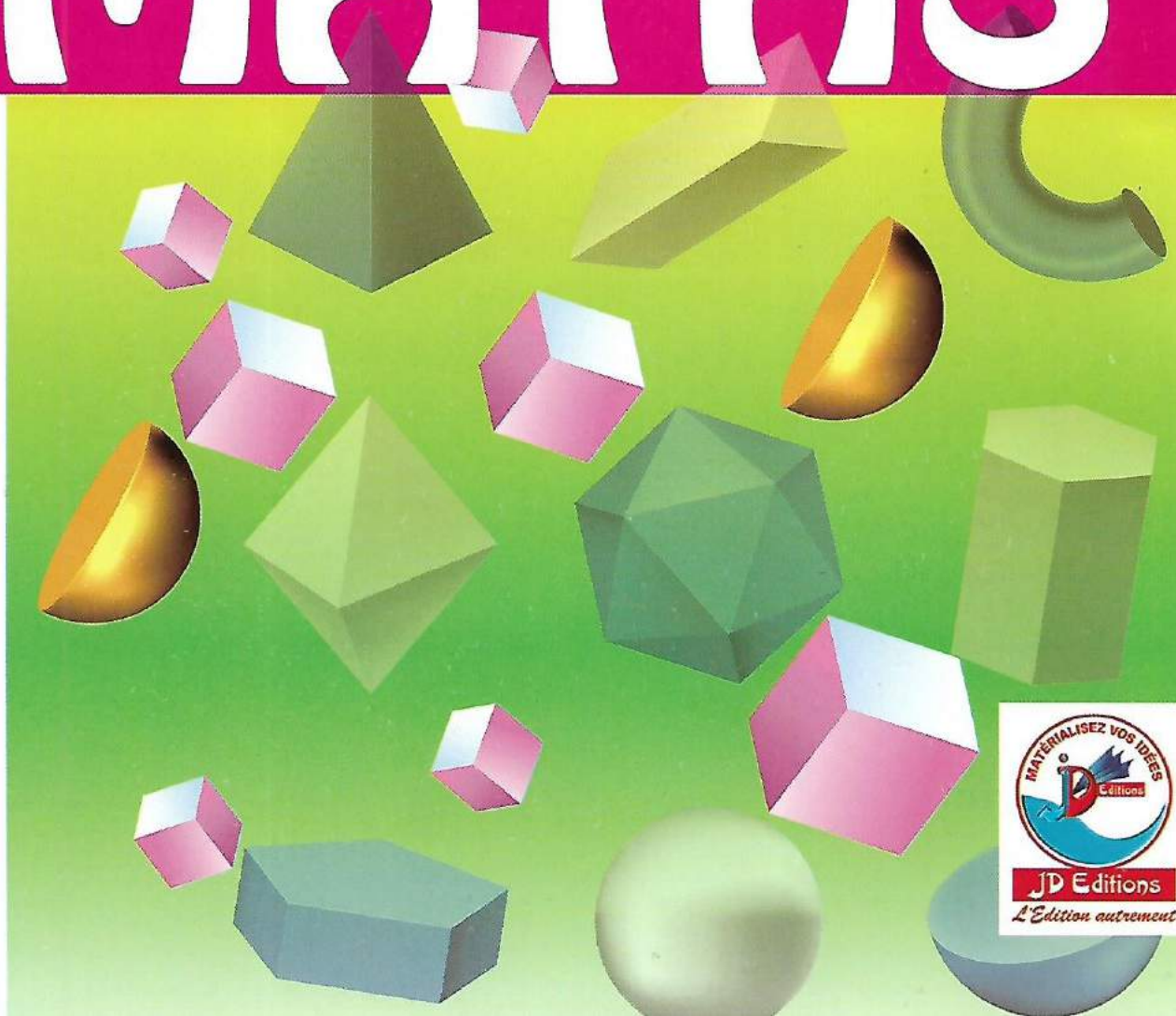
Collection HABILETÉS

NOUVEAU
PROGRAMME A.P.C

Manuel 2nde C

MATHS



MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement

Collection HABILETÉS

Maths

Programmes A.P.C.

BENGALY
KALIFA

Manuel 2nde C

JD Editions
Specimen

YOUSSOUPHOU Kéita : Inspecteur de l'Enseignement Secondaire
TUO Pienan : Inspecteur de l'Enseignement Secondaire
AIKO Jean Claude : Coordonnateur Régional de Mathématiques
GAGNIÉ Guillaume : Coordonnateur Régional de Mathématiques

Sous la supervision de
TANOH KOUACOU
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale

JD Éditions
04 BP 206 Abidjan 04
Côte d'Ivoire

©JD Éditions, Abidjan 2019.
ISBN : 979-10-91832-61-8

Toute représentation, traduction, adaptation ou , reproduction, même partielle, par tous procédés , en tous pays, faite sans autorisation préalable est illicite et exposerait le concernant à des poursuites judiciaires. Ref : loi du 11 mai 1957, alinéas 2 et 3 de l'article 41.

Une représentation ou reproduction sans autorisation de l'éditeur ou des auteurs constituerait une contrefaçon par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

Avant-Propos

Le manuel « Mathématiques 2ndeC » de la collection "Habiletés" a été conçu pour accompagner élèves et enseignants dans les multiples activités de la discipline Mathématiques. Ce livre a donc été élaboré pour faciliter votre travail, favoriser un bon apprentissage du cours et vous aider à surmonter vos éventuelles difficultés.

Son contenu s'appuie sur le nouveau programme en vigueur : l'approche par les compétences (APC). Cet ouvrage marque donc un changement avec les manuels précédents de seconde C par sa structure organisée autour d'un cours clair, où l'élève peut facilement se retrouver.

Ainsi, il propose, entre autres, des activités qui :

- tiennent compte du milieu socio-culturel de l'élève ;
- favorisent l'interdisciplinarité ;
- rappellent les éléments fondamentaux propres à toute démarche mathématique ;
- prennent en compte plusieurs types de raisonnement (raisonnement inductif, raisonnement déductif,...)

Par conséquent, le présent manuel permet de trouver, à tout moment de son apprentissage, le langage qui convient dans le cadre du cours en classe et du travail à la maison.

Le programme de seconde C est composé de 15 leçons. Chaque leçon sera construite sur le modèle suivant :

Habiletés et contenus



Cette rubrique précise les contenus et les actions à mener. Il s'agit des notions nouvelles et des connaissances essentielles que l'élève doit acquérir à la fin de chaque leçon.

Situation d'apprentissage



Une activité ouverte, illustrée par les contenus essentiels, développés dans la leçon, est donnée afin de permettre d'aborder les connaissances nouvelles. En fait, il s'agit de donner du sens aux notions mathématiques et de fixer le cadre des apprentissages.

Activités de découverte



Ce sont des activités préparatoires ; approches simples des nouvelles notions, à partir des connaissances acquises dans des classes ou des leçons antérieures.

L'apprenant est, ici, sollicité pour construire son savoir et savoir-faire.

Chaque activité est suivie d'un bilan.

Résumé de la leçon



Le cours, accessible à tous les apprenants, présente les formules, les définitions, les propriétés, les théorèmes et des points méthodes à connaître et à retenir.

De nombreux exemples simples pouvant servir de référence et d'aide à la mémorisation accompagnent les définitions et les propriétés.

Les exercices



Il s'agit d'exercices de fixation, de renforcement, d'approfondissement et de situations d'évaluation. Ces exercices variés sont des tests objectifs et des tests subjectifs. Ils aident à fixer les nouvelles notions et à consolider les acquis des apprenants. Ces exercices sont regroupés en quatre parties :

- exercices de fixation
- exercices de renforcement
- exercices d'appronfondissement
- situations d'apprentissage

Ces nombreux exercices permettent aux élèves d'éprouver leurs compétences et aux enseignants d'évaluer leur enseignement.

Le souci permanent de l'équipe d'auteurs, composés d'encadreurs pédagogiques et d'enseignants chevronnés, est de donner à tous les élèves le goût de l'activité mathématique, et de continuer à leur transmettre une conception ouverte et vivante de cette discipline.

Nous sollicitons et accueilleront avec intérêt les remarques susceptibles d'améliorer cet ouvrage.

Les auteurs

SOMMAIRE

Leçon 1 : Ensemble des nombres réels 5

Leçon 2 : Polynômes et fonctions rationnelles 17

Leçon 3 : Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ 29

Leçon 4 : Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 41

Leçon 5 : Généralités sur les fonctions 51

Leçon 6 : Étude de fonctions de référence 69

Leçon 7 : Statistiques 85

Leçon 8 : Vecteurs et points du plan 107

Leçon 9 : Produit scalaire 119

Leçon 10 : Angles inscrits 127

Leçon 11 : Angles orientés et trigonométrie 143

Leçon 12 : Droites et plans de l'espace 161

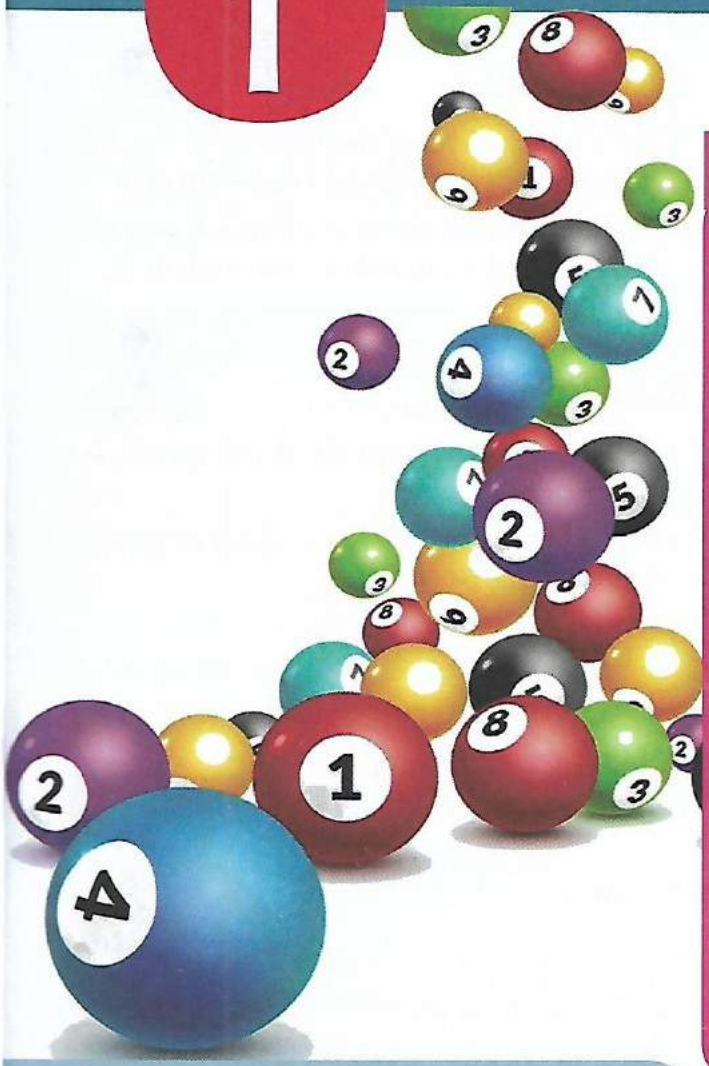
Leçon 13 : Utilisation des symétries et translations 179

Leçon 14 : Homothéties 189

Leçon 15 : Rotations 203

Leçon 1

ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS



Habiletés et contenus

- **Connaître** : la définition d'un majorant d'un ensemble, la définition d'un minorant d'un ensemble, la définition du maximum d'un ensemble, la définition du minimum d'un ensemble, la distance de deux nombres réels, les propriétés liées à la valeur absolue d'un nombre réel.
- **Déterminer** : un majorant d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible, un minorant d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible, le maximum d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible, le minimum d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible.
- **Comparer** deux nombres réels.
- **Résoudre** : algébriquement une équation du type $|x - a| = r$, graphiquement une équation du type $|x - a| = r$, algébriquement une inéquation du type $|x - a| < r$, graphiquement une inéquation du type $|x - a| < r$.
- **Démontrer** une propriété en utilisant le raisonnement par l'absurde, une propriété en utilisant le raisonnement inductif ou déductif.
- **Traiter** une situation faisant appel aux nombres réels.

Situation d'apprentissage

À l'entame d'une leçon de mathématiques dans une classe de seconde C, un professeur dit à ses élèves :

« *Pythagore et ses disciples ont découvert le nombre* $\sqrt{2}$ *au VI*^{ème} *siècle avant J.-C. en cherchant le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté.*

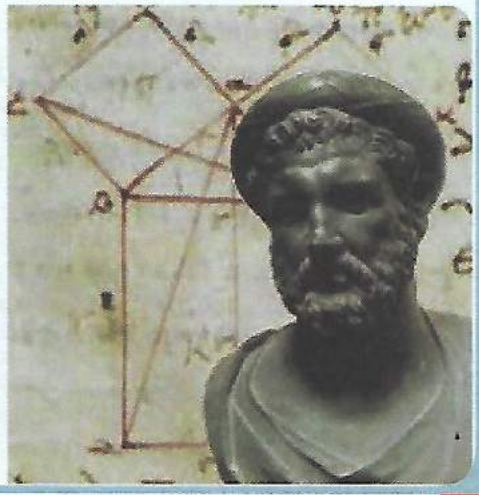
Or son étude sur la musique avait conduit Pythagore à penser que «*l'harmonie divine consiste au rapports numériques des nombres entiers*». Hélas, $\sqrt{2}$ ne rentrait pas dans ce monde rationnel ; c'est pourquoi Pythagore a nommé ces nombres « *irrationnels* ».

La démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ repose sur le fait qu'un entier est soit pair, soit impair.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous forme irréductible $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels non nuls ».

Le professeur ne termine pas ses propos et demande à ses élèves de démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ceux-ci, par petits groupes, décident de faire des recherches sur l'ensemble des nombres réels afin de mieux s'outiller pour répondre à la préoccupation de leur professeur de mathématiques.



Activité 1 Majorant, minorant d'un ensemble



On donne l'ensemble A tel que : A = [−5 ; 2]

1. Représente l'ensemble A sur une droite graduée.
2. Cite un nombre réel supérieur ou égal à tous les éléments de A.
3. Cite un nombre réel inférieur ou égal à tous les éléments de A.

Récapitulatif

- *Tout nombre réel supérieur ou égal à tous les éléments de A est appelé un majorant de A.*
- *Tout nombre réel inférieur ou égal à tous les éléments de A est appelé un minorant de A.*

Activité 2 Maximum, minimum d'un ensemble



On considère l'ensemble B tel que :
B = {−5 ; −4 ; −3 ; 0 ; 1 ; 2}.
a) Cite le plus grand élément de B.
b) Cite le plus petit élément de B.

Récapitulatif

- *Le plus grand élément de B est appelé le maximum de B.*
- *Le plus petit élément de l'ensemble B est appelé le minimum de B.*

Activité 3 Valeur absolue d'un nombre réel

1. Indique le plus grand des nombres réels −10 et 10.
2. Soit a un nombre réel. Indique lequel des nombres $-a$ et a est le plus grand lorsque :
   a) a est négatif ;
   b) a est positif.
3. Justifie que la valeur absolue de a est le plus grand des deux nombres a et $-a$.



Récapitulatif

La valeur absolue d'un nombre réel a est le plus grand des nombres réels $-a$ et a.

Activité 4 Propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel

Soit x et y deux nombres réels et r un nombre réel positif.

1. a) Justifie que : $|x| \geq 0$.
   b) Démontre que : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   c) Démontre que : $|-x| = |x|$
2. a) Démontre que : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.
   b) Démontre que : $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.
3. a) Démontre que : $|x \times y| = |x| \times |y|$.
   b) Démontre que : si $x \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.
   c) Déduis de 3.a) et 3.b) que : si $y \neq 0$, alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
4. a) Développe : $(x+y)^2$ et $(|x|+|y|)^2$.
   b) Déduis-en que : $|x+y| \leq |x|+|y|$

Récapitulatif

Soit x et y deux nombres réels et r un nombre réel positif.
On a :

- $|x| \geq 0$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|-x| = |x|$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$;
- $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$;
- $|x \times y| = |x| \times |y|$;
- $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$; $(x \neq 0)$;
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $(y \neq 0)$;
- $|x+y| \leq |x|+|y|$



Activité 5 Distance de deux nombres réels

Soit (D) une droite graduée de repère (O, I) et A, B, C des points de (D) d'abscisses respectives -2 ; 5 et $-4{,}5$.

1. Fais une figure.
2. Par une lecture graphique, détermine les distances AB ; BC et AC.
3. a) Calcule : $|-2-5|$; $|5-(-4{,}5)|$ et $|-2-(-4{,}5)|$ puis dis ce que tu remarques.
   b) Compare les résultats à ceux trouvés à la consigne 2.

Récapitulatif

La distance entre deux nombres réels a et b est la valeur absolue de leur différence.

$|a-b| = AB$ *où* $a = x_A$ *et* $b = x_B$ *dans un repère (O, I) donné.*

Activité 6 Résolution algébrique d'équation du type $|x-a|=r$



1. On veut résoudre l'équation : $|x-4| = 2{,}5$.
   a) Recopie et complète :
   $|x-4| = 2{,}5 \Leftrightarrow \ldots = \ldots$ ou $\ldots = \ldots$
   $\Leftrightarrow x = \ldots$ ou $x = \ldots$
   b) Donne l'ensemble des solutions de cette équation.
2. Explique la méthode de résolution de l'équation $|x-a| = r$ lorsque : a) $r = 0$; b) $r < 0$; c) $r > 0$.

Récapitulatif

- Pour $r = 0$; $|x-a| = 0 \Leftrightarrow x = a$.
- Pour $r < 0$; $|x-a| = r$ n'a pas de solution.
- Pour $r > 0$; $|x-a| = r \Leftrightarrow x = a+r$ ou $x = a-r$.

Activité 7 Résolution graphique d'équation du type $|x-a| = r$ $(r \geq 0)$



1. On veut résoudre graphiquement l'équation : $|x+2| = 5$.

Soit (D) une droite graduée de repère (O, I). M et A sont deux points de (D) d'abscisses respectives x et -2.

a) Recopie et complète : $|x+2| = |x-(\ldots)| = d(x ; \ldots)$
b) Indique sur (D) les points M d'abscisses x tels que la distance de x à -2 soit égale à 5 (ou bien AM = 5 avec $x_A = -2$).
c) Donne les solutions de cette équation.

2. Explique la méthode de résolution graphique d'une équation du type : $|x-a| = r$, $(r \geq 0)$.

Récapitulatif

Soit (D) une droite graduée de repère (O, I). A et M sont deux points d'abscisses respectives a et x.

- $|x-a| = AM$.
- $|x-a| = r \Leftrightarrow AM = r$.

Le cercle (C) de centre A et de rayon r coupe la droite (D) en deux points.

On lit les abscisses de ces deux points qui sont les solutions de l'équation.

Activité 8 Résolution algébrique d'inéquation de type $|x-a| \leq r$



1. On veut résoudre l'inéquation : $|x-1| \leq 3$.

Recopie et complète :

$|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow \ldots \leq x-1 \leq \ldots$
$\ldots \leq x \leq \ldots$

2. Explique la méthode de résolution de l'inéquation du type $|x-a| \leq r$ lorsque :

a) $r < 0$; b) $r > 0$; c) $r = 0$.

Récapitulatif

- Pour $r = 0$, $|x-a| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Pour $r < 0$, $|x-a| \leq r$ n'a pas de solution.
- Pour $r > 0$, $|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$
  $\Leftrightarrow x \in [a-r ; a+r]$.



Activité 9 Résolution graphique d'inéquations du type $|x - a| \leq r$

1. On veut résoudre graphiquement l'inéquation $|x - 1{,}5| \leq 2{,}5$.

Soit (D) une droite graduée de repère (O, I).

Soit M le point de (D) d'abscisse x et le point A de (D) d'abscisse 1,5.

a) Recopie et complète :

$|x - 1{,}5| \leq 2{,}5 \Leftrightarrow$ ..... $\leq$ .....

b) Hachure en rouge l'ensemble des points M de (D) situés à l'intérieur du disque de centre A et de rayon 2,5.

c) Déduis-en l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - 1{,}5| \leq 2{,}5$.

2. Explique la méthode de résolution graphique de l'inéquation $|x - a| \leq r$.

Récapitulatif



Soit A et M deux points d'une droite graduée (D) d'abscisses respectives a et x.

- $|x - a| \leq r \Leftrightarrow AM \leq r$.
- *Le disque de centre A, de rayon r et la droite graduée (D) ont un segment en commun dont les abscisses sont les solutions de l'inéquation* $|x - a| \leq r$.

Activité 10 Raisonnement par l'absurde

Soit p un entier naturel.

On veut démontrer que : si p^2 est impair alors p est impair.

a) On suppose que p^2 est impair et p pair.

Démontre que p^2 est pair.

b) Conclus.

Récapitulatif

Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire est faux.

Le raisonnement consiste à supposer que l'affirmation contraire est vraie et à en tirer les conséquences que cela pourrait avoir. Une seule conséquence absurde, manifestement fausse ou une contradiction permet d'affirmer que l'affirmation contraire est fausse et donc d'en conclure que l'affirmation initiale est vraie.



Historique

Nombre réel

Un **nombre réel** est un nombre qui permet de représenter n'importe quelle mesure d'une grandeur physique, y compris négative (**inférieure à zéro, avec le signe « – »**).

On peut représenter les nombres réels comme des points sur une droite infinie (sans extrémité).

Un nombre réel est représenté par des **chiffres** et si besoin une virgule et des chiffres après la virgule, comme par exemple 324,823211247.... avec éventuellement un signe devant comme par exemple –2,77777... Les **points de suspension** indiquent qu'il y a encore d'autres chiffres après mais qu'ils ne sont pas donnés.

les **nombres entiers** [...] –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 [...] sont des nombres réels ; les **nombres rationnels**, c'est-à-dire des fractions ou des opposés des fractions (par exemple 1/2, –3/4) sont aussi des nombres réels. Tous les autres nombres réels, qui ne peuvent donc pas être écris en fraction de nombres entiers, sont appelés **irrationnels**, comme par exemple le nombre π (lettre grecque **pi**), égal au périmètre d'un cercle de **diamètre 1**.

L'**ensemble** des **nombres réels** s'écrit en **symboles mathématiques** : « $\mathbb{R}$ ».

Résumé de la leçon

I Majorant, Minorant d'un ensemble

Définition

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel M est un majorant de A si M est supérieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un majorant est dit majoré.

  M est un majorant de A signifie que : $\forall\, x \in A, x \leq M$
- On dit qu'un nombre réel m est un minorant de A si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un minorant est dit minoré.

  m est un minorant de A signifie que : $\forall\, x \in A, x \geq m$.

Exemple

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni majorés ni minorés. Par contre $\mathbb{N}$ est minoré par 0, mais n'est pas majoré.
- Soit a un nombre réel, l'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ est minoré par a mais n'est pas majoré.

II Maximum, Minimun d'un ensemble

Définition

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A, est appelé le maximum de A.
- Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A, est appelé le minimum de A.

Exemple

- L'ensemble $\{-4\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 7\}$ a pour maximum 7 et pour minimum -4.
- Le maximum et le minimum du segment $[0\ ;\ 1]$ sont respectivement 1 et 0.
- L'intervalle $]-1\ ;\ 6[$ de $\mathbb{R}$ n'admet ni maximum, ni

Conséquence de la définition

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel. M est le maximum (resp le minimum) de A si et seulement si M est un majorant (resp un minorant) de A appartenant à A.

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'il existe, le maximum (resp le minimum) d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est unique.

Remarque

Un sous-ensemble majoré (resp minoré) de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de maximum (resp minimum). L'intervalle $]-1\ ;\ 6[$ en est un exemple.

III Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

On appelle valeur absolue d'un nombre la distance à zéro de ce nombre.

Pour tout nombre positif a, $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

NOTATION

La valeur absolue de a et est noté $|a|$.

PROPRIÉTÉ

Soit a un nombre réel.
Le plus grand des deux nombres réels a et $-a$ est la valeur absolue de a.



Exemple

- $|\sqrt{3}-2|=2-\sqrt{3}$, *car* : $\sqrt{3}-2\leq 0\leq 2-\sqrt{3}$.
- $|-69|=69$, *car* : $-69\leq 69$.
- $|5-\sqrt{2}|=5-\sqrt{2}$, *car* : $\sqrt{2}-5\leq 0\leq 5-\sqrt{2}$.

IV Propriétés de la valeur absolue



Définition

Pour tous nombres réels x, y et tout nombre réel strictement positif r, on a :

1) $|x|\geq 0$; 2) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$; 3) $|x|=|-x|$; 4) $|x|=|y| \Leftrightarrow x=y$ ou $x=-y$;

5) $\sqrt{(x)^2}=|x|$; 6) $|xy|=|x||y|$; 7) *Si* $x\neq 0$, *alors* $\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}$; 8) *Si* $y\neq 0$, *alors* $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

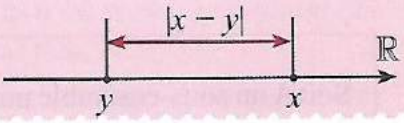
9) $|x+y|\leq|x|+|y|$; 10) $|x|\leq r \Leftrightarrow -r\leq x\leq r$.

V Valeur absolue d'un nombre réel



Définition

Soit x et y deux nombres réels.
Le nombre réel $|x-y|$ est appelé distance de x et y.



Remarque

Soit (D) une droite munie d'un repère (O, I). Pour tous points M et N de (D), d'abscisses respectives x et y, on a : MN = $|x-y|$.



VI Résolution algébrique d'une équation du type $|x-a|=r$ $(r>0)$

PROPRIÉTÉ

a est un nombre réel, r est un nombre réel positif.
$|x-a|=r \Leftrightarrow x=a-r$ ou $x=a+r$

Exemple

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x-6|=2$

Solution

Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation: $|x-6|=2$

$|x-6|=2 \Leftrightarrow x=6+2$ ou $x=6-2$

$\Leftrightarrow x=8$ ou $x=4$,

donc : $S_{\mathbb{R}}=\{8;4\}$

Résumé de la leçon

VII Résolution graphique d'une équation du type $|x-a|=r$ $(r>0)$

PROPRIÉTÉ

A et M sont les points d'abscisses respectives a et x d'une droite graduée. $|x-a|=r \Leftrightarrow AM=r$.



L'ensemble solution de l'équation $|x-a|=r$ est : $S_{\mathbb{R}}=\{a-r\,;\,a+r\}$.

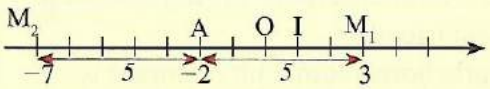


Exemple

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+2|=5$.

Solution

Je résous graphiquement l'équation : $|x+2|=5$.
A et M sont les points d'abscisses respectives -2 et x d'une droite graduée.
$|x+2|=5 \Leftrightarrow AM=5$.



Trouver graphiquement tous les nombres réels x tels que $|x+2|=5$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée ci-dessus tels que $AM=5$.
D'après le graphique ci-dessus, les nombres cherchés sont : -7 et 3. D'où : $S_{\mathbb{R}}=\{-7\,;\,3\}$.



VIII Résolution algébrique d'une inéquation du type $|x-a|\leq r$ $(r>0)$

PROPRIÉTÉ

a est un nombre réel, r est un nombre réel positif.
$|x-a|\leq r \Leftrightarrow a-r\leq x\leq a+r$.
L'ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}}$ de l'inéquation $|x-a|\leq r$ est : $[a-r\,;\,a+r]$.

Exemple

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $|x+2|\leq 3$.

Solution

$|x+2|\leq 3 \Leftrightarrow -2-3\leq x\leq -2+3$

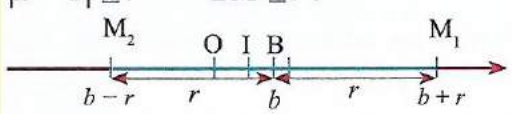
$\Leftrightarrow -5\leq x\leq 1$. Donc : $S_{\mathbb{R}}=[-5\,;\,1]$.

IX Résolution graphique d'une inéquation du type $|x-a|\leq r$ $(r>0)$



PROPRIÉTÉ

B et M sont les points d'abscisses respectives b et x d'une droite graduée.
$|x-b|\leq r \Leftrightarrow BM\leq r$.



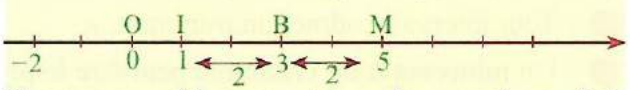
L'ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}}$ de l'inéquation $|x-b|\leq r$ est : $[b-r\,;\,b+r]$.

Exemple

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x-3|\leq 2$.

Solution

Je résous graphiquement l'inéquation : $|x-3|\leq 2$.
B et M sont les points d'abscisses respectives 3 et x d'une droite graduée. $|x-3|\leq 2 \Leftrightarrow BM\leq 2$



Trouver graphiquement tous les nombres réels x tels que $|x-3|\leq 2$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que $BM\leq 2$. D'après le graphique ci-dessus, les nombres cherchés sont ceux qui appartiennent à l'intervalle $[1\,;\,5]$. D'où : $S_{\mathbb{R}}=[1\,;\,5]$.

EXERCICES DE FIXATION

Définition d'un majorant d'un ensemble

1 Parmi les affirmations ci-dessous, indique celles qui sont correctes :

a « Un majorant d'un ensemble, s'il existe, est supérieur à tout élément de cet ensemble ».

b « Un majorant d'un ensemble, s'il existe, n'est pas nécessairement élément de cet ensemble ».

c « Un majorant d'un ensemble est le plus grand élément de cet ensemble ».

d « Tout intervalle borné admet un majorant ».

2 Pour chaque ensemble donné, indique un majorant parmi les nombres proposés.

1 $A=\left\{-1;-2;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$ a -1 ; b $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c 1

2 $B=\left]-8;2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a -9 ; b 2 ; c $\frac{7}{10}$

3 $C=]-2{,}5\,;3{,}7]\cap\mathbb{Z}$ a 5 ; b $3{,}7$; c $-2{,}5$

3

1 Donne un ensemble à quatre éléments dont $\sqrt{3}$ est un majorant.

2 Donne un ensemble à 5 éléments dont $-\frac{7}{3}$ est un majorant.

3 Donne un intervalle d'amplitude 0,2 dont $-\frac{1}{2}$ est un majorant.

4 Cite quatre majorants de l'ensemble $X=\left\{1-\frac{1}{n}/\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Définition du minorant d'un ensemble

4 Parmi les affirmations suivantes, indique celles qui sont correctes :

a « Tout intervalle admet un minorant. »

b « Un minorant d'un ensemble peut être le plus petit de cet ensemble. »

c « Un minorant, s'il existe, est un plus petit nombre qui n'est pas nécessairement dans cet ensemble. »

d « Un ensemble qui admet un minorant est dit minoré. »

5 Pour chaque ensemble donné, indique le ou les minorants parmi les nombres proposés.

1 $A=\left\{-3+\frac{1}{3\sqrt{2}}\,;0\,;1\,;2+\sqrt{2}\right\}$

a -4 ; b 5 ; c -3

2 $B=[-5+10^{-6}\,;5-10^{-6}[$ a 5 ; b -6 ; c -4

3 $C=[-8{,}57\,;8]\cap\mathbb{N}$ a -10 ; b 0 ; c 9

6

1 Donne un ensemble à quatre éléments dont 2 est un minorant.

2 Donne un ensemble à 3 éléments dont $-5{,}6$ est un minorant.

3 Donne trois minorants de l'ensemble $X=\left\{1-\frac{1}{n}/\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Définition du maximum d'un ensemble

7 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a « Le maximum d'un ensemble, lorsqu'il existe, est le plus petit élément de cet ensemble ».

b « Le maximum d'un ensemble est nécessairement un élément de cet ensemble ».

c « Tout intervalle borné admet un maximum ».

8 Parmi les ensembles ci-dessous, indique ceux qui admettent un maximum puis précise-le.

a $I=\left\{-\frac{22}{7};-\pi;\pi;\frac{22}{7}\right\}$; b $J=\left[-3-\frac{2}{\sqrt{2}};3-\frac{2}{\sqrt{2}}\right[$

c $K=\left\{1-\frac{1}{n}/\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ d $L=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]\cap\mathbb{N}$

Définition du minimum d'un ensemble

9 Parmi les affirmations suivantes, indique celles qui sont correctes.

a « Le minimum d'un ensemble, lorsqu'il existe, est le plus petit élément de cet ensemble. »

b « Le minimum, lorsqu'il existe d'un ensemble, est toujours un minorant de cet ensemble. »

10 Cite trois éléments d'un ensemble dont le minimum est $-\pi$.

11 Parmi les ensembles ci-dessous, indique ceux qui admettent un minimum puis précise-le.

a) $A = \{-\pi ; -\pi + 1 ; \pi ; \pi + 1\}$

b) $B =]-\frac{13}{3} ; \frac{13}{3}]$; c) $C =]-\frac{13}{3} ; \frac{13}{2}] \cap \mathbb{Z}$

Définition de la valeur absolue d'un nombre réel

12 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) « La valeur absolue d'un nombre réel a est le plus grand des deux nombres a et $-a$ ».

b) « Tout nombre réel admet une valeur absolue ».

c) « Tout nombre réel est la valeur absolue de ce nombre réel ».

d) « La valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive ».

13 Donne la valeur absolue de chacun des nombres réels suivants :

a) $\pi - 5$; b) $\pi - 1$; c) $2 - \sqrt{11}$; d) $-\frac{22}{7} - \pi$

Distance de deux nombres réels

14 Indique la bonne réponse parmi les affirmations suivantes :

1) La distance de a et b est $a - b$.
2) La distance de a et b est $b - a$.
3) La distance de a et b est $|a - b|$.
4) La distance de a et b est $|a| - |b|$.

15 Reproduis puis complète le tableau.

x	y	Distance de x et y
8	5	
-11	-9	
-20	40,5	

Propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel

16 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Deux nombres réels ayant même valeur absolue sont soit égaux, soit opposés.

b) $|x^3| = |x|x^2$.

c) $|2a - 3b| \leq 2|a| - 3|b|$.

d) $-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 2$.

Majorant d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

17 Dans chacun des cas suivants, détermine, lorsque cela est possible, un majorant de l'ensemble A.

a) $A = \left\{\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5}\right\}$

c) $A = \left[10 - \sqrt{7} ; 10 + \sqrt{11}\right]$

d) $A = \left\{0 ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \ldots ; \frac{n-1}{n}\right\} ; n \in \mathbb{N}^*$

e) $A = \left\{0 ; -\frac{1}{2} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{3}{4} ; \ldots ; \frac{1-n}{n}\right\} ; n \in \mathbb{N}^*$

f) $A = \left\{\sqrt{2} - 1 ; (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) ; (\sqrt{2} + 1)^2 ; (\sqrt{2} - 1)^2\right\}$

Minorant d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

18 Dans chacun des cas suivants, détermine lorsque cela est possible, un minorant de l'ensemble B.

a) $B = \left\{-\frac{1}{2} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{3}{4} ; -\frac{4}{5}\right\}$

c) $B = \left\{a ; a^2 ; \sqrt{a}\right\}$

d) $B = \left\{1 - \sqrt{2} ; (-\sqrt{2} - 1) ; (-\sqrt{2} - 1)^2\right\}$

19 Soit a un entier naturel non nul.

Détermine un minorant de l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}$.

10 Cite trois éléments d'un ensemble dont le minimum est $-\pi$.

11 Parmi les ensembles ci-dessous, indique ceux qui admettent un minimum puis précise-le.

a) $A = \{-\pi ; -\pi + 1 ; \pi ; \pi + 1\}$

b) $B =]-\frac{13}{3} ; \frac{13}{3}]$; c) $C =]-\frac{13}{3} ; \frac{13}{2}] \cap \mathbb{Z}$

Définition de la valeur absolue d'un nombre réel

12 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) « La valeur absolue d'un nombre réel a est le plus grand des deux nombres a et $-a$ ».

b) « Tout nombre réel admet une valeur absolue ».

c) « Tout nombre réel est la valeur absolue de ce nombre réel ».

d) « La valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive ».

13 Donne la valeur absolue de chacun des nombres réels suivants :

a) $\pi - 5$; b) $\pi - 1$; c) $2 - \sqrt{11}$; d) $-\frac{22}{7} - \pi$

Distance de deux nombres réels

14 Indique la bonne réponse parmi les affirmations suivantes :

1) La distance de a et b est $a - b$.
2) La distance de a et b est $b - a$.
3) La distance de a et b est $|a - b|$.
4) La distance de a et b est $|a| - |b|$.

15 Reproduis puis complète le tableau.

x	y	Distance de x et y
8	5	
-11	-9	
-20	40,5	

Propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel

16 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Deux nombres réels ayant même valeur absolue sont soit égaux, soit opposés.

b) $|x^3| = |x|x^2$.

c) $|2a - 3b| \leq 2|a| - 3|b|$.

d) $-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 2$.

Majorant d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

17 Dans chacun des cas suivants, détermine, lorsque cela est possible, un majorant de l'ensemble A.

a) $A = \left\{\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5}\right\}$

c) $A = \left[10 - \sqrt{7} ; 10 + \sqrt{11}\right]$

d) $A = \left\{0 ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \ldots ; \frac{n-1}{n}\right\} ; n \in \mathbb{N}^*$

e) $A = \left\{0 ; -\frac{1}{2} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{3}{4} ; \ldots ; \frac{1-n}{n}\right\} ; n \in \mathbb{N}^*$

f) $A = \left\{\sqrt{2} - 1 ; (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) ; (\sqrt{2} + 1)^2 ; (\sqrt{2} - 1)^2\right\}$

Minorant d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

18 Dans chacun des cas suivants, détermine lorsque cela est possible, un minorant de l'ensemble B.

a) $B = \left\{-\frac{1}{2} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{3}{4} ; -\frac{4}{5}\right\}$

c) $B = \left\{a ; a^2 ; \sqrt{a}\right\}$

d) $B = \left\{1 - \sqrt{2} ; (-\sqrt{2} - 1) ; (-\sqrt{2} - 1)^2\right\}$

19 Soit a un entier naturel non nul.

Détermine un minorant de l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}$.

Maximum d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

20 Dans chacun des cas suivants, justifie si le nombre a est le maximum de l'ensemble I.

1. $a = 2{,}66$; $I = [-2 ; \frac{8}{3}]$
2. $a = 5\sqrt{2}$; $I = [-5\sqrt{2} ; \sqrt{50}]$
3. $a = -3{,}14$; $I = \{-\pi ; -\pi + 1 ; -\pi + 2\}$
4. $a = 3$; $I = [-\frac{7}{4} ; \frac{18}{5}] \cap \mathbb{Z}$

Minimum d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

21 Dans chacun des cas suivants, justifie si le nombre b est le minimum de l'ensemble F.

1. $b = -1$; $F = \left[-1 ; \frac{3}{2}\right[$
2. $b = -\frac{3}{2}$; $F = \left]-\frac{3}{2} ; 1\right[$
3. $b = -3$; $F = \left[-\frac{7}{2} ; 5\right[\cap \mathbb{Z}$

22 Soit a un nombre entier naturel premier.
Détermine le minimum des diviseurs de a dans $\mathbb{N}$.

Résolution algébrique d'une équation du type $|x - a| = r$

23 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|x - 1{,}5| = 2{,}5$; b) $\left|\frac{3}{2} + x\right| = \frac{7}{3}$; c) $|2 - x| = 5$.

24 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $3|x - 1| = 6$; b) $\left|\frac{3}{5}x - 3\right| = 1$; c) $|2x + 1| = 2$.

Résolution graphique d'une équation du type $|x - a| = r$

25 Résous graphiquement les équations suivantes :

a) $|x + 2| = 3$; b) $|5 - x| = 2$; c) $|3x - 9| = 7{,}2$.

26 Résous graphiquement les équations suivantes :

a) $3|x - 1{,}6| = 1{,}8$; b) $\left|\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right| = 4{,}2$.

Résolution graphique d'une équation du type $|x - a| < r$

27 Résous graphiquement les inéquations suivantes :

a) $|x - 1{,}2| < 2$; b) $|3 + x| < \frac{3}{2}$; c) $|-x - 1| < 4$

28 Résous graphiquement les inéquations suivantes :

a) $|3x + 6| < 3{,}6$ b) $|-1{,}2x - 2{,}4| < 7{,}2$

29 Résous graphiquement les inéquations suivantes :

a) $|x - 1| < 5$; b) $|x + 4| < 3$; c) $|3 - x| < 1$

30 Résous graphiquement les inéquations suivantes :

a) $2|x| < 6$; b) $|2x - 1| < 4$ c) $|-6 - x| \leq 3\sqrt{2}$

Démonstration d'une propriété en utilisant le raisonnement par l'absurde

31 En utilisant le raisonnement par l'absurde, démontre que l'intervalle $[2 ; 5[$ n'a pas de maximum.

32
Soit p un nombre entier naturel.
En utilisant le raisonnement par l'absurde, démontre que si p^2 est pair, alors p est pair.

Démonstration d'une propriété en utilisant un raisonnement inductif ou déductif

33 On considère l'équation
$(E) : x \in \mathbb{R}, |3 - 1{,}5x| = \sqrt{4{,}5}$.

a) Démontre que : (E) $\Leftrightarrow |x - 2| = \sqrt{2}$.

b) Déduis-en les solutions de (E).

EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 Soit n un nombre entier naturel.
Détermine lorsque cela est possible, un minorant, un majorant, le maximum et le minimum de chacun des ensembles suivants.

a) $[n - 1 ; n]$; b) $[-n ; -n + 1]$ c) $\left\{\frac{n-2}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$

2 Démontre que pour tout nombre réel x, on a :

a $|5x-7| \leq |2x-8|+|3x+1|$;

b $|3x^2+x| = 3|x^2|+|x|$.

3 Pour chaque expression, donne une écriture simplifiée lorsque x appartient à l'ensemble E.

a $A = \left|\frac{2x}{3}\right| + \left|\frac{-3x}{2}\right|$ et E = [0 ; +∞[

b B = 3| x + 2| − 2| x − 2| et E = [−2 ; 2]

4 Soit a, b et c trois nombres réel quelconques. Démontre que $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.

5 Soit E l'ensemble des solutions de l'inéquation $|1-3x| \leq 2+\sqrt{3}$.

Détermine un minorant et le maximum de E.

6 Soit A, B, C et M quatre points, d'abscisses respectives 7 ; − 4 ; 2 et x sur une droite graduée.

1 Exprime les distances AM, BM et CM en fonction de x.

2 Calcule les distances AB, BC et AC.

3 Calcule AM, BM et CM lorsque $x = -3$.

7 Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a $\begin{cases} |x-4| \leq 3 \\ |x-3| \leq 4 \end{cases}$ b $\begin{cases} d(x\,;-1) < 2 \\ d(3\,;x) < 1 \end{cases}$

8

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel c'est-à-dire, qu'il s'écrit sous la forme irréductible $\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers naturels non nuls.

a Justifie que : $p^2 = 2q^2$.

b Déduis de 32 et de a que p est pair.

c Justifie que q est pair.

d Conclus.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 On considère un nombre réel x tel que :

$2{,}325 \leq x \leq 2{,}46$.

1 Justifie que :
si $x \in [2{,}325\,;\,2{,}46]$, alors $x \in [2{,}3\,;\,2{,}46]$.

2 Traduis cette appartenance à l'aide d'une valeur absolue.

2 Un carré a pour côté 12,4 cm. Mais la règle utilisée pour effectuer la mesure ne permet qu'une précision de 0,1 cm. Ainsi, si x est le côté exact du carré, on peut écrire $|x - 12{,}4| \leq 0{,}1$.

1 Détermine un encadrement de l'aire de ce carré par deux entiers.

2 Traduis cet encadrement à l'aide d'une valeur absolue.

3 Pour chaque réel x donné, établis une inégalité sous la forme : $|x - c| \leq r$; $c \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^*_+$

a $x \in [669\,;\,976{,}6]$.

b $x \in [5238\,;\,5369]$.

3 On connait l'imprécision de la mesure en cm des côtés x et y d'un rectangle :
$|x - 4{,}1| \leq 0{,}1$ et $|y - 3{,}4| \leq 0{,}3$.

1 Détermine un encadrement de x, de y et du périmètre P de ce rectangle.

2 Établis une égalité sous la forme : $|P - c| \leq r$ où r est un entier .
Déduis-en une valeur arrondie du périmètre et la précision de cet arrondi.

4 Résous graphiquement l'équation : $|x - 1| = |x + 3|$.

5 Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|1 - x| = |2x - 3|$.

6 On considère l'expression A telle que :

A = |x + 2| + |x − 5|.

1 Recopie et complète le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$							
$\lvert x-5\rvert$							
A							

2 Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : A = 11.

3 Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x + 2| - 2|x - 5| = 5$ en utilisant un tableau comme à la question 1.

7 Si a et b sont deux nombres réels, on appelle minimum de a et b, et on note $\min(a\ ;\ b)$, le plus petit de ces deux nombres. On appelle maximum de a et b, et on note $\max(a\ ;\ b)$, le plus grand de ces deux nombres.

1

a) Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.
Compare les nombres réels $\min(a\ ;\ b)$ et $\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$

b) Compare ces mêmes quantités lorsque $a > b$.

c) Conclus.

2

a) Établis une relation entre $\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ et $\max(a\ ;\ b)$ en raisonnant comme en 1).

b) Démontre que : $\min(a\ ;\ b) + \max(a\ ;\ b) = a + b$.

SITUATION D'ÉVALUATION

1 Deux élèves, Bessel et Claude, habitent la même rue rectiligne à 400 m l'un de l'autre.
Les parents de Claude lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 300 m de la maison. Ceux de Bessel demandent de ne pas s'éloigner de plus de *200 m*.
Ils souhaitent déterminer la portion de la rue où ils peuvent jouer ensemble sans désobéir à leurs parents. Soucieux, ils demandent la contribution de leurs camarades.

1 Fais une figure dans laquelle tu représentes la rue par une droite graduée de repère (O, A). (Prends 100 m pour 1 cm). La maison de Claude est en A et celle de Bessel est en C, avec A un point du segment [OC].

2 Traduis les phrases suivantes en langage mathématique.

a) « Les parents de Claude lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 300 m de la maison ».

b) « Les parents de Bessel lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 200 m de la maison ».

3 Résous les inéquations suivantes :

a) $|x-1| \leq 3$;

b) $|x-5| \leq 2$.

4 Déduis-en la portion de la rue où les deux élèves peuvent jouer ensemble sans désobéir à leurs parents.

2 En début d'année scolaire, une classe de 2nde C d'un lycée commande chez un ferronnier une poubelle ayant la forme d'un pavé droit.
La classe souhaite avoir une poubelle dont le volume v est tel que $|v - 2{,}25| \leq 0{,}45$.
Le ferronnier donne alors avec précision, en mètres les dimensions de ce pavé :

- Longueur (L) : $|L - 2| \leq 0{,}1$;
- Largeur (l) : $|l - 1{,}5| \leq 0{,}15$;
- Hauteur (h) : $|h - 0{,}75| \leq 0{,}01$.

1 Détermine un encadrement de chacune des dimensions L, l et h.

2

a) Détermine un encadrement du volume de ce pavé.

b) Déduis que : $v \in [1{,}8\ ;\ 2{,}7]$, puis établis une égalité sous la forme : $|v - a| \leq r$ où r est un nombre décimal.

3 Dis si le ferronnier pourra satisfaire cette classe. Justifie ta réponse.

Représentation des nombres réels



Lorsqu'un nombre réel est positif, on peut avoir une troncature sous la forme d'un certain nombre de chiffres avant la virgule formant la partie entière ; et des chiffres après la virgule formant la partie décimale.

Par exemple $2 = 2{,}0000\ldots$ mais $\pi = 3{,}1415\ldots$ et pour ce dernier nombre, l'écriture ne peut pas s'arrêter.

Les chiffres après la virgule sont :

- le nombre de **dixièmes** ;
- puis le nombre de **centièmes** ;
- puis le nombre de **millièmes** ;
- etc.

Les nombres réels négatifs s'écrivent sous la même forme, mais avec un signe « **moins (–)** » devant.



Leçon 2

POLYNÔMES ET FRACTION RATIONNELLES

Habiletés et contenus

- **Connaître** : la définition d'un polynôme ; la définition du degré d'un polynôme ; la définition d'une fraction rationnelle ; la définition d'un zéro d'un polynôme ; la propriété relative au produit de polynômes ; la propriété relative à la somme de polynômes ; la propriété relative à l'égalité de deux polynômes ; les produits remarquables ; le théorème fondamental relatif à la factorisation par $x - \alpha$; les différentes écritures d'une fraction rationnelle.
- **Reconnaître** : le coefficient d'un polynôme ; la forme factorisée d'un polynôme.
- **Vérifier** qu'un nombre réel donné est zéro d'un polynôme.
- **Effectuer** : la somme de deux polynômes ; le produit de deux polynômes.
- **Écrire** la forme canonique d'un polynôme du second degré.
- **Factoriser :** un polynôme en utilisant les égalités remarquables ; un polynôme du second degré en utilisant la forme canonique ; par $x - a$ (a étant un zéro) en utilisant la méthode coefficients indéterminés ou la méthode de la division euclidienne.
- **Étudier** le signe d'un polynôme du second degré (en utilisant une expression déjà factorisée).
- **Transformer** : les fractions rationnelles ; par la méthode d'identification.
- **Traiter** une situation faisant appel aux polynômes ou aux fractions rationnelles.

Situation d'apprentissage

Pour être sélectionné à participer à un tour cycliste, des coureurs doivent parcourir un circuit avec une vitesse moyenne (aller-retour) supérieure ou égale à 28 km/h.
Un coureur parcourt ce circuit à la vitesse de 35 km/h à l'aller. Fatigué, il se demande à quelle vitesse minimale il doit faire le trajet retour pour qu'il soit sélectionné.



Activité 1 Polynôme

On donne les expressions suivantes dans lesquelles x est un nombre réel :

$P(x) = 5x$; $Q(x) = -9x^2$; $R(x) = 2x^3$; $S(x) = 5$ et $T(x) = 7x^4$.

On pose :

$A(x) = P(x) + R(x)$;

$B(x) = S(x) + Q(x) + R(x)$ et

$C(x) = T(x) + P(x) + S(x)$.

1. Calcule : $A(x)$.
2. Calcule : $B(x)$.
3. Calcule : $C(x)$.

Récapitulatif

$Q(x) = -9x^2$ est un monôme. -9 est le coefficient du monôme $Q(x)$ et 2 est son degré.

$P(x)$, $R(x)$, $S(x)$ et $T(x)$ sont des monômes.

$A(x)$ est un polynôme. C'est la somme de plusieurs monômes.

$B(x)$ et $C(x)$ sont aussi des polynômes.

Activité 2 Propriété fondamentale



On donne les polynômes suivants :

$P(x) = 2x + 3x^2 + 7x - 15x - x^2 + 6x^3$ et

$Q(x) = 3x^2 - 8x + 4 - 23x^2 + 12x + 5x^3$.

1. Mets $P(x)$ et $Q(x)$ sous la forme $a + bx + cx^2 + dx^3$, $(d \neq 0)$.
2. Trouve une autre écriture de $P(x)$ et $Q(x)$ sous la forme $a + bx + cx^2 + dx^3$.
3. Dis ce que tu remarques.

Récapitulatif

Les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ s'écrivent de façon unique sous la forme $a + bx + cx^2 + dx^3$, $(d \neq 0)$. 3 est appelé le degré du polynôme $P(x)$ et on note : $d°P = 3$.

Cette écriture unique $a + bx + cx^2 + dx^3$ est appelée la forme réduite du polynôme.

a est le terme contant.

bx est le terme de degré 1 (b est non nul) ;

cx^2 est le terme de degré 2(c est non nul) ;

dx^3 est le terme de degré 3(d est non nul).

Activité 3 égalité de deux polynômes

On donne les polynômes suivants :

$R(x) = x^3 - 4x + 7$ et $S(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 4x + d + 2x^2$

1. Détermine les nombres réels a, b, c et d pour que $R(x)$ soit égal à $S(x)$.
2. Détermine les conditions pour que deux polynômes quelconques soient égaux.

Récapitulatif

$R(x)$ et $S(x)$ sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Activité 4 Somme et produit de polynômes

On donne les polynômes suivants : $P(x) = -3 + 2x^2 + 7x^3$; $Q(x) = 25 + x + 8x^2 - 5x^3$ et $R(x) = 4 + 5x^3$

On pose : $A(x) = P(x) + Q(x)$; $B(x) = Q(x) + R(x)$; $C(x) = P(x) \times R(x)$.

1. Calcule $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$.
2. a) Justifie $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ sont des polynômes. b) Précise le degré de chacun de ces polynôme.
   c) Compare $d°C$ et $d°P + d°R$.
3. On considère le polynôme : $5 - 2x^2 + 4x^3 - 4x^3 - 5 + 2x^2$.

Dis si oui ou non tu peux donner un degré à ce polynôme.

Récapitulatif

La somme de polynômes est un polynôme.

Le degré de la somme de deux polynômes est toujours inférieur ou égal au plus grand degré parmi les deux polynômes lorsque cette somme est non nulle.

Le produit de polynômes est un polynôme.

Le degré du produit de deux polynômes est égal à la somme des degrés des polynômes.

Le polynôme nul n'a pas de degré.

Activités de découverte

Activité 5 Égalités remarquables

a et b sont des nombres réels

Développe :

1. $(a+b)^2$
2. $(a-b)^2$
3. $(a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3$
5. $(a-b)^3$
6. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
7. $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Récapitulatif

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + b^3 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.



Activité 6 Zéro d'un polynôme



On donne le polynôme suivant :

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

1. Calcule : $P(-3)$; $P(0)$; $P(1)$; $P(3)$ et $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. Identifie des nombres réels a pour lesquels $P(a) = 0$.



Récapitulatif

$P(-3) = 0$; -3 est appelé zéro du polynôme P.
1 est aussi un zéro du polynôme P.

Activité 7 Théorème fondamental de la factorisation

On donne le polynôme suivant :
$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ et a un nombre réel.

1. On suppose que a est un zéro de P.
   a) Démontre qu'il existe un polynôme Q tel que : $P(x) = (x-a)Q(x)$.
   b) Détermine le degré de Q en fonction du degré de P.
2. On suppose qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$.
   Démontre que a est un zéro de P.

Récapitulatif

a est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Activité 8 Méthode des coefficients indéterminés

On donne le polynôme suivant :
$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$.

1. Justifie que 1 est un zéro de P.
2. Soit le polynôme Q tel que : $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $P(x) = (x-1)Q(x)$.
   a) Développe $(x-1)Q(x)$.
   b) En utilisant la consigne a), détermine a, b et c.

Récapitulatif

La méthode utilisée pour déterminer le polynôme Q est appelée la méthode des coefficients indéterminés.

Activité 9 Méthode de la division euclidienne



On donne le polynôme P tel que : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$.

1. a) Détermine les polynômes Q_1 et R_1 tels que : $P(x) = (x^2+2)Q_1(x) + R_1(x)$
   b) Détermine le degré de R_1.
   c) Détermine des polynômes Q_2 et R_2 tels que : $R_1(x) = (x^2+2)Q_2(x) + R_2(x)$
   d) Détermine le degré de R_2.
2. Détermine les polynômes Q et R tels que :
   $P(x) = (x^2+2)Q(x) + R(x)$ et $d°R < d°(x^2+2)$.

$$\begin{array}{l|l} 2x + 5x - 4x - 3 & x^2 + 2 \\ \underline{2x^3 + 4x} & \hline 2x + 5x \\ \quad 5x^2 - 8x - 3 & \\ \quad \underline{5x^2 + 10} & \\ \quad\quad -8x - 13 & \end{array}$$

Récapitulatif

a est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Activité 10 Signe de $ax + b$, $(a \neq 0)$

1. Résous l'inéquation $ax + b > 0$.
2. Déduis-en le signe de $ax + b$ sur $\mathbb{R}$.

Récapitulatif

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de a



Activité 11 Forme canonique d'un polynôme du second degré

On considère le polynôme P défini par :

$P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

Vérifie que : $P(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.

Récapitulatif

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est la forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

Activité 12 Factorisation d'un polynôme du second degré

On considère le polynôme P défini par :

$P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

Posons : $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Justifie que si $\Delta < 0$, alors P n'est pas factorisable.
2. Justifie que si $\Delta \geq 0$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.



Récapitulatif

- *si $\Delta < 0$, alors P n'est pas factorisable.*
- *si $\Delta \geq 0$, alors P est factorisable.*

Activité 13 Signe d'un polynôme du second degré

Reprenons les données de l'activité précédente.

On considère le polynôme P défini par :

$P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

1. Justifie que si $\Delta \leq 0$, alors P est du signe de a.
2. On suppose $x_1 < x_2$.

   Complète le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$		0	|	
$x - x_2$		|	0	
$(x - x_1)(x - x_2)$		0	0	
$P(x)$		0	0	



Récapitulatif

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

Activité 14 Fonction rationnelle

On considère les polynômes P et R tels que :

$P(x) = 3x^2 + 5x + 7$ et $R(x) = x + 2$.

On pose : $Q(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$.

Détermine les nombres réels a, b et c tels que :

$Q(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.



Récapitulatif

- *Le quotient de deux polynômes est une fraction rationnelle.*
- $\frac{3x^2+5x+7}{x+2} = 3x - 1 + \frac{9}{x+2}$.

Résumé de la leçon



I POLYNÔMES

1. Définitions

- Soient a un nombre réel et p un nombre entier naturel.
  L'expression ax^p est appelée monôme à variable réelle x.
- Si a est non nul alors le monôme ax^p est de degré p et de coefficient a
- On appelle polynôme toute expression pouvant s'écrire comme somme de monômes.



Propriété et définition

Tout polynôme P non nul possède une unique écriture de la forme :
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 sont des nombres réels tels que a_n soit différent de zéro.
Le nombre entier naturel n est appelé le degré de P et noté d°P.
Les nombres réels a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 sont appelés les coefficients du polynôme P.
$a_k x^k$ est appelé terme de degré k si le nombre réel a_k est non nul.
Le polynôme nul n'a pas de degré.

Propriété

Deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si :

- Ils ont le même degré ;
- Les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Propriété

- La somme de deux polynômes est un polynôme.
- Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme.
- Si les polynômes P et Q sont non nuls alors d°[PQ] = d°P + d°Q.

2. Égalités remarquables

Soient a et b deux nombres réels.

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

3. Zéro d'un polynôme

Définition

On appelle zéro d'un polynôme P, tout nombre réel a tel que $P(a) = 0$.



II FACTORISATION PAR $x - a$, $a \in \mathbb{R}$

1. Théorème fondamental de la factorisation

a est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que : $P(x) = (x-a)Q(x)$.

2. Méthode des coefficients indéterminés

Soit un polynôme P défini par : $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (les coefficients A, B, C et D sont connus avec A non nul) admettant le nombre réel $\propto$ comme zéro.
Il s'écrit : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où Q est un polynôme du second degré à déterminer.

Déterminer Q, c'est trouver ces coefficients. Cela peut se faire par la méthode dite des coefficients indéterminés. En voici une description :

- On écrit $Q(x)$ sous la forme générale des polynômes du second degré :
  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
- On développe et on réduit l'expression :$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$. On obtient :
  $ax^3 + (b - \alpha a)x^2 + (c - \alpha b)x - \alpha c$
- Ensuite on identifie les polynômes $ax^3 + (b - \alpha a)x^2 + (c - \alpha b)x - \alpha c$ et $Ax^2 + Bx + C$.

Cette identification se traduit par le système d'équations suivant : $\begin{cases} a = A \\ b - \alpha c = B \\ c - \alpha b = C \\ \alpha c = D \end{cases}$

- On résout le système ci-dessus pour déterminer les nombres a, b et c.

4. Méthode de la division euclidienne

Soit $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (les coefficients A, B, C et D sont connus avec A non nul) admettant le nombre réel α comme zéro. Il s'écrit : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où Q est un polynôme du second degré à déterminer.

Déterminer Q, c'est trouver ces coefficients.

Cela peut se faire par une division euclidienne. En voici une description :

- On effectue la division euclidienne de $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par $x - \alpha$.

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	$x - \alpha$
Reste = 0	$Q(x)$

- Le quotient de cette division nous donne $Q(x)$.
- Remarquons que le reste est nul car α est un zéro de P.



III POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

1. Définition

Un polynôme du second degré est un polynôme de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels et a est non nul.

2. Forme canonique d'un polynôme du second degré

Propriété et définition

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, un polynôme du second degré.

$P(x)$ peut se mettre sous la forme $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ est appelé la forme canonique de P.



Résumé de la leçon

3. Factorisation d'un polynôme du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

Posons : $\Delta = b^2 - 4ac$; $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta \geq 0$, alors P est factorisable et $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- Si $\Delta < 0$, alors P n'est pas factorisable.



4. Signe d'un polynôme du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

- si $\Delta \leq 0$, alors P est du signe de a.
- si $\Delta > 0$, alors on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0		Signe de a

III FRACTIONS RATIONNELLES



Définition

Le quotient de deux polynômes est une fraction rationnelle.

Remarque

Tout polynôme est une fraction rationnelle.



Historique

Le sens le plus simple et le plus utilisé autrefois du mot polynôme est somme de monômes. C'est une expression littérale quelconque de la forme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$
où a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 sont des nombres réels tels que a_n soit différent de zéro.
X est un objet mathématique quelconque appelé indéterminée.
À tout polynôme à une indéterminée on peut associer plusieurs fonctions polynômiales en remplaçant X par un nombre réel, une application, une matrice, etc.
Les fonctions polynômes sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 sont des nombres réels tels que a_n soit différent de zéro.
Au niveau de la classe de 2nd C, on ne distinguera pas polynôme et fonction polynôme.

EXERCICES DE FIXATION

Polynômes

1 Relie chaque polynôme à son zéro.

x^2+x-12	-1
$(2x-1)^2-1$	$\sqrt{2}$
x^3+3x^2-x-3	-5
x^2-1	0
$3x^2+16x+5$	-4
x^2-2	

2 Réponds par vrai ou par faux

1. L'expression $ax+b$ (avec a et b deux nombres réels) est un polynôme.
2. L'expression $\dfrac{1}{4x^2}$ est un monôme de degré 5.
3. Comme $\dfrac{3x^4+5x^2+12x}{x}=3x^3+5x+12$ ·

donc $\dfrac{3x^4+5x^2+12x}{x}$ est un polynôme de degré 3.

4. Le polynôme x^4-5x+x^6-1 est de degré 4.
5. Le nombre 1 est un zéro du polynôme x^5-x^3+2x-1.
6. La somme de deux polynômes de degré 3 est un polynôme de degré 3.

Propriété fondamentale

3 Réponds par vrai ou par faux

1. Si α est un zéro d'un polynôme P alors $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$.
2. Si $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$ alors α est un zéro de P.
3. Le polynôme $x^2-2x-15$ est divisible par $x+3$.
4. $7x^4-3x^2-2x+2$ n'est pas divisible par $x-1$.

4 Soit le polynôme H tel que : $H(x)=-3x^3-x^2-4x+4$.

1. Justifie que $H(x)=x[x(-3x+1)-4]+4$.
2. Calcule : $H\left(\dfrac{2}{3}\right)$.
3. Justifie qu'il existe un polynôme du second degré G tel que : $H(x)=(-3x+2)G(x)$.
4. Recopie la bonne réponse puis justifie : le polynôme G est égal à :
   - a $-3x^2+4$
   - b x^2-4
   - c x^2+x+2

5 On donne les deux polynômes tel que :
$P(x)=-3x^4+5x^3-2x-1$ et
$Q(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$.
Détermine les nombres réels a, b, c, d, e et f pour que les polynômes P et Q soient égaux.

6 Soit le polynôme P tel que : $P(x)=6x^3-7x^2+1$.

1. Vérifie que $P(x)=x[x(6x-7)]+1$.
2. A l'aide de l'égalité ci-dessus, calcule :

$$P\left(-\frac{1}{3}\right);\ P\left(\frac{1}{2}\right);\ P\left(\frac{7}{3}\right).$$

7 Soient P et Q deux polynômes quelconques.
« Si $P(-2)=Q(-2)=0$ et si $P(5)=Q(5)=0$ alors les polynômes P et Q sont égaux. »
A travers un contre-exemple, prouve que la proposition ci-dessus est fausse.

Produit et somme de deux polynômes

8 On donne : $P(x)=4x^2-3x+2$ et $Q(x)=-5x^4-4x^2+12x+5$.

1. Calcule : $P(x)+Q(x)$; $Q(x)-P(x)$.
2. Calcule : $P(x)Q(x)$.

Égalités remarquables

9 Recopie la bonne réponse :

1. $(x-3)(x^2+3x+9)$ est égal à :
   - a x^3+27 ; b x^3-27 ; c $(x-3)(x+9)$
2. x^3+8 est égal à :
   - a $(x+2)(x^2+4)$; b $(x+2)(x^2-2x+4)$
   - c $(x+2)(x^2+2x+4)$

10 Factorise les polynômes suivants :

1. $(2x+1)^2-16$
2. $9x^2+6x+1$
3. $25x^2-20x+4$
4. $(x+4)^3-(2x+5)^3$
5. $27x^3+216$
6. x^3-3x^2+3x-1
7. $x^3+9x^2+27x+27$

11 Développe les expressions suivantes :

1. $(\sqrt{2}x-4)^3$
2. $(2x+1)^3$
3. $\left(\frac{1}{2}x-6\right)$
4. $\left(\frac{x}{7}+7\right)^2$

Zéro d'un polynôme

12 Réponds par vrai ou par faux.

1. 0 peut-être le zéro d'un polynôme.
2. 0 est un zéro de x^5-x^3+2x+5.
3. -2 est un zéro de $(x-2)(x^2+3x+2)$.
4. Si -3 est zéro d'un polynôme P alors $P(x)=(x+3)^2$.
5. x^2+2x+1 n'a pas de zéro.

13

1. Parmi les nombres ci-dessous, identifie un zéro du polynôme F défini par : $F(x)=-3x^2-5x+2$.
   0 ; 1 ; -2 ; -1
2. Parmi les nombres ci-dessous, identifie les zéros du polynôme P tel que : $P(x)=(2x-3)(x+1)(x-5)$.
   1 ; -3 ; -1 ; 2 ; 5 ; -7 ; 0 ; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$.

14

1. Détermine les zéros éventuels des polynômes P et Q tels que :
   a. $P(x)=x^2+6x+5$.
   b. $Q(x)=16x^2-8x-3$.
2. Détermine tous les zéros du polynôme $G(x)=(x+2)(x^2+8x+15)$.

Forme canonique

15 Réponds par vrai ou par faux.

1. Tout polynôme du second degré admet une forme canonique.
2. Tout polynôme du second degré écrit sous forme canonique est factorisable.
3. La forme canonique d'un polynôme du second degré permet de déterminer (s'ils existent) les zéros de ce polynôme.
4. La forme canonique d'un polynôme du second degré permet (si possible) de factoriser ce polynôme.
5. Tout polynôme du second degré écrit sous forme canonique est positif.
6. La forme canonique d'un polynôme du second degré permet d'étudier le signe de ce polynôme.
7. On peut trouver les zéros d'un polynôme du second degré sans utiliser la forme canonique.

16 Parmi les polynômes suivants, recopie ceux qui sont écris sous forme canonique.

1. x^2-1 ;
2. $2x^2+5x$;
3. $44x^2-5x+12$;
4. $(x-1)^3-4$;
5. $3-4x^2$.

17 Relie chaque polynôme de gauche à sa forme canonique de droite.

x^2-x+5	x^2-9
$(2x-1)^2+10$	$3(x+1)^2-11$
$-x^2+3x+1$	$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$
$2x^2-1$	$2x^2-1$
$3x^2+6x-8$	$-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$
x^2-9	$(2x-1)^2+10$

Factorisation d'un polynômes du second degré

18 Relie chaque polynôme à sa forme factorisée si possible.

x^2-25	$(x+8)(x-8)$
x^2+4x-5	$(1-3x)(1-x)$
$2x^2+5x+3$	$(x-4)(x+4)$
x^2-16	$(x+5)(x-5)$
$3x^2-4x+1$	$(x-1)(x+5)$
	$2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+1)$

19 Réponds par vrai ou par faux.

1. x^2+16 n'est pas factorisable.
2. $(1-3x)^2-36$ est factorisable.
3. La forme factorisée de x^2+2^2 est $(x+2)(x-2)$.
4. $15x(x+15)$ est une forme factorisée.
5. Le polynôme $-2x^2-5x+3$ a deux zéros que sont : $\frac{1}{2}$ et -3. Sa forme factorisée est donc $(x-\frac{1}{2})(x+3)$.

20 Détermine si possible la forme factorisée de chacun des polynômes suivants :

❶ x^2-x-6 ; ❷ x^2-4x+7 ; ❸ $-2x^2-5x+3$

❹ $1-4(x+5)^2$; ❺ $-x^2+9x+10$

Signe d'un polynômes du second degré

21 Réponds par vrai ou par faux.

❶ Le polynôme $-x^2-7x-12$ est négatif quelque soit x dans $\mathbb{R}$.

❷ Le polynôme $(x+3)^2+9$ est positif quelque soit x dans $\mathbb{R}$.

❸ Tout polynôme du second degré qui n'a pas de zéro est positif.

❹ Le polynôme $-x^2-1$ est strictement négatif quelque soit x dans $\mathbb{R}$.

❺ Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un polynôme du second degré admettant x_0 et x_1 pour zéros avec $x_0 < x_1$. $P(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]x_0$

22 Étudie le signe des polynômes suivants.

❶ $P(x) = -4(x-1)^2$ ❷ $Q(x) = 3(-x+1)^2$

❸ $R(x) = 2(-x-7)^2+5$ ❹ $S(x) = -(x+10)^2-13$

❺ $U(x) = -2x^2-7x+4$ ❻ $V(x) = a(1-3x)(x+2)$

où a est un nombre réel non nul.

Division euclidienne

23 Détermine par la division euclidienne les nombres réels a, b, c et d tels que :

$-3x^4-11x^3-4x^2+20x+16 = (x+2)(ax^3+bx^2+cx+d)$

Méthode des coefficients indéterminés

24 Détermine par la méthode des coefficients indéterminés, les nombres réels a et b tels

$x^3+4x^2-11x-30 = (x+5)(x^2+ax+b)$

Fonction rationnelle

25 Réponds par vrai ou par faux.

❶ Tout polynôme est une fraction rationnelle.

❷ Toute fraction rationnelle est un polynôme

❸ L'expression $\dfrac{\sqrt{x}+5x^2-x-1}{2x-1}$ est une fraction rationnelle.

❹ L'expression $\dfrac{1}{1-5x}$ est une fraction rationnelle.

26

❶ Effectue la division euclidienne de $3x^2+2x-1$ par $3x-1$.

❷ Simplifie la fraction rationnelle : $\dfrac{3x-1}{3x^2+2x-1}$.

27

❶ Détermine les nombres réels a et b tels que pour tout x différent de 0 et 1, $\dfrac{x-4}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.

❷ Détermine les nombres réels a, b et c tels que pour tout x différent de -1,

$$\frac{2x^2-x+1}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 On donne le polynôme P tel que :

$P(x) = -4x^3-7x^2+142x-35$.

❶ Vérifie que $P(5) = 0$.

❷ Détermine le polynôme Q tel que $P(x) = (x-5)Q(x)$.

❸ Écris $P(x)$ sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré.

❹ Étudie le signe de $P(x)$.

❺ ⓐ Sans calculer $P(-2019)$, détermine son signe.

ⓑ Justifie ta réponse.

2 On donne la fraction rationnelle suivante :

$$E(x) = \frac{x^3+7x^2+7x-15}{x^3+9x^2+23x+15}.$$

❶ Vérifie que 1 est un zéro de $x^3+7x^2+7x-15$ et que -1 est zéro de $x^3+9x^2+15+23x+15$.

❷ Détermine les conditions d'existence de $E(x)$.

❸ Simplifie $E(x)$.

❹ Démontre que : $E(\sqrt{5}) = \dfrac{7-2\sqrt{2}}{4}$.

Les exercices

3 Détermine la forme canonique puis les zéros éventuels de chacun des polynômes du second degré suivants :

1. x^2+4x-5
2. $x^2+10x+120$
3. $16x^2+8x+1$
4. x^5+6x+4

4 Étudie le signe de chacun des polynômes suivants :

1. $(x-3)^2-16$
2. $-(2x-5)^2-81$
3. $1-(5x+3)^2$
4. $4x^2+4x+7$

5 À l'aide de produits remarquables, factorise chacun des polynômes suivants :

1. x^3-8
2. $27x^3+1$
3. $9x^2-12x+4$
4. $8x^3+12x^2+6x+1$

6 Réponds par vrai ou pas faux puis justifie ta réponse.

1. 2 est un zéro de x^3-5x^2-4x+4.
2. Si -5 est un zéro du polynôme P alors P est divisible par $x+5$.
3. Tout polynôme de degré 2 est strictement positif.
4. L'écriture $(2x+5)^2$ est une forme canonique.
5. L'expression $\frac{1}{14}x^5$ est un monôme.
6. L'expression $(2x+5)^2-1$ est factorisable.
7. L'expression $\frac{1}{2x^2+2x-1}$ est une fraction rationnelle.
8. L'expression $12x^4-2x^3-5x+3$ est une fraction rationnelle.
9. Le polynôme $4x^2-2x+1$ est divisible par $x+1$
10. Le polynôme $2x^3+3x^2-8x+3$ est divisible par $x-1$

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 On considère le polynôme F tel que : $F(x)=x^{4n}-1$ où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Démontre que $F(x)$ est divisible par $x-1$ et par $x+1$.
2. Démontre que $F(x)$ est divisible par x^4-1.

2 On donne $P(x)=-2x^3+3x^2+20x+75$.

1. Calcule : a) $P(-10)$; b) $P(-8)$; c) $P(5)$
2. Écris $P(x)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes dont l'un est de degré 2.

3 Détermine par la division euclidienne les nombres réels a, b, c et d tels que :
$-3x^4-11x^3-4x^2+20x+16=(x+2)(ax^3+bx^2+cx+d)$.

4 Détermine par la méthode des coefficients indéterminés, les nombres réels a et b tels :
$x^3+4x^2-11x-30=(x+5)(x^2+ax+b)$.

5

1. Justifie que : $x^2+6x-7=(x+3)^2-16$.
2. Déduis-en que $x^2+6x-7=(x-1)(x+7)$, puis déduis les zéros du polynôme x^2+6x-7.
3. À l'aide de la question 2, détermine l'ensemble de définition de la fraction rationnelle $f(x)=\frac{15x^2+8x-2}{x^2+6x-7}$
4. Détermine l'ensemble de définition de $g(x)=\frac{x-2}{9x^2+6x+5}$.

5 Soit la fonction rationnelle tel que : $f(x)=\frac{2x^2+11x+15}{-2x^2-x+10}$

1. Factorise : $2x^2+11x+15$.
2. Factorise : $-2x^2-x+10$.
3. Déduis de la question 2 l'ensemble de définition de f.
4. Déduis des questions précédentes, une simplification de f.

6

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$.
   a) Détermine l'ensemble de définition de f
   b) Effectue la division euclidienne de x^2+2x+1 par $x-1$
   c) Déduis-en que $x^2+2x+1=(x-1)(x+3)+4$
   d) Déduis de c) que : $f(x)=x+3+\frac{4}{x-1}$.
2. On concidère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par : $g(x)=\frac{-2x^2-3x+32}{x+5}$ A l'aide d'une division euclidienne, détermine trois nombres réels a, b et c tels que $g(x)=ax+b+\frac{c}{x+5}$.

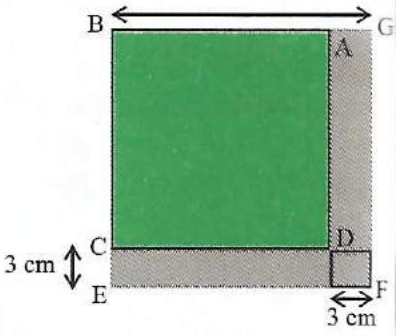
SITUATIONS D'ÉVALUATION

Dimensions d'un potager rectangulaire

1 Un potager rectangulaire a pour périmètre 28 m et pour aire 40 m². On note x sa largeur.

1. Justifie que la longueur du potager est : $14 - x$.
2. Justifie que : $x^2 - 14x + 40 = 0$
3. Déduis de la question précédente la largeur et la longueur du potager.

2 Pour initier les élèves à l'agriculture, une ONG qui opère dans le domaine du vivrier à offert aux élèves de seconde un terrain de forme carré comme l'indique la figure ci-contre.



La partie hachurée est une allée et la partie verte est la partie cultivable.
Cette année, les élèves veulent y planter de la tomate uniquement. Les grains de la variété de tomate choisie sont vendus à 1 000 F le mètre carré. Mais les élèves ont oublié l'aire de la partie cultivable.
Le président de la coopérative sait que l'aire de la partie hachurée est de 63 m².
Il te demande d'utiliser tes connaissances en mathématiques pour déterminer l'aire de la partie cultivable.

1. Détermine en fonction de x l'aire de la partie hachurée.
2. Donne une solution argumentée au Président de la coopérative.

Leçon 3

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

Habiletés et contenus

- **Identifier** : une équation dans $\mathbb{R}$; une inéquation dans $\mathbb{R}$; deux équations équivalentes ; deux inéquations équivalentes.
- **Résoudre** : des équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux polynômes ou deux fractions rationnelles ; des équations et inéquations avec valeur absolue.
- **Traiter** : une situation faisant appel aux équations et inéquations dans $\mathbb{R}$.

Situation d'apprentissage

Fatimah, élève en classe de seconde C dans un lycée, découvre dans une encyclopédie « le nombre d'or ». Il y est défini comme la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Ce nombre est dit être présent dans tout ce qui est beau (musique, peinture, ...) et aussi dans la nature (fleur de tournesol, escargot, ...) ou dans l'architecture.

Elle en parle à ses camarades de classe. Émerveillés par le sujet, elle et ses camarades s'organisent pour s'informer sur la résolution d'équations et d'inéquation dans $\mathbb{R}$ afin de déterminer ce nombre d'or.



Activité 1 Équations dans $\mathbb{R}$

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}=-x+1$.

1. Identifie l'inconnue dans l'équation (E).
2. Identifie les deux membres de cette équation.
3. Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}$ et $g(x)=-x+1$.

Réécris l'équation (E) en utilisant les fonctions f et g.



Récapitulatif

Soit f et g des fonctions numériques. L'énoncé (E) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$ est appelé une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

(E) est le nom de l'équation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'équation.

Activité 2 Solution, ensemble de validité d'une équation dans $\mathbb{R}$

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=\frac{x-1}{x-4}$ et $g(x)=x-\frac{5}{2}$

1. a) Calcule $f(0)$ et $g(0)$ puis compare les résultats.

   b) Calcule $f\left(\frac{11}{2}\right)$ et $g\left(\frac{11}{2}\right)$ puis compare les résultats.
2. a) Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.

   b) Détermine les contraintes sur x pour que l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$ ait un sens.

Récapitulatif

$\frac{11}{2}$ est une solution de l'équation (E) car $f\left(\frac{11}{2}\right) = g\left(\frac{11}{2}\right)$.

0 n'est pas une solution de l'équation (E) car $f(0) \neq g(0)$.

Les contraintes sur x de l'équation (E) sont : $x \in Df \cap Dg$

$Df \cap Dg$ est appelé l'ensemble de validité de l'équation (E).



Activité 3 Équations équivalentes

1. Dans chacun des cas suivants, résous dans $\mathbb{R}$ les équations proposées.

   (E_1): $x^2 - 4 = 0$ et $(E_2) : x^3 - x = 3x$

   (E_3): $|x| - 1 = 0$ et $(E_4) : x^2 - 1 = 0$
2. Compare dans chacun des cas les ensembles de solutions de ces équations.

Récapitulatif

Les équations (E_3) et (E_4) de même référentiel et d'ensemble de validité $P \subset D_E \cap D_{E'}$ ont même ensemble de solutions : on dit qu'elles sont équivalentes.

Activité 4 Résolution d'une équation

1. On donne l'équation $(E_1) : x \in \mathbb{R}$, $2x + 3 = -x + 1$.

   a) Transforme (E_1) de sorte à avoir une équation de la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des réels.

   b) Résous (E_1).

2. On donne l'équation suivante dans $\mathbb{R}$,

   $(E_2) : (3x + 1)^2 + 4x^2 = 0$

   Résous (E_2).

Récapitulatif

- *Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ consiste à déterminer l'ensemble des nombres réels qui vérifient l'égalité. Cet ensemble est appelé ensemble de solutions de l'équation.*
  On note : $S_{\mathbb{R}}$ (E_1) ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.
- *L'équation (E_2) n'a pas de solution : On dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.*
  On note : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
- *La résolution d'une équation peut se faire en transformant l'équation en une équation équivalente au moyen des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.*

Activité 5 Équations dans R de la forme $f(x) = g(x)$ où f et g sont des polynômes

f et g sont deux polynômes. Résous dans chacun des cas l'équation : $f(x) = g(x)$.

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 6$ et $g(x) = -2x - 6$
2. $f(x) = 9x^2 - 4$ et $g(x) = (6x + 4)(x - 5)$



Récapitulatif

Pour résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$ où f et g sont des polynômes :

- *on se ramène dans le cas d'une équation de la forme $p(x) = 0$, où p est un polynôme ;*
- *on factorise $p(x)$ si possible ;*
- *on détermine les solutions si elles existent de l'équation $p(x) = 0$.*

Activité 6 Équations dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fractions rationnelles

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Résous dans chacun des cas l'équation précisée.

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \frac{2x+5}{x-2}$; $f(x) = g(x)$
2. $f(x) = \frac{2x+1}{5x-3}$; $g(x) = \frac{2x+5}{x-2}$; $f(x) = g(x)$



Récapitulatif

Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$, où f et g sont des fractions rationnelles :

- *on détermine l'ensemble de validité de l'équation ;*
- *on se ramène à une équation liant deux polynômes de la forme $\frac{P(x)}{q(x)} = 0$;*
- *on résout la nouvelle équation obtenue ;*
- *on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'équation initiale.*

Activité 7 Équations dans $\mathbb{R}$ avec valeur absolue

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

$|x + 3| = 1$; $|2x - 4| = |x + 1|$



Récapitulatif

Pour résoudre une équation comportant une valeur absolue, on peut utiliser les propriétés suivantes :

- *Si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif alors :*
  $|x - a| = r \Leftrightarrow x \in \{a - r ; a + r\}$
- *Pour tous réels x et y, on a : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$*



Activité 8 Inéquations dans $\mathbb{R}$

On considère l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$,

$$3x - \frac{1}{2} > 2x + 4$$

1. Identifie l'inconnue dans l'inéquation (I).
2. Identifie les deux membres de cette inéquation.
3. Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ et $g(x) = 2x + 4$

Réécris l'inéquation (I) en utilisant les fonctions f et g.

Récapitulatif

Soit f et g des fonctions numériques. L'énoncé (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$ (ou $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ ou $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > g(x)$ ou $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$) est appelé une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
(I) est le nom de l'inéquation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'inéquation.

Activité 9 Solution d'une inéquation, ensemble de validité d'une inéquation

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = \frac{x+1}{2x-3}$



1. a) Calcule $f(1)$ et $g(1)$ puis compare les résultats.
   b) Calcule $f(-2)$ et $g(-2)$ puis compare les résultats.
2. a) Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.
   b) Détermine les contraintes sur x pour que l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq g(x)$ ait un sens.

Récapitulatif

1 est une solution de l'inéquation (I) car $f(1) \geq g(1)$.
-2 n'est pas une solution de l'inéquation (I) car $f(-2) < g(-2)$.
Les contraintes sur x de l'inéquation (I) sont : $x \in Df \cap Dg$
$Df \cap Dg$ est appelé l'ensemble de validité de l'inéquation (I).



Activité 10 Inéquations équivalentes

1. Dans chacun des cas suivants, résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations proposées.
   a) (I_1): $|x| - 1 < 0$ et (I_2) : $x^2 < 1$
   b) (I_3) : $9x > x^2$ et (I_4) : $9 - x > 0$
2. Compare dans chaque cas les ensembles de solutions des inéquations.

Récapitulatif

Les inéquations (I_1) et (I_2) ont même ensemble solution : on dit qu'elles sont équivalentes.

Activité 11 Inéquations équivalentes

1. On donne l'inéquation (I_1) : $x \in \mathbb{R}, -x + 2 < 2x + 1$.
   a) Transforme (I_1) de sorte à avoir une équation (I'_1) de la forme $ax + b < 0$, où a et b sont des réels.
   b) Résous (I'_1).
2. On donne l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, (I_2) : $-x^2 - x + 1 \geq -7x + 12$
   Résous (I_2).



Récapitulatif

Résoudre une inéquation dans $\mathbb{R}$ consiste à déterminer l'ensemble des nombres réels qui vérifient l'inégalité. Cet ensemble est appelé ensemble de solutions de l'inéquation.
On le note : $S_{\mathbb{R}}$ (I) ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.
L'inéquation (I_2) n'a pas de solution : On dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.
On note : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
La résolution d'une inéquation peut se faire en transformant l'inéquation en une inéquation équivalente au moyen des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Activité 12 Inéquations dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont des polynômes

f et g sont deux polynômes. Dans chacun des cas, résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation précisée :

$f(x) = -x+2$; $g(x) = 2x+1$; $f(x) \geq g(x)$

$f(x) = 2x^2 - x + 1$; $g(x) = -7x+9$; $f(x) < g(x)$

$f(x) = (x+1)(x+\sqrt{2})$; $g(x) = (x+1)(-x-3\sqrt{2})$; $f(x) \leq g(x)$



Récapitulatif

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(x) \leq g(x)$, où f et g sont des polynômes :
- *on se ramène au cas d'une inéquation de la forme $p(x) \leq 0$, où p est un polynôme obtenu par différence de f et g ;*
- *on factorise $p(x)$ si possible ;*
- *on étudie le signe de $p(x)$ dans un tableau de signes ;*
- *on détermine les solutions si elles existent de l'inéquation $p(x) \leq 0$.*

Activité 13 Inéquations dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont des fractions rationnelles

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Résous dans chacun des cas l'inéquation précisée.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

2. $f(x) = \dfrac{6x^2-x+2}{2x+3}$; $g(x) = \dfrac{3x^2-x-2}{x-3}$; $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq g(x)$.

Récapitulatif

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(x) \leq g(x)$, où f et g sont des fractions rationnelles :
- *on détermine l'ensemble de validité de l'inéquation ;*
- *on se ramène à une inéquation de la forme $p(x) \leq 0$ où p est une fraction rationnelle obtenue par différence de f et g ;*
- *on étudie le signe du numérateur et du dénominateur de p dans un tableau de signes ;*
- *on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'inéquation initiale.*

Activité 14 Inéquations dans $\mathbb{R}$ avec valeur absolue

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

1. $|x-3| < 2$; 2. $|2x-4| \leq \dfrac{2}{3}$.



Récapitulatif

Pour résoudre une inéquation comportant une valeur absolue, on peut utiliser la propriété suivante :
Si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif alors : $|x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$.

I ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1. Définition



Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.
L'énoncé (E) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$ est appelé une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
(E) est le nom de l'équation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'équation.
Si le référentiel n'est pas mentionné alors le référentiel est l'ensemble $\mathbb{R}$.

2. Solution d'une équation, ensemble de validité d'une équation



Propriété et définition

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

- L'ensemble de validité D_E de l'équation (E) est : $Df \cap Dg$.
- α est une solution de l'équation (E) lorsque $\alpha \in D_E$ et $f(\alpha) = g(\alpha)$.

3. Équations équivalentes



Définition

Soit (E_1) et (E_2) deux équations d'ensembles de validité respectifs D_{E_1} et D_{E_2}, P un sous ensemble de $D_{E_1} \cap D_{E_2}$.
(E_1) et (E_2) sont équivalentes sur P si elles ont le même ensemble de solution dans P.

4. Résolution d'équation

Définitions

- Résoudre une équation (E) dans $\mathbb{R}$ consiste à déterminer :
  - son ensemble de validité ;
  - son ensemble de solutions.

L'ensemble de solutions est noté : $S_{\mathbb{R}}$ (E) ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.

- Lorsqu'une équation n'a pas de solution, on dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.
  On note : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.



Méthode

La résolution d'une équation peut se faire en transformant l'équation en une équation équivalente au moyen des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

5. Équation dont les membres sont des polynômes

Méthode

Pour résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$ où f et g sont des polynômes :

- on se ramène au cas d'une équation de la forme $p(x) = 0$, où p est un polynôme ;
- on factorise $p(x)$ si possible ;
- on détermine les solutions si elles existent, de l'équation $p(x) = 0$.



6. Équation dont les membres sont fractions rationnelles

Méthode

Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$, où f et g sont des fractions rationnelles :

- on détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- on se ramène à une équation du type $\frac{P(x)}{q(x)} = 0$ où P(x) et Q(x) sont des polynômes.
- on résout l'équation $P(x) = 0$.
- on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'équation initiale.



7. Équations dont les membres comportent des valeurs absolues

a) Équation du type $|f(x)| = |g(x)|$

Méthode

Pour résoudre une équation du type $|f(x)| = |g(x)|$:

- on détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- on utilise la propriété suivante : pour tous réels x et y, on a : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$;
- l'ensemble de solutions de l'équation est la réunion des deux ensembles de solutions des équations trouvées.

b) Équation du type $|f(x)| = r$

Méthode

Pour résoudre une équation du type $|f(x)| = r$, où f est une fonction affine et r un nombre réel positif :

on utilise la propriété suivante : si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif alors : $|x - a| = r \Leftrightarrow x \in \{a - r ; a + r\}$.

II INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1. Définitions



Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

L'énoncé (I) : $x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$ est appelé une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

(I) est le nom de l'inéquation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'inéquation.

Si le référentiel n'est pas mentionné alors le référentiel est l'ensemble $\mathbb{R}$.

2. Solution d'une inéquation, ensemble de validité d'une inéquation

Définitions

On considère l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$.

- L'ensemble de validité D_I de l'inéquation (I) est : $Df \cap Dg$
- α est une solution de l'inéquation (I) lorsque $\alpha \in D_I$ et $f(\alpha) < g(\alpha)$.

3. Inéquations équivalentes

Définition

Soit (I_1) et (I_2) deux équations d'ensembles de validité respectifs D_{I_1} et D_{I_2}, P un sous ensemble de $D_{I_1} \cap D_{I_2}$.

(I_1) et (I_2) sont équivalentes sur P si elles ont le même ensemble de solutions dans P.

4. Résolution d'inéquation



Définition

- Résoudre une inéquation (I) dans $\mathbb{R}$ consiste à déterminer :
  - son ensemble de validité ;
  - son ensemble de solutions.

L'ensemble de solutions est noté : $S_R(E)$ ou S_R s'il n'y a pas de confusion.

- Lorsqu'une inéquation n'a pas de solution, on dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide. On le note : $S_R = \emptyset$.

Méthode

La résolution d'une inéquation peut se faire en transformant l'inéquation en une inéquation équivalente au moyen des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

5. Inéquations dont les membres sont des polynômes

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$ où f et g sont des polynômes :

- on se ramène au cas d'une inéquation de la forme $P(x) < 0$, où P est un polynôme obtenu par différence de f et g ;
- on factorise $P(x)$ si possible ;
- on étudie le signe de $P(x)$ dans un tableau de signes ;
- on détermine les solutions si elles existent, de l'inéquation $P(x) < 0$.

6. Inéquations dont les membres sont des fractions

Méthode

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(x) < g(x)$, où f et g sont des fractions rationnelles :

- on détermine l'ensemble de validité de l'inéquation ;
- on se ramène à une inéquation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ où P et Q sont des polynômes.
- on étudie le signe du numérateur P(x) et du dénominateur Q(x) dans un tableau de signes ;
- on détermine les solutions (si elles existent) de l'inéquation $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$
- on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'inéquation initiale.

7. Inéquations dont les membres comportent des valeurs absolues

Méthode

Pour résoudre une équation comportant une valeur absolue, on peut utiliser la propriété suivante :
Si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif alors : $|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$

EXERCICES DE FIXATION

Équations et Inéquations dans $\mathbb{R}$

1 Complète le tableau ci-dessous par une croix :

	Vrai	Faux
$x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 7 = 0$ est une équation du premier dégré dans $\mathbb{R}$.		
$xy - x + 1 = 0$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$.		
$t - 8 < \frac{t}{t-8}$ est une inéquation du premier dans $\mathbb{R}$.		
$y^3 - y + xy + 6 \leq 0$ est une inéquation du premier dans $\mathbb{R}$.		

Solution d'une équation, ensemble de validité d'une équation

2 Complète le tableau ci-dessous par une croix :

	Vrai	Faux
-1 est solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $x(x-1) = 2$.		
0 est solution de l'équation $\in \mathbb{R}$, $\frac{x^2(x+1)}{x} = x$		
L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x(x+2)}{x^3+8} = 0$ admet pour solutions 0 et -2.		
-4 est solution de $2x - 3 > 3x - 2$		
0 est solution de $\frac{x-2}{x+1} < 2x + 1$		

3 Complète le tableau ci-dessous par une croix :

	Vrai	
-3 est un élément de l'ensemble de validité de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x+3}{x} = 2x - 3$.		
La résolution de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $x + 3 = 0$ permet de déterminer l'ensemble de validité de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x+3} \leq \frac{x+3}{x^2}$.		
L'ensemble de validité de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 16 = 9$ est $\mathbb{R}$		
L'ensemble de validité de l'inéquation : $y \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{y} + 3 > 0$ est $]-\infty ; -3[$.		

4 On considère l'équation suivante

(E) : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x+4}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

Parmi les nombres suivants, indique la solution de (E) :

-1 ; $-\frac{2}{3}$; 0 ; 1 ; $\frac{2}{3}$; 2.

5 On considère l'inéquation suivante (I) : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-2}{x+3} \leq 2$.

Parmi les nombres suivants, indique ceux qui sont solutions de (I) : -20 ; -9 ; -8 ; -5 ; -3 ; 0 ; 2.

Équations et Inéquations équivalentes

6 Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont équivalentes et précise dans quel ensemble elles le sont.

$(E_1) : 2x + 1 = 5$ $\quad (E_2) : \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x+1}$

$(E_3) : 3(2x - 1) = 0$ $\quad (E_4) : \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{6}{x^2+x-2}$

7 Relie chacune des inéquations de la colonne A à l'inéquation de la colonne B qui lui est équivalente.

A	B
$\frac{2x+3}{x+1} < x$	$(x-1)(x-3) > 0$
$x - 3 < x^2 - 3x$	$\frac{x^2}{x-1} < 0$
$\frac{x^2+x-1}{x-1} < 1$	$\frac{2-x^2}{x+1} < -1$

Équations et Inéquations dont les membres sont des polynômes

8 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $(x + 3)(2x - 6) = 0$; b) $x^2 - 81 = 0$;

c) $-4x^2 + 9 = 0$; d) $16x^2 = 49$;

e) $(x + 5)^2 - (3x + 2)^2 = 0$ f) $(2x - 3)^2 = (2 - 3x)^2$.

9 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $-4x + 1 = 0$ b) $3x + \frac{x+1}{2} = 4$

c) $2x + 3 = -x + \frac{2}{3}$ d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{x+2}{5} = 5 + \frac{x}{3}$

10 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

a) $-2x + 7 \geq 1$; b) $3x - \frac{x-2}{5} > \frac{1}{2} - 2x$;

c $x+5 \leq \frac{x+5}{7} - x+3$;

d $\frac{x+7}{2} - \frac{3x-2}{7} < \frac{x+4}{18} - 1$.

11 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a $5x = 4x^2$

b $x + 2 = 5x^2 + 10$

c $2x^2 - x + 6x - 3 = 0$

d $5(x-3) = x^2 - 9$

e $2x^2 - 6x + 10 = x^2 + 1$

f $(x-1)^2 + (x^2-1) = 0$

g $2x^3 - 2x = x^2 - 1$

h $4 - x^2 = 2x^2 + 14x + 20$

12 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

a $x + 2 \leq 2x + 1$

b $x + \frac{2x-1}{3} < 5 + \frac{5x+2}{4}$

c $5x - 3 > 2x + 4$

d $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{4} \leq \frac{x-4}{6}$

e $-6x + 0{,}5 \geq 3x + 1{,}25$

f $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-2}{4} \geq \frac{3x-4}{6}$

13 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

a $x^2 + 2 \geq 0$;

b $(-2x+1)^2 + 4 < 0$;

c $(3x+5)^2 \leq 0$;

d $x^2 - 4 < 0$;

e $25 - 4x^2 > 0$;

f $(3x+1)^2 \leq (x-3)^2$;

g $5 - x^2 > 9$;

h $(x-3)^2(x+3) \geq (x^2-9)(4x+1)$.

Équations et Inéquations dont les membres sont des fractions rationnelles

14 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a $2 = \frac{x+3}{x}$;

b $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x+2}$;

c $\frac{x+3}{2x-1} = \frac{x-2}{2x+1}$;

d $\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x}$;

e $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{x^2+x-2}$.

15 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a $\frac{3x-1}{x-1} = \frac{6x-9}{2x-5}$;

b $\frac{2x+5}{x-3} = \frac{2x-3}{x+5}$;

c $\frac{5}{x+2} = \frac{1}{-2x+3}$;

d $\frac{-2}{2x+7} = \frac{-2}{-x+4}$.

16 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

a $\frac{5}{x-2} - \frac{4}{x+2} < \frac{3}{x^2-4}$

b $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} > 0$

c $\frac{x-2}{x} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-x} \leq 0$

d $\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1} \geq \frac{4x^2+6}{4x^2-1}$

Équations et Inéquations dont les membres comportent des valeurs absolues

17 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a $|x+1| = 2$

b $|-3x-1| = -2$

c $|2x-1| = |3x+1|$

d $|4x+2| = 3$

e $|x| = x$

f $|2x-3| = 5x+4$

18 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

a $|x-4| < 2$

b $|2x+3| \leq 1$

c $|-2x+3| + |x-6| \leq 0$

d $|x+4| \leq x+4$

e $|x+2| < x+5$

f $|3x-4| \geq x-3$



EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 Détermine trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est 69.

2 Le père de Samira a 27 ans de plus qu'elle. Dans 6 ans, son âge sera le double de celui de sa fille. Détermine les âges respectifs de Samira et de son père.

3 Un père laisse en héritage un troupeau de 80 moutons à ses trois fils. Il écrit dans son testament « l'ainé des fils doit recevoir 10 moutons de plus que le deuxième et le deuxième doit recevoir 5 moutons de plus que le troisième ».
Détermine la part de chaque fils.

4 Un père laisse en héritage un troupeau de 80 moutons à ses trois fils. Il écrit dans son testament « l'ainé des fils doit recevoir 10 moutons de plus que le deuxième et le deuxième doit recevoir 5 moutons de plus que le troisième ».
Détermine la part de chaque fils.

5 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $(2x+1)^2-(x+2)^2=x(x+1)$

b) $(x+3)^2=(2x+6)(5-3x)$

c) $16(x+1)^2=36(2x-1)^2$

d) $(5x^2-x-2)^2-(4x^2+x-2)^2=0$

e) $(x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)(x+3)(x+4)$

6 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

a) $x^2\leq x(x+2)$ b) $x^3-8\geq x^2-4$

c) $4x^2-9>(x+1)(3-2x)$

d) $2x^2-3x-4>-x^2+2x-2$ e) $4x^2\leq 2x-1$

f) $3x^2+2x+8\geq x^2+3x+4$

g) $x^2-4x+4<(1-x)(3x-6)-(2-x)^2$

h) $(4x-3)^2-(2x+3)(3-4x)<4x(3-4x)$

7 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $\dfrac{x-4}{2x+3}=2$ b) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}=0$

c) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x^2-1}$ d) $2-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+3}{2x+4}$

e) $\dfrac{3x-4}{x-2}+\dfrac{3-x}{x+3}=\dfrac{2x^2+x}{x^2+x-6}$

f) $\dfrac{6}{2x^2-3x}=\dfrac{x}{2x-3}-\dfrac{1}{x}$ g) $\dfrac{x^2-x-x}{x+2}=\dfrac{x+3}{x-1}$

h) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{x+2}$

8 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :

a) $\dfrac{2x-3}{x+1}<0$ b) $\dfrac{1-x}{x}\geq 0$

c) $\dfrac{-2}{5x+3}\leq\dfrac{4}{x-8}$ d) $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x^2-x}$

e) $2x-1\leq\dfrac{1}{2x-1}$ f) $\dfrac{x^2-2}{x-1}\geq 2$

g) $\dfrac{1-x}{x+2}\leq\dfrac{-2}{x^2-4}$ h) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-1}>\dfrac{-1}{x+7}$

i) $\dfrac{2x+1}{x-3}\leq\dfrac{x+3}{1-2x}$

9 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $x^2+2|x|-3=0$ b) $|x^2+3x-4|=2x+8$

c) $|x-1|+|x-2|-|x-3|=0$ d) $x+4-|x^2+4x|=0$

10 On désire résoudre l'inéquation
$(I_3): x\in\mathbb{R}, |x+4|+|2x-1|\leq 12$

a) Écris $|x+4|+|2x-1|$ sans les symboles de valeur absolue.

b) Démontre que $S_{\mathbb{R}}(I_3)=\left]-5;\dfrac{13}{2}\right[$.

11 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

a) $|x|+\frac{1}{3}<x+3$ b) $5x+2|x-1|\geq 4$

c) $x+7\leq|x^2-x|$ d) $x^2+4x<|2x-7|$

e) $|2x^2+x-3|>|x+4|$

12 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points A et B de coordonnées respectives (–3 ; 2) et (4 ; 3). Détermine les coordonnées du point M de la droite (AB) telles que : $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 Determine trois nombres entiers naturels impairs consécutifs dont la somme est 141.

2 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $2x^4+x^2+3=0$; b) $4x^4-17x^2+1=0$

c) $x^4-x^2-6=0$.

3 On donne l'équation (E) : $3x^3+10x^2-x-12=0$.

1) Justifie que 1 est solution de (E).

2) Résous (E).

4 On donne l'équation (E) : $x^4-13x^2-48=0$

1) Justifie que 4 est solution de (E).

2) Justifie que si x est solution de (E) alors $-x$ est solution de (E).

3) Résous (E).

5 On donne l'inéquation suivante (I) dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{6x^2+x-2}{2x+3} \geq \frac{3x^2-x-2}{x+3}.$$

1) Détermine l'ensemble de validité V de (I).

2) Justifie que (I) $\Leftrightarrow x \in V$, $\frac{4x(3x+2)}{(2x+3)(x+2)} \geq 0$

3) Résous (I).

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1 Fatimah, élève en seconde C dans un lycée découvre dans une encyclopédie la définition suivante : « Le nombre d'or (ou section dorée, proportion dorée, ou encore divine proportion) est une proportion, définie initialement en géométrie comme l'unique rapport $\frac{a}{b}$ entre deux longueurs a et b telles que le rapport de la somme $a+b$ des deux longueurs sur la plus grande a soit égal à celui de la plus grande a sur la plus petite b ». Elle en parle à ses camarades de classe et ils décident de déterminer ce nombre d'or.

1) Justifie que : $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}+1$

2) a) Résous l'équation : $x^2-x-1=0$.

b) Détermine la valeur du nombre d'or.

On le note φ.

3) Démontre que : $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$ et que $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$

Complément :

On en déduit que φ peut être écrit de façon indéfinie :

$$\varphi=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}} \quad \text{ou} \quad \varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

2 Avant la remise des copies d'un devoir de mathématiques en 2nde C, des élèves veulent savoir leurs notes. Le professeur dicte leurs notes : 8 ; 12 ; 16 ; 11 ; …

Les trois élèves qui ont eu 12 ; 11 et 16 affirment qu'ils ont eu la moyenne au devoir. Un d'entre eux dit : Il faut d'abord savoir sur combien a été noté le devoir.

Le professeur annonce la répartition des points des quatre exercices du devoir :

- 15 % des points à l'exercice 1;
- Les deux cinquièmes à l'exercice 2;
- Le quart à l'exercice 3 et les 6 points restant affectés à l'exercice 4.

On désigne par x le nombre total de points du devoir.

1) Justifie que les trois premiers exercices valent 16/20 du nombre total de points.

2) Détermine sur combien est noté le devoir.



Leçon 4

INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Habiletés et contenus

- **Connaitre** le théorème fondamental relatif à l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- **Traduire** en inéquations diverses situations concrètes.
- **Résoudre** graphiquement un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- **Interpréter** géométriquement les solutions des systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- **Traiter une situation** faisant appel aux inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Situation d'apprentissage

Le père de Koronan, élève en 2nde C d'un lycée doit recevoir son ami français Delhom qui vient faire du tourisme dans la région du Poro. Monsieur Delhom demande de lui louer un véhicule pour faciliter ses déplacements. L'agence de location de voitures propose deux types de véhicules de type 4×4 :

- Pour le type A, la location coûte 25 000 F par jour plus 7 500 F par kilomètre parcouru ;
- Pour le type B, la location coûte 37 000 F par jour plus 4 800 F par kilomètre parcouru.

La Direction Régionale du Tourisme propose des circuits :

- un circuit de 1 jour et de 250 km ;
- un circuit de 1 jour et de 350 km ;
- un circuit de 2 jours et de 300 km ;
- un circuit de 3 jours et de 150 km.

Le père de Koronan lui demande de lui proposer un type de location et un circuit qui coûteront le moins cher à son ami Delhom. Koronan pose le problème à ses camarades de classe. Les élèves s'organisent pour s'informer sur la résolution d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



Activité 1 Théorème fondamental

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne la droite (D) d'équation : $2x - 3y + 6 = 0$.
2. Trace la droite (D).
   a) Détermine l'ensemble (P_1) des points M(x, y) du plan tels que : $2x - 3y + 6 > 0$.
   b) Détermine l'ensemble (P_2) des points M(x, y) du plan tels que : $2x - 3y + 6 < 0$.
3. Soit M(x,y) un point du plan.
   Justifie que M appartient à (P_1) ou à (P_2) ou à (D).



Récapitulatif

La droite (D) partage le plan en deux demi-plans ouverts (P_1) et (P_2) de bord (D).

Activité 2 Résolution graphique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), trace la droite (D) d'équation : $x - 2y + 2 = 0$.
2. a) Hachure l'ensemble des points M(x, y) tels que : $x - 2y + 2 < 0$.
   b) Détermine graphiquement l'ensemble de solutions de l'inéquation : $x - 2y + 2 < 0$.

Récapitulatif

Pour résoudre graphiquement une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on utilise la propriété fondamentale.

Activité 3 Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On considère le système (S) : $\begin{cases} x - y + 2 < 0 \\ 2x + y - 4 > 0 \end{cases}$

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) :
   a) hachure au stylo bleu l'ensemble de solutions de l'inéquation : $x - y + 2 < 0$.
   b) hachure au stylo rouge l'ensemble de solutions de l'inéquation : $2x + y - 4 > 0$.
2. Détermine la solution graphique du système (S).



Récapitulatif

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on représente l'ensemble de solutions de chaque inéquation et on détermine l'intersection de ces ensembles.

Activité 4 Traduire une situation en inéquation

Tiéwolo est élève en 2nde C au Lycée Moderne de Sirasso. Elle doit acheter des stylos à 90 F l'un et des cahiers à 240 F l'un. Par ailleurs, elle ne dispose que de 2 100 F pour ses achats.

1. a) Tiéwolo achète 5 cahiers. Détermine le nombre maximum de stylos que Tiéwolo peut acheter.
   b) Tiéwolo achète 4 stylos. Détermine le nombre maximum de cahier que Tiéwolo peut acheter.
2. Traduis cette situation par une inéquation.

Récapitulatif

On peut traduire des situations par une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Activités de découverte

Activité 2 Traduire une situation en systèmes d'inéquations

Une entreprise de transport de carburant a un stock de 240 tonnes de gasoil. Elle veut transporter en un seul voyage le maximum de son stock, avec des camions-citernes tous pleins. Pour cela, elle dispose de 20 camions-citernes pouvant transporter chacun 9 tonnes de gasoil et de 15 camions-citernes pouvant transporter chacun 12 tonnes de gasoil.

1. Cite des couples de nombres de camions-citernes de chaque type pouvant transporter le stock.
2. a) Dis si tout le stock peut être transporté en un voyage.
   b) Si oui, détermine le nombre minimum de chauffeurs à mobiliser pour transporter tout le stock en un voyage.

Récapitulatif

On peut traduire des situations par un système inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



Historique

Inéquation du premier degré

Une inéquation du premier degré à une inconnue est une inéquation où l'inconnue x apparait avec le degré 1 ou 0. Plus généralement, on appelle inéquation du premier degré toute inéquation se ramenant à une inéquation du type précédent par des opérations algébriques simples.

Exemples d'inéquations du premier degré :

- $3a + 2 \leq 5$ d'inconnue a
- $\frac{u-3}{2} + 4 > 5u$ d'inconnue u
- $x^2 + 3x - 5 \geq (x-9)(x+3)$ d'inconnue x

Résolution

Une inéquation du premier degré se résout en isolant l'inconnue dans un des membres de l'inégalité à l'aide des règles élémentaires.

Exemple

Un club de sport propose 3 types de paiement :
le forfait mensuel de 50 euros
une carte de 10 entrées pour 35 euros et les entrées supplémentaires coûtent 4 euros
un prix à l'entrée de 4 euros

1. Détermine le nombre de séances dans le mois pour lequel le forfait mensuel est plus avantageux que les entrées à l'unité.

soit x le nombre d'entrées, le prix de x entrées à l'unité est $4x$. Il s'agit de résoudre $50 < 4x$.

Cette inéquation est équivalente à $\frac{50}{4} < x$. On a divisé les deux membres de l'inégalité par 4.

Donc le forfait mensuel est plus avantageux que les entrées à l'unité à partir de 13 entrées et au-delà



I GÉNÉRALITÉS SUR LES INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1. Définition

On appelle inéquation du premier degré (ou inéquation linéaire) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ toute inéquation de la forme $ax + by + c \geq 0$ (le symbole $\geq$ pouvant être remplacé par l'un des symboles suivants $\leq$, $>$, ou $<$).
Une solution d'une inéquation est un couple (x_0, y_0) de nombres réels vérifiant cette inéquation.

2. Régionnement du plan par une droite

Le plan est muni d'un repère.

Théorème fondamental

Toute droite (D) d'équation : $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts de bord (D) :

- L'un est l'ensemble des points M(x , y) tels que $ax + by + c > 0$;
- L'autre est l'ensemble des points M(x,y) tels que $ax + by + c < 0$.



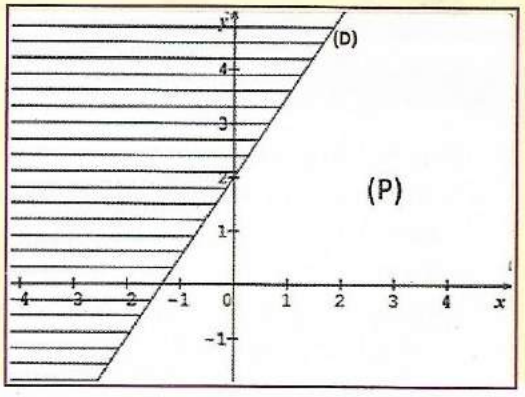
Remarque

Lorsque l'inégalité est large ($\leq$ ou $\geq$), le demi-plan est fermé, c'est-à-dire, il contient la droite (D).

Exemple

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Résous graphiquement l'inéquation (I) : $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $3x - 2y + 4 > 0$.
Construisons la droite (D) d'équation : $3x - 2y + 4 = 0$.
Vérifions si les coordonnées du point O sont solutions de l'inéquation : $3 \times 0 - 2 \times 0 + 4 = 4$ et $4 > 0$, donc l'origine O du repère appartient à l'ensemble des solutions de (I).
D'après donc la propriété fondamentale, l'ensemble des solutions est le demi-plan (P) ouvert de bord (D) contenant le point O.
Le demi-plan ouvert non hachuré est l'ensemble des points solutions de l'inéquation (I).







Remarque

Si le point O appartient au bord des demi-plans, on utilise un autre point.



II SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1. Définition

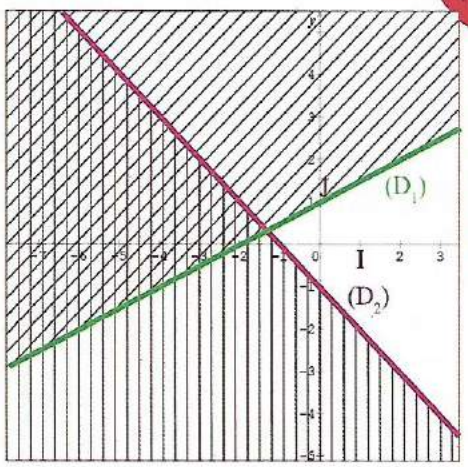
Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Un système de n inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un système du type (S) $\begin{cases} (I_1) \\ (I_2) \\ \dots \\ (I_n) \end{cases}$ où chacune des inéquations $(I_k)(1 \leq k \leq n)$ est une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), chaque inéquation (I_k), pour $1 \leq k \leq n$, est caractérisée par un demi-plan (P_k). L'ensemble des solutions de (S) est donc l'intersection des demi-plans (P_i) c'est-à-dire l'ensemble des couples de coordonnées de points communs à ces demi-plans.

Résumé de la léçon

Exemple 1

Représentons l'ensemble des solutions du système $(S)\begin{cases} x-2y+2<0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$.

Dans le plan muni du repère (O, I, J), traçons les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $x-2y+2=0$ et $x+y+1=0$.



L'ensemble de solutions est la partie avec les deux hachures, droites exclues.



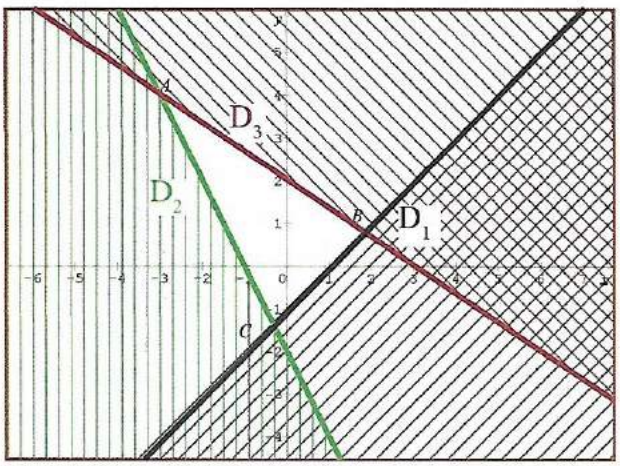
Exemple 2

Résous graphiquement le système d'inéquations :

$$(S)\begin{cases} x-y-1\leq 0 \\ 2x+y+2\geq 0 \\ 2x+3y-6\leq 0 \end{cases}$$

Notons (D_1), (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives $x-y-1=0$; $2x+y+2=0$ et $2x+3y-6=0$.

On vérifie que les coordonnées du point O (0,0) satisfont aux trois inéquations. L'ensemble de solutions du système (S) est l'intérieur du triangle ABC, bords compris.



Exemple 3

Programmation linéaire

Les élèves de la classe de 2nde C2 du Lycée Moderne de Diko font une visite dans une unité de production de sachets de graines d'arachide et de sachets de graines d'anacarde. Le responsable de l'unité leur donne les informations suivantes :

l'unité de production utilise deux machines M_1 et M_2. Pour produire un sachet d'arachide, il faut utiliser M1 pendant 5 minutes et M_2 pendant 2 minutes. Pour produire un sachet d'anacarde, il faut utiliser M_1 pendant 8 minutes et M_2 pendant 4 minutes. Pour pouvoir faire l'entretien, M_1 est disponible 140 minutes par jour et M_2 est disponible 64 minutes par jour.

Par ailleurs l'unité réalise un bénéfice de 100 F par sachet d'arachide et 180 F par sachet d'anacarde.

Revenus en classe, les élèves désirent savoir le nombre de sachets de chaque sorte à produire pour réaliser un bénéfice maximum par jour. Ils désirent également savoir ce bénéfice.

1. Établissons un tableau résumant les données du problème.

	Machine M_1 (minutes)	Machine M_2 (minutes)	Profit (F)
Sachets d'arachide	5	2	100
Sachets de grains d'anacarde	8	4	180
Contraintes	140	64	

2. Traduisons ces données par un système d'inéquations.

Soit x le nombre de sachets d'arachide et y le nombre de sachets d'anacarde.

Les contraintes de la production sont :

$$(S)\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 5x+8y\leq 140 \text{ (contraintes de } M_1) \\ 2x+4y\leq 64 \text{ (contraintes de } M_2) \end{cases}$$

3. Déterminons le bénéfice

Le bénéfice réalisé est : $b = 100x + 180y$.

4.Résolvons graphiquement le système d'inéquation.

Soit (D_1) la droite d'équation $5x + 8y = 140$ et (D_2) la droite d'équation $2x + 4y = 64$

a) Déterminons les programmes réalisables

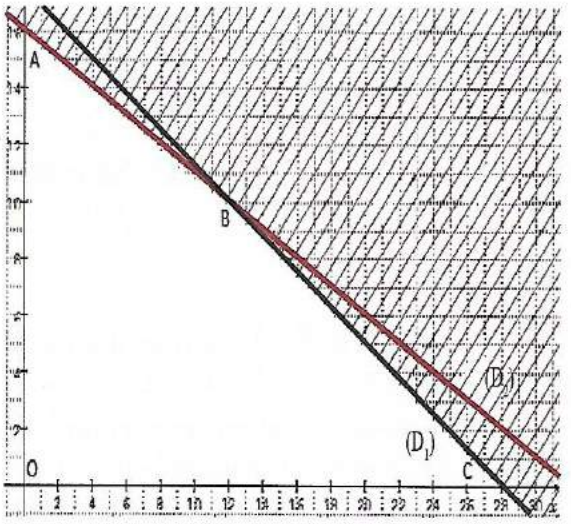
Tout couple (x,y) solution de (S) est appelé un programme réalisable (ici une production réalisable).

L'ensemble des productions réalisables est l'ensemble des points $M(x,y)$, où x et y sont des entiers naturels, de la partie (P) non hachurée ci-dessous de sommets les points O, A, B et C.

b) Déterminons les solutions du programme

Les coordonnées des points de la droite (D) d'équation $100x+180y=b$ (ou encore $y=-\frac{5}{9}x+\frac{b}{180}$) correspondent aux programmes (x, y) qui, si elles sont solutions du système (S), assurent à l'unité de production le bénéfice b. Ce bénéfice est d'autant plus grand que l'ordonnée à l'origine de la droite (D) (c'est-à-dire $\frac{b}{180}$) est grande.

Ainsi, parmi toutes les droites de coefficient $-\frac{5}{9}$ et dont l'intersection avec le quadrilatère ABCO est non vide, celle dont l'ordonnée à l'origine est maximale donne la solution du problème. Graphiquement, l'intersection de la droite (D) et du quadrilatère ABCO est le point intersection B de (D_1) et (D_2). Sur le graphique ci-dessous, cette droite est en rouge.



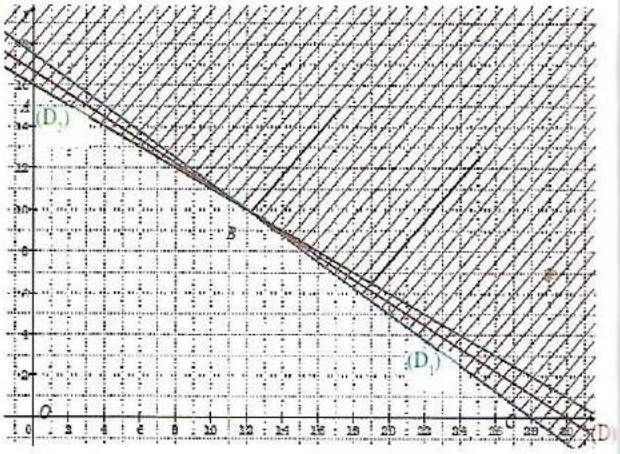
Déterminons les coordonnées (x, y) de B.

Elles vérifient $\begin{cases} 5x + 8y - 140 = 0 \\ 2x + 4y - 64 = 0 \end{cases}$

Vérifie que B(12, 10).

L'unité de production doit produire 12 sachets d'arachide et 10 sachets d'anacarde chaque jour pour réaliser un bénéfice maximal. Le bénéfice sera alors égal à :

$100 \times 12 + 180 \times 10 = 3000$.



Remarque

Lorsqu'on détermine les coordonnées du point $M(x, y)$, M parcourant l'ensemble des productions réalisables, on dit qu'on a maximisé le bénéfice $100x + 180y$ en respectant les contraintes du système (S).



EXERCICES DE FIXATION

Équations et Inéquations dans $\mathbb{R}$

1 Réponds par vrai ou par faux.

L'ensemble des points M(x ; y) tels que : $2x + 3y - 5 \geq 0$ est un demi-plan.	
La droite d'équation : $y = 2$ partage le plan en 3 demi-plans	
La droite d'équation $x - y = 2$ partage le plan en 2 demi-plans	

2 On note (P) l'ensemble des points M(x, y) tels que $-x + 3y + 2 \geq 0$.
Parmi les points ci-après, cite ceux qui appartiennent à (P) : O, A(2 ; −1), B(3 ; −3), C(2 ; 0), D(5 ; 3).

3 Parmi les programmes suivants choisis celui qui permet de résoudre l'inéquation suivante : $2x - y + 1 \geq 0$.

Programme 1
- Tracer la droite (D) d'équation $2x - y + 1 = 0$;
- vérifier que le point O est solution de l'inéquation $2x - y + 1 \geq 0$;
- prendre pour ensemble de solutions le demi-plan ouvert de bord (D) contenant O.

Programme 2
- Tracer la droite (D) d'équation $2x - y + 1 = 0$;
- vérifier que le point O est solution de l'inéquation : $2x - y + 1 \geq 0$;
- prendre pour ensemble de solutions le demi-plan fermé de bord (D) ne contenant pas O.

Programme 3
- Tracer la droite (D) d'équation : $2x - y + 1 = 0$;
- vérifier que le point O est solution de l'inéquation : $2x - y + 1 \geq 0$;
- prendre pour ensemble de solutions le demi-plan fermé de bord (D) contenant O.

4 Résous graphiquement chacune des inéquations suivantes :
a) $x - 4y + 3 < 0$; b) $x - y + 2 \geq 0$;
c) $3x + y > 0$; d) $y - 2 \leq 0$.

5 Pour un concert, les places valent 4 200 F ou 8000 F.
Une association dispose de 150 000 F pour acheter des places au concert.
L'association veut déterminer le nombre maximum des personnes qu'elle peut envoyer au concert en achetant des tickets des deux types de places.
Traduis les données sous forme d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

6 Une entreprise fabrique deux modèles de jouets A et B. La confection d'un jouet du modèle A nécessite 36 minutes de travail et celle du modèle B, 48 minutes de travail. Elle dispose de 624 minutes de travail par jour.
Traduis cette situation par une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

7 On note (P) l'ensemble des points M(x ; y) qui vérifient le système(S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} -x + 3y + 2 \leq 0 \\ x + y - 5 < 0 \end{cases}$$

Parmi les points ci-après, cite ceux qui appartiennent à (P) : O(0 ; 0), A(2 ; −1), B(3 ; −3), C(2 ; 0), D(5 ; 3).



EXERCICES DE RENFORCEMENT

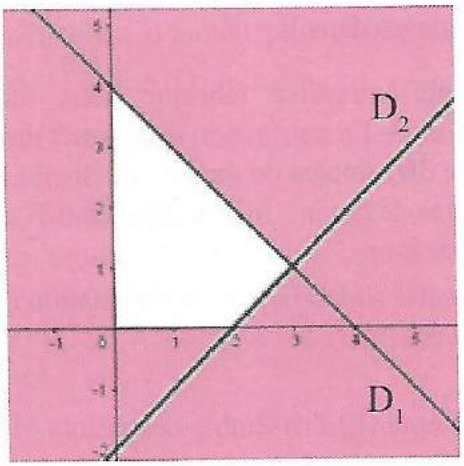
1 Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

1) $\begin{cases} 2x + 3y - 5 < 0 \\ 3x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + 4 \geq 0 \\ 2x - y < 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 4x + 3y > 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y - 3 \geq 0 \\ 3x - 2y - 5 \geq 0 \end{cases}$

2

On donne le système (S) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \\ y-x+2 \geq 0 \end{cases}$

et les représentations graphiques des droites d'équations respectives :
$x = 0$; $y = 0$; $x + y - 4 = 0$; $-x + y + 2 = 0$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-dessous.
Interprète graphiquement la partie non hachurée de la figure solution du système (S).



3 Moussa, installé au coin de la rue princesse, fait rapidement ses comptes : il luireste 1 kg de pâte, 1600 g de tomate et 1080 g de champignon. Il cuit deux sortes de pizzas :

- La Stromboli pour laquelle il lui faut 100 g de pâte, 180 g de tomates et 80 g de champignon
- La Vesuvio pour laquelle il lui faut 100 g de pâte, 80 g de tomates et 120 g de Champignon

Sachant qu'une Vesuvio lui rapporte 8 000 F et une Stromboli 9 000 F, détermine le nombrede pizzas de chaque sorte qui lui permet de maximiser son revenu.

4 Résous graphiquement les inéquations suivantes :

a) $(I_1) : 3x + 2y - 6 \geq 0$;
b) $(I_2) : x + 4y + 4 < 0$;
c) $(I_3) : 2x - y > 0$;
d) $(I_4) : -3x + y - 1 \leq 0$.

5 Détermine la partie du plan dont les points de coordonnées (x, y) vérifient le système, dans chacun des cas suivants :

$(S_1)\begin{cases} -2x - 3y + 1 < 0 \\ 5x - y + 4 < 0 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} 3x + 2y > 1 \\ 4x - 3y < 2 \end{cases}$

$(S_3)\begin{cases} x + \frac{1}{2}y \leq 2 \\ 2x + y \geq 14 \end{cases}$ $(S_4)\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 4 \geq 0 \end{cases}$

6 Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

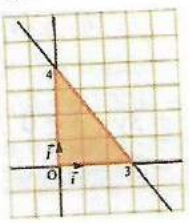
a) $\begin{cases} x + 3y - 5 > 0 \\ x + y - 3 < 0 \\ x - 2y > 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x \leq y \\ 2x + y \geq 0 \\ x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ 0{,}5x + y - 3 \geq 0 \\ 4x + 3y - 7 < 0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x \geq -5 \\ x + y - 5 \leq 0 \\ 5x + 2y \leq 20 \end{cases}$

7 Représente graphiquement en couleur la partie du plan déterminée par chacun des systèmes d'inéquations suivants :

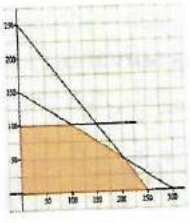
a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ -0{,}5x - y + 1 \leq 0 \\ 2{,}5x - y - 5 \leq 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 0 < y < 3 \\ x + y > 0 \\ -x + y + 2 > 0 \end{cases}$

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

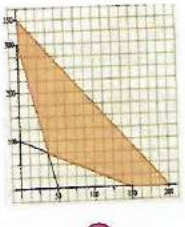
1 Détermine un système d'inéquations caractérisant, dans chacun des cas, le polygone représenté en couleur, côtés inclus.



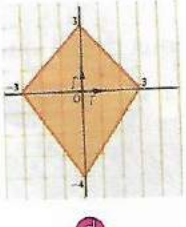
a)



b)

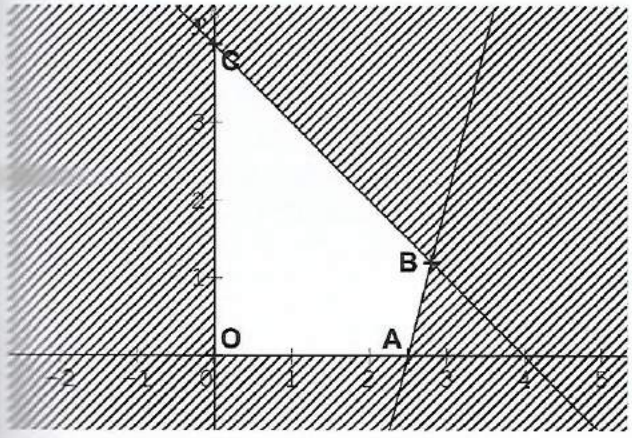


c)

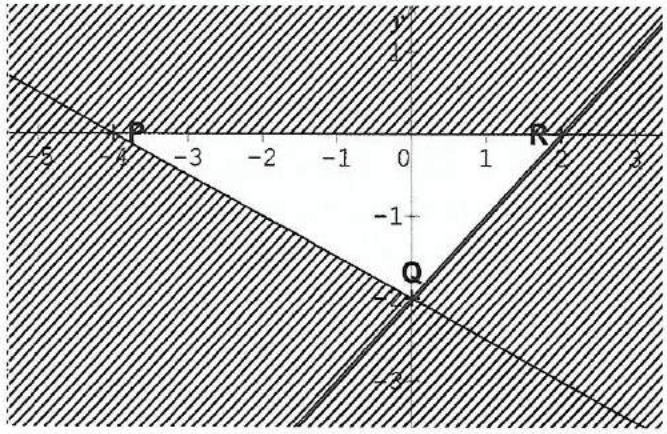


d)

2 Détermine un système d'inéquations caractérisant, dans chacun des cas, le polygone représenté en clair, côtés non inclus.



a



b

3 Une entreprise fabrique deux modèles de jouets A et B. La confection d'un jouet du modèle A nécessite 36 minutes de travail et celle du modèle B, 48 minutes de travail. Elle dispose de 624 minutes de travail par jour et peut fabriquer 15 jouets par jour au plus.

1. Justifie que les contraintes de cette production de jouets sont caractérisées par le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ x + y - 15 \leq 0 \\ 3x + 4y - 52 \leq 0 \end{cases}$$

2. Représente les solutions de ce système.

4 On note (E) l'ensemble des points M(x, y) définis par le système :

$$\begin{cases} 2x+3y \leq 30 \\ x + y \leq 11 \\ 4x + y \leq 32 \end{cases}$$

1. Représente (E).
2. Maximise la fonction $f(x, y) = 3x + 2y$ en respectant les contraintes de (E).

5

1. Représente l'ensemble des points M(x, y) définis par le système :

$$(S)\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

2. Minimise la fonction $(x, y) \to 5x - 3y$ en respectant les contraintes du système (S).

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1 Monsieur Séri travaille dans une équipe de la société « COULEUR », qui fabrique de la peinture à eau et de la peinture à huile. Son neveu Ali, élève en seconde C dans un Lycée, l'accompagne pendant les congés de Pâques. Ali suit attentivement les activités de l'équipe et pose des questions au chef de l'équipe. Celui-ci lui fournit les informations suivantes :

« L'équipe dispose de 360 minutes de travail par jour et peut engager jusqu'à 60 000 F dans la production quotidienne. La production d'un fût de peinture à eau coûte 1 500 F, demande 12 minutes de travail et rapporte 3000 F. Celle d'un fût de peinture à huile coûte 2 000 F, demande 8 minutes et rapporte 3000 F également ».

Ali se propose de déterminer le bénéfice maximum que peut réaliser cette équipe.

❶ Traduis cette situation par un système d'inéquations.

❷ Détermine le nombre de fûts de chaque type qui réalise le bénéfice maximum que peut faire cette équipe.

2 La coopérative scolaire du Lycée Moderne de Sirasso élève des poulets et des pintades. Mantcha, élève de 2nde C en est la présidente. Sur conseil du vétérinaire, elle souhaite nourrir ses volailles au moindre coût en leur apportant néanmoins un minimum hebdomadaire de 8 kg de protides et de 6 kg de lipides et de glucides. Sur le marché, il existe 2 aliments A et B, tout préparés, dont les caractéristiques sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

	Protides (en kg)	Lipides et glucides (en kg)	Prix (en F)
1 sac de A contient	1,5	1	1000
1 sac de B contient	0,5	1	800

Détermine le nombre de sacs de chaque catégorie que la présidente devra commander chaque semaine et la dépense minimale par semaine de la coopérative.

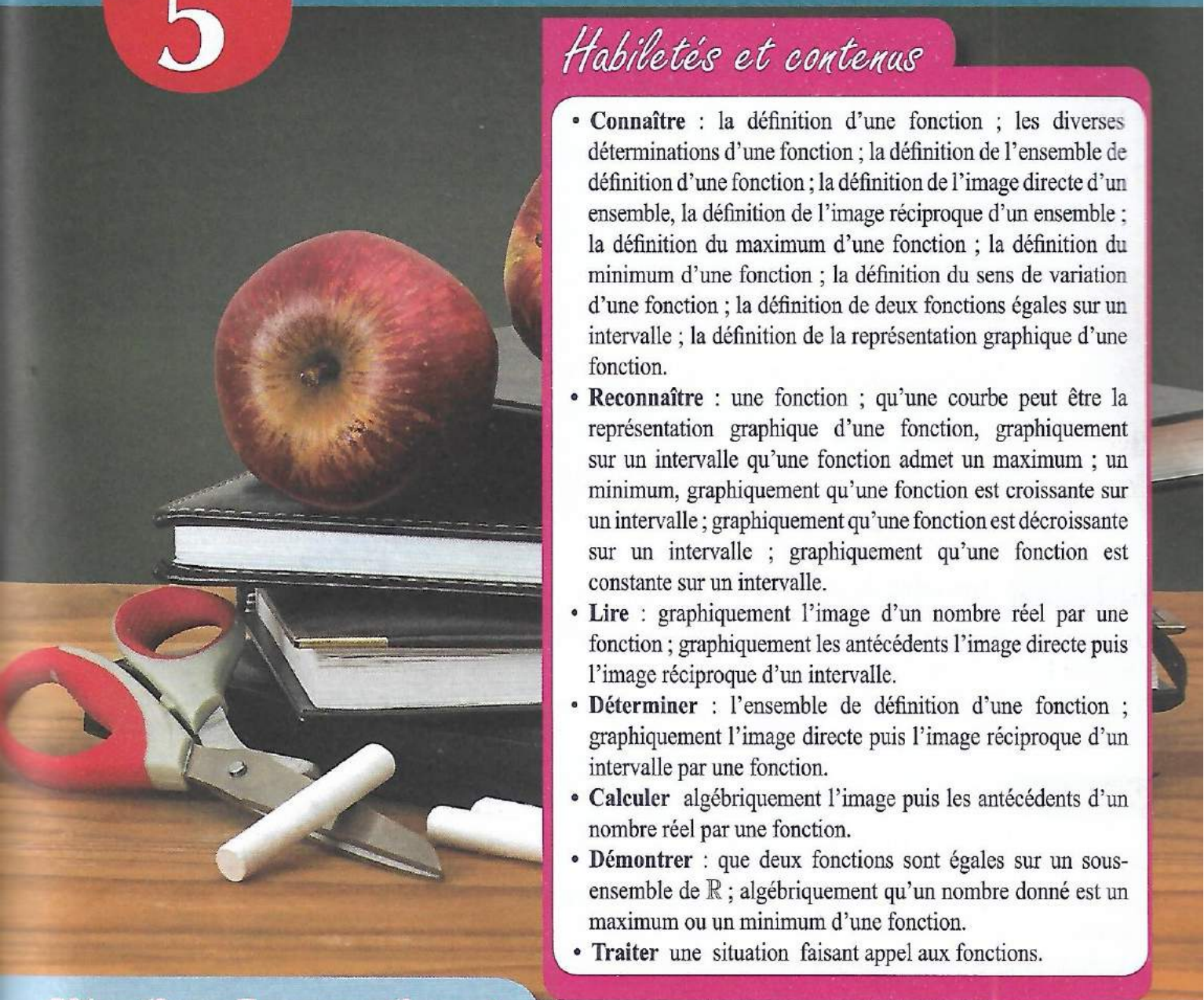
3 Un fabriquant d'automobiles propose deux modèles à la vente : des grosses voitures et des petites voitures. Il vend une grosse voiture à 16 000 euros et une petite à 10 000 euros. La construction d'une petite voiture nécessite l'emploi d'une unité de caoutchouc et d'une unité d'acier et celle d'une grosse voiture d'une unité de caoutchouc et de deux unités d'acier. Le stock de caoutchouc est de 400 unités et celui d'acier de 600 unités.

❶ Détermine le nombre de petites voitures et de grosses voitures qu'on peut construire avec ces stocks pour maximiser le chiffre d'affaire.

❷ On suppose maintenant que le stock d'acier est de 700 unités et que celui de caoutchouc reste inchangé. Détermine l'impact de l'augmentation moyenne d'une unité d'acier sur le chiffre d'affaire.

Leçon 5

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

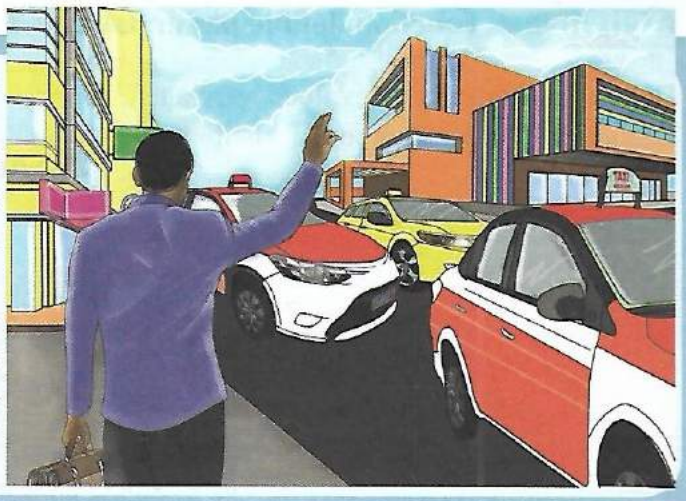


Habiletés et contenus

- **Connaître** : la définition d'une fonction ; les diverses déterminations d'une fonction ; la définition de l'ensemble de définition d'une fonction ; la définition de l'image directe d'un ensemble, la définition de l'image réciproque d'un ensemble ; la définition du maximum d'une fonction ; la définition du minimum d'une fonction ; la définition du sens de variation d'une fonction ; la définition de deux fonctions égales sur un intervalle ; la définition de la représentation graphique d'une fonction.
- **Reconnaître** : une fonction ; qu'une courbe peut être la représentation graphique d'une fonction, graphiquement sur un intervalle qu'une fonction admet un maximum ; un minimum, graphiquement qu'une fonction est croissante sur un intervalle ; graphiquement qu'une fonction est décroissante sur un intervalle ; graphiquement qu'une fonction est constante sur un intervalle.
- **Lire** : graphiquement l'image d'un nombre réel par une fonction ; graphiquement les antécédents l'image directe puis l'image réciproque d'un intervalle.
- **Déterminer** : l'ensemble de définition d'une fonction ; graphiquement l'image directe puis l'image réciproque d'un intervalle par une fonction.
- **Calculer** algébriquement l'image puis les antécédents d'un nombre réel par une fonction.
- **Démontrer** : que deux fonctions sont égales sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$; algébriquement qu'un nombre donné est un maximum ou un minimum d'une fonction.
- **Traiter** une situation faisant appel aux fonctions.

Situation d'apprentissage

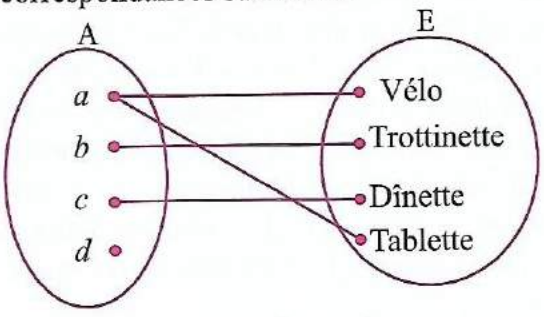
Pour la fête de Noël, Monsieur Koffi se rend à Abidjan où il veut faire toutes ses courses en taxi compteur.
Le prix d'une course en taxi compteur est constitué d'une partie fixe ou prise en charge (100 FCFA) et d'une partie proportionnelle à la distance parcourue (50 FCFA par Km).
Monsieur Koffi, voulant évaluer le budget de ses déplacements à Abidjan, demande à son fils en classe de 2nde C de l'aider à déterminer la somme prévisionnelle à dépenser en taxi en fonction de la distance x à parcourir (exprimée en Km).



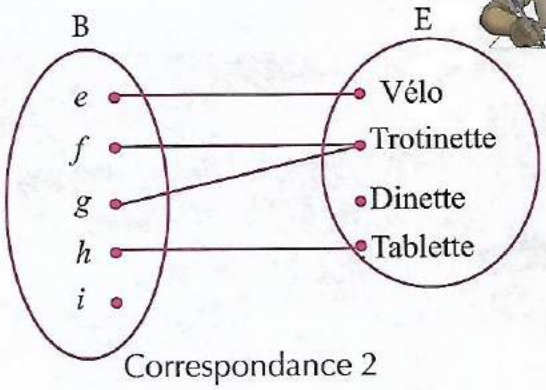


Activité 1 Notion de fonction

On considère la correspondance qui à chaque enfant associe sont jouet ou ses jouets préférés. On a interrogé des enfants de deux familles A et B et on a les correspondances suivantes.



Correspondance 1



Correspondance 2

En observant ces deux correspondances, indique celle dans laquelle chaque enfant préfère 0 ou 1 jouet.

Récapitulatif

Dans la correspondance 2 chaque enfant de l'ensemble B préfère 0 ou 1 jouet dans l'ensemble E. Cette correspondance est une fonction de B vers E.

Activité 2 Ensemble de définition d'une fonction

On considère la fonction définie par la correspondance 2 de l'activité 1.

Détermine l'ensemble des éléments de B qui ont une image dans l'ensemble E par cette fonction.

Récapitulatif

L'ensemble des éléments de l'ensemble de départ B qui ont une image dans l'ensemble E par la fonction est appelé ensemble de définition de la fonction.

Activité 3 Fonction définie par une formule explicite

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x+1)^2 - 3$

a) Donne les étapes de calcul de $f(x)$ à partir d'un nombre réel x donné.

b) Calcule la valeur de $f(x)$ pour $x = 4$.

Récapitulatif

- *Les étapes de calcul de $f(x)$ permettent de déterminer la valeur de $f(x)$ pour un nombre x donné.*
- $x \to x+1 \to (x+1)^2 \to (x+1)^2 - 3$
  on ajoute 1 *on élève au carré* *on soustrait 3*
- $f(4) = (4+1)^2 - 3 = 22$

Activité 4 Fonction définie par un tableau de valeurs

Dis si les tableaux de valeurs suivants définissent une fonction. Justifie ta réponse.

Tableau 1

−3	1	3,5	1	5
2	3,4	5	−2	2

Tableau 2

−3	1,5	3	6,5	7
2,5	3,4	5	−2	2,5



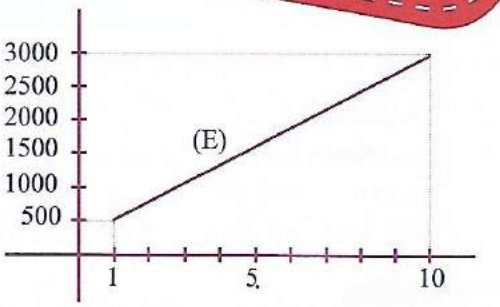
Récapitulatif

- ***Le tableau 1** ne définit pas une fonction, car au nombre 1 de la première ligne, on ne peut pas associer un nombre unique de la deuxième ligne (deux nombres différents (3,4 et −2) lui sont associés).*
- ***Le tableau 2** définit bien une fonction, car à chaque nombre de la première ligne, on peut associer un nombre unique de la deuxième ligne.*

Activité 5 Représentation graphique d'une fonction

Le graphique ci-dessous représente le prix d'une course en taxi en fonction de la distance parcourue.

1. Détermine le prix d'une crourse de 5 km.
2. Détermine la distance parcourue d'une course qui a coûté 3 000 Frs.
3. On désigne par x la distance parcourue et y le prix de la course. Caractérise l'ensemble des points M de E de coordonnées $(x\,;\,y)$ tel que $x \in [1\,;\,10]$.





Récapitulatif

On note (E) la représentation graphique de f.

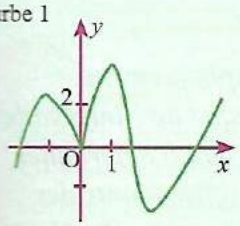
$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x \in D_f$ *et* $y = f(x)$

- *Quand f est définie par une formule explicite, on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe (E).*

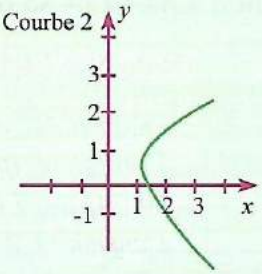
Activité 6 Fonction définie par une courbe

Dis si les courbes suivantes représentent des fonctions. Justifie ta réponse.

Courbe 1



Courbe 2



Récapitulatif

- ***La courbe 1*** est représentative d'une fonction, car tout droite parallèle à l'axe des ordonnées rencontre la courbe en 0 ou 1 point de la courbe.
- ***La courbe 2*** n'est pas représentative d'une fonction, car des droites parralèles à l'axe des ordonnées rencontrent la courbe en deux points distincts. Par exemple, la droite d'équation $x = 2$.

Activité 7 Image et antécédents d'un nombre par une fonction *f* définie par une formule explicite

On considère la fonction suivante :

$f(x) = [-4;3] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3 - 4x$

a) Calcule $f(0)$, $f(-3)$ et $f(1)$.

b) Détermine les nombres réels x tels que $f(x) = 0$.

Récapitulatif

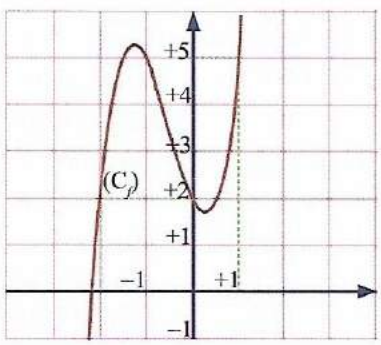
- *f(-3) est appelé l'image de –3 par f.*
- *Les solutions de l'équation $x^3 - 4x = 0$ sont appelées les antécédents de 0 par f.*
- *Calculer l'image d'un élément a de l'ensemble de définition revient à remplacer x par a dans la formule et faire un calcul direct.*
- *Déterminer les antécédents éventuels de b revient à résoudre l'équation f(x) = b en ne gardant que les solutions qui sont dans l'ensemble de définition de f.*

Activité 8 Image et antécédent d'un nombre par une fonction à partir de la représentation graphique de cette fonction

Soit la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-4\,;3]$ et donnée par la figure ci-contre :

a) Détermine l'image de –2 et 1 par *f*.

b) Détermine les éventuels antécédents de 2 par *f*.



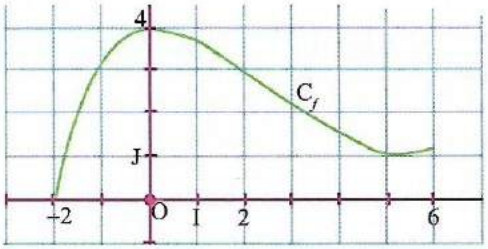
Récapitulatif

- *L'image de – 2 est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $x = -2$, parallèle à l'axe des ordonnées.*
- *Déterminer les antécédents de 2 par f revient à déterminer l'abscisse des points éventuels de la courbe qui ont pour ordonnée 2. Ce sont les éventuels points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = 2$, parallèle à l'axe des abscisses.*

Activité 9 Image directe d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique

La courbe (C_f) ci-contre est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 6]$.

Détermine graphiquement l'ensemble des images des éléments de chacun des intervalles suivants : $[-2 ; 0]$, $[2 ; 5]$.



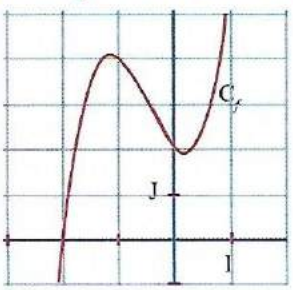
Récapitulatif

Déterminer graphiquement l'images directe de l'intervalle $[-2 ; 0]$ revient à déterminer tous les images des éléments de l'intervalle $[-2 ; 0]$ par f.

Activité 10 Image réciproque d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique

Soit la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3 ; 2]$ et donnée par la figure ci-contre :

Détermine graphiquement l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de l'intervalle $[0 ; 4]$.



Récapitulatif

Déterminer graphiquement l'image réciproque de l'intervalle $[0 ; 4]$ par f revient à déterminer l'ensemble des antécédants des éléments de l'intervalle $[0 ; 4]$ par f.

Activité 11 Variations d'une fonction-extrema d'une fonction

Soit f la fonction définie par la représentation graphique (C_f) ci-contre :

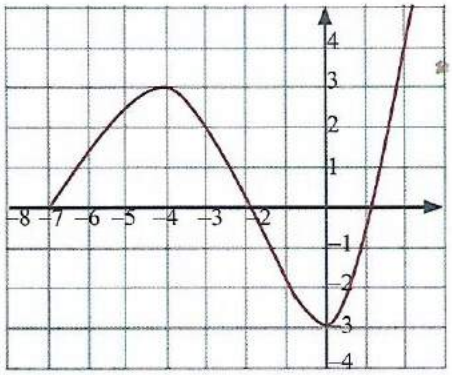
a) Détermine les images de –7 ; –4 ; 0 et 6 par f.

b) Compare $f(-4)$ et $f(-7)$ puis $f(0)$ et $f(-4)$.

c) Donne les coordonnées du point de la courbe situé au plus haut sommet

d) Donne les coordonnées du point de la courbe situé au plus bas sommet.

e) En t'inspirant de la courbe, résume les variations de la fonction f dans un tableau.



Récapitulatif

- On dit que f est croissante sur un intervalle lorsque : $\forall a, b \in D_f$, $a < b$, $f(a) \leq f(b)$

- On dit que f est décroissante sur un intervalle lorsque : $\forall a, b \in D_f$ $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

- Étudier les variations d'une fonction, c'est chercher sur quels intervalles elle est croissante ou décroissante. On résume ces résultats dans le tableau de variation de la fonction.

- L'ordonnée du point de (Cf) d'abscisse 2 est 4, c'est la plus grande valeur des images f(x) pour tout x appartenant à l'intervalle $[-7 ; 2]$. On l'appelle le maximum de f sur l'intervalle $[-7 ; 2]$.

- L'ordonnée du point de (Cf) d'abscisse 0 est -3, c'est la plus petite valeur des images f(x) pour tout x appartenant à l'intervalle $[-7 ; 2]$. On l'appelle le minimum de f sur l'intervalle $[-7 ; 2]$.

Activités de découverte

Activité 12 Fonctions égales

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + 2$$

et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

a) Détermine l'ensemble de définition de f et de g.

b) Donne une écriture simplifiée de g sur Dg.

c) Justifie que : $\forall\, x \in]2\,;+\infty[, f(x) = g(x)$.



Récapitulatif

$\forall\, x \in]2\,;+\infty[, f(x) = g(x)$.

On dit que f et g coïncident (ou sont égales) sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$

HISTOIRE DE LA NOTION DE FONCTION



C'est le mathématicien écossais James GREGORY (1638 –1675) qui propose la meilleure définition de la notion de fonction au 17ème siècle. Une fonction est définie comme une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable.

Définition moderne :

En mathématiques, une fonction est une relation entre un ensemble d'entrées et un ensemble de sorties autorisées avec la propriété que chaque entrée est reliée à une sortie exactement.
Une fonction est donc une relation qui, à un élément donné, en associe un autre UNIQUE.
Remarque : Nous verrons qu'il existe aussi des fonctions multivoques comme le logarithme négatif. Ces fonctions associent, à un élément, plusieurs autres éléments.
On note généralement :

- x : élément de départ.
- $f(x)$: élément associé à x qui l'on lit « f de x »,
- $f(x)$ est l'image de x par f.
- la fonction associée f se note par une flèche : $x \mapsto f(x)$

Résumé historique.

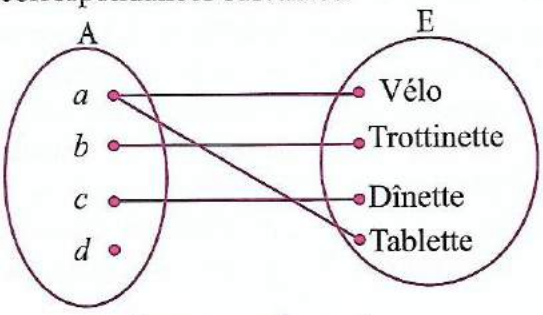
- Jusqu'au 17ème siècle, la notion de fonction n'est pas définie avec rigueur, le concept reste assez vague.
- Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) dans un cadre géométrique. Il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques.
- Puis BERNOULLI Jean (1667-1748) propose la notation : Φx
- Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), en introduisant la fonction discontinue partout, caractéristique des irrationnels (qui prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon), définit explicitement la fonction comme nous la définissons aujourd'hui.
- Cependant, l'idée de relation entre les quantités, prend naissance avec les mathématiques elles-mêmes et donc chez les mathématiciens babyloniens et grecs.

Historique

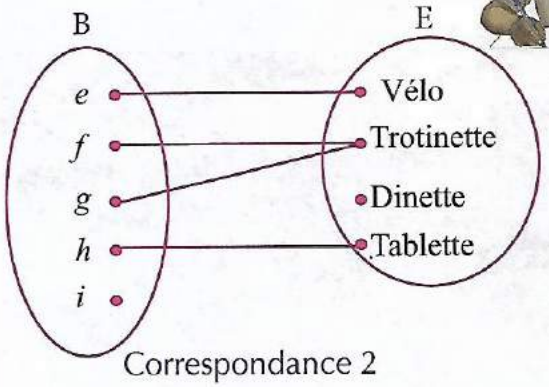


Activité 1 Notion de fonction

On considère la correspondance qui à chaque enfant associe sont jouet ou ses jouets préférés. On a interrogé des enfants de deux familles A et B et on a les correspondances suivantes.



Correspondance 1



Correspondance 2

En observant ces deux correspondances, indique celle dans laquelle chaque enfant préfère 0 ou 1 jouet.

Récapitulatif

Dans la correspondance 2 chaque enfant de l'ensemble B préfère 0 ou 1 jouet dans l'ensemble E. Cette correspondance est une fonction de B vers E.

Activité 2 Ensemble de définition d'une fonction

On considère la fonction définie par la correspondance 2 de l'activité 1.

Détermine l'ensemble des éléments de B qui ont une image dans l'ensemble E par cette fonction.

Récapitulatif

L'ensemble des éléments de l'ensemble de départ B qui ont une image dans l'ensemble E par la fonction est appelé ensemble de définition de la fonction.

Activité 3 Fonction définie par une formule explicite

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x+1)^2 - 3$

a) Donne les étapes de calcul de $f(x)$ à partir d'un nombre réel x donné.

b) Calcule la valeur de $f(x)$ pour $x = 4$.

Récapitulatif

- *Les étapes de calcul de $f(x)$ permettent de déterminer la valeur de $f(x)$ pour un nombre x donné.*
- $x \to x+1 \to (x+1)^2 \to (x+1)^2 - 3$
  on ajoute 1 *on élève au carré* *on soustrait 3*
- $f(4) = (4+1)^2 - 3 = 22$

Activité 4 Fonction définie par un tableau de valeurs

Dis si les tableaux de valeurs suivants définissent une fonction. Justifie ta réponse.

Tableau 1

−3	1	3,5	1	5
2	3,4	5	−2	2

Tableau 2

−3	1,5	3	6,5	7
2,5	3,4	5	−2	2,5



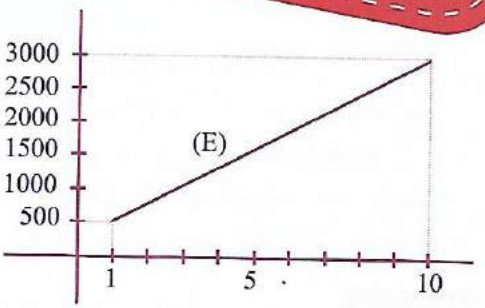
Récapitulatif

- ***Le tableau 1** ne définit pas une fonction, car au nombre 1 de la première ligne, on ne peut pas associer un nombre unique de la deuxième ligne (deux nombres différents (3,4 et −2) lui sont associés).*
- ***Le tableau 2** définit bien une fonction, car à chaque nombre de la première ligne, on peut associer un nombre unique de la deuxième ligne.*

Activité 5 Représentation graphique d'une fonction

Le graphique ci-dessous représente le prix d'une course en taxi en fonction de la distance parcourue.

1. Détermine le prix d'une crourse de 5 km.
2. Détermine la distance parcourue d'une course qui a coûté 3 000 Frs.
3. On désigne par x la distance parcourue et y le prix de la course. Caractérise l'ensemble des points M de E de coordonnées $(x ; y)$ tel que $x \in [1 ; 10]$.



Récapitulatif

On note (E) la représentation graphique de f.

$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x \in D_f$ *et* $y = f(x)$

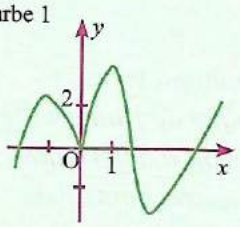
- *Quand f est définie par une formule explicite, on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe (E).*



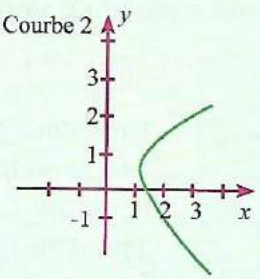
Activité 6 Fonction définie par une courbe

Dis si les courbes suivantes représentent des fonctions. Justifie ta réponse.

Courbe 1



Courbe 2



Récapitulatif

- ***La courbe 1*** est représentative d'une fonction, car tout droite parallèle à l'axe des ordonnées rencontre la courbe en 0 ou 1 point de la courbe.
- ***La courbe 2*** n'est pas représentative d'une fonction, car des droites parralèles à l'axe des ordonnées rencontrent la courbe en deux points distincts. Par exemple, la droite d'équation $x = 2$.

Activité 7 Image et antécédents d'un nombre par une fonction *f* définie par une formule explicite

On considère la fonction suivante :

$f(x) = [-4;3] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3 - 4x$

a) Calcule $f(0)$, $f(-3)$ et $f(1)$.

b) Détermine les nombres réels x tels que $f(x) = 0$.

Récapitulatif

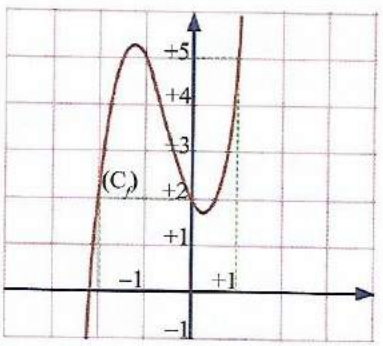
- *$f(-3)$ est appelé l'image de -3 par f.*
- *Les solutions de l'équation $x^3 - 4x = 0$ sont appelées les antécédents de 0 par f.*
- *Calculer l'image d'un élément a de l'ensemble de définition revient à remplacer x par a dans la formule et faire un calcul direct.*
- *Déterminer les antécédents éventuels de b revient à résoudre l'équation $f(x) = b$ en ne gardant que les solutions qui sont dans l'ensemble de définition de f.*

Activité 8 Image et antécédent d'un nombre par une fonction à partir de la représentation graphique de cette fonction

Soit la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-4 ; 3]$ et donnée par la figure ci-contre :

a) Détermine l'image de -2 et 1 par f.

b) Détermine les éventuels antécédents de 2 par f.



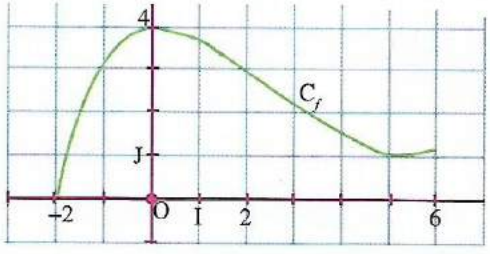
Récapitulatif

- *L'image de – 2 est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $x = -2$, parallèle à l'axe des ordonnées.*
- *Déterminer les antécédents de 2 par f revient à déterminer l'abscisse des points éventuels de la courbe qui ont pour ordonnée 2. Ce sont les éventuels points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = 2$, parallèle à l'axe des abscisses.*

Activité 9 Image directe d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique

La courbe (C_f) ci-contre est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 6]$.

Détermine graphiquement l'ensemble des images des éléments de chacun des intervalles suivants : $[-2 ; 0]$, $[2 ; 5]$.



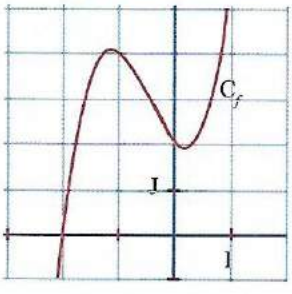
Récapitulatif

Déterminer graphiquement l'images directe de l'intervalle $[-2 ; 0]$ revient à déterminer tous les images des éléments de l'intervalle $[-2 ; 0]$ par f.

Activité 10 Image réciproque d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique

Soit la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3 ; 2]$ et donnée par la figure ci-contre :

Détermine graphiquement l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de l'intervalle $[0 ; 4]$.



Récapitulatif

Déterminer graphiquement l'image réciproque de l'intervalle $[0 ; 4]$ par f revient à déterminer l'ensemble des antécédants des éléments de l'intervalle $[0 ; 4]$ par f.

Activité 11 Variations d'une fonction-extrema d'une fonction

Soit f la fonction définie par la représentation graphique (C_f) ci-contre :

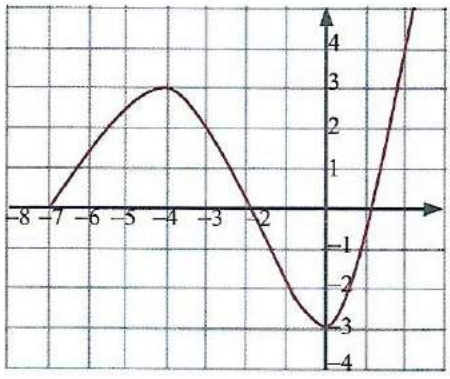
a) Détermine les images de -7 ; -4 ; 0 et 6 par f.

b) Compare $f(-4)$ et $f(-7)$ puis $f(0)$ et $f(-4)$.

c) Donne les coordonnées du point de la courbe situé au plus haut sommet

d) Donne les coordonnées du point de la courbe situé au plus bas sommet.

e) En t'inspirant de la courbe, résume les variations de la fonction f dans un tableau.



Récapitulatif

- On dit que f est croissante sur un intervalle lorsque : $\forall\, a, b \in D_f$ $a < b$, $f(a) \leq f(b)$

- On dit que f est décroissante sur un intervalle lorsque : $\forall\, a, b \in D_f$ $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

- Étudier les variations d'une fonction, c'est chercher sur quels intervalles elle est croissante ou décroissante. On résume ces résultats dans le tableau de variation de la fonction.

- L'ordonnée du point de (Cf) d'abscisse 2 est 4, c'est la plus grande valeur des images f(x) pour tout x appartenant à l'intervalle $[-7 ; 2]$. On l'appelle le maximum de f sur l'intervalle $[-7 ; 2]$.

- L'ordonnée du point de (Cf) d'abscisse 0 est -3, c'est la plus petite valeur des images f(x) pour tout x appartenant à l'intervalle $[-7 ; 2]$. On l'appelle le minimum de f sur l'intervalle $[-7 ; 2]$.

Activités de découverte

Activité 12 Fonctions égales

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + 2$$

et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

a) Détermine l'ensemble de définition de f et de g.

b) Donne une écriture simplifiée de g sur Dg.

c) Justifie que : $\forall\, x \in]2\,;\, +\infty[,\ f(x) = g(x)$.



Récapitulatif

$\forall\, x \in]2\,;\, +\infty[,\ f(x) = g(x)$.

On dit que f et g coïncident (ou sont égales) sur l'intervalle $]2\,;\, +\infty[$

HISTOIRE DE LA NOTION DE FONCTION



C'est le mathématicien écossais James GREGORY (1638 –1675) qui propose la meilleure définition de la notion de fonction au 17ème siècle. Une fonction est définie comme une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable.

Définition moderne :

En mathématiques, une fonction est une relation entre un ensemble d'entrées et un ensemble de sorties autorisées avec la propriété que chaque entrée est reliée à une sortie exactement.
Une fonction est donc une relation qui, à un élément donné, en associe un autre UNIQUE.
Remarque : Nous verrons qu'il existe aussi des fonctions multivoques comme le logarithme négatif. Ces fonctions associent, à un élément, plusieurs autres éléments.
On note généralement :

- x : élément de départ.
- $f(x)$: élément associé à x qui l'on lit « f de x »,
- $f(x)$ est l'image de x par f.
- la fonction associée f se note par une flèche : $x \mapsto f(x)$

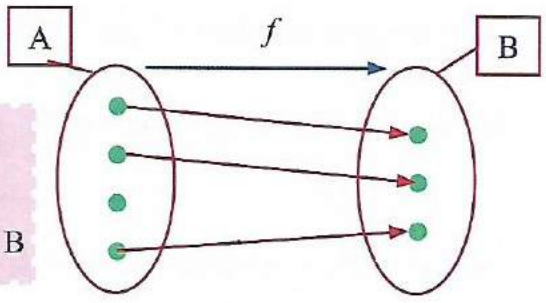
Résumé historique.

- Jusqu'au 17ème siècle, la notion de fonction n'est pas définie avec rigueur, le concept reste assez vague.
- Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) dans un cadre géométrique. Il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques.
- Puis BERNOULLI Jean (1667-1748) propose la notation : Φx
- Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), en introduisant la fonction discontinue partout, caractéristique des irrationnels (qui prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon), définit explicitement la fonction comme nous la définissons aujourd'hui.
- Cependant, l'idée de relation entre les quantités, prend naissance avec les mathématiques elles-mêmes et donc chez les mathématiciens babyloniens et grecs.

Historique



I NOTION DE FONCTION



Définition

A et B sont des ensembles non vides.

On appelle fonction de A vers B toute correspondance de A vers B qui, à chaque élément de A, associe un ou zéro élément de B

Vocabulaire et notations

On dit que :

- f est la fonction de A vers B qui, à x, associe $f(x)$;
- A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée de f ;
- x est la variable, $f(x)$ l'image de x par f.
- lorsque b est l'image de a par f, on dit que a est un antécédent de b par f et on écrit : $f(a) = b$.
- lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique
- lorsque l'ensemble de départ d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction d'une variable réelle.

Remarque



Une application d'un ensemble A dans un ensemble B est une fonction de A vers B.

Ainsi :

- Une symétrie, une translation sont des fonctions du plan vers le plan ;
- Les applications affines vues en troisième sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$;
- En statistique, un caractère quantitatif est une fonction d'un ensemble (population) vers $\mathbb{R}$.
- Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction ne sont pas précisés, la fonction est une fonction numérique d'une variable réelle.

II ENSEMBLE DE DÉFINITION

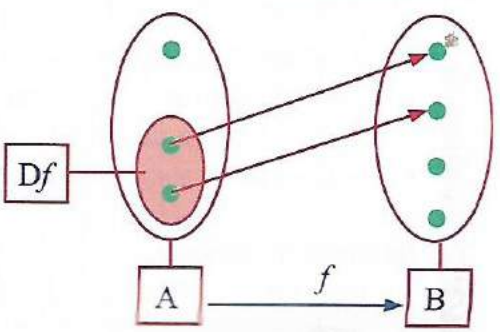


Définition

f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.

On appelle ensemble de définition de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.

On note habituellement D_f l'ensemble de définition de f.



Exemple

Recherchons l'ensemble de définition Df de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} + \sqrt{x+2}$

Contraintes d'exécution du programme de calcul de $f(x)$: $x \in D_f \Leftrightarrow x-1 \neq 0$ *et* $x+2 \geq 0$

$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ (1)

$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ (2)

Par conséquent : $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq -2$ *et* $x \neq 1$;

$$\text{donc } D_f = [-2\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$$



Résumé de la leçon

Remarque

Pour déterminer l'ensemble de définition D_f d'une fonction f, on peut procéder de la façon suivante :

- On écrit toutes les conditions d'exécution du programme de calcul de $f(x)$;
- On précise les ensembles que déterminent les contraintes ;
- On écrit D_f à l'aide d'intervalles.



III DIVERSES DÉTERMINATIONS D'UNE FONCTION



Remarque

Plusieurs procédés permettent de présenter une fonction : une formule explicite, un tableau des valeurs ou une courbe.



a) Fonction définie par une formule explicite

Une formule explicite est un programme de calcul qui part d'un élément de l'ensemble de définition et aboutit à l'image.

Exemple

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x+1+\frac{3}{x-1}$$



b) Fonction définie par un tableau des valeurs

Un tableau des valeurs comporte deux lignes ; il associe à chaque membre de la première ligne, son image sur la seconde ligne par une fonction g.

Exemple

Ce tableau associe au nombre –4 le nombre –3.

a	–12	–4	1,4	3	25
$g(a)$	–5,5	–3	5	2	–2

On écrit $g(-4) = -3$ lorsque g est la fonction définie par le tableau . On dit aussi que –4 a pour image –3 par g.

Définition de la représentation graphique d'une fonction

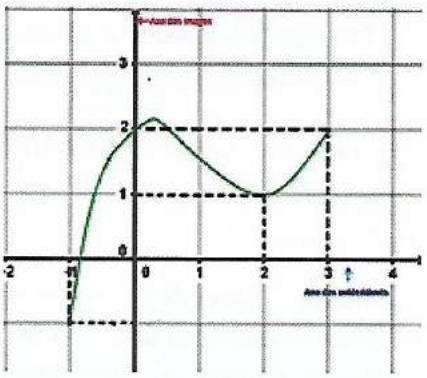
Soit une fonction f d'ensemeble de définition Df.
Le plan est muni d'un repère.
La courbe représentative (Cf) de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ où :
$x \in Df$ et $y = f(x)$.

c) Fonction définie par une courbe

Une courbe tracée dans un repère du plan (par exemple certaines trajectoire d'un mobile) peut représenter une fonction.

Exemple

• On considère la courbe ci-contre tracée dans un repère.
Cette courbe est constituée de points repérés par leur couple de coordonnées $(x ; y)$ où x désigne l'abscisse du point et y son ordonnée.
• On définit la fonction h en associant à chaque nombre réel a de l'axe des abscisses, l'ordonnée b de l'unique point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $x = a$.



III IMAGE ET ANTÉCÉDENT D'UN NOMBRE PAR UNE FONCTION f.

Propriété

a) Image ou antécédent d'un nombre déterminée par une fonction définie par une formule explicite

Soit une fonction f et un élément x appartenant à l'ensemble de définition de f et y un élément de l'ensemble d'arrivée de f. Tout élément x tel que $f(x) = y$ est un antécédant de y par f.

Exemple

Pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x^3 + 4x^2 - x + 1$$

$f(-2) = 2 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 - (-2) + 1 = 3$
3 est l'image de -2 par f.
-2 est un antécédent de 3 par f.

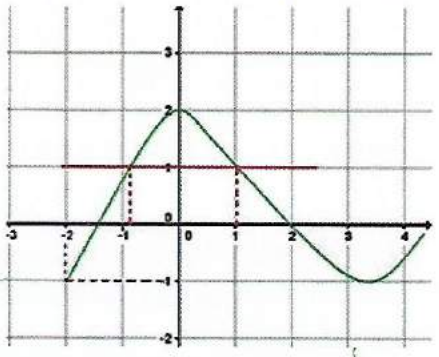
Méthode

- Pour calculer l'image d'un élément par une fonction f définie par une formule explicite, on remplace x par ce élément dans l'expression de $f(x)$.
- Pour déterminer l'antécédent d'un élément k par une fonction f définie par une formule explicite, on résout l'équation $f(x) = k$. les solutions de cette équation sont les antécédents de k par f.

b) Image ou antécédent d'un nombre déterminé par une fonction définie par une courbe représentative

Exemple

Soit, ci-contre, la courbe d'une fonction f définie sur $[-2 ; 5]$
a) Détermine graphiquement l'image du nombre 3 par f.
b) Détermine graphiquement le(s) antécédents du nombre 1 par f.



Méthode

- Pour trouver l'image du nombre 2 par f, on trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées (2 ; 0) ; elle coupe (C_f) en A.
- On trace ensuite la parallèle à l'axe des abscisses passant par A ; elle coupe l'axe des ordonnées en $f(2)$.
- Pour trouver le(s) antécédent(s) de 1, on trace la droite (Δ), parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées (0 ;1).
- Chaque intersection de cette droite (Δ) avec la courbe (C_f) permet de déterminer un antécédent de 1.

IV VARIATIONS D'UNE FONCTION

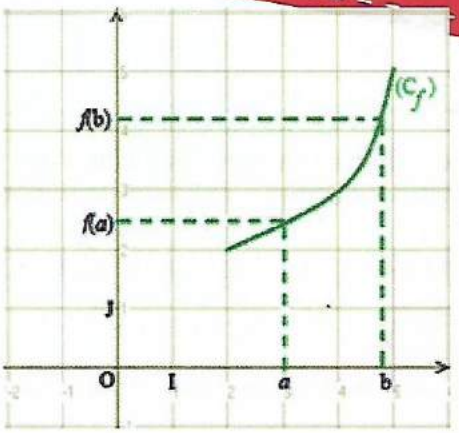


a) Fonction croissante

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est croissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
Si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$





Remarque

Une fonction croissante conserve l'ordre



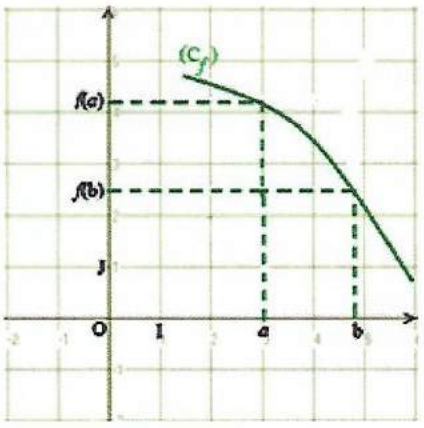
b) Fonction décroissante

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

f est décroissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :

Si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$





Remarque

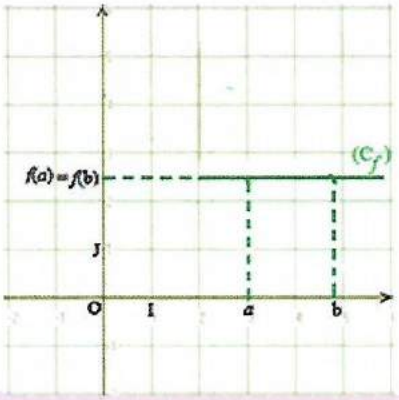
Une fonction croissante inverse l'ordre



1. Fonction constante

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
$f(a)=f(b)$





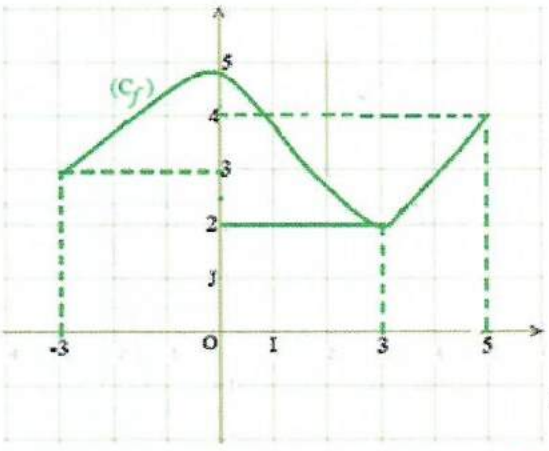
2. Tableau de variation

Définition

Un tableau de variation résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone ; c'est-à-dire soit croissante, soit décroissante.

Exemple

On considère la fonction représentée ci-contre.
Dressons son tableau de variation.
Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle [–3 ;5], f est croissante sur [-3 ;0], est décroissante sur [0 ;3] et est croissante sur [3 ;5].
On obtient le tableau ci-dessous.



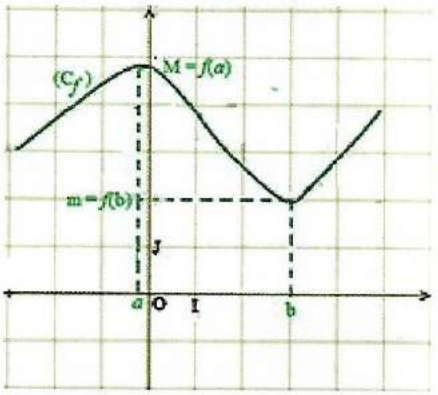
x	–3		0		3		5
$f(x)$	3	↗	5	↘	2	↗	4



Remarque

Dans un tel tableau, on écrit les valeurs des images aux extrémités des flèches.

V MAXIMUM ET MINIMUM D'UNE FONCTION



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a et b deux nombres réels de I.

- *f admet un **Maximum** en a sur I signifie que pour tout nombre x de I, $f(x) \leq f(a)$*
- *f admet un **Minimum** en b sur I signifie que pour tout tout nombre x de I, $f(x) \geq f(b)$*

V FONCTION ÉGALES

Définition

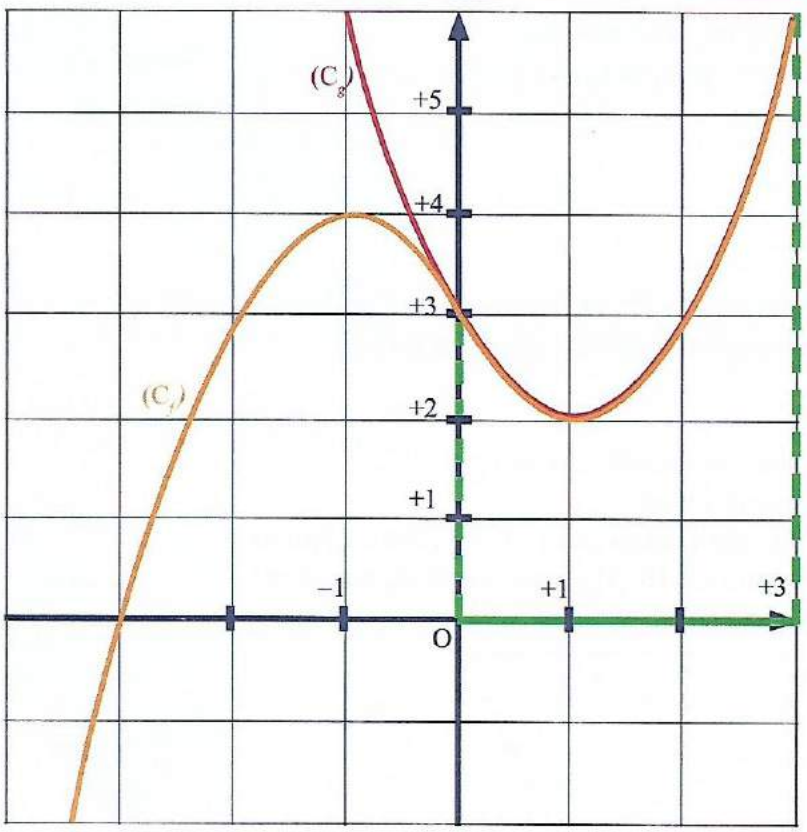
f et *g* sont des fonctions définies sur un ensemble E.

On dit que les fonctions *f* et *g* sont égales sur E (ou qu'elles coïncident sur E) lorsque, pour tout élément *x* de E, $f(x) = g(x)$.

Remarque

Les représentations graphiques des fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble.

Ci-contre, les fonctions *f* et *g* sont égales sur [0 ; 3]



EXERCICES DE FIXATION

Notion de fonction

1 « À tout nombre réel x, on associe le nombre y égal au double de la racine carrée de la somme de x et de 3 ».

a) Dis si la phrase précédente définit une fonction. Si oui, donne son ensemble de définition.

b) Donne la formule explicite traduisant la phrase ci-dessus.

2 Dans chacun des cas suivants, démontre que la phrase ci-dessus définit une fonction f sur un ensemble E que l'on précisera. Donne la formule explicite de f et calcule $f(100)$

a) « à tout nombre réel, on associe son carré divisé par 3 »

b) « à tout nombre réel, on associe la racine carrée de son double augmenté de 3 ».

Ensemble de définition

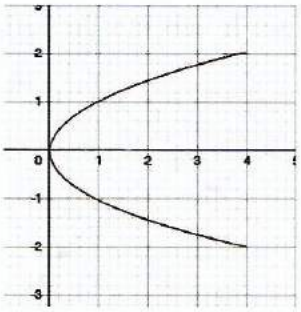
3 Pour chacune des affirmations suivantes, trois réponses sont proposées. Choisis la réponse exacte.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	L'ensemble de définition de la fonction de R vers R définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$	$\mathbb{R}$	$]-2\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$
2	Soit la fonction $f:[0\,;+\infty]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{4-x}$. Son ensemble de définition est :	$[4\,;+\infty[$	$]-\infty\,;4]$	$[0\,;4]$
3	Soit la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{\lvert x\rvert-1}$. Son ensemble de définition est :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$

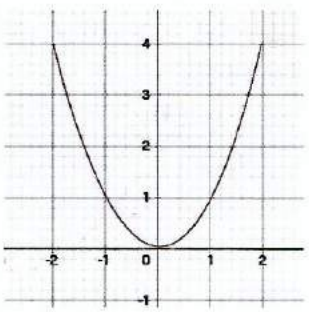
4

On considère les coubes ci-dessous.

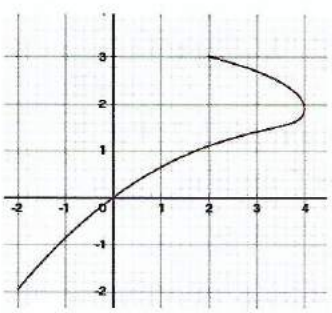
Indique celle qui sont en représentation graphique de fonction.



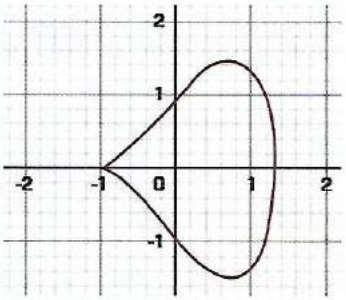
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

5 Dans chacun des cas suivants, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Détermine son ensemble de définition.

ⓐ $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$; ⓑ $f(x)=\dfrac{5}{x^2-4}$;

ⓒ $f(x)=\dfrac{x+3}{4-(x+1)^2}$; ⓓ $f(x)=\dfrac{2x+1}{|x|-2}$

ⓔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{1-x^2}}$; ⓕ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

ⓖ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; ⓗ $f(x)=\sqrt{1+1}\times\sqrt{1-x}$

ⓘ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{1+x^2}}$

Image et antécédents d'un nombre par une fonction définie par une formule explicite

6 Par une fonction f on a : $f(4)=7$
Recopie et complète chacune des phrases suivantes :

ⓐ ..... est l'image de ..... par f
ⓑ .....est l'antécédent de .....par f
ⓒ .....a pour image .....par f
ⓓ .....a pour antécédent .....par f.

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x^2-4x+3$
Calcule les images par f des nombres réels :
3 ; -1 ; 1 et $\sqrt{2}$.

8 Soit la fonction f définie par : $f(x)=3+\dfrac{2}{x+1}$

ⓐ Calcule les images par f des nombres réels 2 ; 1 et –2.
ⓑ Dis s'il est possible de calculer l'image de –1 par f, justifie ta réponse.

9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-4$

ⓐ Détermine les éventuels antécédents de 5 par f.
ⓑ Détermine les éventuels antécédents de –4 par f.

10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\dfrac{2x+2}{x-2}$

ⓐ Détermine l'éventuel antécédent de 0 par f.
ⓑ Détermine l'éventuel antécédent de 3 par f.
ⓒ Dis s'il est possible de déterminer l'antécédent de 2 par f, justifie ta réponse.

11 On considère la fonction :
$f:[-5\,;\,4]\mapsto\mathbb{R}$
$x\mapsto 2x^2-7$

ⓐ Calcule l'image de –2 et de 4 par f.
ⓑ Calcule les éventuels antécédents de –5 et de –7 par f.

Image et antécédents d'un nombre par une fonction à partir de la représentation graphique de cette fonction

12 Parmi les tableaux suivants, indique celui qui définit une fonction. Justifie ta réponse.

–5	–2	–5	1	4
–1	0	2	–3	1

Tableau 1

2	1	3	5	7
–1	2	–1	0	1

Tableau 2

13 On concidère la fonction g définie par le tableau suivant.

x	–2	0	2	6
$f(x)$	–2	–1	0	2

Variation d'une fonction

14 La fonction f admet le tableau de variation suivant :

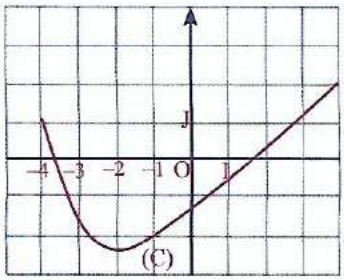
x	0		2		6		10
$f(x)$	2	↘	–5	↗	4	↘	0

ⓐ Détermine l'ensemble de définition de f.
ⓑ Décris le sens de variation de f.

15 La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous.

a Décris les variations de f.

b Dresse le tableau de variation de f.



16

1 La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Compare dans chaque cas les nombres suivants :

a $g(2)$ *et* $g(4)$; b $g(-2)$ *et* $g(1)$.

2 Reprends la même question en supposant que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

17 La fonction f est définie sur $[-3\ ;3]$ et $f(-3) = 2$, $f(3) = 4$.

Indique la bonne répponse parmi les affirmations suivantes :

a f peut être croissante sur $[-3\ ;3]$

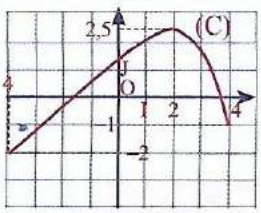
b f peut être décroissante sur $[-3\ ;3]$.

18 La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous.

Donne un encadrement de $f(x)$ sachant que :

a $-4 < x < 2$;

b $2 < x < 4$.



19 On donne le tableau de variation d'une fonction de f ci-dessous :

x	-5		2		6
$f(x)$	2	↘		↗	6
			-2		

1 À l'aide de ce tableau, dis si on peut comparer dans chaque cas les nombres suivants :

a $f(-5)$ et $f(3)$; b $f(-5)$ et $f(1)$;

c $f(3)$ et f(4) ; d $f(-2)$ et $f(3)$.

2 Donne le minimum de f sur $[-5\ ;\ 6]$.

20 Sachant que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et strictement croissante sur $[3\ ;\ 7]$, dis si on peut comparer :

a $f(-4)$ et $f(1)$; b $f(0)$ et $f(4)$;

c $f(3)$ et $f(4)$; d $f(-20)$ et $f(-3)$.

21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$

1 Vérifie qu'il existe un réel a tel que :

$$f(x) = \alpha - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

2 Déduis-en les variations de f sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

Maximum, Minimum d'une fonction

22 La fonction f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	-4		-2		0		3
$f(x)$	3	↘		↗	2	↘	
			1				-1

1 Décris les variations de f.

2 Donne le maximum et le minimum de la fonction f sur chacun des intervalles suivants :

a $[-4\ ;3]$; b $[-2\ ;3]$; c $[-4\ ;0]$

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 6$

1 Démontre que pour tout réel x, $f(x) \geq -6$

2 Donne un éventuel antécédent de -6 par f
Déduis-en le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

24 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - 6x + 10$.

a Justifie que : $g(x) = (3 - x)^2 + 1$

b Démontre : $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $g(x) \geq 1$.

Déduis-en le minimum de g sur $\mathbb{R}$.

25 Détermine le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - (1 + x)^2$.

Fonctions égales

26 Soit f et g deux fonctions définies par :

$f(x)=x-3$ et $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

ⓐ Détermine les ensembles de définition des fonctions f et g.

ⓑ Détermine le plus grand ensemble sur lequel $f(x)=g(x)$.

27 On donne les fonctions f *et* g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{(x+3)^2}-1$ *et* $g(x)=x+2$

Détermine le grand ensemble sur lequel f et g sont égales.

28 Dans chacun des cas suivants les fonctions f et g sont définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Détermine :

1. les ensembles de définition Df et Dg des fonctions f et g respectivement.
2. le plus grand ensemble sur lequel f *et* g coïncident.

ⓐ $f(x)=x+1$ *et* $g(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$.

ⓑ $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}$ *et* $g(x)=\dfrac{-4}{x^2-4}$

ⓒ $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{|x-3|}$ *et* $g(x)=|x-3|$

29 Dans chacun des cas suivants, dis si les fonctions g et h coïncident ou non sur l'ensemble I. Justifie ta réponse.

ⓐ

$g(x)=x+2$, $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, $I=]2\,;+\infty]$.

ⓑ

$g(x)=\sqrt{(x+1)^2}$, $h(x)=x+1$, $I=]-\infty\,;-2]$.

ⓒ

$g(x)=|x|+2$, $h(x)=|x+2|$, $I=[0\,;+\infty]$.

ⓓ $g(x)=x$, $h(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2+2}$, $I=\mathbb{R}$

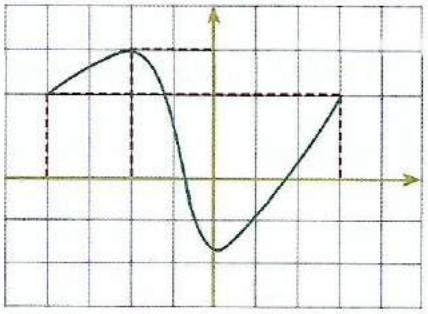
ⓔ $g(x)=x|x|$, $h(x)=x^2$, $I=[0\,;+\infty[$.

ⓕ $g(x)=|x-1|$, $h(x)=1-x$, $I=[1\,;2]$.

Représentation graphique

30 La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.

1. Détermine l'intervalle sur lequel f est définie.
2. Précise les images par f des nombresréels suivants : –4 ; –2 ; 1 et 3.



EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 Soit (C) la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère (O, I, J) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1. Détermine parmi les points suivants ceux qui appartiennent à (C) :

$A\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\right)$; $B(-2\,;2)$; $C\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{3}\right)$; $D(-0{,}6\,;-1{,}5)$

2. Détermine l'abscisse du point de (C)
   ⓐ d'ordonnée 2.
   ⓑ d'ordonnée 5.

2 Soit (C) la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère (O, I, J) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par : $f(x)=x|x|$

1. Détermine parmi les points suivants ceux qui appartiennent à (C) :
   O ; A(1 ; 1) ; B(–1 ; 1) ; C(–1 ; –1) ; D (5 ; 25).
2. Détermine l'abscisse du point de (C)
   ⓐ d'ordonnée 25.
   ⓑ d'ordonnée –25.

3 Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Détermine les images, si elles existent, de -4 et 3 par f.
3. Détermine les éventuels antécédents de -3 et 1 par f.

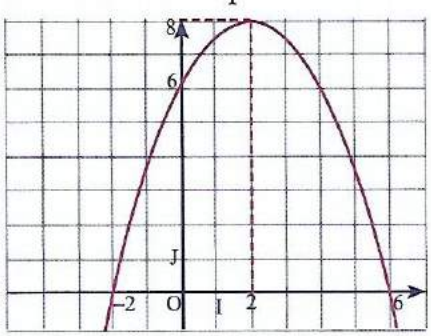
4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=2x^2-x+1$

1. Soient x et x' deux nombres réels.
   Factorise $f(x')-f(x)$.
2. a. Démontre que si $x'>x\geq\dfrac{1}{4}$ alors $f(x')>f(x)$
   b. Démontre que si $x'>x\geq\dfrac{1}{4}$ alors $f(x')>f(x)$
   c. Déduis-en le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. a. Démontre que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq\dfrac{7}{8}$.
   b. Déduis-en que f admet un minimum que tu préciseras.
4. Calcule $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $f(1)$, $f(2)$ et donne une allure de la courbe représentative de f.

5 La figure ci-dessous est la courbe representative de la fonction f.

1. A partir de la courbe ;
   a. Dresse le tableau de variation de f.
   b. Détermine le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
2. En fait, f est l'une des trois fonctions suivantes :
   a. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$
   a. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x-2$
   a. $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$

Détermine-la. Justifie ta réponse

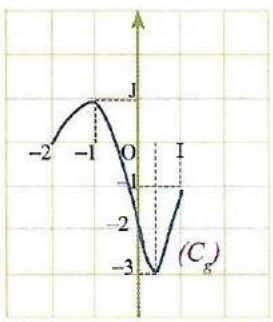


6 On considère la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par :
$f(x)=\dfrac{2}{x+2}$

1. a. Détermine les coordonnées des points A, B et C appartenant à la courbe représentative de la fonction f dont les abscisses respectives sont 0 ; 2 et 4.
   b. Place ces points dans un repère (O, I, J).
2. Dis si les points K(1 ; 0,6) et L(3 ; 0,4) appartiennent à la courbe représentative de la fonction f. Justifie tes réponses.

7 Soit g la fonction définie par la représentation graphique ci-dessous.
Par lecture graphique :

1. Détermine l'ensemble de définition de g.
2. Détermine l'image des réels 1 ; $-0{,}5$ et -1 par g.
3. Donne, s'ils existent, les antécédents de -2 ; -1 et 2 par g.
4. Donne l'ordonnée du point de la courbe (C_g) d'abscisse 0.
5. Dis si le point de coordonnées $(-1\,;-2)$ est sur la courbe (C_g). Justifie ta réponse.
6. Dresse le tableau de variation de g sur son ensemble de définition.



8 Soit une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;5]$ telle que :

- f est croissante sur l'intervalle $[-2\,;0]$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- f est constante sur l'intervalle $[2\,;5]$;
- L'image par f de 1 est 3 ;
- -2 et 5 sont des antécédents de 2 ;
- Le maximum de la fonction f sur $[-2\,;5]$ est 5.

Dresse le tableau de variations de f sur $[-2\,;5]$.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 Le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction f.

x	-4		-1		0		3
$f(x)$	3	↘	-1	↗	2	↘	-4

Recopie et reponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

a) f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;0]$

b) f possède deux maximums

c) le minimum de f est atteint pour $x = -4$.

d) $f(-3) > f(-2)$. e) $f(0{,}5) > -1$.

f) $f(-0{,}5) = 0$. g) $f(-0{,}5) > f(2{,}5)$.

2 Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	-1		0		1		2
$f(x)$	1	↘	0	↗	1	↘	-2

Recopie et reponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes.

a) Si $x < 0$ alors $f(x) > 0$

b) Si $-2 < f(x) < 1$ alors $1 < x < 2$

c) Si $0 < f(x) < 1$ alors $-1 < x < 1$

d) Si $f(x) = 0$ alors $x = 0$

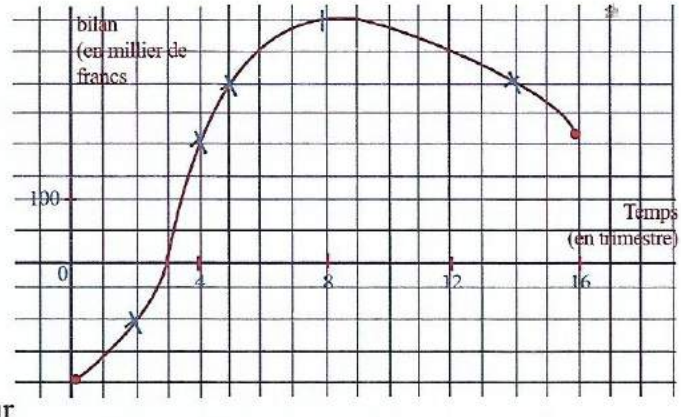
3 Étude de la prolifération d'une plante après 5 jours de culture en milieu nutritif suivant la concentration de potassium en $g.L^{-1}$ (gramme par litre) :

Concentration de potassium	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	1	1,5
Nombre de plantes	8	15	27	29	34	41	47	50	54	48	42	35	25

a) Choisis un repère orthogonal permettant de représenter cette prolifération et construis les points.

b) Comme la concentration en potassium peut prendre toutes les valeurs de 0 à 1,5 $g.L^{-1}$, trace la courbe de la fonction f qui, à une concentration, associe le nombre de plantes. (on tracera une ligne continue).

4 Pour un certain produit, le service comptable d'une entreprise étudie le bilan recettes-coûts sur quatre années de production. Ce bilan est représenté par le graphique ci-contre.



1) a) Détermine le bilan au 5ème trimestre, à la fin de la 3ème année, au 3ème trimestre.

b) Détermine le (s) trimestre (s) où ce bilan est de 200 000 F ; −100 000 F

c) Détermine l'intervalle sur lequel le bilan est négatif ou nul.

d) Détermine l'intervalle sur lequel le bilan est supérieur ou égal à 300 000 F

2) On appelle f la fonction correspondant à ce bilan et x la variable temps. Modélise les questions précédentes à l'aide de f.

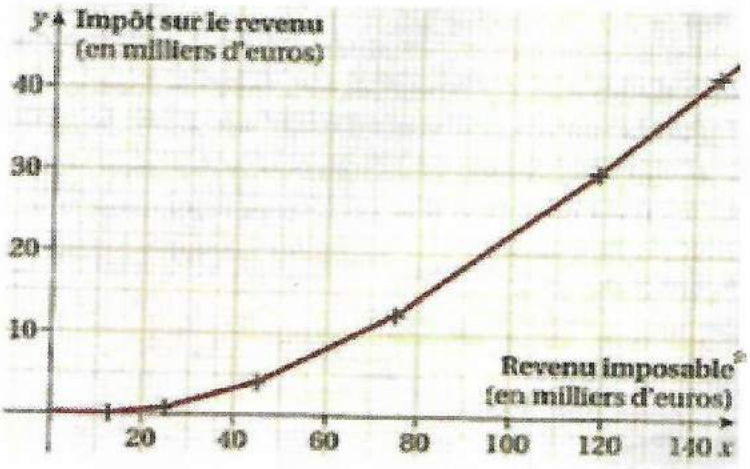
5 La puissance (en watts par m^2 ; $W.m^{-2}$) d'un générateur photovoltaïque dépend de la résistance de charge (en ohms, Ω) qu'il est nécessaire d'utiliser. Il existe une formule qui lie ces deux grandeurs mais que l'on ne connait pas.
Ce tableau donne la puissance d'un panneau solaire pour certaines résistances.



R(Ω)	14	31,5	45	70,2	89,7	100	131	147	167	187	205	219	242	281
P($W.m^{-2}$)	3	5,9	8	11,3	14 ,2	15,3	17,3	17,7	17,8	17,1	16,3	15,8	15	13,3

1. Réalise un graphique avec les données ci-dessus.
2. A l'aide du graphique :
   a. Évalue la résistance pour laquelle la puissance est maximale ;
   b. Indique la puissance obtenue pour une résistance de 45 ohms ;
   c. Indique à quelle(s) résistance(s) correspond une puissance de 15,3 $W.m^{-2}$;
   d. Détermine les résistances pour lesquelles la puissance est supérieure à 14 $W.m^{-2}$.

6 Le graphique suivant représente l'impôt sur le revenu en fonction du revenu imposable pour une famille avec deux enfants.



1. Commente le dialogue suivant :
M. Yao : Plus ton revenu est important et plus tu dois payer des impôts.
M. Séka : Ce qui veut dire que l'impôt est proportionnel au revenu.
2. A l'aide du graphique, réponds aux questions suivantes :
   a. Détermine le montant des impôts de M. et Mme Kouamé dont le revenu imposable est de 60 000 FCFA.
   b. M. et Mme Koné ont payé 25 000 FCFA d'impôts. Détermine leur revenu imposable correspondant.
3. Dans la suite, on propose « d'approcher » la représentation graphique précédente par la courbe de la fonction f que l'on définit sur l'intervalle [0 ;150] par : $f(x)=\frac{1}{100000}\left(-x^3+400x^2-8000x\right)$
   a. Complète le tableau des valeurs suivant (on donnera un arrondi au dixième près)

x	0	25	45	75	120	145
$f(x)$						

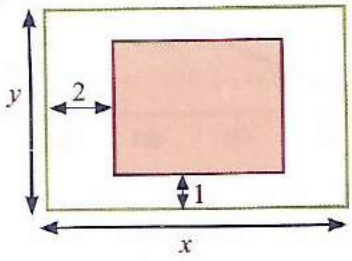
   b. Calcule $f(10)$. Dis si ce résultat donne le montant des impôts à payer pour un revenu imposable de 10 000 FCFA. Explique.

SITUATION D'ÉVALUATION

1 Un camion citerne vide 5000 litres d'eau dans une piscine. Après avoir versé 250 litres d'eau, l'employé chargé de l'opération laisse le robinet ouvert. Le fils du propriétaire, élève en classe de second C, impatient, veut connaitre le temps que mettra le camion pour mettre un volume d'eau maximum dans la piscine. Pour cela, Il met le chronomètre de sa montre à zéro. Le débit du robinet est de 2 litres par seconde.
On note x le temps, en secondes, mis pour vider une quantité d'eau et y la quantité d'eau se trouvant dans la piscine.

1. Exprime y en fonction de x.
2. Calcule la quantité d'eau dans la piscine au bout de 30 min.
3. Détermine le temps au bout duquel le camion aura été vidé de moitié.
4. Démontre que le volume d'eau dans la piscine atteint son maximum au bout de 39 min 35 s.

2 Le Comité de Gestion (COGES) d'un lycée souhaite aménager un grand terrain rectangulaire de dimensions x et y (exprimées en mètres) pour les épreuves sportives. Il veut réserver au centre de ce terrain, un espace qui doit être couvert de gazon, de forme rectangulaire et d'aire 1250 m², entouré d'une allée de largeur 2 m et 1 m, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Pour des raisons économiques, il exige que l'aire du terrain soit la plus petite possible.
Il informe alors les élèves de la 2eA pour déterminer les dimensions de ce terrain.

1. a) Justifie que $y \geq 2$ et $x \geq 4$
   b) Justifie que $(x-4)(y-2)=1250$
   c) On suppose que $x > 4$, déduis-en que $y = 2 + \dfrac{1250}{x-4}$
2. a) Démontre que l'aire totale $A(x)$ de ce terrain est donnée par la formule $A(x) = 2x + 1250 + \dfrac{5000}{x-4}$
   b) Recopie et complète le tableau de valeurs ci-dessous :

x	40	45	50	54	60	65	75
$A(x)$							

3. a) Démontre que $A(54) - A(x) = \dfrac{-(x-54)^2}{x-4}$
   b) Déduis-en que $A(x) \leq A(54)$, puis indique la petite aire possible de ce terrain.
   c) Déduis-en les dimensions de ce terrain.

Leçon 6

ÉTUDE DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Habiletés et contenus

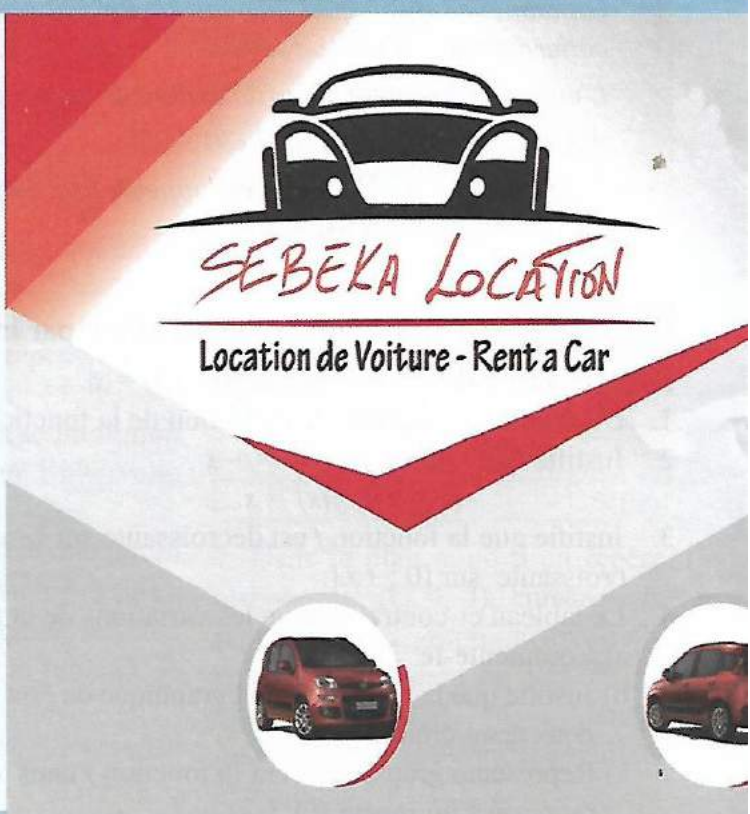
- **Identifier** une fonction affine par intervalles.
- **Reconnaître** les fonctions de référence.
- **Représenter** les fonctions de référence $(x \mapsto x^2 ; x \mapsto x^3 ; x \mapsto \frac{1}{x} ; x \mapsto \sqrt{x} ; x \mapsto |x| ; x \mapsto E(x))$; les fonctions du type : $x \mapsto |ax+b|$.
- **Calculer** la partie entière d'un nombre réel.
- **Étudier** le sens de variation des fonctions élémentaires et dresser leur tableau de variation.
- **Utiliser** les fonctions référence pour étudier les fonctions du type : $x \mapsto \frac{a}{x}$; $x \mapsto ax^2$.
- **Traiter une situation** faisant appel aux fonctions de référence.

Situation d'apprentissage

Une société de location de véhicules située à Yopougon affiche pour une location journalière les tarifs suivants :

- entre un et 50 kilomètres, le client paie 15 000 francs de frais d'entretien du véhicule et 110 francs par kilomètre parcouru ;
- entre 50 et 100 km, le client paie 25 000 francs de frais d'entretien du véhicule et 90 francs par kilomètre parcouru ;
- au delà de 100 km, le client paie 40 000 francs de frais d'entretien du véhicule et 70 francs par kilomètre parcouru. Un week-end, ton ami KALILOU souhaite rendre visite à sa grande sœur dans une ville située à 85 kilomètres de Yopougon. Il a prévu la somme de 30 000 francs pour la location d'un véhicule. Il se confie à toi et se demande si cette somme est suffisante pour la location d'un véhicule de cette société.

Tu décides de l'aider en utilisant les fonctions de référence.





Activité 1 Fonction affine par intervalles

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
Si $x \in]-\infty ; -1[$ alors $f(x) = -2x + 3$;
Si $x \in [-1 ; 3[$ alors $f(x) = -x$;
Si $x \in [3 ; +\infty[$ alors $f(x) = x + 3$.

1. Détermine la fonction affine f_1 qui est égale à f sur l'intervalle $]-\infty ; -1[$.
2. Détermine la fonction affine f_2 qui est égale à f sur l'intervalle $[-1 ; 3[$.
3. Détermine la fonction affine f_3 qui est égale à f sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$.

Récapitulatif

- *La fonction f étant égale à une fonction affine sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1[$; $[-1 ; 3[$; $[3 ; +\infty[$ est appelée une fonction affine par intervalles.*

Activité 2 Fonction partie entière

1. Reproduis et complète la dernière colonne du tableau en déterminant pour chaque nombre réel x l'entier relatif z (s'il existe) tel que : $z \leq x < z + 1$.

Nombre réel x	Entier relatif z correspondant
2,578	
3,14	
0,002	
−1,67	
−5, 89	
$\sqrt{2}$	
$-\sqrt{3}$	

On admet que pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif z tel que : $z \leq x < z + 1$.
On considère la correspondance f qui à tout nombre réel x associe l'entier relatif z tel que $z \leq x < z + 1$.
a) Justifie que f est une application.
b) Détermine $f(-1,02)$; $f(7,9)$; $f(-\sqrt{3})$.

Récapitulatif

- *On admettra que : quel que soit le nombre réel x, il existe un nombre entier relatif z et un seul tel que : $z \leq x < z + 1$.*
  L'entier z est appelé la partie entière du nombre réel x, on le note $E(x)$.
  Ainsi $E(2,578) = 2$; $E(-5,89) = -6$
- *L'application $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto E(x)$ est appelée fonction partie entière.*



Remarque

La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Activité 3 Étude d'une fonction affine par intervalles



Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que : Si $x < 0$, $f(x) = -x$;
   Si $x \geq 0$, $f(x) = x$.
3. Justifie que la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.
4. Le tableau ci-contre indique les variations de la fonction f.
   a) Commente-le.
   b) Justifie que la représentation graphique de f est la réunion de deux demi-droites.
   c) Représente graphiquement la fonction f dans dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	↘		0	↗	

Récapitulatif

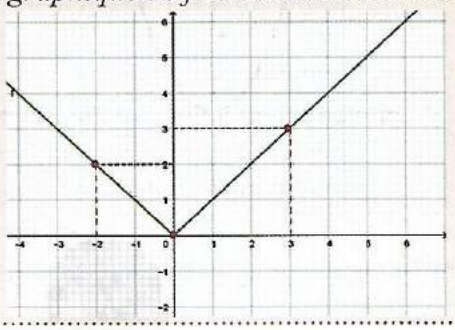
- *La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$.*
- *Elle est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0[$.*
- *Le tableau ci-contre, résumant les variations de f sur $\mathbb{R}$ est appelé le tableau de variation de la fonction f.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

- *La représentation graphique de f est constituée de la réunion de deux demi-droites de même origine qui est le point O.*

x	−2	0
$f(x)$	2	0

x	0	3
$f(x)$	0	3





Activité 4 Étude d'une fonction partie entière

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x.

1. Recopie puis complète :

Si $x \in [-3 ; -2[$, $E(x) =$ .....

Si $x \in [-2 ; -1[$, $E(x) =$ .....

Si $x \in [-1 ; -0[$, $E(x) =$ .....

Si $x \in [0 ; 1[$, $E(x) =$ .....

Si $x \in [1 ; 2[$, $E(x) =$ .....

Si $x \in [2 ; 3[$, $E(x) =$ .....

2. Déduis de la question précédente, la représentation graphique de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-3 ; 3[$.



Récapitulatif

- *La fonction partie entière est une fonction affine par intervalles.*
- *Sa représentation graphique sur l'intervalle $[-3 ; 3[$ est une fonction constante sur chacun des intervalles $[-3 ; -2[$, $[-2 ; -1[$, $[-1 ; 0[$, $[0 ; 1[$, $[1 ; 2[$, $[2 ; 3[$.*

Activité 5 Étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, Si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
3. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]-\infty ; 0[$, Si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$.
4. Déduis des questions précédentes le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty ; 0[$ et sur $[0 ; +\infty[$.
5. Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
6. On se propose de représenter la fonction f sur $[-3 ; 3]$.
   a) Justifie que 0 est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
   b) Justifie que 9 est le maximum de f sur l'intervalle sur $[-3 ; 3]$.
   c) Recopie et complète à l'aide d'une calculatrice le tableau de quelques valeurs de $f(x)$.

(On donnera pour chaque résultat l'arrondi d'ordre 2)

x	3	2,5	2	1,5	1	0,5
$f(x)$						

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

7. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique partielle de f correspondant au tableau de valeurs ci-dessus en admettant qu'il s'agit d'une courbe régulière et continue.

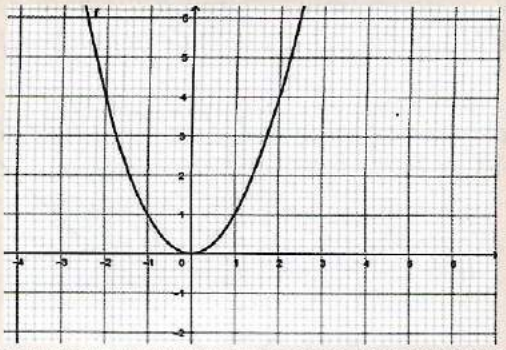
Récapitulatif

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

- *n'est pas une fonction affine.*
- *Elle est définie sur $\mathbb{R}$.*
- *Elle est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$, et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.*
- *Son tableau de variation se présente comme suit :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

- *Sa représentation graphique se présente comme suit :*



Remarque

La courbe représentative de la fonction carrée dans un repère orthogonal (O, I, J) est une parabole de sommet O et d'axe (OJ).



Activité 6 Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Explique pourquoi pour tous les nombres réels u et v de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
3. Déduis des questions précédentes, le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
4. Dresse le tableau de variation de f.
5. On se propose de représenter la fonction f sur $[0 ; 10]$.
   a) Recopie et complète à l'aide d'une calculatrice le tableau de quelques valeurs de $f(x)$.

(On donnera pour chaque résultat l'arrondi d'ordre 1 de $f(x)$).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$											

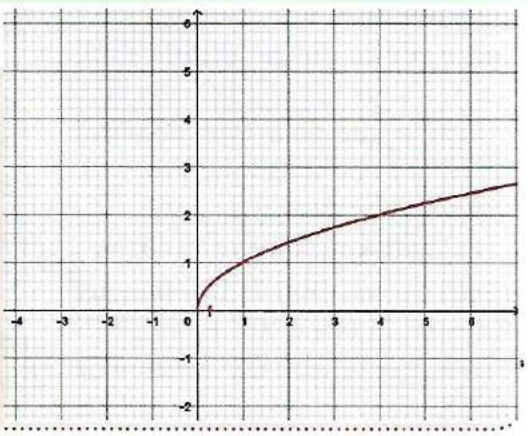
b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique partielle de f correspondant au tableau de valeurs ci-dessus.
(On admettra qu'il s'agit d'une courbe régulière et continue).

Récapitulatif

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0 ; +\infty[$.
Elle est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Son tableau de variation est :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

Sa courbe représentative se presente comme suit :



Activité 7 Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, si $u < v$ alors $h(u) > h(v)$.
3. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]-\infty ; 0[$, si $u < v$ alors $h(u) > h(v)$.
4. Déduis des questions précédentes le sens de variation de la fonction h sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
5. Dresse le tableau de variation de h.
6. On se propose de représenter la fonction h sur $[-4 ; 0[\cup]0 ; 4]$. On note (C_h) la représentation graphique de la fonction h.
   a) Justifie que si un point $M(x, y)$ appartient à (C_h), alors $x > 0$ et $y > 0$ ou $x < 0$ et $y < 0$.
   b) Déduis-en que la représentation graphique de h est la réunion de deux parties disjointes du plan.
   c) Recopie et complète à l'aide d'une calculatrice le tableau de quelques valeurs de $h(x)$.
   (*On donnera pour chaque résultat l'arrondi d'ordre 2*).

x	-4	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$
$h(x)$						

0	0,5	1	1,5	2	2,5	4

   d) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique partielle de h correspondant au tableau de valeurs ci-dessus.

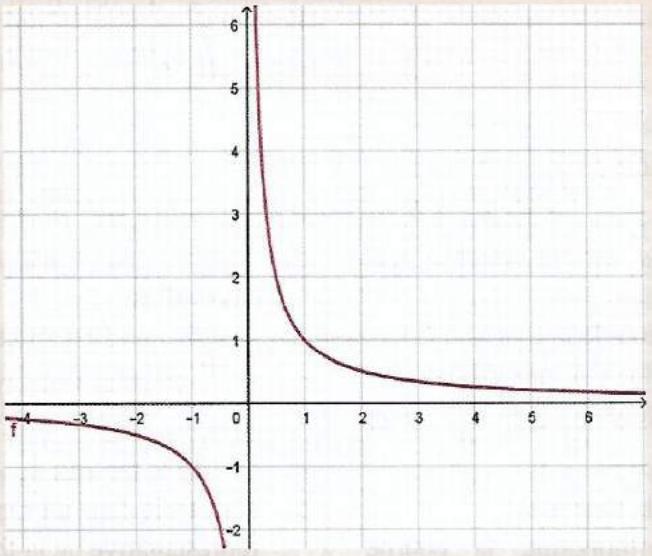
Récapitulatif

Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

- *L'ensemble de définition de la fonction h est* $]-\infty; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
- *La fonction h est strictement décroissante sur* $]-\infty ; 0[$ *et sur* $]0 ; +\infty[$.
- *Son tableau de variation se présente comme suit :*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	‖	↘

- *Sa représentation graphique (H) se présente comme suit :*





Activité 8 Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^3$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction g.
2. a et b étant deux nombres réels positifs tels que $a < b$, justifie que $a^3 < b^3$.
3. Déduis de la question précédente que si a et b sont deux nombres réels négatifs tels que $a < b$, alors $a^3 < b^3$.
4. *Soit deux nombres réels a et b tels que :* $a < 0 < b$, justifie que $a^3 < b^3$.
5. Détermine en utilisant les questions 2 , 3 et 4 le sens de variation de la fonction g.
6. Dresse le tableau de variation de g.
7. Représentation graphique de g.

On se propose de représenter la fonction g sur $[-2 ; 2]$.

a) Recopie et complète à l'aide d'une calculatrice le tableau de quelques valeurs de $g(x)$.

(On donnera pour chaque résultat l'arrondi d'ordre 1)

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
$g(x)$									

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique partielle de g correspondant au tableau devaleurs ci-dessus.

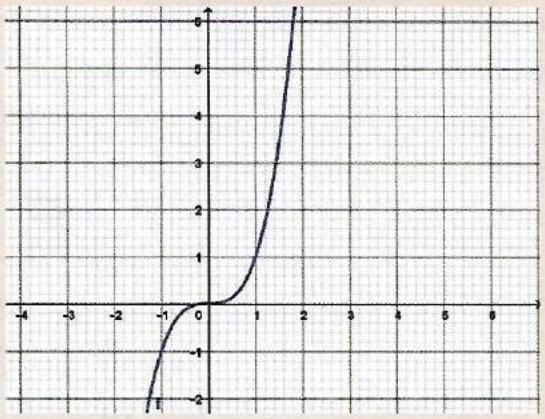
Récapitulatif

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^3$

- *La fonction g est définie sur* $\mathbb{R}$.
- *La fonction g est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Le tableau de variation de la fonction g se présente comme suit :*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$		0	

La représentation graphique de g se présente comme suit :



Activité 9 Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |ax + b|$ où a est un nombre réel non nul.

Premier cas : On suppose que a est un nombre réel strictement positif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est une fonction affine par intervalles.
3. Justifie que f est strictement croissante sur $[-\frac{b}{a} ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{a}[$.
4. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
   Construis dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $a = 2$ et $b = -3$.

Deuxième cas : On suppose que a est un nombre réel strictement négatif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est une fonction affine par intervalles.
3. Justifie que f est strictement croissante sur $[-\frac{b}{a} ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{a}[$.
4. Dresse le tableau de variation de f.
5. Construis dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $a = -3$ et $b = 2$.



Activités de découverte



Récapitulatif

Soit la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |ax+b|$

- *La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{b}{a} ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{a}[$.*
- *La courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) est la réunion de deux demi-droites de même origine, le point $A(-\frac{b}{a} ; 0)$.*

Activité 10 Étude de la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2$ où a est un nombre réel non nul.

Premier cas : On suppose que a est un nombre réel strictement positif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Construis dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $a = 2$.

Deuxième cas : On suppose que a est un nombre réel strictement négatif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Construis dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $a = -3$.

Récapitulatif

- *Si a est un réel strictement positif, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax^2$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.*
- *Si a est un réel strictement négatif, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax^2$ est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.*

Activité 11 Étude de la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{a}{x}$ où a est un nombre réel non nul.

On désigne par (C_h) la courbe représentative de h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Premier cas : On suppose que a est un nombre réel strictement positif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, si $u < v$ alors $h(u) > h(v)$.
3. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]-\infty ; 0[$, si $u < v$ alors $h(u) > h(v)$.
4. Déduis des questions précédentes le sens de variation de la fonction h sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
5. Dresse le tableau de variation de h.
6. Justifie que si un point $M(x, y)$ appartient à (C_h), alors $x > 0$ et $y > 0$ ou $x < 0$ et $y < 0$.
7. Représente (C_h) dans le cas où $a = 3$.

Deuxième cas : On suppose que a est un nombre réel strictement négatif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, si $u < v$ alors $h(u) < h(v)$.
3. Justifie que pour tous nombres réels u et v de
4. l'intervalle $]-\infty ; 0[$, si $u < v$ alors $h(u) < h(v)$.
5. Déduis des questions précédentes le sens de
6. variation de la fonction h sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
7. Dresse le tableau de variation de h.
8. Justifie que si un point $M(x, y)$ appartient à (C_h), alors $x > 0$ et $y < 0$ ou $x < 0$ et $y > 0$.
9. Représente (C_h) dans le cas où $a = -2$.

Récapitulatif

- *Si a est un réel strictement positif, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{a}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.*
- *Si a est un réel strictement négatif, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{a}{x}$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.*



I FONCTION AFFINE PAR INTERVALLES

Définition

Une fonction numérique d'une variable réelle est dite affine par intervalles si son ensemble de définition est une reunion d'intervalles sur chacun desquels elle coincide avec une fonction affine.

Exemple

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$\begin{cases} \text{Si } x \in]-\infty\ ;-1[\text{ alors } f(x) = -2x + 3\ ; \\ \text{Si } x \in [-1\ ; 3[\text{ alors } f(x) = 2\ ; \\ \text{Si } x \in [3\ ; +\infty[\text{ alors } f(x) = x - 2. \end{cases}$ est une fonction affine par intervalles.

Remarque

La représentation graphique de la fonction f ci-dessus est la réunion d'un segment et de deux demi-droites.



II FONCTION PARTIE ENTIÈRE

Propriété

Quel que soit le nombre réel x, il existe un nombre entier relatif z et un seul tel que : $z \leq x < z + 1$.

Définition

Ce nombre entier relatif z est appelé la partie entière de x.

Notation

La partie entière de x est noté $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple

$7 \leq 7{,}8 < 8$, donc $E(7, 8) = 7$.

$-5 \leq -4{,}02 < -4$, donc : $E(-4{,}02) = -5$.

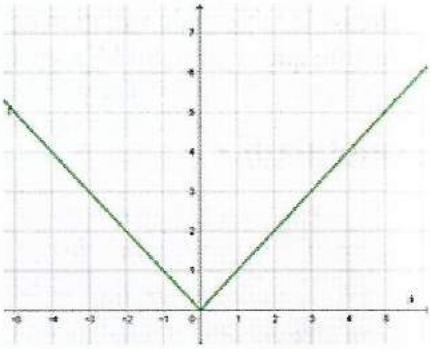
$9 \leq 9 < 10$, donc $E(9) = 9$.

Remarque

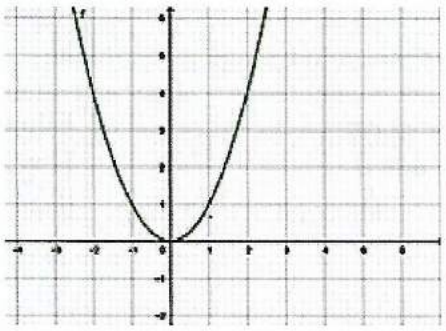
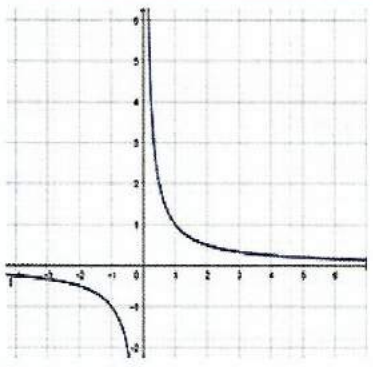
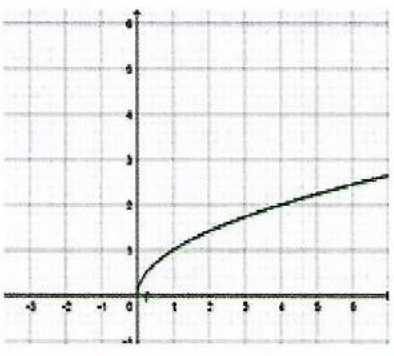
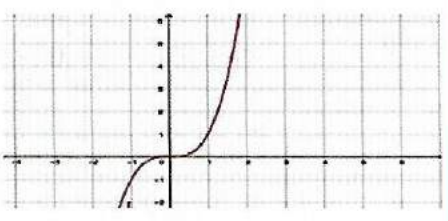
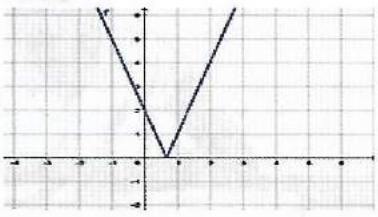
- La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
- L'application $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto E(x)$ est appelée la fonction partie entière.

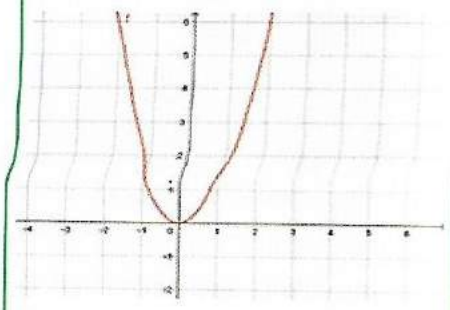
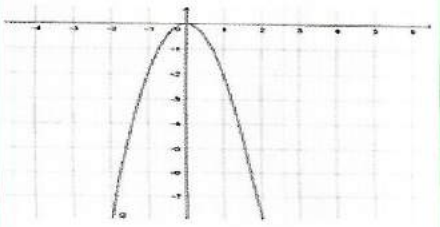
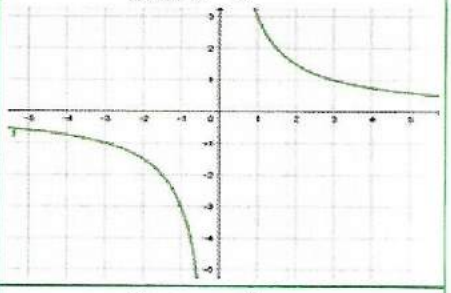
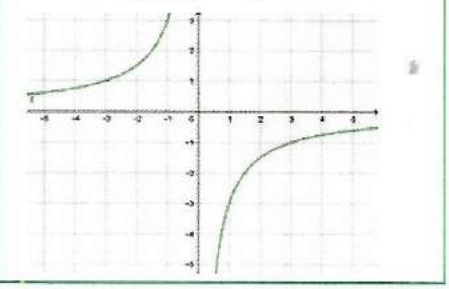


III ÉTUDE DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonction	Ensemble de définition	Sens de variation	Représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé
$x \mapsto \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	Elle est strictement croissante sur $[0\ ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0[$.	

Résumé de la leçon

$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	Elle est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.	
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}^*$)	Elle est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.	
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}^+$)	Elle est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.	
$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	
$x \mapsto \lvert ax+b \rvert$ $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	Elle est strictement décroissante sur $]-\infty ; -\frac{b}{a}[$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{a} ; +\infty[$.	Pour $a = -3$ et $b = 2$ 

$x \mapsto ax^2$ $a > 0$	$\mathbb{R}$	Elle est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.	Pour $a = \frac{3}{2}$ 
$x \mapsto ax^2$ $a<0$	$\mathbb{R}$	Elle est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.	Pour $a = -2$ 
$x \mapsto \frac{a}{x}$ $a > 0$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}^*$)	Elle est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.	Pour $a = 3$ 
$x \mapsto \frac{a}{x}$ $a < 0$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}^*$)	Elle est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.	Pour $a = -3$ 



EXERCICES DE FIXATION

Fonctions affines par intervalles

1 À chacune des affirmations contenues dans la première colonne du tableau, réponds dans la seconde colonne par vrai ou par faux.

La fonction f définie par : Si $x < 1$ alors $f(x) = 4x + 1$ Si $x \geq 1$ alors $f(x) = 1$ est une fonction affine par intervalles.	
La fonction g définie par : Si $x \in [-2 ; -1[$, alors $g(x) = \frac{2}{x}$ Si $x \geq -1$, alors $g(x) = -x + 1$ est une fonction affine par intervalles.	
La fonction f définie par : Si $x \in [-4 ; 0[$, alors $f(x) = x$ Si $x \geq 0$, alors $f(x) = -x + 1$ n'est pas une fonction affine par intervalles.	
La fonction g définie par : Si $x \in [-2 ; 0[$, alors $g(x) = \frac{x+1}{3}$ Si $x \in [0 ; 1[$, alors $g(x) = \frac{x}{4+1}$ est une fonction affine par intervalles.	

2 Pour chaque affirmation, indique la bonne réponse dans la quatrième colonne du tableau par les lettres A, B ou C.

Affirmations	A	B	C	Réponse
$E(x) = 5$	$x = 6$	$5 \leq x < 6$	$x < 5$	
$-8 \leq x < -7$	$E(x) = -7$	$E(x) = -8$	$E(x) = -7{,}5$	

3

Justifie que : $E\left(-\frac{22}{7}\right) = -4$.

Détermine : $E\left(\sqrt{133}\right)$; E (−2) ; E(0) et E (−5,4).

Étude de quelques fonctions de référence

4 Recopie dans ton cahier les affirmations qui sont vraies.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$

Affirmation 1 : la fonction f est décroissante sur l'intervalle [1 ; 2].

Affirmation 2 : la fonction f est croissante sur l'intervalle [6 ; 10].

Affirmation 3 : la fonction f est égale à une fonction affine sur l'intervalle [1 ; +∞[.

Affirmation 4 : la fonction f est décroissante sur l'intervalle [−1 ; 2].

Affirmation 5 : la fonction f est décroissante sur l'intervalle [−4 ; −2].

5 Pour chaque affirmation, indique la bonne réponse par l'une des lettres A, B ou C dans la quatrième colonne du tableau.

Affirmations	A	B	C	Réponse
$x < -4$	$\|x\| < 4$	$\|x\| > 4$	$\|x\| = 4$	
$8 < x$	$\|x\| < 8$	$\|x\| = 8$	$\|x\| > 8$	

6 Représente graphiquement la fonction partie entière sur l'intervalle [−5 ; 2[.

7 Pour chaque affirmation, indique parmi les lettres A, B ou C la bonne réponse dans la quatrième colonne du tableau.

Affirmations	A	B	C	Réponse
$x < -4$	$x^2 < 16$	$x^2 > 16$	$x^2 = 64$	
$8 < x$	$x^2 < 64$	$x^2 = 64$	$x^2 < 64$	

8 Pour chacune des affirmations contenues dans la première colonne du tableau, réponds dans la seconde colonne par vrai ou par faux.

Affirmations	Réponse
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur [0 ; 7].	
La fonction définie sur R par $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.	
La fonction définie sur R par $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur [0 ; +∞[.	
La fonction définie sur R par $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur [−2 ; 10].	

9 Construis sur [0 ;10] la représentation graphique partielle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

10 Pour chaque affirmation, indique parmi les lettres A, B ou C la bonne réponse dans la quatrième colonne du tableau.

Affirmations	A	B	C	Réponse
$0 < x < 4$	$\sqrt{x} < 2$	$\sqrt{x} > 2$	$\sqrt{x} = 2$	
$64 < x$	$\sqrt{x} < 8$	$\sqrt{x} = 8$	$\sqrt{x} > 8$	

11 À chacune des affirmations contenues dans la première colonne du tableau, réponds dans la seconde colonne par vrai ou par faux.

Affirmations	Affirmations
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = r\left(\Omega; \frac{\pi}{4}\right)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = r\left(\Omega; \frac{\pi}{4}\right)$ est strictement croissante sur $[0 ; 9]$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = r\left(\Omega; \frac{\pi}{4}\right)$ est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = r\left(\Omega; \frac{\pi}{4}\right)$ est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = r\left(\Omega; \frac{\pi}{4}\right)$ est strictement décroissante sur $[-3 ; 5]$.	

12 Construis sur l'intervalle $[5 ; 20]$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

13 Pour chaque affirmation, indique la bonne réponse par l'une des lettres A, B ou C dans la quatrième colonne du tableau.

Affirmations	A	B	C	Réponse
$0 < x < -4$	$\frac{1}{x} < 0{,}5$	$\frac{1}{x} > 0{,}5$	$\frac{1}{x} \quad 0{,}5$	
$6 < x$	$\frac{1}{x} < \frac{1}{6}$	$\frac{1}{x} > \frac{1}{6}$	$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{6}$	

14 Construis sur l'intervaelle $[5 ; 20]$ la représentation graphique partielle de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$



15 À chacune des affirmations contenues dans la première colonne du tableau, réponds dans la seconde colonne par vrai ou par faux.

Affirmations	Réponses
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $]0 ; 9]$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $[5 ; +\infty[$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $[-1 ; 2[$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $[-8 ; -4]$.	

16 Pour chaque affirmation, indique la bonne réponse dans la quatrième colonne du tableau par l'une des lettres A, B ou C.

Affirmations	A	B	C	Réponse
$x < 3$	$x^3 > 27$	$x^3 < 27$	$x^3 = 64$	
$-2 < x$	$x^3 < -8$	$x^3 > -8$	$x^3 = -8$	

17 Pour chacune des affirmations contenues dans la première colonne du tableau, réponds dans la seconde colonne par vrai ou par faux.

Affirmations	Réponses
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est strictement décroissante sur $[0 ; 9]$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est strictement décroissante sur $[-7 ; -1]$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $[-10 ; 0]$.	

18 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |3x - 6$
Justifie que f est une fonction affine par intervalles.

19 Soit la fonction g de $[-2 ; 4]$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
Si $x \in [-2 ; -1[$, $g(x) = 1 - x$
Si $x \in [-1 ; 4]$, $g(x) = x + 3$
1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction g

❷ Étudie les variations de g et dresse le tableau de variation de la fonction g.

❸ Représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

20 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |-x+6|$.

❶ Justifie que g est une fonction affine par intervalles.

❷ Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

❸ Représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

21 À chacune des affirmations contenues dans la première colonne du tableau, réponds dans la seconde colonne par vrai ou par faux.

Affirmations	Réponses
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2$ est strictement décroissante sur $[0 ; 9]$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{5}{3}x^2$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^2$ est strictement croissante sur $[-7 ; -1]$.	
La fonction définie sur R par $f(x) = -x^2$ est strictement croissante sur $[-10 ; 0]$.	

22 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

❶ Étudie le sens de variation de la fonction f.

❷ Dresse le tableau de variation de la fonction f.

❸ Représente graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

23 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

❶ Étudie le sens de variation de la fonction f.

❷ Dresse le tableau de variation de la fonction f.

❸ Représente graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

24 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -\frac{3}{x}$.

❶ Étudie le sens de variation de la fonction f.

❷ Dresse le tableau de variation de la fonction f.

❸ Représente graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), la fonction f sur $[-4 ; 0[\cup]0 ; 6]$.

25 À chacune des affirmations contenues dans la première colonne du tableau, réponds dans la seconde colonne par vrai ou par faux.

Affimations	Réponses
La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\frac{5}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{7}{x}$ est strictement décroissante sur $[1 ; 9]$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\frac{9}{x}$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{4}{x}$ est strictement croissante sur $[-7 ; -1]$.	
La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $[-10 ; -4]$.	

26 Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = -\frac{4}{x}$.

❶ Étudie le sens de variation de la fonction g.

❷ Dresse le tableau de variation de la fonction g.

❸ Représente graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), la fonction g sur $[-4 ; 0[\cup]0 ; 6]$.



EXERCICES DE RENFORCEMENT

Partie entière d'un nombre réel

1 Détermine l'ensemble des nombres réels x tels que : $E(3x) = 4$.

2 Soient a et b deux nombres réels.

❶ Justifie que : $a \in [b ; b+1[$ équivaut à $b \in]a-1 ; a]$.

❷ Déduis-en que : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x$.

3 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - E(x)$

1. Calcule les images par g des nombres réels suivants : 2 ; 2,1 ; 2,2 ; −2 ; −1,9 ; −1,8 ; −3.
2. Justifie que quel que soit le nombre réel x, $0 \leq g(x) < 1$.
3. Représente graphiquement la fonction g sur $[-3 ; 2[$.

4

1. Justifie que quel que soit le nombre réel x, $E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Justifie que quel que soit le nombre réel x, et l'entier relatif k, $E(x + k) = E(x) + k$.

5

1. Justifie que quel que soit le couple $(x ; y)$ de nombres réels, $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.
2. Déduis-en que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) + E(x + 1) \leq E(2x) + 1$.

Fonction affine par intervalles

6 On considère la fonction f : $[-3 ; 4] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto xE(x)$
$E(x)$ étant la partie entière de x.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous :

x	−3	−2,5	−2	1	2,5	3	4
$E(x)$							
$f(x)$							

2. Justifie que f est une fonction affine par intervalles.
3. Étudie le sens de variation de f.
4. Construis la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

7 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
Si $x \in [-\infty ; -1[$ alors $f(x) = -2x + 3$;
Si $x \in [-1 ; 3[$ alors $f(x) = -x$;
Si $x \in [3 ; +\infty[$ alors $f(x) = x + 3$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudie le sens de variation de la fonction f.
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

8 Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 2x - |1-5x|$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Justifie que g est une fonction affine par intervalles.
3. Représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

9 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
Si $x \in]-\infty ; -10]$, $f(x) = -5x + 650$;
Si $x \in]-10 ; 10[$, $f(x) = -10x + 500$;
Si $x \in [10 ; +\infty[$, $f(x) = 400$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudie le sens de variation de la fonction f
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
5. Résous graphiquement l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 400$.

10 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \max(x ; 1-x)$; $g(x) = \min(x ; 1-x)$ où $\max(a ; b)$ désigne le plus grand des nombres a et b *et* $\min(a ; b)$ désigne le plus petit des nombres a et b.

1. Détermine : $f(2)$; $f(-1)$; $f(4)$; $f(0)$.
2. Détermine : $g(5)$; $g(-3)$; $g(3)$; $g(0)$.
3. Détermine une expression de $f(x)$ et de $g(x)$ sans le symbole max et min.
4. Justifie que f et g sont des fonctions affines par intervalles.
5. Étudie le sens de variation de f puis celui de g.
6. Représente graphiquement la fonction f puis la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). *(On utilisera deux couleurs différentes).*

Étude d'autres types de fonctions

11 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
(C) est la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 2.

1. Détermine le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Soit M et N deux points d'abscisses respectives u et v telles que $u + v = 3$.
Démontre que les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

12 On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{5}{3}$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudie le sens de variation de la fonction f.
3. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
4. Détermine graphiquement l'image réciproque de l'intervalle [1 ; 4] par f.
5. Vérifie par le calcul le résultat trouvé à la 4ème consigne.

13 On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 1 - x^2$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est croissante sur $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
3. Dresse un tableau de quelques valeurs de f.
4. f admet un maximum. Détermine-le.
5. Détermine le nombre réel α en lequel ce maximum est atteint.
6. Représente graphiquement sur $[-4 ; 4]$ la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

14 On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{-6}{x}$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudie le sens de variation de la fonction f.
3. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
4. Utilise cette représentation graphique pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $\frac{-6}{x} = x - m$ dans les cas suivants : m = –12 ; $m = 0$; $m = 3$; $m = -3$.

15 On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -x^3$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudie le sens de variation de la fonction f.
3. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

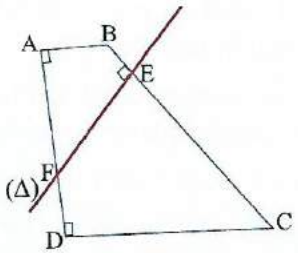
1 On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x}{E(x)}$

où E(x) désigne la partie entière du nombre réel x.



1. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $E(x) = 0$.
2. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
3. Représente graphiquement la fonction f sur $[-2 ; 3]$.

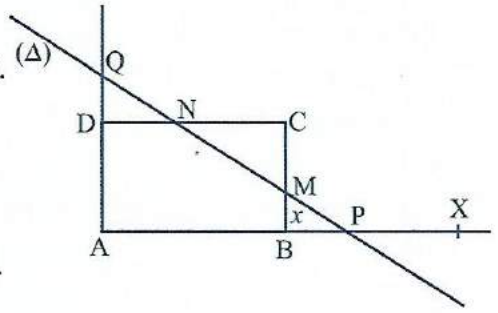
2 On considère un trapèze rectangle ABCD dont les côtés de supports parallèles sont [AB] et [DC] comme l'indique la figure ci-contre.



Soit E un point quelconque du segment [BC].
La droite (Δ) perpendiculaire à (BC) en E coupe le segment [AD] en F.
On pose : BE = x.

1. Exprime en fonction de x la longueur $f(x)$ du segment [EF].
2. Etudie les variations de la fonction f.
3. Construis sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
4. Détermine le maximum de f sur son ensemble de définition.
5. Détermine la valeur α où ce maximum est atteint.
6. Donne une interprétation géométrique de ce résultat.

3 On considère le rectangle ABCD ci-dessous qui n'est pas en dimensions réelles.
On pose : AB = 4 ; AD = 3.
Soit P le point de la demi-droite [BX) tel que BP = 2.
Une droite (Δ) passant par P coupe [BC] en M, [CD] en N et [AD] en Q.
On pose : BM = x.



❶ Exprime AQ en fonction de x.
❷ Détermine un encadrement de x pour que : Q ∈ [AD].
❸ Exprime CN en fonction de x.
❹ Détermine la valeur de x pour que N soit le milieu du segment [CD].
❺ Exprime DQ en fonction de x.
❻ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)$ = DQ.
ⓐ Étudie les variations de f.
ⓑ Construis la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
❼ Détermine la valeur de x pour laquelle la droite (Δ) est parallèle à la droite (BD).

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1 Lors d'une expérience, des chercheurs ont lancé dans un plan une particule.

Les coordonnées de cette particule sont données en fonction du temps par les relations :

$x = 2t$ et $y = 4t^2$ (t désigne le temps exprimé en secondes).

Ayant assisté à cette expérience, tu décides par curiosité de suivre le mouvement de cette particule par l'identification de sa trajectoire.

❶ Justifie que cette particule décrit une partie d'une parabole dont on donnera une équation.

❷ Représente la trajectoire de cette particule dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

2 Voici une question posée lors d'un concours organisé par le club mathématique de ton lycée.

« x étant un nombre réel strictement positif, détermine le nombre N d'entiers impairs compris en 0 et x ».

Ton professeur de mathématiques attire ton attention que la fonction partie entière peut t'aider à répondre à cette question.

Justifie que : $N = E\left(\frac{x+1}{2}\right)$.



3 Lors d'un jeu, Yapi lance un projectile d'une hauteur de 20 m, avec une vitesse de 60 m/s orientée à 30° par rapport au sol.

Afin de déterminer si Yapi a oui ou non remporté la partie, les organisateurs ont mesuré la portée horizontale du projectile quand il retombe au sol.

Tu souhaites vérifier le résultat fourni par le calcul en t'inspirant de ton cours de physique.

❶ Détermine l'équation de la trajectoire du projectile.

❷ Détermine la portée horizontale du projectile quand il il retombe au sol.

Leçon 7

STATISTIQUES

Habiletés et contenus

- **Connaître** : la définition de l'effectif cumulé croissant ; la définition de l'effectif cumulé décroissant ; la définition de la fréquence cumulée croissante ; la définition de la fréquence cumulée décroissante ; la médiane d'une série statistique à caractère continu ; les classes de même amplitude ; une classe modale ; la moyenne d'une série statistique à caractère continu ; la définition de la médiane ; la formule de l'écart moyen ; la formule de la variance ; la formule de l'écart type.
- **Dresser** : le tableau des effectifs cumulés croissants ; le tableau des effectifs cumulés décroissants.
- **Construire** : le polygone des effectifs cumulés croissants ; le polygone des effectifs cumulés décroissants.
- **Déterminer** : la médiane d'une série statistique par lecture graphique.
- **Regrouper** : les données d'une série statistique en classes de même amplitude.
- **Calculer** : l'écart moyen ; la variance ; l'écart type ; la médiane.
- **Interpréter** : les différents paramètres de position ; les différents paramètres de dispersion.
- **Traiter** une situation faisant appel à la statistique.

Situation d'apprentissage

L'usine « Kabba » produit de la farine de maïs. Elle la vend par sachet de 500 g.

Tous les jours, un échantillon est sélectionné parmi les paquets produits dans la journée pour être pesé. Le responsable de production représente les données des lots de production des trois premiers jours de la semaine par les graphiques ci-dessous :

Le responsable qualité affirme qu'un lot passe le contrôle qualité si l'échantillon qui en est tiré respecte les caractéristiques suivantes :

- La moyenne est égale à 500 g ;
- La médiane est comprise entre 495 g et 505 g ;
- 75 % des effectifs sont compris entre 490 g et 510 g ;
- L'écart type est compris entre 9,5 g et 10,5 g.



Pour déterminer le ou les lots qui passent le contrôle qualité les trois premiers jours, on cherche à dresser des tableaux d'effectifs, des tableaux de fréquences cumulées et calculer des paramètres de position et de dispersion.



Activité 1 Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Un pêcheur a mesuré la taille des poissons pêchés dans une rivière à la fin d'une journée. Le tableau ci-contre présente les résultats obtenus.

Taille en cm, arrondie au centième près	17	18	20	22	23	24	25
Effectif	2	1	3	4	5	6	7

1. a) Détermine le nombre de poissons ayant 22 ou moins de 22 cm.
   b) Détermine le nombre de poissons ayant 18 ou plus de 18 cm.
2. a) Dresse le tableau des fréquences de la série statistique ci-dessus.
   b) Détermine la fréquence correspondant à une taille inférieure ou égale à 22 cm.
   c) Détermine la fréquence correspondant à une taille supérieure ou égale à 18 cm.
3. Soit la série statistique suivante :

Modalité	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	n_3	n_4	...	n_p

où $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_p$.

   a) Détermine la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à la modalité x_4.
   b) Détermine la somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à la modalité x_4.
   c) Détermine la somme des fréquences inférieures ou égales à la modalité x_4.
   d) Détermine le quotient de la somme des fréquences inférieures ou égales à la modalité x_4 par l'effectif total.
   e) Détermine la somme des fréquences supérieures ou égales à la modalité x_4.
   f) Détermine le quotient de la somme des fréquences supérieures ou égales à la modalité x_4 par l'effectif total.

Récapitulatif

Soit une série statistique à caractère quantitatif dont les modalités sont rangées par ordre croissant.

- *La somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à la modalité x_k est l'effectif cumulé croissant (ECC) de la modalité x_k.*
- *La somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à la modalité x_k est l'effectif cumulé décroissant (ECD) de la modalité x_k.*
- *Le quotient de l'effectif cumulé croissant de la modalité x_k par l'effectif total est la fréquence cumulée croissante de la modalité x_k.*
- *La somme des fréquences des modalités inférieures ou égales à la modalité x_k est la fréquence cumulée croissante de la modalité x_k.*
- *Le quotient de l'effectif cumulé décroissant de la modalité x_k par l'effectif total est la fréquence cumulée décroissante de la modalité x_k.*
- *La somme des fréquences des modalités supérieures ou égales à la modalité x_k est la fréquence cumulée décroissante de la modalité x_k.*

Activité 2 Regroupement des données par classes de même amplitude, classe modale

Voici les longueurs, en centimètres, prises par un couturier sur des écoliers pour coudre leurs chemises.

22,2 23,9 25,1 22,9 24,7 25,2 24,3 23,8 24,4 18,5
17,1 20,2 22,8 23,1 25,2 22,4 17,2 23,3 24,8 22,7
23,2 18 20,2 22,4 23,9 25,1 20,2 22,7 22 24,8 23

1. a) Regroupe ces valeurs en intervalles d'amplitude 3 cm et donne l'effectif de chaque classe.

b) Regroupe ces valeurs en intervalles d'amplitude 5 cm et donne l'effectif de chaque classe.

2. On considère les classes :

[17 ; 19[, [19 ; 21[, [21 ; 23[et [23 ; 25[.

Calcule, pour chacune de ces classes, la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure. Dis ce que tu remarques.

3. a) Complète le tableau suivant :

Taille (cm)	[17 ; 19[	[19 ; 21[	[21 ;.23[	[23 ; 25[
Effectif				

b) Détermine la classe qui a le plus grand effectif.

4. Dis si une série statistique peut avoir plusieurs classes qui ont le plus grand effectif. Justifie ta réponse.



Récapitulatif

- *Il y a des formules pour déterminer le nombre de classes et l'amplitude des classes. Cependant à ce niveau on peut opter pour un choix arbritraire des classes.*
- *On dét ermine les classes en précisant leurs bornes.*
- *$b - a$ est l'amplitude de chacune des classes : $[a;b]$,$[a;b[$, $]a;b]$ et $]a;b[$.*
- *La classe qui a le plus grand effectif est la classe modale.*
- *Une série statistique peut avoir plusieurs classes modales.*

Activité 3 Diagrammes cumulatifs (cas d'une variable quantitative discrète)

Lors d'une campagne de sensibilisation sur le planning familial dans un quartier, on a étudié le nombre d'enfants dans 200 familles. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6
Effectifs	48	62	35	26	15	9	5

1. a) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.

b) Représente dans un repère orthogonal la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 48 \ si \ x \in [0;1[\\ f(x) = 110 \ si \ x \in [1;2[\\ f(x) = 145 \ si \ x \in [2;3[\\ f(x) = 171 \ si \ x \in [3;4[\\ f(x) = 186 \ si \ x \in [4;5[\\ f(x) = 195 \ si \ x \in [5;6[\\ f(x) = 200 \ si \ x \in [6;+\infty[\end{cases}$$

c) Précise la nature de la fonction f.

2. a) Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants.

b) Représente dans un repère orthogonal la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 200 \ si \ x \in [0;1[\\ g(x) = 152 \ si \ x \in [1;2[\\ g(x) = 90 \ si \ x \in [2;3[\\ g(x) = 55 \ si \ x \in [3;4[\\ g(x) = 29 \ si \ x \in [4;5[\\ g(x) = 14 \ si \ x \in [5;6[\\ g(x) = 5 \ si \ x \in [6;+\infty[\end{cases}$$

c) Précise la nature de la fonction g.

Récapitulatif

- *La courbe représentative de la fonction f obtenue à partir des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes) est appelée diagramme cumulatif des effectifs.*
- *La courbe représentative de la fonction g obtenue à partir des effectifs cumulés décroissants (ou des fréquences cumulées décroissantes) est appelée diagramme cumulatif des fréquences.*
- *Dans le cas d'une variable quantitative discrète, la courbe cumulative se présente comme une courbe en escalier (c'est le cas ici).*

Activité 4 Polygones des effectifs cumulés, Polygones des fréquences cumulées (Variable quantitative continue)

On s'intéresse à l'âge des 120 instituteurs d'une inspection de l'enseignement primaire.
On regroupe les résultats dans le tableau ci-dessous.

Ages	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[
Effectifs	6	18	30	39	15	6	3	3

1. Complète les tableaux suivants :

Tableau 1

Ages	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[
Effectifs	6	18	30	39	15	6	3	3
ECC								
ECD								

Tableau 2

Modalités	20	25	30	35	40	45	50	55	60
ECC	0	6							120
ECD	120							3	0

2. a) Trace un repère dont l'abscisse est la modalité et l'ordonnée l'effectif cumulé croissant.
   b) Place les points correspondants de coordonnées (Modalités ; ECC) du tableau 2 dans le repère et trace les segments qui relient chacun de ces points.
   c) Détermine graphiquement le nombre d'instituteurs qui ont moins de 45 ans.
3. a) Dans ce même repère, place les points correspondants de coordonnées (Modalités ; ECD) du tableau 2 et trace les segments qui relient chacun de ces points.
   b) Détermine graphiquement le nombre d'instituteurs qui ont plus de 40 ans.
4. a) Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes (FCC) et celui des fréquences cumulées décroissantes (FCD).
   b) Trace un autre repère dont l'abscisse est la modalité et l'ordonnée la fréquence cumulée croissante, puis place les points correspondants de coordonnées (Modalités ; FCC) dans le repère et trace les segments qui relient chacun de ces points.
   c) Dans ce même repère, place les points correspondants de coordonnées (Modalités ; FCD) et trace les segments qui relient chacun de ces points.

Récapitulatif

- *Pour représenter la courbe des effectifs cumulés croissants (Resp des effectifs cumulés décroissants) d'une série statistique donnée par des classes :*
  - *On complète le tableau en calculant les effectifs cumulés croissants (Resp les effectifs cumulés décroissants) ;*
  - *On place chaque point dont l'abscisse est la valeur supérieure (Resp valeur inferieure) de la classe et*

l'ordonnée l'effectif cumulé croissant (Resp l'effectif cumulé décroissant) qui lui correspond ;

- *On trace ensuite les segments qui relient chacun de ces points.*
- *Ces deux courbes représentent les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.*

- *Pour représenter les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes d'une série statistique donnée par des classes, le principe est exactement le même que pour les effectifs cumulés croissants ou décroissants.*
- *Les deux courbes représentent les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.*

Activité 5 Médiane - quartiles

A. Cas d'une série à variable discrète

1- Trouve pour chaque série statistique ci-dessous, un nombre qui la partage en deux séries statistiques de même effectif.

Série A : 1 2 5 7 8 10 17 20 25

Série B : 5 6 8 9 9 10 15 17

Série C : 11 6 11 7 11 7 11 5 14

Série D : 13 5 12 6 8 5 4 14

Série E : Un pêcheur a mesuré la taille des poissons pêchés dans une rivière à la fin d'une journée.

Le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus.

Taille en cm, arrondie au centième près	17	18	20	22	23	24	25
Effectif	2	1	3	4	5	6	7

2- On considère la série A et la série B de données rangés dans l'ordre croissant.

Détermine pour chacune de ces séries :

a) Le plus petit nombre Q_1 tel que au moins un quart des données sont inférieures ou égales à Q_1.

b) Le plus petit nombre Q_3 tel que au moins trois quarts des données sont inférieures ou égales à Q_3.

B. Cas d'une série à variable continue

La répartition du temps de travail des étudiants en Maths-Info d'un pays, selon l'heure de la journée est donnée par le tableau suivant :

Tranche horaire (en heure)	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[	[18; 21[	[21 ; 24[
Fréquence (en %)	5	3,9	10,8	13,6	17,1	21,4	19,8	8,4

1. Construis la courbe des fréquences cumulées croissantes.
2. a) Détermine l'abscisse du point du graphique d'ordonnée 50 %.
   b) Détermine l'abscisse du point du graphique d'ordonnée 25 %.
   c) Détermine l'abscisse du point du graphique d'ordonnée 75 %.

L'abscisse du point de la courbe qui a pour ordonnée 0,5 (ou 50%) est la médiane.

3. a) En utilisant le tableau des fréquences cumulées croissantes, détermine l'intervalle qui contient la médiane.
   b) Détermine par calcul la médiane.



Récapitulatif

Cas Discret

- *Soit une série de N données rangées dans l'ordre croissant :*
  - *Si N est impair (N = 2n + 1), alors la médiane est la (n + 1)-ième donnée ;*
  - *Si N est pair (N = 2n), alors la médiane est la moyenne entre les n-ième et (n + 1)-ième donnée.*

Cas continu

- *Pour déterminer la médiane d'une série statistique par méthode graphique :*
  - *On trace le polygone des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes (Resp le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants) ;*
  - *La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5 ou 50 %. (Resp l'ordonnée est la moitié de l'effectif total).*
- *Pour déterminer la médiane d'une série statistique algébriquement, on fait une interpolation linéaire.*

Activité 6 Étendue, Écart moyen

On considère les deux séries de notes obtenues par un même groupe de 15 élèves d'une classe de seconde.

- Série A : 9 9 10 10 10 11 11 11 11 12 12 13 13 14
- Série B : 3 6 6 6 8 9 9 10 10 14 14 16 17 17 20

Ces deux séries ont la même moyenne $\overline{x} = 11$.

1. a) Calcule la différence entre la meilleure note et la mauvaise note de la série A.
   b) Calcule la différence entre la meilleure note et la mauvaise note de la serie B.
2. Recopie et complète le tableau ci-dessous relativement à la série A :



Notes	9	10	11	12	13	14
Effectifs	3					
Écarts à la moyenne	$\lvert 9-11\rvert = 2$					

3. a) Vérifie que la moyenne de la série des écarts à la moyenne de la série A est égale à 1,2.
   b) Calcule la moyenne des écarts (absolu) à la moyenne de la serie B.
   c) Donne la série la plus dispersée. Justifie ta réponse.

Récapitulatif

- *La différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite d'une série statistique est l'étendue de la série.*
- *L'écart moyen est le nombre réel* $e = \frac{n_1\lvert x_1-\overline{x}\rvert + n_2\lvert x_2-\overline{x}\rvert + \ldots + n_p\lvert x_p-\overline{x}\rvert}{N}$ *où* $(x_i ; n_i)$ *est la série statistique de moyenne x et p le nombre de modalités.*
- *L'écart moyen est un indicateur de dispersion.*

Activité 7 Variance, Écart-type

On considère la série suivante de $\bar{x} = 11$.

1. a) Recopie et complète le tableau ci-contre :

Notes	9	10	11	12	13	14
Effectifs	3	3	4	2	2	1
Carrés des écarts à la moyenne						

b) Calcule la moyenne de la série des carrés des écarts à la moyenne.

c) Calcule la racine carrée de V_A.

2. a) Recopie et complète le tableau suivant :

b) Calcule la moyenne des notes au carrées diminuée du carré de la note moyenne.

c) Compare les résultats de 1.b) et 2.b).

Notes x_i	9	10	11	12	13	14	Totaux
Effectifs n_i	1	3	4	2	2	1	
$n_i.x_i$							
$n_i.x_i^2$							



Récapitulatif

- *La variance d'une série statistique est égale à la moyenne pondérée de la série des carrés des écarts à la moyenne.*
- *La variance d'une série statistique est aussi égale à la moyenne des carrés diminués du carré de la moyenne.*
- *L'écart type est la racine carrée de la variance.*
- *La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion.*



Histoire des statistiques

Historique

On attribue à l'histoire des statistiques la date de commencement de 1749, bien que l'interprétation du terme « statistique » a changé au cours du temps. Aux temps plus anciens, cette science ne consistait qu'à la collection d'informations sur les états1, d'où l'étymologie du nom, de l'allemand Staatskunde. Plus tard, cette définition s'est étendue à tout type d'information collectée et, encore plus tard, les sciences statistiques incluent l'analyse et l'interprétation de ces données. En termes modernes, les statistiques incluent les ensembles de données, telles celles de la comptabilité nationale et les registres de températures (en), ainsi que le travail d'analyse, lequel requiert les méthodes de l'inférence statistique.

Monde antique jusqu'au xviie siècle

La science statistique semble exister dès la naissance des premières structures sociales. D'ailleurs, les premiers textes écrits retrouvés étaient des recensements du bétail, des informations sur son cours et des contrats divers. On a ainsi trace de recensements en Chine au xxiiie siècle av. J.-C. ou en Égypte au xviiie siècle av. J.-C.. Ce système de recueil de données se poursuit jusqu'au xviie siècle. En Europe, le rôle de collecteur est souvent tenu par des guildes marchandes, puis par les intendants de l'État.



I ORGANISATION DE DONNÉES-VOCABULAIRE

Quelques reppels

- Réaliser une étude statistique consiste à classer les ***individus*** d'une population en fonction d'un ***caractère*** (ou ***variable***).
- Le caractère étudié peut être ***qualitatif*** (couleur, poste des joueurs de football, ...) ou ***quantitatif*** (âge, prix, ...).
- Pour chaque valeur du caractère, on peut indiquer ***l'effectif*** (le nombre d'individus) ou la fréquence (la proportion d'individus par rapport à la totalité de la population).
- On appelle mode toute valeur du caractère correspondant au plus grand effectif ou à la plus grande fréquence.
- Pour faciliter l'exploitation et la présentation de ***certaines séries***, on peut regrouper les valeurs en classes dans le cas d'un caractère quantitatif discret dont les modalités peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

Effectifs cumulé, fréquances cumulées

Définition

Soit une série statistique à caractère quantitatif $(x_i ; n_i)$ dont les modalités ne sont pas regroupées en classes.

- L'***effectif cumulé croissant*** (resp. ***décroissant***) d'une modalité est la somme des effectifs des modalités inférieures (resp **supérieures**) ou égales à la valeur de cette modalité.
- Le quotient de l'effectif cumulé croissant (resp. décroissant) d'une modalité par l'effectif total est ***la fréquence cumulée croissante*** (resp. ***décroissante***) de cette modalité.



Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p	Totaux
Effectif	n_1	n_2	...	n_p	$n_1+n_2+...+n_p=N$
Effectif cumulé croissant	n_1	n_1+n_2	...	$n_1+n_2+...+n_p$	
Effectif cumulé décroissant	$n_1+n_2+...+n_p$	$n_2+...+n_p$	...	n_p	
Fréquence	$f_1=\frac{n_1}{N}$	$f_2=\frac{n_2}{N}$	...	$f_p=\frac{n_p}{N}$	1
Fréquence cumulée croissante	f_1	f_1+f_2	...	$f_1+f_2+...+f_p$	
Fréquence cumulée décroissante	$f_2+f_2+...+f_p$	$f_2+...+f_p$	...	f_p	

Remarque

La fréquence cumulée croissante (resp. décroissante) d'une modalité est la somme des fréquences des modalités inférieures (resp. supérieures) ou égales à cette modalité.

II REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

A. Quelques reppels

Les représentations graphiques permettent de voir et de traduire rapidement les informations d'une étude statistique. Le choix du type de graphique dépend de la nature des caractères.

1. Caractères qualitatifs

Diagramme circulaire

Un diagramme circulaire est un graphique qui divise un disque en secteurs angulaires dont les mesures des angles des secteurs circulaires sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences de chaque modalité.

Résumé de la léçon

Exemple

Le tableau ci-dessous donne la répartition de la couleur des cheveux de 25 jeunes lors d'un jubilé mondial.

Couleur des cheveux	Effectifs	Fréquence en %
Roux	2	8
Bruns	6	24
Blonds	4	16
Noir	7	28
Châtains	6	24
	25	100

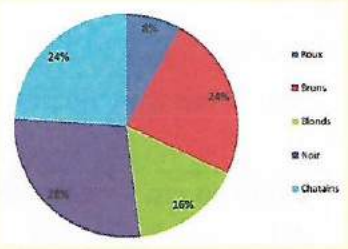


Diagramme semi-circulaire

Un diagramme semi-circulaire est un graphique qui divise un demi-cercle en secteurs angulaires dont les mesures des angles au centre sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences de chaque modalité

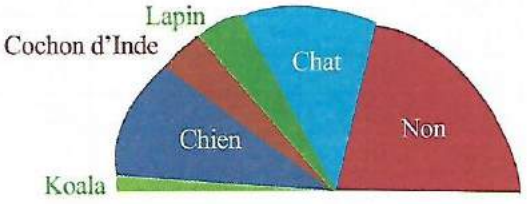


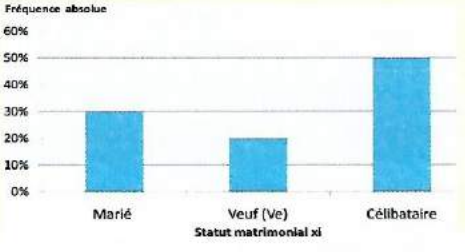
Diagramme à bandes

Un diagramme à bandes ou en barres est une représentation graphique de données statistiques à variable qualitative à l'aide de rectangles de même largeur. À chaque valeur correspond une barre. Les hauteurs des barres sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences représentés.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne la distribution fréquentielle des professeurs de Mathématiques d'un lycée selon le statut matrimonial.

Statut matrimonial	Fréquence en %
Marié	30
Veuf (ve)	20
Célibataire	50



2. Caractères quantitatifs discrets

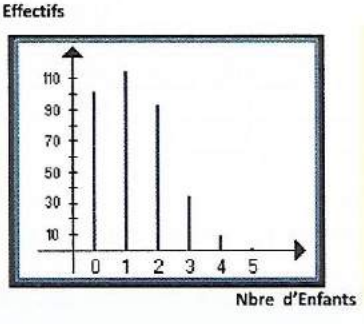
Diagramme en bâtons

Un diagramme en bâtons est la représentation graphique d'une série statistique constituée de segments de droites verticaux dont chaque hauteur est proportionnelle au nombre qu'il représente.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne la distribution du nombre d'enfants par famille, dans une entreprise.

Nombre d'enfants (x_i)	Nombre de familles (n_i)
0	103
1	115
2	95
3	35
4	10
5	2



3. Caractères quantitatifs continus

Histogramme de même amplitude

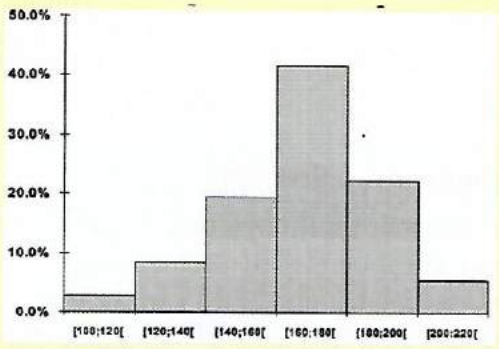
Un histogramme de même amplitude est une représentation graphique d'une série constituée de rectangles contigus dont les hauteurs sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences de chaque classe. On parlera d'histogramme d'effectifs ou d'histogramme de fréquences.

Sur l'axe des abscisses sont reportées les bornes des classes de la série.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne la distribution fréquentielle de la taille, en cm, de 36 plantes du champ de TANOH.

Taille en cm (x_i)	Effectifs (n_i)	Fréquences en %
[100 ; 120[	1	2,8
[120 ; 140[	3	8,3
[140 ; 160[	7	19,4
[160 ; 180[	15	41,7
[180 ; 200[	8	22,2
[200 ; 220[	2	5,6



B. Diagrammes cumulatifs et polygomes des effectifs cumulés

1. Diagrammes cumulatifs : cas d'une variable quantitative discrète

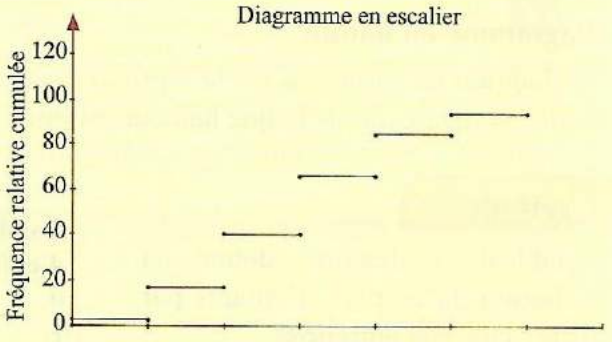
Les effectifs cumulés croissants et décroissants peuvent être représentés par un diagramme cumulatif. La courbe représentative de la fonction obtenue à partir des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes) se présente comme une courbe en escalier croissante.

La courbe représentative de la fonction obtenue à partir des effectifs cumulés décroissants (ou des fréquences cumulées décroissantes) se présente comme une courbe en escalier décroissante.

Exemple

On a noté sur 96 jours comparables le nombre d'appels reçus entre 10h et 10h 10min par une secrétaire. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'appels (x_i)	Nombre de jours (n_i)	Fréquences en %	Fréquences cumulées croissantes	Fréquences cumulées décroissantes
0	2	2,08	2,08	100
1	14	14,58	16,66	97,92
2	23	23,96	40,62	83,34
3	24	25	65,62	59,38
4	18	18,75	84,37	34,38
5	9	9,38	93,75	15,63
6	6	6,25	100	6,25



2. Polygone des effectifs cumulés, polygone des fréquences cumulées (variable quantitative continue)

Pour représenter le polygone des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants) d'une série statistique donnée par des classes :

- On place chaque point dont l'abscisse est la borne supérieure (respectivement inferieure) de la classe sauf pour le premier point (respectivement dernier point) et l'ordonnée l'effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) qui lui correspond ;
- On trace ensuite les segments qui relient chacun de ces points.

Pour représenter les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes d'une série statistique donnée par des classes, le principe est exactement le même que pour les effectifs cumulés croissants ou décroissants.

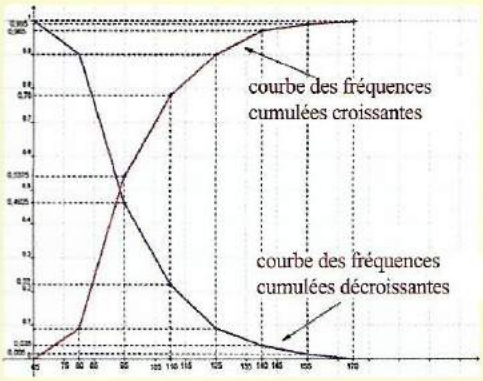
Exemple

Le tableau ci-dessous indique la vitesse de quatre cents véhicules enregistrée par un radar lors d'un contrôle routier.

Vitesse en km/h	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95 ; 110[	[110 ; 125[	[125 ; 140[	[140 ; 155[	[155 ; 170[
Effectifs	39	176	97	51	23	12	2

Dressons le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes. On obtient :

Vitesse en km/h	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95 ; 110[	[110 ; 125[	[125 ; 140[	[140 ; 155[	[155 ; 170[
Fréquences	0,0975	0,44	0,2425	0,1275	0,0575	0,03	0,005
FCC	0,0975	0,5375	0,78	0,9075	0,965	0,995	1
FCD	1	0,9025	0,4625	0,22	0,0925	0,035	0,005





Remarque

L'abscisse du point d'intersection des deux courbes donne la médiane de cette série.

III PARAMÈTRES DE POSITION ET DE DISPERSION

Pour décrire une variable ***quantitative*** sur une population, on réduit cette variable à quelques valeurs numériques qui la caractérisent.

A. Rappels

1. Paramètres de position

Les valeurs donnant une idée de l'ordre de grandeur des observations sont appelées paramètre de position.

a) Mode et classe modale

On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal (ou de fréquence maximale).

Lorsque les modalités sont des intervalles, on parle de classe modale. Le mode est le centre de la classe modale.

b) Moyenne

Soit une série statistique (x_i, n_i), $1 \leq i \leq p$, d'effectif total N.

- Dans le cas d'une série statistique **discrète**, la moyenne notée $\bar{x}$ est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$$

- Dans le cas d'une série statistique **continue** (série statistique regroupée en classes), la moyenne est la moyenne de la série (c_i, n_i) des centres de classes associés.

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_pc_p}{N} = n_1f_1 + n_2f_2 + \cdots + n_pf_p$$



Remarque

La moyenne s'exprime dans la même unité que les valeurs observées.

B. Rappels

Soit une série de N données rangées dans l'ordre croissant des valeurs :
La médiane est un nombre réel noté M_e tel que :

- 50% au moins des individus ont une valeur du caractère inférieure ou égal à M_e.
- 50% au moins des individus ont une valeur du caractère supérieure ou égale à M_e.

Cas discret

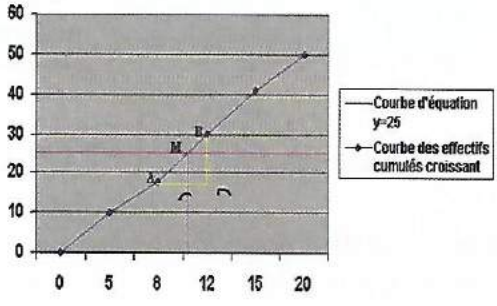
Dans la pratique, soit une série de N données rangées dans l'ordre croissant des valeurs :

- Si N est impair (N = 2n + 1), alors la médiane est la (n + 1)-ième donnée ;
- Si N est pair (N = 2n), alors la médiane est la moyenne entre les n-ième et (n + 1)-ième donnée.

Cas continu

Pour déterminer la médiane d'une série statistique par méthode graphique :

- On trace le polygone des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes (respectivement le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants) ;
- La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5 ou 50 %. (Resp l'ordonnée est la moitié de l'effectif total).



- Pour déterminer algébriquement la médiane d'une série statistique, on peut procéder comme suit :

Propriétés sur les pentes

Les points A, M et B sont alignés donc les droites ont même coefficient directeur (c'est à dire même pente), ce qui se traduit par : $\frac{MC}{AC} = \frac{BD}{AD}$, donc : $\frac{25-18}{M_e-8} = \frac{30-18}{12-8}$
d'où : Me ≅10,33.

Propriété de Thalès

On applique la propriété de Thalès dans le triangle ABD, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AD} = \frac{MC}{BD}$
En particulier, on a : $\frac{AC}{AD} = \frac{MC}{BD} \Leftrightarrow \frac{M_e-8}{12-8} = \frac{25-18}{30-18} \Leftrightarrow M_e = 10{,}33$

2. Paramètres de dispersion

Les valeurs donnant une idée de l'étalement des observations sont appelées paramètres de dispersion. Les paramètres de dispersion permettent de mesurer la façon dont les valeurs du caractère sont reparties autour de la moyenne ou de la médiane.

Résumé de la leçon

a) Ecart moyen ou écart moyen absolu

L'écart moyen est le nombre réel $e=\dfrac{n_1|x_1-\bar{x}|+n_2|x_2-\bar{x}|+...+n_p|x_p-\bar{x}|}{N}$ où $(x_i\ ;\ n_i)$ est la série statistique de moyenne $\bar{x}$ et p le nombre de modalités.

L'écart moyen permet de rendre compte si la répartition des individus de la série statistique est proche ou éloigné de la moyenne.

Ce paramètre indique les valeurs observées se trouvant à e-unités de $\bar{x}$.

L'écart moyen s'exprime dans la même unité que les valeurs observées.

b) Variance, écart type

La variance V d'une série statistique est la moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne.

On a : $V=\dfrac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+...+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$ où $(x_i\ ;\ n_i)$ est la série statistique de moyenne $\bar{x}$, p le nombre de modalités et N l'effectif total.

Remarque

La variance V d'une série statistique est égale à la moyenne des carrés diminués du carré de la moyenne.

On a : $V=\dfrac{n_1(x_1)^2+n_2(x_2)^2+...+n_p(x_p)^2}{N}-(\bar{x})^2$ (Formule de König)

- L'écart type notée σ (sigma) est la racine carrée de la variance. $\sigma=\sqrt{V}$.

L'écart type est un indicateur de dispersion associé à la moyenne.

Pour des séries regroupées en classes de même amplitude, on utilise les centres c_i des classes comme modalités x_i.

Remarque

L'écart type s'exprime dans la même unité que les valuers observées.



EXERCICES DE FIXATION

Effectifs cumulé - Fréquences cumulées

1 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par V si l'affirmation est vraie et par F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Quand les valeurs du caractère sont rangées dans l'ordre croissant, l'effectif cumulé croissant d'une modalité est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures ou égales.
2	Quand les valeurs du caractère sont rangées dans l'ordre croissant, l'effectif cumulé décroissant d'une modalité est la somme des effectifs des modalités qui lui sont supérieures ou égales.
3	La fréquence cumulée décroissante d'une modalité x est le quotient de l'effectif cumulé décroissant par l'effectif total.
4	La fréquence cumulée croissante d'une modalité x est la somme des fréquences des modalités supérieures ou égales à x.

2 Dans un quartier de Katiola, on a relevé le nombre de pièces par appartement. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Nombre de pièces	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'appartements	48	75	96	64	39	25	3

Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par V si l'affirmation est vraie et par F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	L'effectif cumulé croissant de la modalité 1 est 3.
2	L'effectif cumulé croissant de la modalité 4 est 219.
3	L'effectif cumulé décroissant de la modalité 7 est 3.
4	L'effectif cumulé décroissant de la modalité 5 est 227.
5	La fréquence cumulée croissante de la modalité 4 est 0,137.
6	La fréquence cumulée croissante de la modalité 4 est 0,808.
7	La fréquence cumulée décroissante de la modalité 6 est 0,992.
8	La fréquence cumulée décroissante de la modalité 7 est 0,008.

3 Le tableau ci-dessous indique le nombre d'enfants de 50 familles des employés d'une société de gardiennage.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	Total
Nombre de familles	4	11	7	14	8	6	50

Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série.

4 Ibo a pesé les œufs de sa ferme qui ont été produits pendant le mois de décembre. Il a obtenu le tableau ci-dessous où les masses des œufs sont exprimées en grammes.

Masse de l'œuf	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[
Nombre d'œufs	3	51	74	112	92

[70 ; 80[	[80 ; 90[
62	6

Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série.

5 Le tableau suivant donne le nombre de tonnes d'anacardes produit en 2018 par des agriculteurs de la région du hambol.

Nombre d'agriculteurs	1	2	3	4	5	6	7
Anacardes produits en tonne	10	55	80	15	38	40	12

Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes.

6 Le tableau suivant donne la répartition des entreprises du secteur automobile en fonction de leurs chiffres d'affaires en millions de francs CFA.

Chiffres d'affaires	[0 ; 0,25[	[0,25 ; 0,5 [	[0,5 ; 0,75[	[0,75 ; 1[
Nombre d'entreprises	37	16	12	54

[1 ; 1,25[	[1,25 ; 1,5[
6	3

Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.

Diagrammes cumulatifs : cas d'une variable quantitative discrète

7 Un gérant d'hôtel a relevé le nombre de jours où la suite présidentielle a été occupée au cours de l'année. Il a regroupé ces données dans le tableau suivant :

Nombre de fois où la suite a été occupée	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de jours	70	115	82	58	25	12	3
Effectifs cumulés décroissants	365	295	180	98	40	15	3

Construis le diagramme cumulatif des effectifs cumulés décroissants.

Mode - Classe modale - Moyenne

8 On a demandé à 40 fonctionnaires de la ville d'Abidjan qu'elle est le temps en minutes mis entre leur domicile et leur lieu de travail.

Voici les résultats :

60	60,1	45	90	90	100	110	105,2	100	80
95	100	90	80,1	60	60	75,7	105	85	75,9
90,4	110,6	80	60	75,8	105	70	100	90	30
100	30	45	70	75	100	80	75	75	90

1. Regroupe ces valeurs en intervalles d'amplitude 15 et donne l'effectif de chaque classe.
2. Détermine la classe modale.

9 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Soit $x_1, x_2, ..., x_p$ les modalités d'une série statistique et $n_1, n_2, ..., n_p$ les effectifs respectifs de ces modalités. $f_1, f_2, ..., f_p$ les fréquences respectives de ces modalités. La moyenne de cette série est :
$\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_p x_p$
2. La moyenne de toute série statistique est toujours un nombre entier naturel.

10 On considère les séries statistiques suivantes :

Série 1 : 70 – 10 – 109 – 119 – 122 – 109

Série 2 : 25 – 14 – 21 – 33 – 22 – 12 – 35

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste. Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation juste.

N	Affirmation	a	b	c
1	La moyenne de la première série est	$\frac{539}{6}$	71,67	109
2	L'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de la moyenne de la série 2 est	23,41	22,14	23,14

Polygone des effectifs cumulés, polygone des fréquences cumulées (variable quantitative continue)

11 Les tailles, en centimètre de personnes sont reportées dans le tableau suivant :

Taille	[145 ; 150[	[150 ; 155[	[155 ; 160[
Effectifs	3	4	7

[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[
15	20	21

Taille	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Effectifs	14	8	5	3

1. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants.

Médiane

12 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

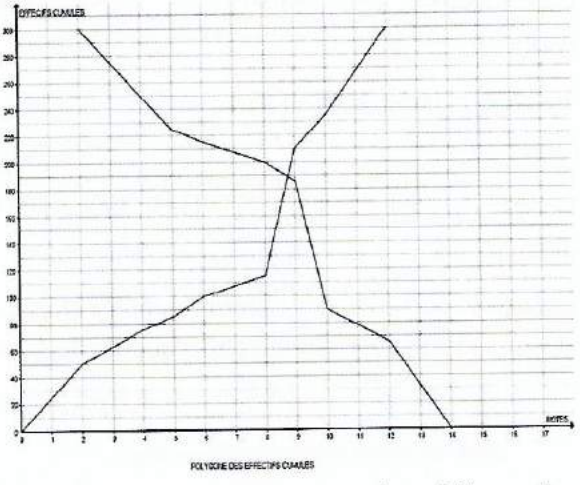
N°	Affirmation
1	La médiane d'une série statistique est le nombre réel Me tel qu'au moins des individus aient une valeur du caractère inférieure $\frac{1}{4}$ ou égal à *Me*.
2	La médiane d'une série statistique est toujours une valeur du caractère.
3	La médiane d'une série statistique est un nombre toujours positif.
4	Une série statistique peut avoir plusieurs médianes.



13 On considère les séries statistiques suivantes :
Série 1 : 70 – 10 – 109 – 119 – 122 – 109
Série 2 : 25 – 14 – 21 – 33 – 22 – 12 – 35
Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste. Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation juste.

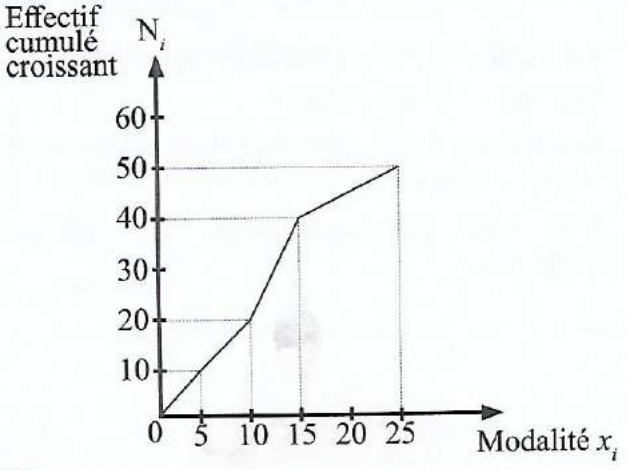
N°	Affirmation	a	b	c
1	La médiane de la première série est	109	110	119
2	La médiane de la deuxième série est	35	21	22

14 Voici le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants d'une série statistique.



À partir du graphique, détermine la médiane de cette série statistique.

15 La figure ci-dessous présente le polygone des effectifs cumulés croissant d'une série statistique.
À partir du graphique, détermine la médiane de cette série statistique.



16 Lors de la correction du BEPC, la fiche statistique de notes d'un correcteur a permis d'obtenir le tableau suivant :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	5	24	20	11
Effectifs cumulés décroissants	60	55	31	11

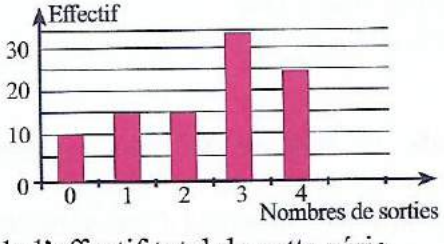
Calcule la médiane en utilisant les effectifs cumulés décroissants.

17 On a demandé à des élèves de seconde C le nombre de leurs frères et sœurs. Voici les résultats obtenus :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3
Effectif	10	24	12	4

a Calcule l'effectif total de cette série.
b Justifie que la médiane de cette série est égale à 1.
c Une élève de la classe affirme : « puisque la médiane de la série est égale à 1, on peut dire que exactement la moitié des élèves ont au moins un frère ou une sœur ».
Dis si elle a raison. Justifie ta réponse.

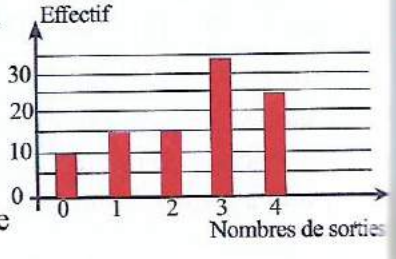
18 On a demandé à des élèves le nombre de fois où ils sont allés au cinéma dans le mois. Le diagramme ci-dessous représente les résultats relevés.



a Calcule l'effectif total de cette série.
b Justifie que la médiane de cette série est égale à 3.
c Dis si oui ou non la moitié des élèves ont vu au moins 3 films durant le mois. Justifie ta réponse.

Étendue - Écart moyen

19 On a demandé à des élèves le nombre de fois où ils sont allés au cinéma dans le mois. Le diagramme en bâtons ci-dessous représente les résultats relevés.
Détermine l'étendue de cette série.



20 Soit x_1, x_2, ..., x_p les modalités d'une série statistique tels que $x_1 < x_2 < ... < x_p$ et n_1, n_2, ..., n_p les effectifs respectifs de ces modalités. Soit $\bar{x}$ la moyenne de cette série.
Parmi les propositions de réponse, une seule est correcte. Recopie le numéro et la lettre qui correspond à la réponse juste.

1. L'étendue est :
   - a. $n_p - n_1$
   - b. $x_p + x_1$
   - c. $x_p - x_1$
2. L'écart moyen est :
   - a. La moyenne.
   - b. La somme des écarts entre la valeur des modalités et la moyenne.
   - c. La moyenne pondérée des écarts entre la valeur des modalités et la moyenne.
3. L'écart moyen est :
   - a. $\dfrac{n_1|x_1+\bar{x}|+n_2|x_2+\bar{x}|+...+n_p|x_p+\bar{x}|}{N}$
   - a. $\dfrac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+...+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$
   - a. $\dfrac{|x_1-\bar{x}|n_1+|x_2-\bar{x}|n_2+...+|x_p-\bar{x}|n_p}{N}$

21 Voici le relevé des tailles, en mètres, d'un groupe de candidats au concours de police.
1,64 ; 1,66 ; 1,70 ; 1,55 ; 1,66 ; 1,64 ; 1,72 ; 1,70 ; 1,62 ; 1,72 ; 1,57 ; 1,64.
Sachant que la taille moyenne de ces candidats est de 1,6517 m, calcule l'écart moyen de cette série statistique.
Donne une interprétation de ce résultat.

22 Le tableau suivant représente la répartition des 100 employés d'une entreprise, selon le salaire en milliers de francs CFA.

Salaire	[0 ; 100[	[100 ; 200[	[200 ; 300[	[300 ; 400[
Effectif	22	5	15	35

[400 ; 500[	[500 ; 600[
20	3

Calculer l'écart moyen de cette série statistique.

Variance - Ecart-type

23 Soit x_1, x_2, ..., x_p les modalités d'une série statistique et n_1, n_2, ..., n_p les effectifs respectifs de ces modalités. Soit $\bar{x}$ la moyenne de cette série.
Parmi les propositions de réponse, une seule est correcte. Recopie le numéro et la lettre qui correspond à la réponse juste.

1. La variance est :
   - a. $\dfrac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$
   - b. $\dfrac{n_1(x_1)^2-n_2(x_2)^2-\cdots-n_p(x_p)^2}{N}-(\bar{x})^2$
   - c. $\dfrac{n_1|x_1-\bar{x}|+n_2|x_2-\bar{x}|+\cdots+n_p|x_p-\bar{x}|}{N}$
2. La variance est :
   - a. la racine carrée de la moyenne ;
   - b. la moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne.
   - b. la différence entre la somme des carrés et le carré de la moyenne.
3. L'écart type est :
   - a. la racine carrée de la variance ;
   - b. la valeur absolue de la variance ;
   - c. la valeur absolue de l'écart moyen.

24 Le tableau suivant donne le nombre de clés USB vendus dans un magasin informatique en fonction de leur capacité (en Go) sur une période d'une semaine.

Capacité en Go	35	36	37	38	39	40
Effectifs	4	8	10	14	8	6

Sachant que la moyenne de cette série est de 3Go, calcule sa variance et son écart type.

25 On étudie les revenus mensuels en francs CFA de 430 foyers du district de Yamoussoukro. On obtient :

Revenus	[700 ;900[	[900 ;1100[	[1100 ;1300[
Effectifs	13	219	20

[1300 ;1400[	[1400 ;1500[	[1500 ;1600[
46	50	82

1. Calcule la variance de cette série.
2. Calcule l'écart type de cette série.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Partie entière d'un nombre réel

1 On considère la série suivante de données :

7 ; 2 ; 3 ; 7 ; 12 ; 3 ; 18 ; 24 ; 5 ; 38 ; 42 ; 16 ; 45 ; 34 ; 19 ; 16 ; 26 ; 34 ; 38 ; 40 ; 5 ; 39

Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Donne le numéro suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

		A	B	C	D
1	L'étendue de cette série est :	43	37	38	33
2	La médiane de cette série est :	18	18,5	19	18,2

2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations ci-dessous :

❶ Une variable quantitative est dite discrète lorsqu'elle a de petits effectifs.

❷ Pour représenter une variable quantitative discrète, on utilise un histogramme.

❸ Pour le calcul de la moyenne d'une série statistique continue, on utilise le centre des classes.

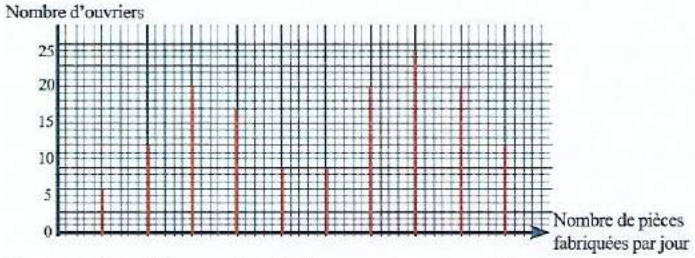
❹ La moyenne et l'écart type sont des caractéristiques de dispersion d'une série.

❺ L'écart type est la racine carrée de la moyenne des écarts.

❻ La variance est l'abscisse du point du polygone des fréquences cumulées ayant pour ordonnée 0,5.

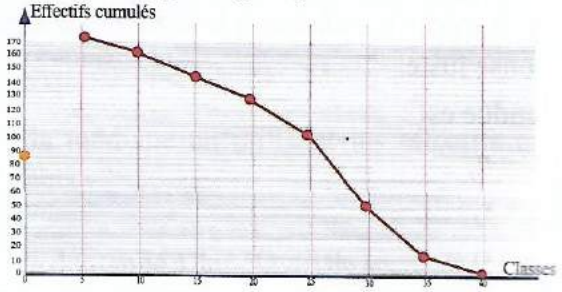
❼ Pour deux séries, portant sur la même variable, celle dont l'écart type est le plus grand est la série la plus dispersée.

3 Le diagramme en bâtons ci-dessous représente le nombre d'ouvriers d'une société en fonction du nombre de pièces fabriquées par jour.



Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.

4 Voici le polygone des effectifs cumulés décroissants d'une série statistique regroupée en classe.



❶ Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.

❷ Détermine par le calcul la médiane de cette série statistique.

5 Calcule la moyenne et l'écart type de chacune des deux séries données par leur diagramme en bâtons.

Compare la dispersion des deux séries.



6 Le temps d'écoute quotidien de la radio pulsar du Hambol par 100 personnes est résumé dans le tableau suivant :

Temps d'écoute en minutes	[0 ; 30[	[30 ; 60[	[60 ; 90[
Nombre de personnes	14	22	11

[90 ; 110[	[110 ; 150[	[150 ; 180[
20	18	15

Calcule la variance et l'écart type de cette série.

7 On a sélectionné un échantillon de ménages dans un quartier et l'on a compté le nombre de personnes dans le ménage. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Nombre de personnes	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de ménages	201	238	137	142	55	15	4	2

❶ Calcule la variance de cette série.

❷ Calcule l'écart type de cette série.

Les exercices

8 La distribution des salaires mensuels dans une ONG a pour moyenne 80000 francs CFA et pour écart type 10000 francs CFA.
Détermine dans chaque cas la moyenne et l'écart type des salaires :

a. Chaque salaire est augmenté de 3000 francs CFA ;
b. Chaque salaire est augmenté de 4%.

9 Dis si, oui ou non, l'on peut-on trouver une série de huit notes comprises entre 0 et 20 dont :

a. La moyenne est 10 et l'écart type 0.
b. La moyenne est 10 et l'écart type 10.
c. La moyenne est 3 et l'écart type est supérieur à 6,5.

10 On lance simultanément cinq pièces de monnaie cent fois de suite et on compte le nombre de fois qu'apparait la face « Pile ».
On obtient le tableau suivant :

Modalités	0	1	2	3	4	5
Effectifs	2	17	29	33	16	3

1. Construis le diagramme en bâtons de cette série.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. Construis le diagramme en bâtons des effectifs cumulés croissants.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 Une radio FM a enquêté sur l'âge de ses auditeurs de 5 ans à 30 ans.
Le tableau de répartition (en pourcentage) est le suivant :

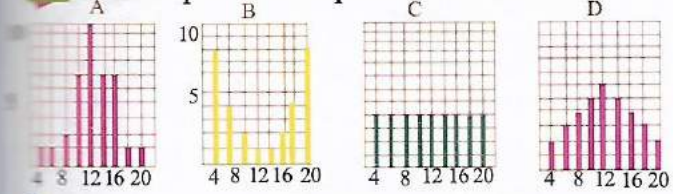
Age	[5 ; 8[	[8 ; 13[	[13 ; 16[	[16 ; 18[
Fréquence (en %)	6	12	26	30

[18 ;22[	[22 ;30[
18	8

1.
a. Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.
b. Déduis le pourcentage des auditeurs qui ont moins de 18 ans.

2.
a. Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.
b. Déduis l'âge médian des auditeurs, puis interprète ce résultat.

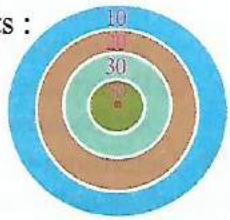
2 Voici représentées quatre séries de notes :



1. Détermine, sans effectuer de calculs, la moyenne de chaque série.
2. Précise, sans effectuer de calculs, la série qui a le plus petit écart type et celle qui a le plus grand écart type.
3. Calcule l'écart type de la série A et l'écart type de la série D.

3 Deux tireurs Amine et Massé s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant vingt tirs sur une cible.
Les résultats obtenus sont les suivants :

	50	30	20	10	0
Amine	4	6	5	4	1
Massé	6	3	5	3	3



1. Dis si la moyenne par tir permet de départager les deux concurrents.
2. Reprends la question 1 en ne prenant en compte que les dix meilleurs tirs.
3. Calcule l'écart type de chacune des séries du tableau ci-dessus.
4. Dis qui d'Amine ou de Massé est le tireur le plus régulier. Justifie la réponse.

4 Dans un journal, on a comptabilisé le nombre de lignes pour chaque petite annonce.
On a obtenu le tableau de répartition suivant :

Nombre de lignes	1	2	3	4	5	6
Nombre d'annonces	3	8	21	39	22	7

1. Donne la population étudiée, la variable et sa nature et le mode.
2. Calcule la moyenne de cette série et exprime le résultat à l'aide d'une phrase.
3. Calcule l'écart type de cette série.
4. Calcule le pourcentage d'annonces dont le nombre de ligne présente un écart avec la moyenne plus grand que l'écart type.

5 Lors d'un recensement des paysans dans une région, l'une des questions a porté sur la superficie exploitée par ceux-ci. Le tableau ci-dessous représente la superficie exploitée en hectare de 175 paysans.

Superficie exploitée en (hectare)	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[
Nombre de paysans	15	25	18

[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[
27	54	36

1. Détermine la classe modale de cette série statistique.
2. a. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
   b. Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
3. a. Construis dans un repère orthogonal les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
   b. Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.
   c. Détermine algébriquement la médiane de cette série statistique et interprète le résultat.
4. Détermine le pourcentage de paysans qui ont une superficie cultivable supérieure ou égale à 12 hectares.

6 On a relevé le taux de cholestérol, en gramme par litre de sang, dans un échantillon de 220 personnes. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Taux	[1,6 ; 1,8[	[1,8 ; 2,0[	[2,0 ; 2,2[	[2,2 ; 2,4[
Effectif	68	59	45	30

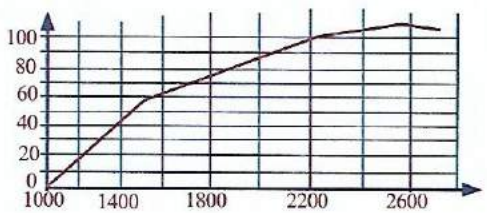
[2,4 ; 2,6[	[15 ; 18[
18	36

1. a. Présente dans un tableau les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.
   a. Trace le polygone des fréquences cumulées croissantes de cette série.
2. Détermine graphiquement la médiane et les quartiles de la série.
3. On considère qu'un taux supérieur à 2,1 grammes par litre de sang est anormal.
   Détermine graphiquement le pourcentage de personnes ayant un taux anormal.
4. Présente une synthèse courte des résultats obtenus.

7 On considère la série suivante de 13 données :
$2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 9 ; x$.
x désigne la valeur d'une donnée inconnue.

1. Le nombre x est un nombre entier tel que : $0 \leq x \leq 10$
   On suppose que la moyenne de la série des 13 données est égale à 5.
   a. Justifie que : x est égal à 7.
   b. Détermine l'étendue, la médiane et les quartiles de la série des données.
2. On suppose que la médiane de la série des 13 données est égale à 5 et l'étendue est 7.
   Détermine toutes les valeurs possibles du nombre x.
3. On suppose que le premier quartile de la série des 13 données est égal à 3 et l'étendue est inférieur ou égale à 8. Détermine toutes les valeurs possibles du nombre x.

7 La courbe ci-contre représente la répartition des salaires, en milliers de francs CFA, des jeunes employés d'une grande entreprise.



Par exemple, on peut lire sur cette courbe que 70 % des employés ont un salaire inférieur ou égal à 1 800 000 francs CFA.

1. a. Donne le salaire le plus bas et le salaire le plus haut de cette série.
   b. Détermine l'étendue de ces salaires.
2. Détermine la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de cette série de salaire.
3. Donne une interprétation de tous les résultats obtenus.

8 Une course a été organisée pour les élèves d'une classe de seconde A (40 garçons et 50 filles) d'un lycée. Les résultats sont donnés dans les tableaux ci-dessous :

• **Temps de parcours des garçons :**

Temps (en min)	De 10 à 15 15 exclu	De 15 à 20 20 exclu	De 20 à 25 25 exclu	De 25 à 30 30 exclu	De 30 à 35 35 exclu
Effectif	8	14	9	6	3



• **Temps de parcours des filles :**

Temps (en min)	De 10 à 15 15 exclu	De 15 à 20 20 exclu	De 20 à 25 25 exclu	De 25 à 30 30 exclu	De 30 à 35 35 exclu
Effectif	7	8	12	11	12

1. a) Justifie que le temps de parcours moyen des garçons est 20,25 minutes.
   b) Calcule le temps de parcours moyen des filles.
2. Construis deux histogrammes pour représenter les résultats de chaque série.
3. a) Calcule le pourcentage de garçons ayant effectué un temps compris entre 15 et 30 minutes exclu.
   b) Calcule le pourcentage de filles ayant effectué un temps compris entre 15 et 30 minutes exclu.
4. Entre le groupe des garçons et celui des filles, détermine celui qui a les résultats les plus homogènes.

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1 Pendant la récréation, M. Tioté professeur de Sciences de la Vie et de la Terre (SVT) et Mlle Gbaza professeur de Physique- Chimie (PC) discutent de leur classe de seconde C1 en salle des professeurs.

M. Tioté : « C'est une classe moyenne et très homogène. Il est dommage que je n'ai pas de tête de classe, mais au moins il n'y a pas d'élèves faibles ».

Mes moyennes sur 20 en SVT sont les suivantes :

8	10	11	10	12	11	11	8	12	10	10
9	10	10	9	11	8	14	9	9	10	12
13	12	11	8	10	9	7	10	10	12	9

Mlle Gbaza : « Il est vrai que c'est une classe moyenne, mais je trouve le niveau très hétérogène. Pour aider leurs camarades, j'ai mis en binôme les meilleurs avec les plus faibles ».

Mes moyennes sur 20 en PC sont les suivantes :

8	10	13	13	18	10	10	12	9	9	9
11	12	4	8	10	5	8	5	16	10	15
16	9	8	7	13	8	11	12	9	15	12

Le professeur de Mathématiques de la classe, présent en salle des professeurs, souhaite arbitrer cette discussion. Pour vérifier les acquis de ses élèves en statistiques, il leur demande de commenter cette discussion à partir des notes obtenues dans les deux disciplines.

1. Justifie que la moyenne des deux séries est la même.
2. Calcule l'écart type de chacune des séries.
3. Commente l'affirmation de chaque professeur.

2 Des chimistes d'un laboratoire viennent de composer une nouvelle fibre synthétique qui devrait se caractériser par sa résistance. Sur cette fibre synthétique, il sera mentionné « taux de résistance 99 % ».

Pour que cette mention soit portée, il faut que lors du test de résistance, le pourcentage moyen de résistance de 60 fibres soit compris entre 80 % et 95 %, l'écart type soit inférieur à 15 et qu'au moins 95 % des 60 fibres ait un pourcentage de résistance compris entre $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$.

Le pourcentage de résistance des 60 fibres synthétiques est le suivant :

Pourcentage de résistance	[30 ; 45[	[45 ; 60[	[60 ; 75[	[75 ; 90[	[90 ; 105[	[105 ; 120[
Effectif	1	2	9	36	11	1

Le laboratoire sollicite des statisticiens venus faire une enquête dans votre établissement. Ces derniers se trouvant dans votre classe vous présentent la situation.

❶ Construis l'histogramme de cette série statistique.

❷ Justifie que le taux moyen de résistance x est égal à 81,75 et l'arrondi d'ordre 2 de l'écart type σ est égal à 12,38.

❸ Détermine le pourcentage de fibre synthétique dont la résistance se situe entre $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$.

❹ Justifie si oui ou non le laboratoire peut étiqueter la nouvelle fibre synthétique.

3 Des élèves de 2nde C découvrent le texte suivant dans une revue :
« Un institut de consommation a analysé 100 fromages d'une laiterie qui fabrique des fromages et les vend avec la mention « 45 % de matière grasse ». Il a obtenu les résultats suivants :

Taux de matière grasse	[41 ; 42[	[42 ; 43[	[43 ; 44[	[44 ; 45[	[45 ; 46[	[46 ; 47[
Nombre de fromages	2	10	25	40	21	2

Cet institut autorise la vente de fromages sous l'étiquette « 45% de matière grasse » si l'analyse d'un échantillon de fromages donne :

- La moyenne des taux de matière grasse comprise entre 44 et 46 ;
- L'écart type inférieur à 1,5 ;
- 95 % des fromages ont un taux de matière grasse comprise entre la moyenne diminuée de deux fois l'écart type et la moyenne augmentée de deux fois l'écart type. »

Un des élèves affirme que l'institut va interdire la vente des fromages de cette laiterie. Les autres cherchent à vérifier cette affirmation.

❶ Calcule la moyenne et l'écart type de la série

❷ Confirme ou infirme l'affirmation de l'élève. Justifie ta reponse.

Leçon 8

VECTEURS ET POINTS DU PLAN

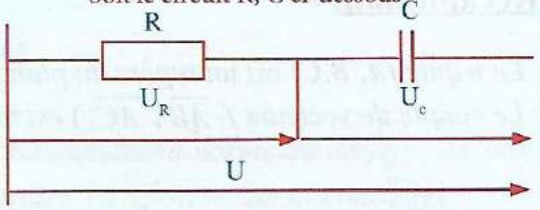
Habiletés et contenus

- **Connaitre** : la définition d'une combinaison linéaire de vecteurs ; la définition de deux vecteurs colinéaires ; la définition de la norme d'un vecteur ; la définition d'un vecteur unitaire ; la définition d'une base orthonormée ; la définition de la mesure algébrique d'un couple de points ; la définition du déterminant d'un couple de vecteurs ; la définition d'un repère du plan ; les règles de calculs sur les vecteurs ; la propriété relative à l'existence et à l'unicité du point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, où O est un point et $\vec{u}$ un vecteur ; la propriété relative à la colinéarité de deux vecteurs ; la propriété fondamentale relative aux coordonnées d'un vecteur ; l'expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée ; la caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.
- **Noter** un vecteur en utilisant une lettre minuscule,
- **Ecrire** un vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de base connaissant les coordonnées de ce vecteur dans cette base.
- **Représenter** un vecteur connaissant ses coordonnées.
- **Tracer** une droite connaissant un de ses points et un de ses vecteurs directeurs.
- **Construire** : le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$; un représentant d'une combinaison linéaire de vecteurs.
- **Décomposer** un vecteur en combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires graphiquement ou algébriquement.
- **Calculer** : le déterminant de deux vecteurs ; la norme d'un vecteur dans une base orthonormée.
- **Déterminer** : les coordonnées d'un vecteur ou d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base ; une équation cartésienne de droite en utilisant le déterminant de deux vecteurs.
- **Justifier** : que deux droites sont parallèles en utilisant le déterminant de deux vecteurs ; que des points sont alignés en utilisant le déterminant de deux vecteurs.
- **Démontrer** : qu'un couple de vecteurs est une base du plan vectoriel V ; l'alignement de trois points en utilisant la colinéarité de deux vecteurs ; le parallélisme de deux droites en utilisant la colinéarité de deux vecteurs.
- **Simplifier** une expression vectorielle en utilisant la relation de Chasles.
- **Traiter** une situation faisant appel aux vecteurs et aux points du plan.

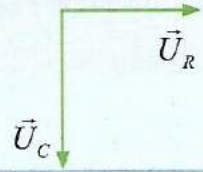
Situation d'apprentissage

Un élève d'une classe de 2nd C effectue des recherches sur les circuits R, C. Il découvre les exercices ci-dessous.
Un circuit R, C est un circuit électrique composé d'une résistance (R) et d'un condensateur (C) montés en série comme l'indique la figure ci-contre.
On donne : $\|\vec{u}_R\| = 40$ *volts et* $\|\vec{u}_c\| = 30$ *volts.*
A partir du diagramme de Fresnel, construis $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_c$ *et calcule l'intensité* $\|\vec{U}\|$ *de* $\vec{U}$.
Ayant des difficultés, il le propose à ses camarades de classe. Ceux-ci décident d'étudier le cours sur les vecteurs et points du plan pour résoudre l'exercice.

Soit le circuit R, C ci-dessous

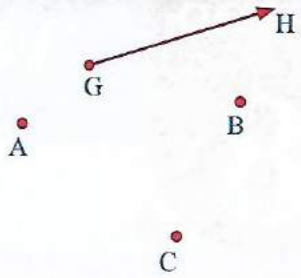


Le diagramme de Fresnel représentatif de l'état du circuit est :



Activité 1 Représentant d'un vecteur

On donne les points A, B et C et le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{GH}$ comme l'indique la figure ci-après.



Reproduis la figure, puis construis les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$; $\overrightarrow{BN} = \vec{u}$; $\overrightarrow{CP} = \vec{u}$.



Récapitulatif

- *Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.*
- *Lorsqu'on se donne un vecteur $\vec{u}$ et un point O, on ne peut construire qu'un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.*

Activité 2 Combinaison linéaire de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. On donne les vecteurs suivants :
   $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{u} - 3\vec{v}$ et $\vec{x} = 2(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{2}\vec{u} - 6\vec{v} - \vec{u}$
2. Écris chacun des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{x}$ sous la forme au $a\vec{u} + b\vec{v}$

Récapitulatif

- Le vecteur $\vec{w}$ est écrit sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$
- *Le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Activité 3 Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

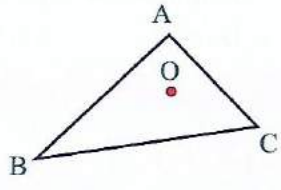
1. Démontre que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors il existe un nombre réel α tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
2. Examine la réciproque.

Récapitulatif

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel α tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Activité 4 Base, repère

1. Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque et O un point.
2. Justifie que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

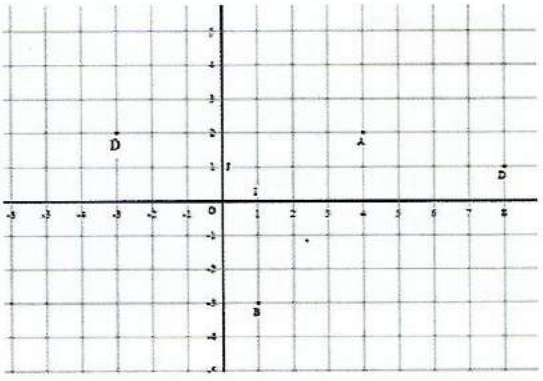


Récapitulatif

Le triplet (A, B,C) est un repère du plan P.
Le couple de vecteurs ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est une base du plan vectoriel V.



Activité 5 Coordonnées de vecteur



Sur le graphique ci-dessous, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base et on pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

1. Place sur le graphique le point A tel que : $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$.
2. Écris les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
3. Démontre que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$; déduis-en l'écriture du vecteur $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Récapitulatif

- *$\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$; on dit le couple (4 ; 2) est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.*
- *$\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées le couple (–4 ; 6).*

Activité 6 Base orthonormée

Soit ABCD un carré de côté 1.

1. Justifie que le triplet (A, B, D) est un repère du plan.
2. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.
3. Détermine AB et AD.

Remarque

À la place du vocabulaire « orthonormé », on utilise aussi le vocabulaire « orthonormal ».

Récapitulatif

- *$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ et AB = AD = 1, la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base orthonormée de V.*
- *Un repère (O, I, J) tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base orthonormée est appelé un repère orthonormé de V.*
- *Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée est appelé un repère orthonormé de P.*

Activité 7 Norme d'un vecteur, vecteur unitaire

On considère le carré ABCD de côté 1 unité, I le milieu de [DB] et P le point tel que : $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ et la base orthonormée $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. Démontre que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
2. Calcule la distance AI.
3. Démontre que : OP = 1.

Récapitulatif

- *La distance AI est appelée la norme du vecteur $\overrightarrow{AI}$ dans la base orthonormée $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$; on la note $\|\overrightarrow{AI}\|$.*
- Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est tel que : $\|\overrightarrow{OP}\| = 1$. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur unitaire.

Activité 8 Propriété de la norme

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, A, B et C trois points du plan tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

1. Démontre que : $AC \leq AB + BC$.
2. Déduis-en que : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
3. Démontre que : $\|-2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$.

Récapitulatif

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
Cette inégalité est appelée ***inégalité triangulaire***.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ : la $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$.

Activité 9 Déterminant de deux vecteurs

Le plan vectoriel V est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de V.



1. Détermine une relation entre x, x', y et y' pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ soient colinéaires.
2. On donne les points A(1 ;1) ; B(–2 ; 7) et C(2 ; –1). Démontre que les points A, B et C sont alignés.

Récapitulatif

- *Le nombre réel $xy'-x'y$ s'appelle le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.*

On le note : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'-x'y$.

- *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ dans une base donnée.*
- *Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ dans une base donnée.*

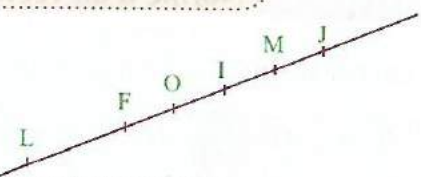
Activité 10 Équation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne les points A(–5 ; –2) et B(2 ; 3).
A l'aide du déterminant, détermine une équation cartésienne de la droite (AB).

Récapitulatif

$M \in (AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

Activité 11 Mésure algébrique



Soit ci-dessous (D) une droite orientée de repère $(O; \vec{i})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ est un vecteur unitaire.

1. Détermine les nombres réels α et β tels que $\overrightarrow{ML} = \alpha\vec{i}$ et $\overrightarrow{FJ} = \beta\vec{i}$.
2. Détermine les abscisses x_J, x_M, x_F et x_L des points J, M, F et L dans le repère $(O; \vec{i})$.
3. Compare les nombres $x_L - x_M$ et α d'une part et $x_J - x_L$ et β d'autre part.

Récapitulatif

- *Le nombre réel α est appelé la mesure algébrique de (M, L) relativement au vecteur $\vec{i}$.*
- *La mesure algébrique de (M, L) est notée $\overline{ML}$.*
- *On a : $\overline{ML} = x_L - x_M$*

Résumé de la leçon

I VECTEURS

1. Propriété fondamentale

Propriété

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

2. Somme de deux vecteurs

Propriété-définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et des points A, B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est indépendant des représentant des $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est appelé la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On écrit : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$

3. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Propriété

Soit $\vec{u}$ un vecteur.
- $0.\vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout nombre réel t, $t.\vec{0} = \vec{0}$.
- Pour tout nombre réel t : $t\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tous nombres réels λ et μ on a :
$(\lambda + \alpha)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \alpha\vec{w}$; $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$; $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$; $1\vec{u} = \vec{u}$.

4. Combinaison linéaire

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tout vecteur de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où λ et μ sont des nombres réels.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$

5. Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite (D), tout vecteur non nul $\vec{u}$ tel qu'il existe deux points distincts A et B de (D) vérifiant : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

6. Norme d'un vecteur

Définition

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B), la distance AB. On note : $\|\vec{u}\| = AB$.

Propriété

Pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette relation est appelée ***la relation de Chasles***.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
Cette inégalité est appelée ***inégalité triangulaire***.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ : la $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$.

7. Vecteurs unitaires

Définition

On appelle vecteur unitaire, tout vecteur de norme égale à 1.

Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$.
Ces deux vecteurs sont opposés.

8. Centre de gravité d'un triangle



Propriété

Un point G est centre de gravité d'un triangle ABC si et seulement si : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

II BASES ET REPÈRES

1. Coordonnée d'un vecteur

Propriété

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ un couple de vecteurs non colinéaires. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Définition

Tout couple $(\vec{i},\vec{j})$ de vecteurs non colinéaires est appelé une base de l'ensemble V des vecteurs du plan.
Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base. L'unique couple (x, y) de nombres réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

On écrit : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan vectoriel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteur et λ un nombre réel.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$; $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

Définition d'une base orthogonale et d'une base orthonormée

Un couple $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthogonale si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient simultanément les conditions suivantes :

(1) $(\vec{u},\vec{v})$ est une base ; (2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ;

Un couple $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthonormée si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient simultanément les conditions suivantes :

(1) $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthogonale ; (2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

Expression de la norme dans une base orthonormée

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur dans une base orthonormée. $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.



Résumé de la leçon

Propriété

Dans une base donnée, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant relativement à cette base est nul.

Déterminant de deux vecteurs

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base quelconque.
Le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ relativement à cette base, le nombre réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Définition

- On appelle repère du plan, la donnée d'un triplet (O, I, J), où les points O, I et J son non alignés. Le point O est l'origine du repère.
- On appelle repère du plan, la donnée d'un triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base.

Remarque

Les coordonnées d'un vecteur se déterminent dans une base, tandis que celles d'un point se déterminent dans un repère.

Calculs dans un repère

Dans un repère, on donne les points suivants : $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, $C(x_C ; y_C)$.

- $AB\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$;
- Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$;
- Si ABC est un triangle, alors son centre de gravité G a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

III MESURES ALGÉBRIQUES

Définition

Soit (D) une droite de repère $(O; \vec{i})$ où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire. Soit A et B deux points de la droite (D).
On appelle mesure algébrique de (A, B) relativement au vecteur $\vec{i}$ le nombre réel noté $\overline{AB}$ défini par $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}$

Propriété de la mesure algébrique

- $|\overline{AB}| = AB$
- $\overline{BA} = -\overline{AB}$
- $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ *(Relation de Chasles)*

EXERCICES DE FIXATION

Combinaison linéaire

1 On donne les combinaisons linéaires suivantes de vecteurs : $\vec{x} = -3\vec{u} - \vec{v}$ *et* $\vec{y} = \vec{u} + 2\vec{v}$
Ecris les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$.

2 On donne les sommes suivantes, détermine celles qui sont des combinaisons linéaires de vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

❶ $17\vec{u} - 65\vec{v}$ ❷ $-\vec{u} - 65\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$
❸ $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ ❸ $\vec{u} - 6\vec{v} + \vec{w} + \vec{0}$

3 Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{t}\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix}$.
Ecris chacun des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$.

Vecteurs unitaires

4 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.
Démontre que les vecteurs suivants sont unitaires.

ⓐ $\vec{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ ⓑ $\vec{b} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

ⓒ $\vec{c} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ ⓓ $\vec{d} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$

Vecteurs colinéaires

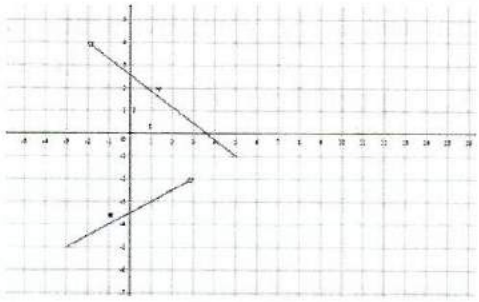
5 Dans une base quelconque, on donne les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3,75\\6,25\end{pmatrix}$

❶ Démontre à l'aide du déterminant que ces deux vecteurs sont colinéaires.
❷ Démontre sans l'aide du déterminant que ces deux vecteurs sont colinéaires.

6 Reproduis puis complète les pointillés par les mots qui conviennent : colinéaire ; perpendiculaire ; orthogonale ; orthonormée ;
Une base ..... est une base .....dont les vecteurs sont unitaires.

Coordonnées d'un vecteurs

7 Le plan vectoriel est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
❶ Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
❷ Représente sur le graphique, le vecteur $\vec{w}$ tel que : $\vec{w} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$
❸ Calcule les normes des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$.



8 Dans le plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs suivants :
$\vec{X} = -\vec{i} + 7\vec{j}$; $\vec{Y} = -13\vec{i}$ *et* $\vec{Z} = -\frac{7}{9}\vec{j}$
Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}$ *et* $\vec{Z}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Mesure algébrique

9 Reponds par vrai ou par faux.

❶ La mesure algébrique d'un couple de points relativement à un vecteur unitaire est un vecteur.
❷ La mesure algébrique d'un couple de points relativement à un vecteur unitaire est un nombre réel.
❸ Si a est la mesure algébrique d'un couple de points relativement à un vecteur unitaire $\vec{i}$ alors $-a$ est la mesure algébrique du même couple relativement au vecteur unitaire $-\vec{i}$.

10 Sur une droite régulièrement graduée de repère $(O; \vec{i})$ tel que $\vec{i}$ soit un vecteur unitaire, on donne : $\overrightarrow{CD} = -5\vec{i}$; $\overrightarrow{BA} = 2\vec{i}$ *et* $\overrightarrow{GE} = -3\overrightarrow{AB}$
❶ Détermine les mesures algébrique suivantes : $\overline{CD}$; $\overline{AB}$ *et* $\overline{GE}$
❷ Détermine les distances CD, AB et EG.

Réduction d'une somme de vecteurs

11

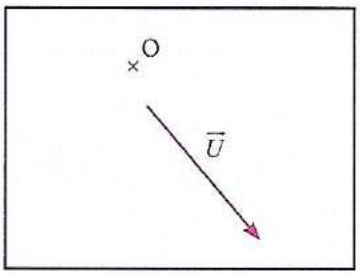
1. Démontre que : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.
2. Démontre que : $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}$.
3. Réduis la somme : $\frac{1}{4}(\vec{u}-\vec{v})+\frac{3}{5}(2\vec{u}-\vec{v})$.

12 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.
Réduis les sommes suivantes :

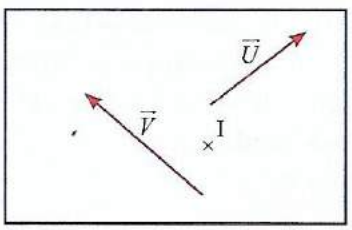
1. $2\vec{u}+(\vec{v}-3\vec{u})+2(7\vec{u}+\vec{v})$
2. $-7(\vec{u}-\vec{w})+2(3\vec{v}-3\vec{u}+\vec{w})-2(\vec{w}-\vec{v})$
3. $8(\vec{v}+3\vec{u})+2(7\vec{u}+\vec{v})-10\vec{v}$

Construction de vecteurs

13 Sur la figure ci-contre, on donne un vecteur $\vec{u}$ et un point O.
Représente les points P et K tels que
$\overrightarrow{OP}=\frac{-1}{2}\vec{u}$ et $\overrightarrow{PK}=2\vec{u}$.



14 On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Construis les vecteurs $\vec{X}=\vec{u}-\vec{v}$ et $\vec{Y}=-2\vec{u}-\vec{v}$.



15 Soit quatre points A, B, C et I
Construis les vecteurs $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ d'origine I.

Calcul de norme

16 $(\vec{i},\vec{j})$ est unebase orthonormée.

Calcule les normes des vecteurs suivants : $\vec{u}=\vec{i}$; $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{w}=\frac{3}{4}\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}$

17 $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée.

1. Calcule les normes des vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $\vec{v}=\frac{7}{2}\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{w}=\frac{-1}{7}\vec{j}$.
2. Détermine les coordonnées de deux vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $R\begin{pmatrix}\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}$

Calcul de déterminant

18 $(\vec{i},\vec{j})$ est une base du plan vectoriel V.

Dans chacun des cas suivants, calcule le déterminant du couple $(\vec{u},\vec{v})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

1. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}$
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\8\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\-13\end{pmatrix}$

Équation d'une droite

19 Le plan est muni du repère (O, I, J)
A l'aide du déterminant, détermine une équation de la droite :

1. (AB) tel que A(1, 3) et B(2, –7).
2. (D) de repère $(K,\vec{u})$ tel que K(1, 6) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

20 Soit la proposition suivante :
« Si deux droites ont un même vecteur directeur, alors ces deux droites sont confondues ».
A l'aide d'un contre-exemple, démontre que cette proposition est fausse.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 ABC est un triangle. Soit I et J deux points tels que $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

❶ Démontre que :

ⓐ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

ⓑ $\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JI}=\vec{0}$.

❷ Déduis-en que le point J est le milieu du segment [IC]

2 Dans un repère (O, I, J), place les points P(1, 3) ; Q(5, –2) et R(3 ; 5)

❶ Démontre que les points P, Q, R sont non alignés.

❷ Place le point G(3, 2) dans le repère (O, I, J).

❸ Démontre que $\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$.

❹ Soit K le point défini par : $-\overrightarrow{KP}+3\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$

ⓐ Démontre que $-\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OK}$

ⓑ Déduis-en les coordonnées du point K.

ⓒ Représente K dans le repère (O, I, J).

3 Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations puis justifie ta réponse.

❶ Dans une base orthonormée le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ a pour norme 5.

❷ Si $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ alors le point O est le milieu du segment [AB]

❸ Soit A, B, C et O des points dont trois quelconques sont non alignés.
Si $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ alors le quadrilatère OACB est un parallélogramme.

❹ La somme suivante : $-2+7\vec{u}-13\vec{v}$ est une combinaison linéaire de vecteurs.

❺ Si $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$ alors les points A, B et C sont alignés.

❻ $k\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à $k=0$

❼ $k\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à $\vec{u}=\vec{0}$

❽ Les vecteurs $-\vec{u}$ et $25\vec{u}$ sont colinéaires

❾ Dans un repère (A, B, C), le point K tel que $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (2, –1).

❿ Si ABC est un triangle alors le triplé (C, B, A) est un repère.

⓫ Dans une base orthonormée, le vecteur $\vec{T}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est unitaire

⓬ Si $2\vec{u}+5\vec{v}=\vec{0}$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

⓭ $-2\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

⓮ Pour tout couple de points (A, B), on a $\overrightarrow{AB}=AB$

4 Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ Trace la droite (D) de repère $\left(A\,;\vec{u}\right)$ tel que A(1, –2) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et la droite (D') de repère $\left(B\,;\vec{v}\right)$ tel que B(0, 4) et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

❷ Démontre à l'aide du déterminant que les droites (D) et (D') sont parallèles.

❸ Une droite (L) a pour repère $\left(C,\vec{w}\right)$ tel que C(–4, 0) et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

Démontre que les droites (D) et (L) ne sont pas parallèles et détermine les coordonnées de leur point d'intersection.

❹ Trace la droite (L).

5

❶ Dans un repère, on donne les points P(1, –1) ; Q(2, 2) et R(3, 5).
Démontre à l'aide du déterminant que les points P, Q et R sont alignés.

❷ Soit le point S de coordonnées (–1, 4). Détermine les coordonnées du point T symétrique de S par rapport à Q.

❸ Démontre que le quadrilatère PTRS est un parallélogramme de centre Q.

❹ Réalise une figure.

Les exercices

6 Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

1. Démontre que : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{O}$
2. Pour tout point M du plan, démontre que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$
3. Démontre que : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}$.

7 Soit ABCD un parallélogramme et G le point tel que $-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

1. Démontre que pour tout point M du plan, $-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MG}$.
2. Construis le point E tel que $-\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0}$
3. Exprime le vecteur $\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GE}$.
4. Justifie que le point G est le centre de gravité du triangle ECD puis construis G.

8 Dans un repère du plan, on donne les points A(−3, −1), B(2, 4), C(3, 2) et D(−2, −3)

1. Démontre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB],[BC], [CD] et [DA]
   Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$
3. Déduis-en que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.
4. Dis si tu peux prévoir ce résultat sans faire des calculs. Justifie ta réponse.

9 Soit ABC un triangle.
On considère les points E, F et G tels que :
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Construis les points E, F et G
2. Démontre que le quadrilatère EGBA est un parallélogramme.
3. Démontre que les points E, F et G sont alignés.

10 ABCD est un parallélogramme.
Soit les points I et J tels que $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et J le milieu du segment [IC]. Soit les vecteurs $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

1. Démontre que :
   a. $\vec{u}=8\overrightarrow{MJ}$;
   b. $\vec{v}=\overrightarrow{BD}$.
2. Détermine l'ensemble des points M du plan pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

11 Soit un segment [AB] de longueur 7 centimètres.

1. A l'aide de la propriété de Thalès, construis le point G défini par la relation vectorielle : $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
2. Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' défini par : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$.
   Démontre que f est l'homothétie de centre G et de rapport −4.

12 Soit ABC un triangle quelconque. Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Soit A' le symétrique de O par rapport à la droite (BC).

1. Démontre que $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}$.
2. Soit le point H tel que $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
   Démontre que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC).
3. a. Quel est le point B' tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB'}$
   b. Démontre que $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{BH}$.
4. Déduis-en que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC)
5. Démontre que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes au point H.
6. Réalise une figure.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 Soit un segment [AB] de mesure 6 cm.

1. Construis le point G tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Soit (C) l'ensemble des points M du plan tel que $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=12$
3. Démontre que le point A appartient à l'ensemble (C).
4. Démontre que : $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$.
5. Déduis de ce qui précède que l'ensemble (C) est un cercle et précise son centre et son rayon.
6. Construis l'ensemble (C).

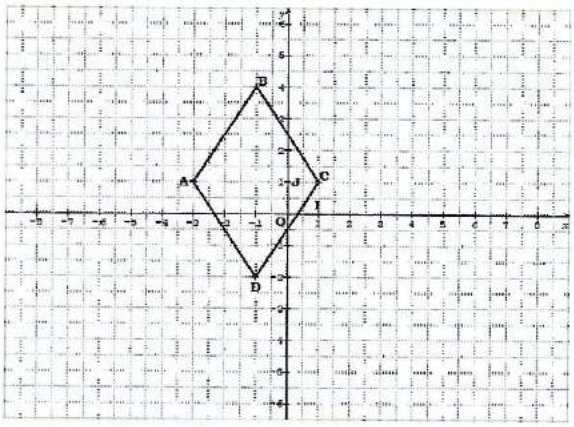
2 Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On donne dans un repère du plan, trois points P(3 ; −1) Q(0 ; 2) . Soit t la translation de vecteur $\vec{u}=-\vec{i}-2\vec{j}$

Soit P' = t(P) et Q' = t(Q)

1. Détermine une équation de la droite (PQ).
2. Justifie que la droite (Q'P') est parallèle à la droite (QP).
3. Détermine une équation de la droite (Q'R').

3 Dans le repère orthonormé (O, I, J), on a représenté ci-dessous les points A, B, C et D.

1. Démontre que le quadrilatère ABCD est un losange
2. On note G le centre du losange ABCD. Détermine les coordonnées du point G



4 Dans un repère (O, I, J), on donne les points M(4 ; 3), N(−4 ; −3) et P(−3 ; 4).

1. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.
2. Démontre que le triangle MNP est un triangle rectangle isocèle.
3. Déduis-en que les points M, N et P sont sur un cercle et détermine les coordonnées du centre de ce cercle
4. Soit Q le symétrique de P par rapport à O.
   a. Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.
   b. Démontre que le quadrilatère PMQN est un carré.
5. L'unité est le centimètre, représente les points P, M, Q et N.

6 Le plan est muni d'un repère

A tout nombre réel m, on associe la droite (D_m) d'équation $(2m-1)x + (m+2)y - m + 3 = 0$.

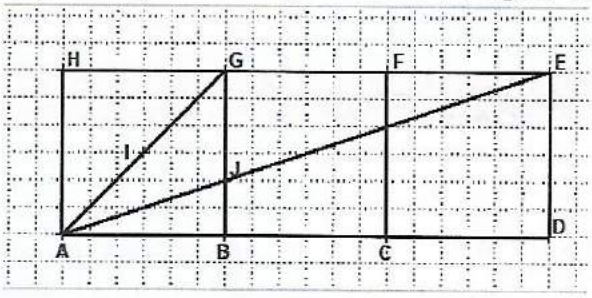
1. Démontre que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-m-2\\2m-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D_m).
2. Détermine m pour que (D_m) soit parallèle à la droite des abscisses.
3. Détermine m pour que la droite (D_m) passe par le point A(2 ; 3)
4. Démontre que toutes les droites (D_m) passent par un point B ; détermine les coordonnées du point B.

SITUATION D'ÉVALUATION

1 On a schématisé ci-dessous trois parcelles ABGH, BCFG et CDEF de forme carrée.

I le milieu de [AG] et J le point d'intersection des droites (AE) et (BG). Ces parcelles sont prévues pour accueillir des cultures maraichères (tomate, choux, concombre, etc.)

De telles cultures exigent de l'eau pour un arrosage régulier.Au point I se trouve une source d'eau et le terrain est tel que l'eau doit couler de I en C en passant par J. Cela permettrait d'irriguer les trois parcelles.

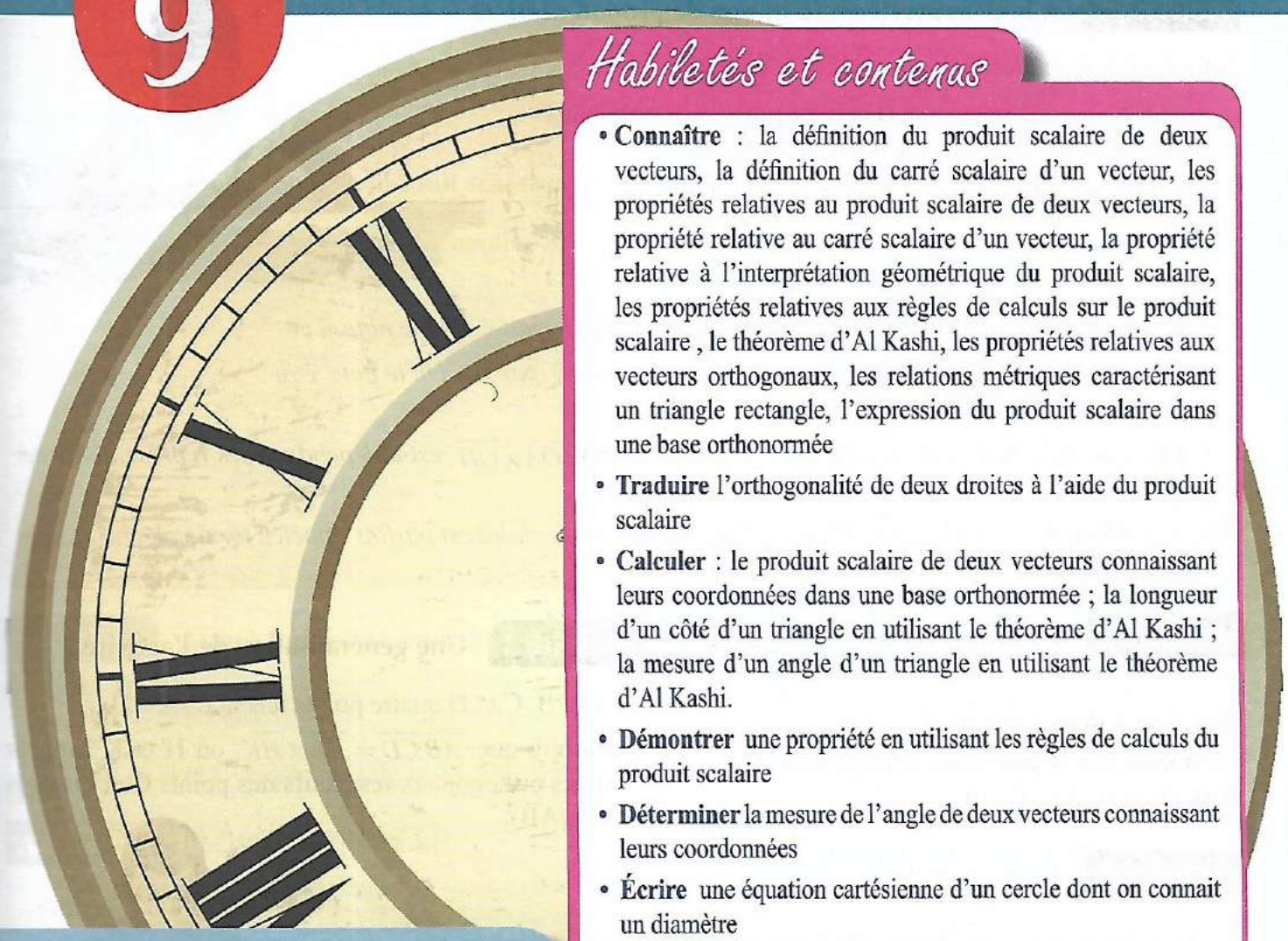


Pour minimiser les coûts d'irrigation, le technicien en charge de ce travail, affirme que les points I, J et C sont en ligne droite.

Démontre que cette affirmation est exacte.

Leçon 9

PRODUIT SCALAIRE



Habiletés et contenus

- **Connaître** : la définition du produit scalaire de deux vecteurs, la définition du carré scalaire d'un vecteur, les propriétés relatives au produit scalaire de deux vecteurs, la propriété relative au carré scalaire d'un vecteur, la propriété relative à l'interprétation géométrique du produit scalaire, les propriétés relatives aux règles de calculs sur le produit scalaire , le théorème d'Al Kashi, les propriétés relatives aux vecteurs orthogonaux, les relations métriques caractérisant un triangle rectangle, l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée
- **Traduire** l'orthogonalité de deux droites à l'aide du produit scalaire
- **Calculer** : le produit scalaire de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées dans une base orthonormée ; la longueur d'un côté d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi ; la mesure d'un angle d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi.
- **Démontrer** une propriété en utilisant les règles de calculs du produit scalaire
- **Déterminer** la mesure de l'angle de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées
- **Écrire** une équation cartésienne d'un cercle dont on connait un diamètre
- **Traiter une situation** faisant appel au produit scalaire

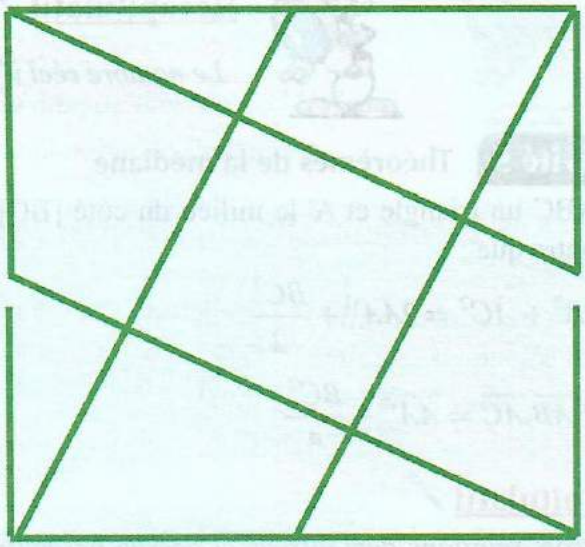
Situation d'apprentissage

Pour la prochaine fête de mères, une Unité Pédagogique de mathématiques lance un concours de logo à l'intention des clubs de mathématiques pour magnifier la mère à l'aide de figures géométriques. Le motif doit mettre en lumière le thème suivant : « la mère créative du monde ».

Un club présente le motif suivant : un carré dans lequel est incrusté un quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés du carré et dont l'aire est le cinquième de l'aire du carré.

Ce motif retient l'attention du jury d'autant plus que le quadrilatère incrusté ressemble à un carré. Une mesure à l'aide d'instruments géométriques semble confirmer cela.

Curieux, des élèves de seconde C décident de prouver cela à l'aide de la notion « produit scalaire ».



Activité 1 A la découverte de la notion de produit scalaire



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose :

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et on note H et K les projetés orthogonaux respectifs des point B et A sur (OA) et sur (OB).

Démontre que les nombres $\overline{OA} \times \overline{OH}$ et $\overline{OB} \times \overline{OK}$ sont égaux.

Récapitulatif

- *Le nombre $\overline{OA} \times \overline{OH}$ s'appelle le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$. On le note $\vec{u}.\vec{v}$*
- *Le nombre $\overline{OB} \times \overline{OK}$ s'appelle le produit scalaire de $\vec{v}$ par $\vec{u}$. On le note $\vec{v}.\vec{u}$*
- *D'après ce qui précède, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$*
- *Enfin on démontre (nous l'admettrons) que le nombre $\overline{OA} \times \overline{OH}$ est indépendant des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ choisis.*

On écrit alors $\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$. Cette écriture du produit scalaire est parfois appelée forme algébrique du produit scalaire.

Activité 2 Produit scalaire et orthogonalité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Démontre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Activité 3 Une généralisation de l'activité 1

Soit A, B, C et D quatre points tels que : $A \neq B$.

Démontre que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{HK}$ où H et K sont les projetés orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB).

Activité 4 Le carré scalaire



1. Avec les mêmes hypothèses qu'à l'activité 1, justifie que : $\vec{u}.\vec{u} = \overline{OA}^2$
2. Soit B et C deux points du plan. Déduis de ce qui précède que : $\overline{BC}^2 = BC^2$



Récapitulatif

Le nombre réel $\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$.

Activité 5 Théorèmes de la médiane

Soit ABC un triangle et A' le milieu du côté [BC].

Démontre que :

1. $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$
2. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$

b) Déduis-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si le point A appartient au cercle de diamètre [BC].

3. a) $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CB}$

b) Déduis-en le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si la médiane issue de A est une hauteur.

Récapitulatif

Les trois relations démontrées ci-dessus permettent de calculer la longueur de la médiane[AA']. C'est pourquoi on les appelle théorèmes de la médiane

Activités de découverte

Activité 6 Forme trigonomètrique du produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1. Démontre que : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
2. Déduis-en que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
3. Déduis-en que : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Récapitulatif

L'écriture $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ du produit scalaire est appelée forme trigonométrique du produit scalaire.

Le résultat de la consigne 2 nous donne une caractérisation de l'orthogonalité à l'aide de deux vecteurs.

Activité 7 Calculs avec le produit scalaire

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$' sont des vecteurs et k un nombre réel.

Démontre les égalités suivantes :

1. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{v}') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}'$;
2. $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$;
3. $(\vec{u}+\vec{u}').\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}'.\vec{v}$;
4. $(\vec{u}+\vec{u}').(\vec{v}+\vec{v}') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}' + \vec{u}'.\vec{v} + \vec{u}'.\vec{v}'$;
5. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
6. $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
7. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.



Récapitulatif

Ce sont les règles de calcul du produit scalaire.

Activité 8 Autres formes du produit scalaire

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Démontre que : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.
2. Soit A, B et C trois points du plan . Démontre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$.

Activité 9 Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle.

Posons : BC = a, CA = b et AB = c puis $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{CBA}$ et $\hat{C} = \widehat{ACB}$

1. Démontre que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.
2. Déduis-en le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si alors $a^2 = b^2 + c^2$.



Récapitulatif

- *Le résultat suivant de la consigne 1) est connu sous le nom de théorème d'Al Kashi.*
- *Le résultat de la consigne 2) n'est rien d'autre que le théorème de Pythagore.*

Activité 10 Des relations métriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle.

1. Démontre que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.
2. Démontre que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $HA^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

Récapitulatif

Cette écriture du produit scalaire est appelée forme analytique du produit scalaire.

Activité 11 Produit scalaire dans une base orthonormée

1. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée. Dans cette base, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$
2. Démontre que : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.



I DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs

On appelle le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par :

si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors: $\vec{u}.\vec{v}=0$

si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\overline{OA}\times\overline{OH}$ où $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

Remarque

Cette écriture du produit scalaire est appelée forme algébrique du produit scalaire.

Propriété

Soit A, B, C et D quatre points tels que : $A\neq B$. Soit H et K sont les projetés orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB). On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overline{AB}\times\overline{HK}$.

2. Le carré scalaire

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel noté $\vec{u}^2$ défini par $\vec{u}.\vec{u}$.

II PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

1. Vecteurs orthogonaux

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

2. Calculs avec le produit scalaire

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ et tout nombre réel k, on a :

1. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{v}')=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}'$;
2. $(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$;
3. $(\vec{u}+\vec{u}').\vec{v}=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}'.\vec{v}$;
4. $(\vec{u}+\vec{u}').(\vec{v}+\vec{v}')=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}'+\vec{u}'.\vec{v}+\vec{u}'.\vec{v}'$;
5. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$;
6. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$;
7. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$;
8. $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

3. Forme trigonométrique du produit scalaire

Propriété

soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On a : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2}$

4. Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle quelconque. Posons BC = a, CA = b et AB = c puis $\hat{A}=BAC$, $\hat{B}=\widehat{CBA}$ et $\hat{C}=\widehat{ACB}$.

1. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$.
2. $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$.
3. $c^2=b^2+a^2-2ab\cos\hat{C}$.

Résumé de la leçon



III RELATION MÉTRIQUE DANS UN TRAINGLE

1. Caractérisation d'un triangle rectangle

Propriété

Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. ABC est rectangle en A ; 2. $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$
3. $CA^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$ 4. $HA^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$

2. Théorème de la médiane

Propriété

Soit ABC un triangle et A' le milieu du segment [BC]. On a : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$.

3. Ensemble de points

Propriété

Soit A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

IV FORME ALGÉBRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

1. Base orthonormée, repère orthonormé

Définition

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base.
La base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée signifie que $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$ et $\vec{i}.\vec{j} = 0$.
Un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.



2. Expression du produit scalaire dans une base orthonormée.

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans cette base. On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.



Conséquence

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de coordonnées respectives* (x, y) *et* (x', y').
$u \perp v \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

EXERCICES DE FIXATION

1 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations ci-dessous.

❶ Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.

❷ Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

❸ Le carré scalaire d'un vecteur est quelque fois un nombre réel négatif.

2 Soit ABCD un rectangle. O le point d'intersection des diagonales tel que AB = 5 et AD = 3.
Calcule les produits scalaires suivants :
$\vec{AB}.\vec{AD}$; $\vec{AD}.\vec{CA}$; $\vec{DB}.\vec{CA}$; $\vec{OD}.\vec{OA}$; $\vec{OD}.\vec{OB}$

3 On donne les points O, A, B tels que OA = 3, OB = 5, $Mes\left(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
Calcule le produit scalaire $\vec{OA}.\vec{OB}$

4 Calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants. θ désignant la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

❶ $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 1{,}5$; $\theta = -\frac{2\pi}{3}$;

❷ $\|\vec{u}\| = 8$; $\|\vec{v}\| = 10$; $\theta = \frac{\pi}{6}$;

❸ $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\|\vec{v}\| = 9$; $\theta = \frac{3\pi}{4}$;

❹ $\|\vec{u}\| = 7$; $\|\vec{v}\| = 56$; $\theta = 120°$.

5 ABCD est un parallélogramme tel que : AB = 5, AD = 4 et AC = 6.
Calcule les produits scalaires suivants :
$\vec{BA}.\vec{BC}$; $\vec{BA}.\vec{CA}$ et $\vec{DC}.\vec{AB}$

6 Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs suivants : $\vec{u}(-3,5)$ et $\vec{v}(1,-2)$
Calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$

7 Le plan vectoriel V est muni d'une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}.\vec{v} = -3$; $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 5$.
Calcule : $(\vec{u} + 2\vec{v})^2$; $\|\vec{u} - \vec{v}\|$; $(3\vec{u} + 5\vec{v}).(-\vec{u} + 2\vec{v})$

8 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 10 et 3.
Calcule: $u.(2\vec{u} + 3\vec{v})$;$(\vec{u} - 2\vec{v}).\vec{v}$; $(\vec{u} + \vec{v})^2$;
$(u - \vec{v})^2$; $(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$; $(2\vec{u} - \vec{v})^2$

9 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A(1,3) et B(−5,−1).
Détermine une équation du cercle de diamètre [AB].

10 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A(2, 3) et B(4, −3).
Détermine une équation du cercle de diamètre [AB].

11 ABCD est un carré de centre O et de côté de longueur 4.
Calcule :

❶ $\vec{AB}.\vec{AC}$ ❷ $\vec{BC}.\vec{BA}$ ❸ $\vec{OC}.\vec{OB}$

❹ $\vec{AD}.\vec{OB}$ ❺ $\vec{AC}.\vec{AO}$.

Théorème d'Al Kashi

12 ABC est un triangle tel que :
$AB = \sqrt{2}$; $AC = \sqrt{3}$ et $mes\hat{A} = 30°$.
Calcule BC.

13 ABC est un triangle tel que :
AB = 3 ; BC = $\sqrt{13}$ et AC = 4
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

14 ABC est un triangle tel que : AB = 16 ; AC = 16 et $mes\widehat{BAC} = 60°$
1. Calcule BC.
2. Détermine la mesure des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$

Théorème de la médiane

12 ABC est un triangle tel que AB = 5, BC = 6 et AC = 8. On note A' le milieu de [BC].
Calcule AA'.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 Dans un triangle PQR. On donne :
$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PR} = 3\sqrt{2}$; PR = 3 et PQ = 2

❶ Détermine la mesure de l'angle $\widehat{QPR}$.

❷ Calcule la longueur du côté [QR] puis donne une valeur approchée à 0,1 près de cette distance.

2 Soit ABC un triangle rectangle en A.
Démontre que BC > AB et BC > AC.
Autrement dit dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus long côté.

3 Soit ABC un triangle rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A.

❶ Démontre que : $AH^2 = \dfrac{BA^2 \times CA^2}{BC^2}$.

❷ Déduis-en que : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

4 Soit ABC un triangle rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A.
Démontre que : AB × AC = AH × BC

5 Soit ABCD un carré tel que AB = 1. Soit E le point du côté [AB] tel que $AE = \dfrac{1}{5}AB$; G le point du côté [AD] tel que $AG = \dfrac{4}{5}AD$. Soit F le point tel que le quadrilatère AEFG soit un rectangle.
Il s'agit de démontrer que les droites (GE) et (FC) sont perpendiculaires.

Méthode analytique

❶ Justifie que le repère (A, B, D) est un repère orthonormé.

❷ Dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$, détermine les coordonnées des vecteurs GE et FC.

❸ Démontre que les droites $\overrightarrow{GE}$ *et* $\overrightarrow{FC}$ sont perpendiculaires.

Méthode géométrique
Sans utiliser de coordonnées, démontre que $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{FC} = 0$. Déduis-en que les droites (GE) et (FC) sont perpendiculaires.

6 Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
Démontre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

7 Quatre points A, B, C et D forment un quadrangle orthocentrique si chacun de ses points est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.
(O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A(5 ; 0) ; B(-1 ; -2) ; C(11 ; -8) et D(7 ; 4).
Démontre que les points A, B, C et D forment un quadrangle orthocentrique.

8 ABCD est un carré tel que : AB = a ($a > 0$). Soit I le milieu de [AD].
Démontre que la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de a.

9 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (3 ; 1) ; B(−1 ; 3) et C(−2 ; 5).
Détermine une équation cartésienne des tangentes au cercle de diamètre [AB] passant par C.

10 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (−1 ; 2) et B(3 ; 4).

❶ Détermine une équation de la médiatrice de [AB].

❷ Détermine une équation du cercle de diamètre [AB].

❸ Détermine une équation de la tangente en A au cercle de diamètre [AB].

11 ABC est un triangle et O le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Soit H le point du plan tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

❶ Démontre que H est l'orthocentre du triangle ABC.

❷ Démontre que les points O, H et G sont alignés.

12 Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vectoriel V.

❶ Démontre que : $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

❷ Démontre que $|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires.

13 Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vectoriel V.

❶ Démontre que $\|\vec{u}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\|$ (On pourra écrire $\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}$).

❷ Déduis-en que : $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 Calcule la longueur de la médiane [AI] du triangle ABC tel que AB = 3, AC = 5, BC = 6, le point I étant le milieu de [BC].

2 Soit ABC un triangle quelconque.
On pose : AB = c, BC = a, CA = b.

❶ Démontre que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = BC^2$

❷ Déduis-en que : $a^2 = ac\cos\hat{B} + ba\cos\hat{C}$

3 Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r et M un point du plan n'appartenant pas au cercle (C).

❶ Une droite (D) passant par M coupe (C) en deux points distincts A et B. On note I le milieu du segment [AB].
Démontre que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - r^2$

❷ Une droite (D') passant par M coupe (C) en deux points distincts P et Q. On note J le milieu du segment [PQ].
Démontre que : $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = OM^2 - r^2$

Le nombre réel $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ s'appelle la puissance du point M par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon r.
Si on pose OM = d, on écrit alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - r^2$

4 Soit ABC un triangle quelconque.
On pose : AB = c, BC = a, CA = b.
Soit G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Démontre que : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

5 Soit ABC un triangle. On note I, J, K les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB]. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues des sommets B et C.

❶ Démontre que pour tout point M du plan :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$

❷ Démontre que $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$

❸ Déduis-en que H appartient à la hauteur issue du sommet A.

On obtient ainsi que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours s'appelle l'orthocentre du triangle.

SITUATION D'ÉVALUATION

1 Une cartographie de la vue aérienne d'un quartier des affaires dont les lots sont déjà en vente se présente comme indiqué par le schéma ci-contre avec les indications suivantes :



- Le point M est l'emplacement de la nouvelle Mairie ;
- S et N sont les points de sortie (ou d'entrée) par le sud et le nord du quartier sur la route nationale ;
- Les distances MS et MN sont égales ;
- A partir de S, une voie débouche directement sur la rue (MN) sans passer par la Mairie. Idem pour la rue (NI). En plus $MI = \frac{MN}{3}$ et $MJ = \frac{MN}{3}$.

Le point H qui représente l'emplacement de l'hôpital qui sera bâti à mi-chemin (c'est à dire le milieu) de N et de I.
Le projet prévoit que les rues (MH) et (MJ) soit perpendiculaires.
Démontre que c'est effectivement le cas.

Leçon
10

ANGLES INSCRITS

Habiletés et contenus

- **Identifier** deux arcs capables d'un angle donné.
- **Connaître** : la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre associé ; la propriété relative aux mesures d'un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente et de l'angle au centre associé ; la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc ou deux arcs de même longueur ; la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités ;la propriété relative à la bissectrice d'un angle inscrit et l'arc que cet angle intercepte ; la propriété relative à l'aire d'un triangle ; le théorème des sinus.
- **Calculer** : des aires ; des longueurs et des mesures d'angle en utilisant les formules d'aire ou le théorème des sinus.
- **Déterminer** la mesure d'un angle en utilisant les propriétés des angles inscrits.
- **Construire** un arc capable de mesure donnée.
- **Justifier** une égalité angulaire en utilisant les propriétés des angles inscrits.
- **Traiter une situation** faisant appel aux angles inscrits non orientés.

Situation d'apprentissage

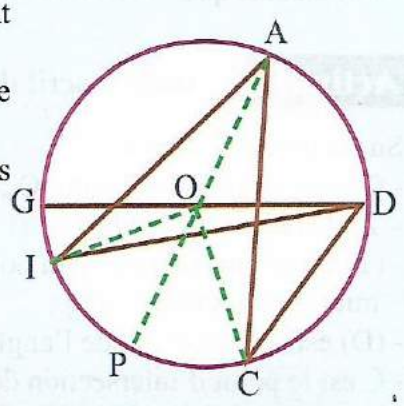
Lors de la préparations d'un exposé sur les angles , les élèves d'une classe de 2nd C découvrent les informations suivantes : «Les astronomes, arpenteurs et géomètres ont, très tôt, cherché à mesurer des angles et à les comparer entre eux. C'est ainsi que l'angle inscrit et son double sont entrés dans l'histoire des mathématiques.

Le théorème de l'angle inscrit est l'un des résultats importants de géométrie euclidienne élémentaire.

Il demande peu d'outils pour être énoncé, et même démontré, et ses conséquences sont nombreuses.

La figure ci-contre est tirée de l'édition Louis de 1804 des Éléments d'Euclide (traduction de François Peyrard).

Fiers de cette découverte, ces élèves décident de justifier des égalités angulaires entre les angles inscrists et les angles au centre.

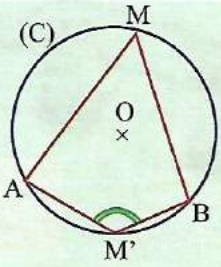




Activité 1 Arc intercepté par un angle donné

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O et A, B, M et M' sont des points de (C).

1. Reproduis cette figure sur ton cahier.
2. Trace en bleu l'arc intercepté par l'angle $\widehat{AMB}$
3. Trace en rouge l'arc intercepté par l'angle $\widehat{AM'B}$



Récapitulatif

L'angle inscrit AMB intercepte :

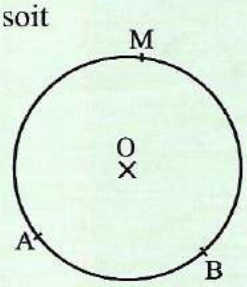
- *l'arc $\overset{\frown}{AB}$ lorsqu'il est aigu.*
- *l'arc $\overset{\frown}{AB}$ lorsqu'il est obtus.*

Activité 2 Angle inscrit aigu et angle au centre associé

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O ; A, B et M sont des points de (C) tels que l'angle $\widehat{AMB}$ soit aigu.

1. À l'aide du rapporteur, donne les mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$.
2. Exprime la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Démontre que : $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$

(On pourra tracer le diamètre [OM]).





Récapitulatif

- *La mesure de l'angle inscrit aigu $\widehat{AMB}$ est la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ associé.*

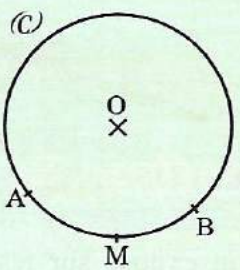
Activité 3 Angle inscrit obtus et angle au centre associé

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O ; A, B et M sont des points de (C) tels que l'angle $\widehat{AMB}$ soit obtus.

1. Donne les mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$.
2. Exprime la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Trace le diamètre [OM] et note E le point d'intersection de [OM] et (C).

   a) Justifie que : $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(mes\widehat{AOB} + mes\widehat{EOB}\right)$.

   b) Déduis que : $mes\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$.





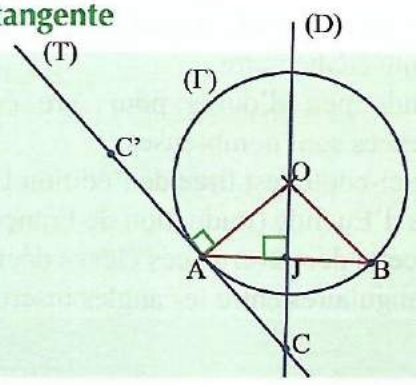
Récapitulatif

La mesure de l'angle inscrit obtus $\widehat{AMB}$ est égale à 180° diminué de la moitié de la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

Activité 4 Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente

Sur la figure ci-contre :

- (Γ) est un cercle de centre O ;
- A et B sont deux points de (Γ) ;
- (T) est la tangente à (Γ) au point A, J est le milieu du segment [AB] ;
- (D) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$;
- C est le point d'intersection de (T) et (D) ;
- C' est un point de (Γ) n'appartenant pas à



la demi-droite [AC].

1. a) En considérant le triangle rectangle AOC, exprime mes $\widehat{ACO}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.
   b) En considérant le triangle AJC, exprime mes $\widehat{CAJ}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.
   c) Détermine mes $\widehat{CAB}$.
2. a) Donne la nature des angles $\widehat{C'AB}$ et $\widehat{CAB}$.
   b) Exprime mes $\widehat{C'AB}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.

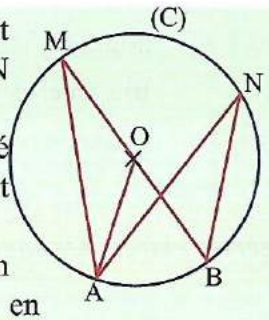
Récapitulatif

L'angle $\widehat{CAB}$ est appelé angle inscrit aigu.
L'angle $\widehat{C'AB}$ est appelé angle inscrit obtus.
La mesure d'un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente est égale à :

- *la moitié de la mesure de l'angle au centre si l'angle inscrit est aigu*
- *180° diminué de la moitié de l'angle au centre si l'angle inscrit est obtus.*

Activité 5 Angles inscrits interceptant le même arc

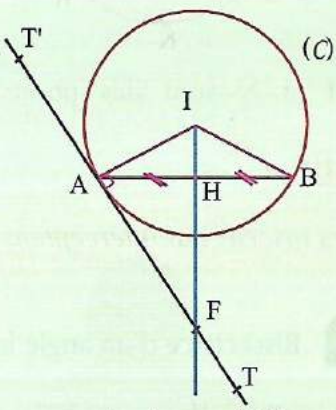
A. Sur la figure ci-dessous, (*C*) est un cercle de centre O. A, B, M et N sont des points de (C).



1. Donne l'arc de cercle intercepté par les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.
2. Exprime la mesure de chacun des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Compare les mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.

B. Sur la figure ci-dessous :

- [AB] est une corde d'un cercle (*C*) qui n'est pas un diamètre ;
- [AT) est la demi-tangente en A à (*C*) contenue dans le demi-plan de frontière
- (AB) ne contenant pas le point I ;
- [AT') est l'autre demi-tangente en A à (*C*) ;
- H est le milieu de [AB].



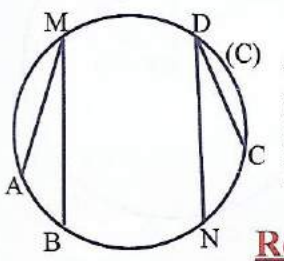
1. Démontre que la droite (IH) coupe la droite (AT) en un point F.
2. a) Démontre que les angles $\widehat{AIH}$ et $\widehat{FAB}$ admettent un même angle pour complémentaire.
   (On pourra utiliser les triangles AHF et AIH).
   b) Déduis que : $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AIB}$.
   c) Détermine $mes\widehat{T'AB}$ en fonction de mesure $\widehat{AIB}$.

Récapitulatif

- *Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc ont la même mesure.*
- $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AIB}$ et $mes\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{AIB}$.

Activité 6 Angles inscrits interceptant des arcs de même longueur

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O.



A, B, M, C, D et N sont des points de (C) tels que les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{CN}$ ont la même longueur.

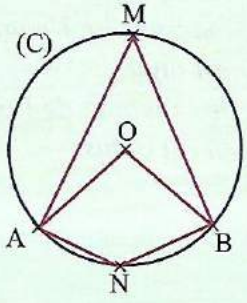
1. À l'aide du rapporteur, donne la mesure des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{CDN}$.
2. Compare les mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{CDN}$.

Récapitulatif

Des angles inscrits qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.

Activité 7 Angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O.



A, B, M et N sont des points de (C) tels que l'angle $\widehat{AMB}$ est aigu et l'angle $\widehat{ANB}$ est obtus.

1. a) Exprime la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
   b) Exprime la mesure de l'angle $\widehat{ANB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
2. a) Calcule la somme des mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.
   b) Conclus.

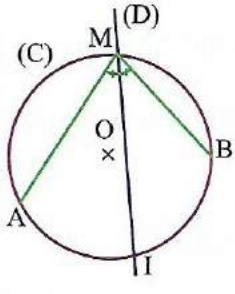
Récapitulatif

Deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de mêmes extrémités sont supplémentaires.

Activité 8 Bissectrice d'un angle inscrit et arc de cercle intercepté par cet angle



Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.
A, B et M sont des points de (C) ; (D) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ et I est le deuxième point d'interception de (D) et de (C).



1. Justifie que les arcs $\overset{\frown}{AI}$ et $\overset{\frown}{IB}$ ont la même longueur.
2. Énonce la propriété ainsi démontrée.

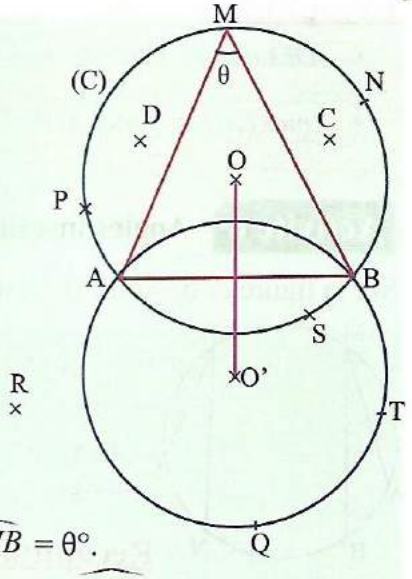
Récapitulatif

La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc qu'il intercepte en deux arcs de même longueur.

Activité 9 Arcs capables de mesure donnée

Sur la figure ci-contre :

- (Γ) et (Γ') sont deux cercles de centres respectifs O et O', symétriques par rapport à la droite (AB) ;
- P, N, A, B, T, Q et M sont des points qui appartiennent à (Γ) ou (Γ') ;
- C, D et R sont des points qui n'appartiennent ni à (Γ), ni à (Γ') ;
- M est un point du cercle (Γ) tel que : $mes\,\widehat{AMB} \neq \theta°$. $(0 < \theta < 180)$;
- S est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



1. a) Justifie que : mes $\widehat{ANB} = \theta°$.
   b) Détermine mes $\widehat{APB}$.
2. a) Justifie que : mes $\widehat{AQB} = \theta°$.
   b) Détermine mes $\widehat{ATB}$.
3. a) Justifie que : $mes\,\widehat{ADB} \neq \theta°$, $mes\,\widehat{ASB} \neq \theta°$ et $mes\,\widehat{ARB} \neq \theta°$.
   b) Dis si on peut avoir des points M sur la droite (AB) tels que $mes\,\widehat{AMB} = \theta°$.
4. Déduis de tout ce qui précède, le lieu géométrique des points M tels que $mes\,\widehat{AMB} = \theta°$.

Récapitulatif

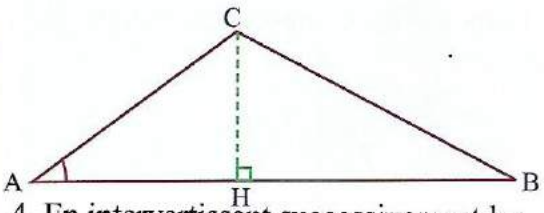
Le lieu géométrique des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$, $0 < \theta < 180$, est la réunion des deux grands arcs de cercles symétriques par rapport à (AB). Ils sont appelés arcs capables de mesure $\theta°$ d'extrémités A et B.

Activité 10 Aire d'un triangle

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

On note $\mathcal{A}$, l'aire du triangle ABC.

1. Exprime $\mathcal{A}$ en fonction de CH.
2. En considérant le triangle ACH rectangle en H, exprime CH en fonction de sin Â et AC.
3. En posant : $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, déduis que : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A}$.



4. En intervertissant successivement les rôles de Â et $\hat{B}$ puis ceux de $\hat{B}$ et $\hat{C}$, donne deux autres formules de $\mathcal{A}$.

Récapitulatif

L'aire d'un triangle peut être déduite d'un angle et de ses côtés adjacents. Si les deux côtés adjacents au sommet A d'un triangle ABC ont pour longueurs b et c, alors l'aire est donnée par : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A}$.



Activité 11 Théorème des sinus

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O et de rayon R.

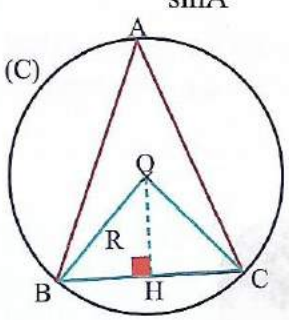
A, B et C sont des points de (C). H est le projeté orthogonal de O sur (BC).

On pose : $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Écris les trois formules de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC déduite d'un angle et de ses côtés adjacents.
2. En multipliant chacune des trois égalités obtenues ci-dessus par $\frac{2}{abc}$, démontre que :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}.$$

3. En considérant le triangle rectangle BOH, démontre que : $a = 2R \sin\widehat{BOH}$.
4. Compare les mesures des angles $\widehat{BOH}$ et Â.
5. Déduis-en que : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = 2R$.



Récapitulatif

ABC est un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

En posant : $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on obtient : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$.

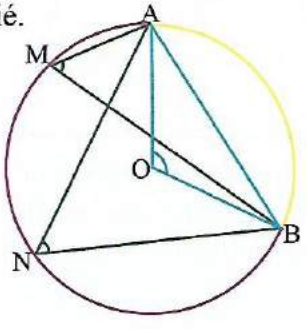
Ces égalités définissent le théorème des sinus.



I ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE ASSOCIÉ

Propriété 1

Un angle inscrit aigu dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

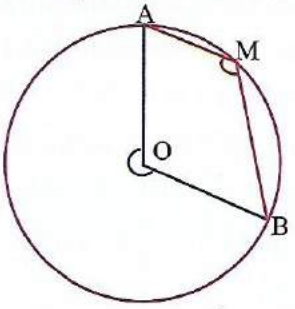


$\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}.$

$\text{mes } \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}.$

Propriété 2

Un angle inscrit obtus dans un cercle a pour mesure la différence de 180° et de la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.



On a : $mes\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}.$

Remarque

Le cas d'un angle inscrit dans un demi-cercle est le cas particulier pour lequel l'angle au centre est un angle plat, et donc l'angle inscrit est un angle droit.



II ANGLE INSCRIT DÉFINI PAR UNE CORDE ET UNE DEMI-TANGENTE

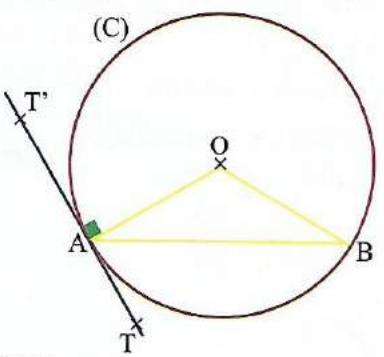


La propriété des angles inscrits se généralise aux angles que fait la corde qui sous-tend l'arc avec une tangente.



Propriété 1

Soit [AB] une corde d'un cercle (C) qui n'est pas un diamètre. [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point O, [AT') l'autre demi-tangente en A.



On a :

$\text{mes } \widehat{TAB} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}.$

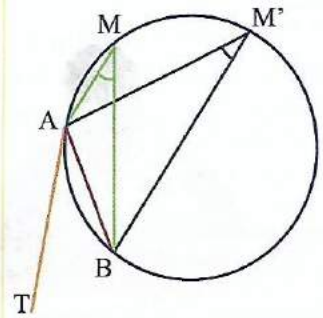
$\text{mes } \widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}.$

Résumé de la leçon

III ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MÊME ARC

Propriété

Dans un cercle, des angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.



Les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{TAB}$ interceptent l'arc $\widehat{AB}$ donc : $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{AM'B} = mes\widehat{TAB}$.

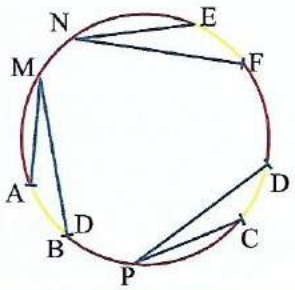




IV ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT DES ARCS DE MÊME LONGUEUR

Propriété

Dans un cercle, des angles inscrits qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.



Les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{EF}$ ont la même longueur.

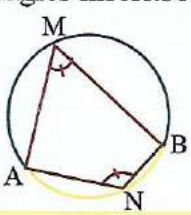
Donc : $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{FNE} = mes\widehat{CPD}$.



V ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT DEUX ARCS DE MÊMES EXTRÉMITÉS

Propriété

Si M est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et N un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.



On a :

mes $\widehat{AMB}$ + mes $\widehat{ANB}$ = 180°

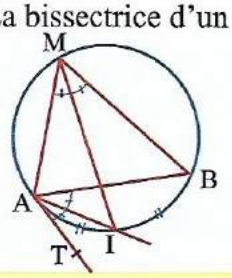


VI BISSECTRICE D'UN ANGLE INSCRIT ET ARC DE CERCLE INTERCEPTÉ



Propriété

La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.



(MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$; donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AI}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IB}$.

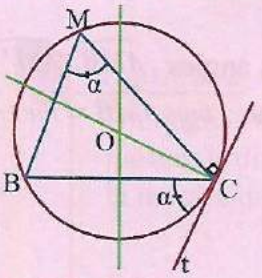
(AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{TAB}$; donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AI}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IB}$.



VII ARC CAPABLE D'UN ANGLE DONNÉ

Définition

L'ensemble des points M du plan d'où l'on voit un segment [BC] sous un même angle, c'est à dire tel que l'angle $\widehat{BMC}$ garde une même mesure α, est un arc de cercle, appelé arc capable de l'angle α construit sur [BC].





- **Construction d'un arc capable**

Méthode

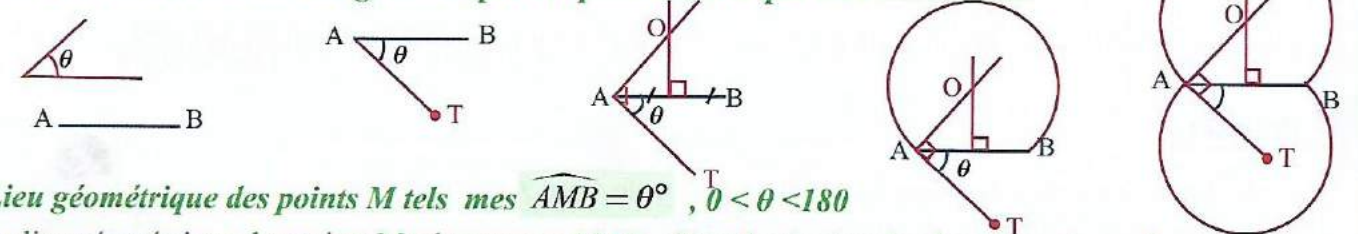
Pour construire un arc capable de mesure α , on peut procéder comme suit :

- On trace un segment [BC] ;
- On place un point T tel que mes $\widehat{BCT} = \alpha$;
- On trace la médiatrice de [BC] ;
- On trace la perpendiculaire à (CT) passant par C. Elle coupe la médiatrice de [BC] en O ;
- On construit le cercle de centre O passant par B.

L'arc capable de l'angle α est l'arc de cercle de centre O et de rayon OB situé dans le demi-plan de bord (BC) ne contenant pas l'angle $\widehat{BCT}$.

L'arc de cercle de centre O et de rayon OB situé dans le demi-plan de bord (BC) contenant l'angle $\widehat{BCT}$ est l'arc capable de l'angle $180° - \alpha$.

Film de construction du lieu géométrique des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$

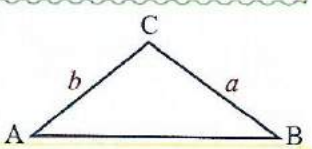


Lieu géométrique des points M tels mes $\widehat{AMB} = \theta°$, $0 < \theta < 180$

Le lieu géométrique des points M tels que mes AMB = θ° est la réunion des deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB).

Ils sont appelés arcs capables de mesure θ° d'extrémités A et B.

VI AIRE D'UN TRIANGLE



Propriété

Soit ABC un triangle et $\mathcal{A}$ son aire. On pose : BC = a, AC = b et AB = c.

On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin\hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin\hat{C}$.

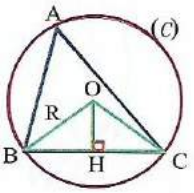
VI TRÉORÊME DES SINUS

Propriété

Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit et R le rayon de $(\mathcal{C})$.

On pose : BC = a, AC = b et AB = c.

On a : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$.



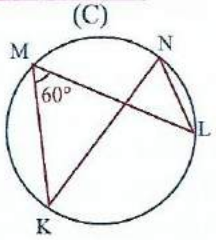
EXERCICES DE FIXATION

Angle inscrit et angle au centre associé

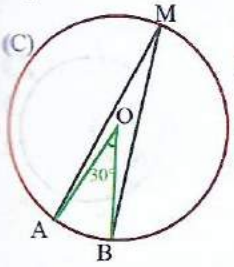
1 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par V si l'affirmation est vraie et par F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La mesure d'un angle aigu inscrit dans un cercle est le double de la mesure de l'angle au centre associé.
2	Si $\widehat{AIB}$ est un angle obtus inscrit dans un cercle et $\widehat{AOB}$ son angle au centre associé alors mes $\widehat{AIB} = 90° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
3	Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc alors ils ont la même mesure.
4	Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent des arcs de même longueur ont des mesures différentes.
5	Soit (C) un cercle et A et B deux points de (C). Si I est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et J un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ alors les angles inscrits $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AJB}$ sont supplémentaires.

2 Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre I. K, M, L et N sont des points de (C) tels que mes $\widehat{KML}$ = 60°. Donne la mesure de l'angle $\widehat{KNL}$. Justifie ta réponse.

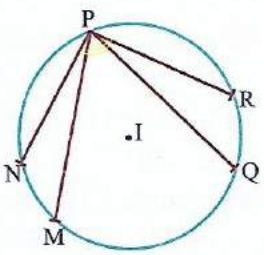


3 (C) est un cercle de centre O.
A et B sont deux points de (C) tels que mes $\widehat{AOB}$ =30°.
K est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et M un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Pour chacune des propositions ci-dessous, trois réponses sont données, entoure la bonne réponse.



1. La mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ est :
   a) 60° b) 90° c)15°
2. La mesure de l'angle $\widehat{AKB}$ est :
   a) 165° b) 60° c) 15°

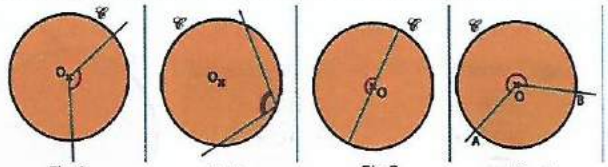
4 Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre I.
M, P, N, Q et R sont des points de (C) tels que les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{QR}$ ont la même longueur.



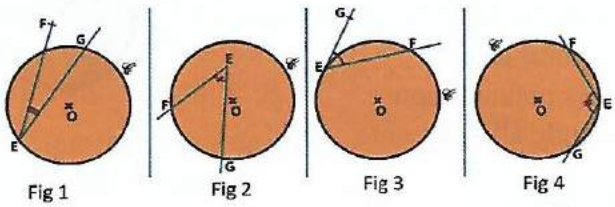
Parmi les angles représentés sur la figure, cite ceux qui ont la même mesure.
Justifie ta réponse.

5 Dans chaque cas, O est le centre du cercle (C).

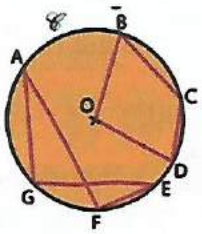
a) Pour chaque cas de figure, dis si l'angle marqué est un angle au centre. Si oui, trace en rouge l'arc qu'il intercepte après avoir reproduit la figure.



b) Pour chaque cas de figure, dis si l'angle marqué est un angle inscrit. Si oui, trace en vert l'arc qu'il intercepte après avoir reproduit la figure.

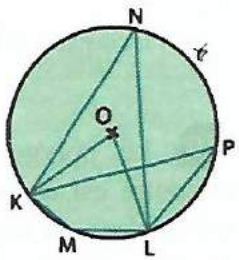


6 La figure ci-contre est un cercle de centre O. A, B, C, D, E, F et G sont des points de (C).
Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par V si l'affirmation est vraie et par F si l'affirmation est fausse.



N°	Affirmations
1	$\widehat{EFA}$ est à la fois un angle inscrit et un angle au centre.
2	$\widehat{BOD}$ est un angle au centre du cercle (C).
3	$\widehat{OCD}$ est un angle au centre du cercle (C).
4	$\widehat{GAF}$ est un angle inscrit au cercle (C).
5	$\widehat{BCD}$ est un angle inscrit obtus au cercle (C).
6	$\widehat{AGE}$ est un angle inscrit associé à l'angle au centre AOE.

7 La figure ci-contre est un cercle de centre O. K, L, M, N et P sont des points de (C).



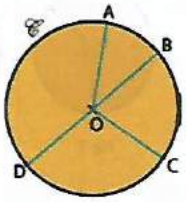
a) Parmi les angles ci-dessous, écris celui ou ceux qui interceptent le petit arc d'extrémités K et L.
$\widehat{KML}$; $\widehat{KNL}$; $\widehat{KLM}$; $\widehat{KOL}$; $\widehat{KPL}$ et $\widehat{LKO}$.

Les exercices

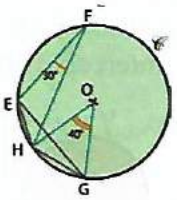
a Parmi les angles ci-dessous, écris celui ou ceux qui interceptent le grand arc d'extrémités K et L.
$\widehat{KML}$; $\widehat{KNL}$; $\widehat{KLM}$; $\widehat{KOL}$; $\widehat{KPL}$ et $\widehat{LKO}$.

8 Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O. Les points A, B, C et D appartiennent à (C) et B et D sont diamètralement opposés.
Relie chaque angle inscrit à l'angle au centre qui intercepte le même arc.

angle inscrit	angle au centre
$\widehat{ACB}$ •	• $\widehat{BOC}$
$\widehat{BDC}$ •	• $\widehat{AOB}$
$\widehat{CBD}$ •	• $\widehat{COD}$
$\widehat{ABD}$ •	• $\widehat{AOD}$



9 Sur la figure ci-contre, les points E, F, G et H appartiennent au cercle (C) de centre O. (JK) est la tangente à (C) au point H.
Coche la bonne réponse.



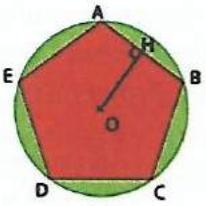
- L'angle $\widehat{HEG}$ mesure :

☐ 30° ☐ 40° ☐ 15° ☐ 20°

- L'angle $\widehat{HEG}$ mesure :

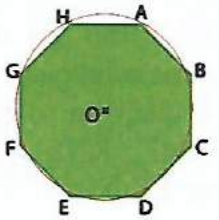
☐ 30° ☐ 40° ☐ 15° ☐ 20°

10 La figure ci-contre représente un pentagone régulier ABCDE inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 3.
Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste.
Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspondant à l'affirmation juste.

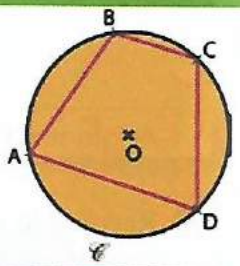


N°	Affirmation	a	b	c
1	L'angle $\widehat{AOB}$ mesure	36°	40°	72°
2	L'angle $\widehat{AEB}$ mesure	15°	36°	72°
3	L'angle $\widehat{ABC}$ mesure	54°	108°	72°
4	La distance AB est égale à	3sin72°	6sin36°	6cos36°

10 Le polygone ABCDEFGH ci-contre est un octogone régulier inscrit dans un cercle de centre O.
Justifie que les angles $\widehat{GAD}$ et $\widehat{ECH}$ ont la même mesure.

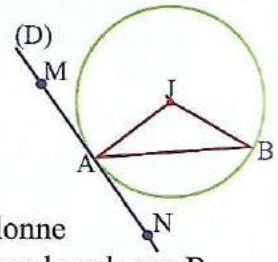


12 On considère la figure ci-contre.
Justifie que les angles inscrits $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ sont supplémentaires.



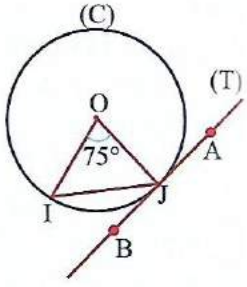
Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente

13 La figure ci-contre représente un cercle (C) de centre J.
[AB] est une corde de (C), (D) est la tangente à (C) au point A et M et N sont deux points de (D).
Associe chaque élément de la colonne A à sa formule correspondante dans la colonne B.



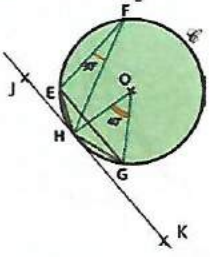
A	B
1. *mes* $\widehat{MAB}$	*a.* $\frac{1}{2}$ *mes* $\widehat{AJB}$
2. *mes* $\widehat{NAB}$	b. $180° - \frac{1}{2}$ *mes* $\widehat{AJB}$

14 (C) est un cercle de centre O.
I et J sont des points de (C) tels que : mes $\widehat{IOJ} = 75°$.
(T) est la tangente à (C) en J. A et B sont deux points de (T).
Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :



N°	Affirmations
1	La mesure de l'angle $\widehat{AJI}$ est 37,5°
2	La mesure de l'angle $\widehat{AJI}$ est 142,5°
3	La mesure de l'angle $\widehat{BJI}$ est 37,5°
4	La mesure de l'angle $\widehat{BJI}$ est 142,5°

15 Sur la figure ci-contre, les points E, F, G et H appartiennent au cercle (C) de centre O. (JK) est la tangente à (C) au point H.
Coche la bonne réponse.



a L'angle $\widehat{EHJ}$ mesure :
☐ 30° ☐ 40° ☐ 15° ☐ 20°

b L'angle $\widehat{GHK}$ mesure :
☐ 30° ☐ 40° ☐ 15° ☐ 20°

c L'angle $\widehat{EHK}$ mesure :
☐ 30° ☐ 150° ☐ 165° ☐ 160°

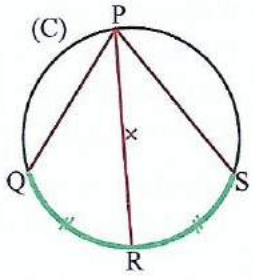
Les exercices

Bissectrice d'un angle inscrit et arc de cercle intercepté par cet angle

16 (C) est un cercle.

P, Q, R et S sont des points de (C) tels que les arcs RS et QR ont la même longueur.

Justifie que la droite (PR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{QPS}$.



17 (C) est un cercle. K, M et L sont des points de (C). (D) est la bissectrice de l'angle $\widehat{KML}$ et O est l'intersection de (C) et de (D).

Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N	Affirmation
1	Les arcs $\overset{\frown}{KO}$ et $\overset{\frown}{OL}$ ont des longueurs différentes.
2	La longueur de l'arc $\overset{\frown}{KO}$ est le double de celle de l'arc $\overset{\frown}{OL}$.
3	Les arcs $\overset{\frown}{KO}$ et $\overset{\frown}{OL}$ ont la même longueur.
4	La longueur de l'arc $\overset{\frown}{OL}$ est le double de celle de l'arc $\overset{\frown}{KO}$.

Arc capable de mesure donnée

18 Réordonne les étapes suivantes de façon à donner une méthode de construction d'un arc capable de mesure θ° donnée.

1. Construis le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (AB).
2. Place un point P tel que mes $\widehat{PAB} = \theta°$.
3. Construis l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de bord (AB) ne contenant pas P.
4. Trace un segment [AB].

Construis le point O, intersection de la perpendiculaire à (AP) en A et de la droite (D) médiatrice du segment [AB].

19 Soit [AB] un segment de longueur 6 cm. Construis, dans chacun des cas ci-dessous, l'ensemble des points M tels que :

a. mes $\widehat{AMB} = 120°$;

b. mes $\widehat{AMB} = 37°$;

c. mes $\widehat{AMB} = 90°$;

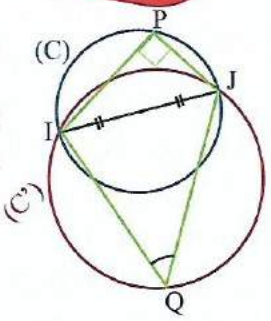
(On donnera un programme de construction)

20 Sur la figure codée ci-contre, (C) et (C') sont deux cercles.

I et J sont deux points de (C) et (C'). P est un point de (C) et Q un point de (C').

Reproduis la figure puis :

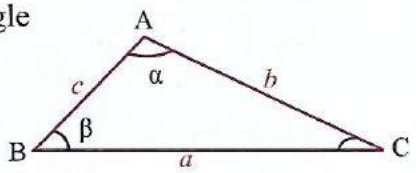
1. Trace en rouge un arc capable de mesure 50°.
2. Trace en bleu un arc capable de mesure 90°.
3. Trace en vert un arc capable de mesure 130°.



Aire d'un triangle

21 Observe le triangle ci-contre.

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste.



Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation juste.

N°	Affirmation	a	b	c
1	L'aire du triangle ABC est	$bc \sin \gamma$	$\frac{1}{2} ac \sin \gamma$	$\frac{1}{2} ab \sin \gamma$
2	L'aire du triangle ABC est	$\frac{1}{2} ac \sin \beta$	$\frac{1}{2} ac \cos \beta$	$\frac{1}{2} ac \tan \beta$
3	L'aire du triangle ABC est	$\frac{1}{2} bc \sin \alpha$	$\frac{1}{2} bc \sin \beta$	$\frac{1}{2} bc \sin \gamma$

22 L'unité de longueur est le centimètre.

EFG est un triangle tel que : EF = 5, FG = 7, EG = 8 et mes $\widehat{FEG} = 30°$.

Entoure la bonne réponse.

L'aire, en cm², du triangle EFG est :

a. 20 b. 10 c. 8,75 d. 14

23 KML est un triangle tel que KL = 3 cm, KM = 8 cm et mes $\hat{K} = 60°$.

Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

24 Soit PQS un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit et R le rayon de $(\mathcal{C})$.

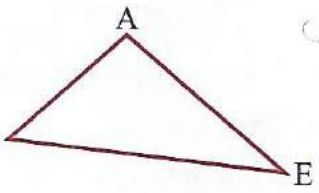
On pose : PQ = s, PS = q et QS = p.

Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations
1	On a : $\frac{\sin\hat{P}}{p} = \frac{\sin\hat{Q}}{q} = \frac{\sin\hat{s}}{s}$
2	On a : $\frac{q}{\sin\hat{Q}} = \frac{pqs}{A}$
3	On a : $\frac{s}{\sin\hat{S}} = R$
4	On a : $pqs = 4\mathcal{A} \times R$
5	On a : $p = 2R\sin\hat{P}$

25 L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles, ADE est un triangle tel que : AD = 10, AE = 11, mes $\widehat{ADE}$ =51° et l'angle $\hat{E}$ est aigu.



Calcule la mesure en degré de l'angle $\hat{E}$.

(On donnera l'arrondi au degré près).

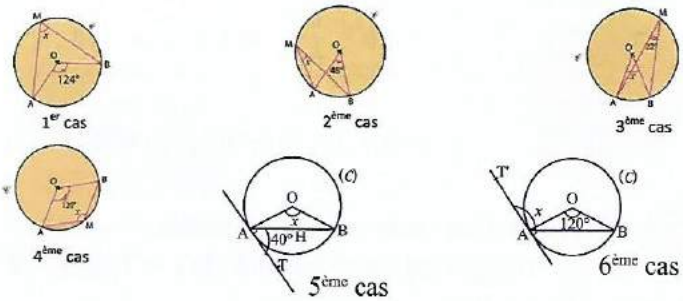
26 L'unité de longueur est le centimètre.

EFG est un triangle tel que : EG = 5, mes $\widehat{EFG}$ =33° et mes $\widehat{EGF}$ =67°.

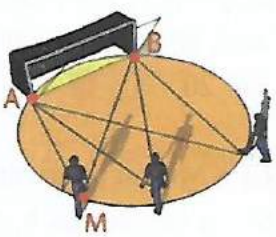
Calcule l'arrondi au dixième de la distance EF.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 A, B et M sont trois points d'un cercle (C) de centre O. Dans chacun des cas suivants, détermine x.



2 Au cours d'une séance d'entraînement, on a noté des positions d'un footballeur sur la partie de cercle ci-contre. Il est représenté par le point M.

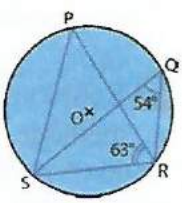


Ce footballeur essaie de marquer un but.

Après observation, Amine affirme qu'il existe un point de ce cercle où l'angle de tir $\widehat{AMB}$ est le plus grand.

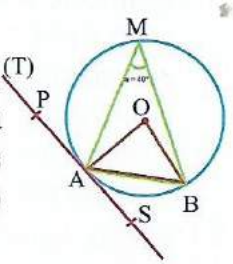
Dis si Amine a raison. Justifie la réponse.

3 Sur la figure ci-contre, P, Q, R et S sont quatre points du cercle (C) de centre O.



Kadio affirme que le triangle PSR est isocèle. Affoua ne partage pas cet avis. Départage-les.

4 (C) est un cercle de centre O. [AB] est une corde de (C), (T) est la tangente à (C) en A. P et S sont des points de (T). M est un point de (C) tel que mes $\widehat{AMB}$ = 40°.



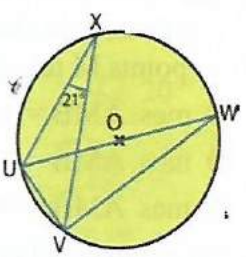
❶ Détermine mes $\widehat{PAB}$.

❷ Indique sur cette figure un arc capable d'un angle de 140°.

5 On considère la figure ci-contre.

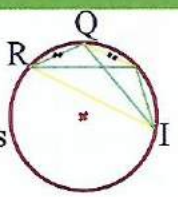
U, V, W et X sont quatre points du cercle (C) de centre O. [UW] est un diamètre de ce cercle.

Détermine la mesure de chacun des angles du triangle UVW.



Les exercices

6 Sur la figure ci-contre, le triangle QRS est isocèle en Q et inscrit dans le cercle (C).



I est un point de l'arc $\overset{\frown}{RS}$ ne contenant pas Q.

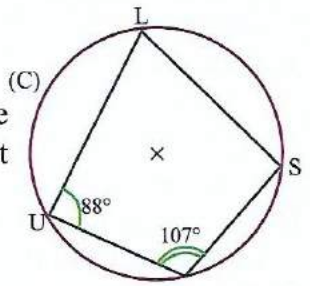
Démontre que la droite (IQ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RIS}$.

7 [IJ] est un segment de longueur 4 cm.

1. Construis en vert un arc capable d'extrémités I et J de mesure 60°. Explique ta méthode.
2. Indique en bleu un arc capable d'extrémités I et J de mesure 120°.

8 (C) est un cercle.

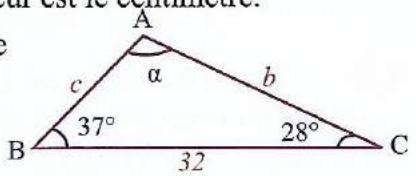
L, U, I et S sont des points de (C) tels que : mes $\widehat{LUI} = 88°$ et mes $\widehat{UIS} = 107°$.



1. Détermine mes $\widehat{LSI}$.
2. Détermine mes $\widehat{ULS}$.

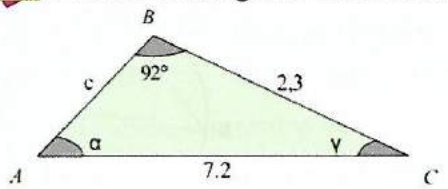
9 L'unité de longueur est le centimètre.

On considère la figure ci-contre.



1. Justifie que l'arrondi d'ordre 1 de la distance AC est 21,2 cm.
2. Calcule la distance AB. On donnera l'arrondi d'ordre 1.

10 L'unité de longueur est le centimètre.



On considère la figure ci-dessus.

1. Détermine la valeur exacte de α.
2. Détermine la valeur exacte de c.

11 ABC est un triangle tel que mes $\hat{A} = 45°$ et mes $\hat{B} = 60°$.

Sachant que le cercle circonscrit à ABC a pour rayon 1 cm, calcule la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.

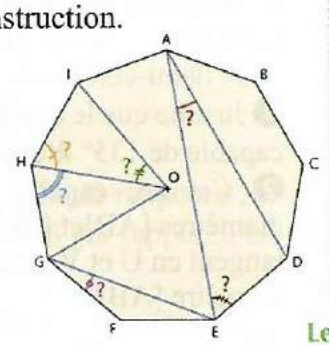


EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1

1. On considère un polygone régulier à n sommets.
   a. Détermine la somme des mesures de ses n angles au centre.
   b. Détermine la mesure de chacun de ces angles au centre.
2. Construis un octogone régulier de centre K. Donne un programme de construction.

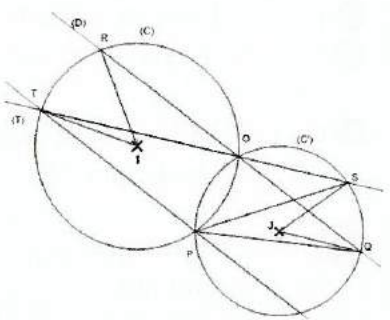
2 La figure ci-contre représente un polygone régulier à 9 côtés (ennéagone) de centre O. Détermine la mesure de ses angles au centre.



Détermine la mesure des angles marqués d'un point d'interrogation.

Détermine la mesure des angles de l'ennéagone régulier ABCDEFGHI.

3 Les cercles (C) et (C') de centre respectifs I et J son sécants en O et P. Les droites (D) et (L) passent par O. La droite (D) coupe (C) en R et (C') en Q ; la droite (L) coupe (C) en T et (C') en S.

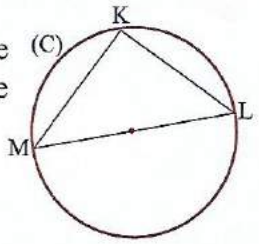


a) Exprime mes $\widehat{RIT}$ en fonction de mes $\widehat{ROT}$.

b) Exprime mes $\widehat{SJQ}$ en fonction de mes $\widehat{SOQ}$.

Déduis que : mes $\widehat{RIT}$ = mes $\widehat{SJQ}$.

4 KML est un triangle isocèle rectangle en K et (C) son cercle circonscrit.



On pose : ML = a.

1. Justifie que : KM = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
2. Exprime en fonction de a l'aire du triangle KML.

5 L'unité de longueur est le centimètre.
EFG est un triangle isocèle en E tel que :
FG = 21 et mes $\widehat{EFG}$ =50°.

1. Calcule EF.
2. Justifie que le périmètre du triangle EFG est d'environ 53,68 cm.
3. Calcule l'aire du triangle EFG.

6 Depuis sa pirogue, Moulo (M) détecte deux autres pirogues à proximité.

La première pirogue P_1 se trouve à 360 m, la seconde P_2 à 250 m, et l'angle entre les deux pirogues mesure 34°. De plus l'angle MP_1P_2 mesure 84°.

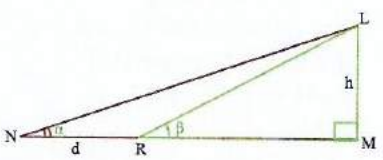
1. Fais une figure.
2. Détermine l'aire du triangle MP_1P_2.
3. Détermine l'arrondi, à l'unité près, de la distance qui sépare ces deux pirogues

(On n'arrondira pas les calculs intermédiaires).

7 L'unité de longueur est le centimètre.
MNP est un triangle tel que : MN = 7,
MP = 15, mes $\widehat{MPN}$ =27° et l'angle $\hat{N}$ est obtus.

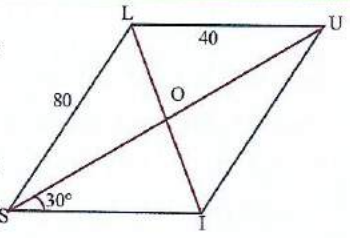
1. Justifie que l'arrondi au degré près de la mesure de l'angle $\hat{N}$ est égale à 103°.
2. Calcule l'aire du triangle MNP.
3. Calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle MNP.
4. On note I le centre du cercle circonscrit au triangle MNP. Calcule mes $\widehat{MIN}$.

8 Observe la figure codée ci-contre qui n'est pas en dimensions réelles.



On donne : d = 5 cm, α = 40° et β = 45°.
Calcule h.

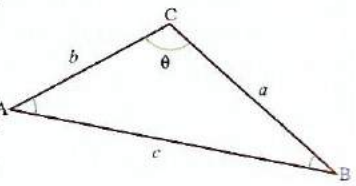
8 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous, LUIS est un parallélogramme de centre O tel que :



LU = 40 cm, LS = 80 cm, mes $\widehat{USI}$=30° et mes $\widehat{SOI}$ =70°.

1. Détermine SU.
2. Détermine LI.
3. Détermine le rayon du cercle circonscrit au triangle SOI.

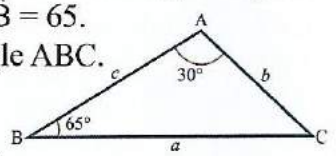
9 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure codée ci-dessous, ABC est un triangle tel que : BC = 5, AB = 8 et mes $\widehat{ABC}$ =50°.



On pose : a = BC, b = AC, c = AB, α = mes $\widehat{BAC}$, θ = mes $\widehat{BCA}$ et β = mes $\widehat{ABC}$.

1. En utilisant l'égalité $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, calcule l'arrondi d'ordre 1 de b.
2. a. Détermine sinα *(On donnera le résultat à 0,1 près).*
   b. Déduis la valeur de α puis détermine θ.
   (On donnera les arrondis d'ordre 0 des résultats).

10 L'unité de longueur est le centimètre. Sur la figure codée ci-dessous, ABC est un triangle tel que : a = 3, mes $\hat{A}$ = 30° et mes $\hat{B}$ = 65.
Soit P le périmètre du triangle ABC.

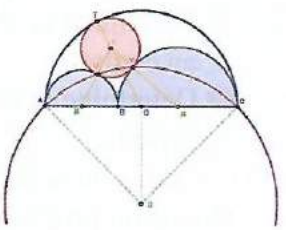


1. a. Justifie que :

$$P = a\left(1+\frac{\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}\right)$$

   b. Déduis-en l'arrondi d'ordre 1 de P.
2. a. Détermine l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.
   b. Déduis le rayon R du cercle circonscrit à ABC.

11 Sur la figure ci-contre, on a tracé trois demi-cercles formant la traditionnelle figure de l'arbelos.

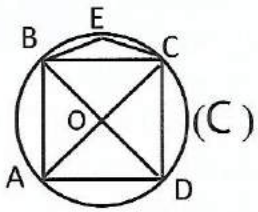


C'est à dire un demi-cercle de diamètre [AC], un point B quelconque sur le diamètre et deux demi-cercles de diamètres [AB]et [BC].

1. Justifie que le quart de cercle de corde [AC] est l'arc capable de 135° d'extrémités A et C.
2. Cet arc capable recoupe les deux cercles de diamètres [AB]et [BC] en U et V. Justifie que le cercle tangent en U et V à ces cercles est tangent au cercle de diamètre [AB].

12 Sur la figure ci-dessous :
- ABCD est un carré de centre O ;
- (C) est le cercle circonscrit au carré ABCD ;
- E est un point du cercle (C).

1. Justifie que la mesure de l'angle $\widehat{BEC}$ est 135°.
2. Cite deux angles inscrits supplémentaires à l'angle $\widehat{BEC}$.



13 Soit ABC un triangle de périmètre P et r le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.
Démontre que : $P = 2r(\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C})$.

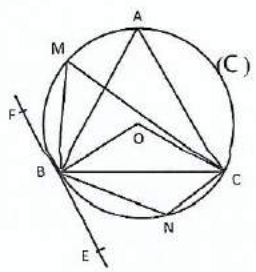
14 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous :
- (C) est le cercle de centre O et de rayon 2 ;
- ABC est un triangle équilatéral ;
- (EF) est la tangente à (C) au point B.

1. Détermine en dégrés

$mes\widehat{BMC}$, $mes\widehat{BOC}$, $mes\widehat{BNC}$, $mes\widehat{CBE}$ et $mes\widehat{CBF}$

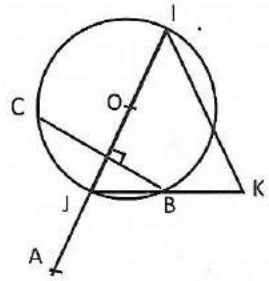
2. a) Calcule la distance AB.
   b) Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

On rapelle que : $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



15 Sur la figure ci-dessous :
- (C) est le cercle de centre O et de diamètre [IJ] ;
- le triangle IJK est équilatéral ;
- le cercle (C) coupe [JK] en B ;
- le point A est le symétrique de O par rapport à J ;
- le point C est le symétrique de B par rapport à la droite (IJ).

1. Démontre que B est le milieu de [JK].
2. Démontre que la droite (AB) est la tangente à (C) au point B.
3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
4. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{JBC}$.



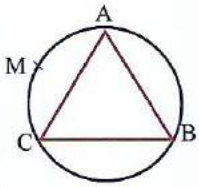
16 L'unité de longueur est le centimètre .
(C) est un cercle de rayon 3 et OPQ un triangle équilatéral inscrit dans le cercle (C).
1. Calcule le périmètre du triangle OPQ.
2. Calcule l'aire du triangle OPQ.

17 Un dodécagone est un polygone à 12 côtés.
1. Détermine la mesure des angles au centre d'un dodécagone régulier.
2. Construis un dodécagone régulier de centre O et de longueur de côté 3 cm.

18 ZUT est un triangle rectangle en Z tel que ZU = 1.
1. Calcule la valeur exacte de $\cos\widehat{ZUT}$ et $\sin\widehat{ZUT}$.
2. Déduis-en les valeurs de cos 45° et sin 45°.

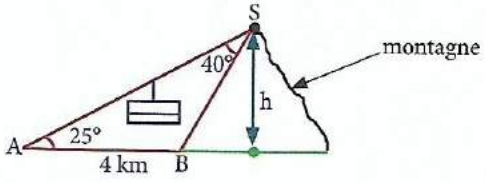
19 ABCDEFGH est un octogone inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ cm. I est le pied de la hauteur du triangle BOA issue de B.
1. Fais une figure.
2. Calcule la valeur exacte de OI.
3. Déduis-en la valeur exacte de AI.
4. Cacule la valeur exacte de IB.
5. Calcule l'aire de l'octogone ABCDEFGH.

20 La figure ci-contre est un cercle (C) circonscrit à un triangle ABC. M est un point de l'arc $\widehat{AC}$ distinct de A et C.
Démontre que la droite (MB) est bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.



SITUATIONS D'ÉVALUATION

1 Pendant les vacances, un touriste observe un téléphérique transportant des passagers d'un point A qui se trouve à 4 km d'un point B de la montagne à un point S au sommet de la montagne. Les angles d'élévation aux points A et S sont respectivement de 25° et 40° comme l'indique la figure ci-dessous :



Il désire connaître la distance entre A et S puis, la hauteur h de cette montagne.

1. Justifie que 5,6 km est l'arrondi d'ordre 1 de AS.
2. Justifie que 2,6 km est l'arrondi d'ordre 1 de BS.
3. Déduis la hauteur de cette montagne.

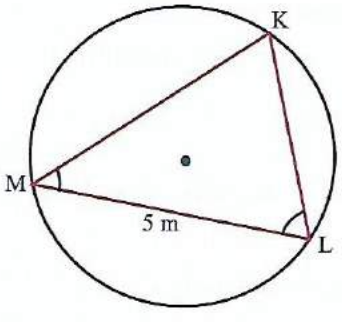
2 YVAN dispose d'une parcelle circulaire sur laquelle il crée un jardin potager triangulaire comme indiqué sur la figure ci-dessous. Il désire clôturer ce jardin avec du grillage et planter du gazon sur les parties restantes de la parcelle.

YVAN dispose de 15 000 francs CFA.

Sachant que le mètre du grillage coûte 500 francs CFA et le mètre carré de gazon

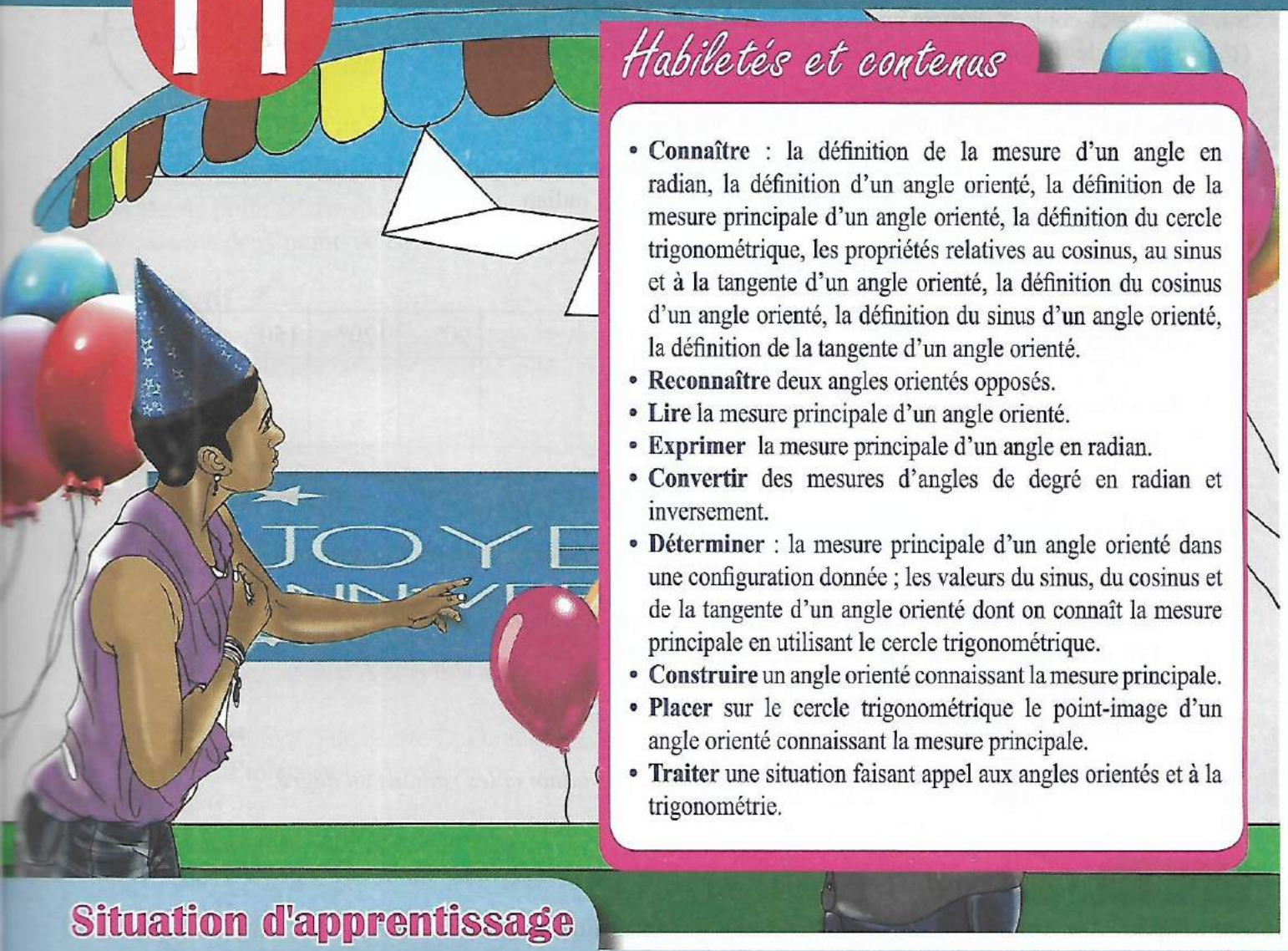
800 francs CFA, il sollicite ton aide pour savoir s'il pourra effectuer les travaux.

1. Détermine le périmètre du jardin puis la surface de ce jardin.
2. Détermine la surface à gazonner.
   a. Calcule le coût des travaux.
   b. Dis si YVAN pourra les réaliser. Justifie ta réponse.



Leçon 11

ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

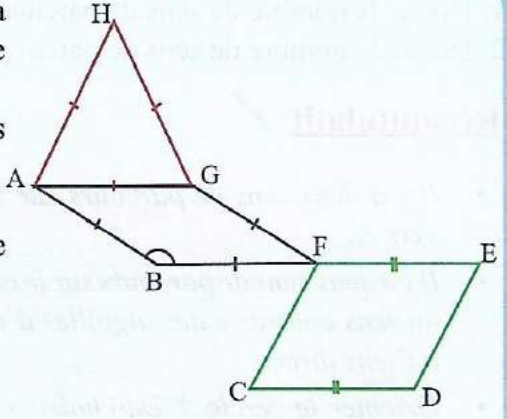


Habiletés et contenus

- **Connaître** : la définition de la mesure d'un angle en radian, la définition d'un angle orienté, la définition de la mesure principale d'un angle orienté, la définition du cercle trigonométrique, les propriétés relatives au cosinus, au sinus et à la tangente d'un angle orienté, la définition du cosinus d'un angle orienté, la définition du sinus d'un angle orienté, la définition de la tangente d'un angle orienté.
- **Reconnaître** deux angles orientés opposés.
- **Lire** la mesure principale d'un angle orienté.
- **Exprimer** la mesure principale d'un angle en radian.
- **Convertir** des mesures d'angles de degré en radian et inversement.
- **Déterminer** : la mesure principale d'un angle orienté dans une configuration donnée ; les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle orienté dont on connaît la mesure principale en utilisant le cercle trigonométrique.
- **Construire** un angle orienté connaissant la mesure principale.
- **Placer** sur le cercle trigonométrique le point-image d'un angle orienté connaissant la mesure principale.
- **Traiter** une situation faisant appel aux angles orientés et à la trigonométrie.

Situation d'apprentissage

En prélude à la fête d'anniversaire de ton frère aîné, tu participes à la décoration. Tu découpes une feuille cartonnée à l'aide d'une paire de ciseaux. Tu obtiens la figure codée ci-contre.



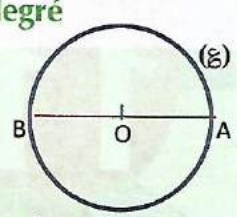
Après observation de la figure, ton frère aîné te donne les informations suivantes :

- AGH est un triangle équilatéral de sens direct ;
- ABFG et CDEF sont des parallélogrammes de sens directs tels que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}\right)$ est égale à $\frac{5\pi}{6}$;
- L'angle orienté $\left(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FC}\right)$ est un angle droit positif.

Il affirme que le sinus de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DE}\right)$ est nul.

Stupéfait, tu décides de vérifier cette affirmation en faisant des recherches sur les angles orientés et la trigonométrie.

Activité 1 Radian – Mesure en radian et mesure en degré



L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en grandeur réelle,
$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que le rayon OA est égal à 1.

1. a) Reproduis cette figure sur ton cahier.

   b) Place un point K sur le cercle $(\mathcal{C})$ tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AK}$ soit égale au rayon de ce cercle.

2. Détermine la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, demi-périmètre du cercle $(\mathcal{C})$, puis la longueur du quart de cercle $(\mathcal{C})$.

3. a) Soit b la mesure d'un angle en degrés et c sa mesure en radian.
   Exprime c en fonction de b.

   b) Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Mesures en degré	0°	15°		45°		90°	120°	150°	
Mesures en radian			$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$					π

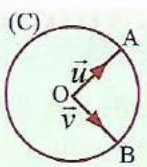
Récapitulatif

- *(C) est un cercle de centre O et $A \in (C)$.*
  - *La mesure en radian d'un angle $\widehat{AOK}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1.*
  - *On a mes $\widehat{AOK}$ = 1 radian = 1 rad.*
  - *L'angle plat mesure π radian.*
- *La relation $C = \frac{\pi}{180}b$ permet de convertir les degrés en radian et les radians en degré.*



Activité 2 Orientation du plan

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C). $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs respectivement colinéaires à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.



1. Donne le nombre de sens de parcours sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle (C).
2. Donne le nombre de sens de parcours sur le cercle (C).

Récapitulatif

- *Il y a deux sens de parcours sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle (C) : celui de A vers B et celui de B vers A.*
- *Il y a deux sens de parcours sur le cercle (C) : celui du sens des aiguilles d'une montre et celui du sens contraire des aiguilles d'une montre. Ce dernier est appelé sens trigonométrique ou sens direct.*
- *Orienter le cercle, c'est choisir un sens de parcours. Habituellement ce sens est le sens trigonométrique.*
- *Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct*
- *Orienter le plan, c'est choisir tous les cercles qui ont le même sens.*



Activité 3 Angle orienté de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

1. a) Place un point O dans le plan.
   b) Construis deux points A et B tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.
   c) Trace un cercle (C) de centre O. On note M et N les points d'intersection respectifs de [OA) et [OB) avec (C).
2. a) Place un point O' dans le plan.
   b) Construis deux points A' et B' tels que : $\overrightarrow{O'A'}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{O'B'}=\vec{v}$.
   c) Trace un cercle (C') de centre O'. On note M' et N' les points d'intersection respectifs de [O'A') et [O'B') avec (C').
3. a) Justifie que les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{M'N'}$ ont la même longueur.
   b) Compare le sens de parcours de M vers N et de M' vers N' sur les cercles (C) et (C').

Récapitulatif

Les sens de parcours de M vers N est le même quelque soit le cercle. De plus les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{M'N'}$ ont la même longueur.

On définit l'angle orienté de vecteur $(\vec{u}\ ;\vec{v})$ comme étant l'ensemble des couples $(\vec{u}\ ;\vec{v})$ pour lesquels l'arc $\overset{\frown}{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens.

Activité 4 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

1. a) Place un point O dans le plan.
   b) Construis deux points A et B tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.
   c) Trace un cercle (C) de centre O. On note M et N les points d'intersection respectifs de [OA) et [OB) avec (C).
2. On pose : $mes\,\widehat{AOB}=\theta°$ $(0<\theta<180)$.

On suppose que l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est parcouru dans le sens direct.
On veut définir la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}\ ;\vec{v})$ en fonction de la mesure θ de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.
Propose une définition.

Récapitulatif

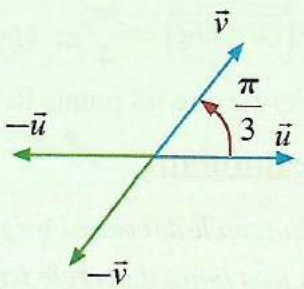
La mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\ ;\vec{v})$ est defini par :

- Mes $(\vec{u}\ ;\vec{v})=mes\,\widehat{AOB}$ si l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est parcouru dans le sens direct ;
- Mes $(\vec{u}\ ;\vec{v})=-mes\,\widehat{AOB}$ si l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est parcouru dans le sens indirect ;

Activité 5 Angles orientés égaux, angles orientés opposés

On donne la figure codée ci-contre.

1. Détermine la mesure en radian des angles orientés suivants :
Mes $(\vec{u},\vec{v})$; Mes$(\vec{v},\vec{u})$; Mes $(\vec{u},-\vec{v})$; Mes $(-\vec{u},-\vec{v})$; Mes $(-\vec{u},\vec{u})$; Mes $(\vec{u},-\vec{u})$ et Mes $(\vec{u},\vec{u})$.
2. Déduis en une relation entre
   a) $(-\vec{u},-\vec{v})$ et $(\vec{u},\vec{v})$ b) $(-\vec{u},\vec{u})$ et $(\vec{u},-\vec{u})$ c) $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{v},\vec{u})$
   d) $(\vec{u},-\vec{v})$ et $(\vec{v},-\vec{u})$
3. Justifie que les angles orientés $(\vec{u},-\vec{v})$ et $(-\vec{u},\vec{v})$ sont égaux.





Récapitulatif

- Des angles orientés sont égaux si et seulement si leurs mesures principales sont égales.

- Des angles orientés sont opposés si et seulement si leurs mesures principales sont opposées.

Activité 6 Angles orientés et transformations du plan

Soit O, M et N trois points non alignés du plan ; (*On fera trois figures différentes*).

1. Soit un vecteur quelconque et *t* la translation de vecteur . On désigne par O', M' et N' les images respectives des points O, M et N par *t*.
   a) Construis les points O', M' et N'.
   b) Exprime la mesure de l'angle $(\overrightarrow{O'M'} ; \overrightarrow{O'N'})$ en fonction de celle de l'angle $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON})$.
   c) Conclus.
2. Soit *s* la symétrie de centre O. On désigne par O', M' et N' les images respectives des points O, M et N par s.
   a) Construis les points O', M' et N'.
   b) Exprime la mesure de l'angle $(\overrightarrow{O'M'} ; \overrightarrow{O'N'})$ en fonction de celle de l'angle $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON})$.
   c) Conclus.
3. Soit *f* la symétrie orthogonale d'axe .On désigne par O', M' et N' les images respectives des points O, M et N par *f*.
   a) Construis les points O', M' et N'.
   b) Exprime la mesure de l'angle $(\overrightarrow{O'M'} ; \overrightarrow{O'N'})$ en fonction de celle de l'angle $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON})$.
   c) Conclus.

Récapitulatif

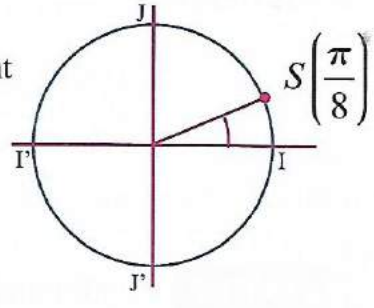
-Les translations et les symétries centrales conservent les mesures des angles orientés.

- Les symétries orthogonales transforment les mesures des angles orientés en leurs opposés.



Activité 7 Cercle trigonométrique et point- image

Le repère (O, I, J) est orthonormé direct.
Sur la figure ci-contre, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1.
Les points I et I' d'une part et les points J et J' d'autre part sont diamétralement opposés.



1. Place trois points N, P et Q appartenant à (C).
2. a) Donne une mesure à un degré prés de $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{ON})$, $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OP})$, $(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OQ})$.
   b) Convertis les mesures principales des angles orientés ci-dessus en radians.
   c) Vérifie que ces mesures appartiennent à $]-\pi; \pi]$.
3. a) Construis trois points R, S et T tels que : $Mes(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OS}) = \frac{\pi}{8}$; $Mes(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OR}) = \frac{3\pi}{4}$ et $Mes(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OT}) = -\frac{\pi}{4}$.

b) Vérifie que les points R, S et T sont uniques.

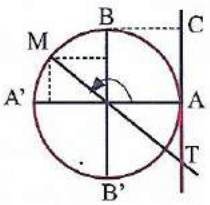
Récapitulatif

- Tout cercle de centre l'origine d'un repère orthonormé direct et de rayon l'unité est appelé cercle trigonométrique.

- A tout point du cercle trigonométrique, on associe un réel de $]-\pi; \pi]$. Réciproquement à tout nombre réel de $]-\pi; \pi]$, on associe un point- image du cercle trigonométrique.

Activité 8 Cosinus, sinus, tangente d'un angle orienté

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O et de rayon 1.
M est un point de l'arc $\overset{\frown}{BA}$, P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (AA') et (BB'). Le point M a pour coordonnées(x_M, y_M) dans le repère orthonormé $(O ; \vec{OA}, \vec{OB})$.



1. a) Calcule $\vec{OA}.\vec{OM}$ en utilisant la définition du produit scalaire.
   b) Calcule $\vec{OA}.\vec{OM}$ en utilisant l'interprétation géométrique du produit scalaire.
   c) Calcule $\vec{OA}.\vec{OM}$ en utilisant l'expression du produit scalaire dans le repère $(O ; \vec{OA},\vec{OB})$.
   d) Déduis des questions précédentes que : $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = \overline{OH} = x_M$.
2. a) Justifie que l'aire, A du triangle AOM est : $\frac{1}{2}MH$.
   b) Exprime A en fonction de $sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$
   c) Déduis des questions 2a) et 2b) que : $sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = \overline{OK} = y_M$.
3. a) Exprime $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ en fonction de $\overline{HM}$ et $\overline{OH}$.
   b) En appliquant la propriété de Thalès au triangle MOH, démontre que : $\tan(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = \overline{AT}$.

Récapitulatif

- Le cosinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ est l'abscisse de M dans le repère orthonormé $(O;\vec{OA},\vec{OB})$.

- Le sinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ est l'abscisse de M dans le repère orthonormé $(O;\vec{OA},\vec{OB})$

- La tangente de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ est le rapport, quand il existe, de $sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ à $cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.



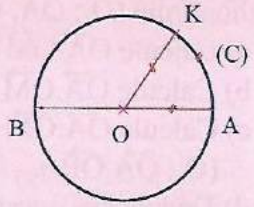
I LE RADIAN

Définition

Une mesure en radians d'un angle est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle de rayon 1.

(C) est un cercle de centre O et A un point de (C).

Lorsque K ∈ (C) et l'angle au centre $\widehat{AOK}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AK}$ de longueur égale à OA, on dit que la mesure de l'angle $\widehat{AOK}$ est égale à 1 radian.



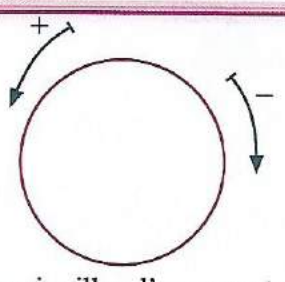
Notation

Le radian est noté rad.

Remarque

- La longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure θ radians sur un cercle de rayon R est Rθ .
- L'angle plat mesure π radian.
- La longueur d'un cercle de rayon R est 2πR .
- Soit b la mesure d'un angle en degrés et c sa mesure en radians ; on a : $c = \frac{\pi}{180} b$.

II ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS



a) Orientation du plan

• **Orienter un cercle**, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle.
Il y'a deux orientations possibles : positive (directe) ou négative (indirecte).

• **Le sens direct** est le sens inverse des aiguilles d'une montre et le **sens indirect**, celui des aiguilles d'une montre.

• **Orienter le plan**, c'est orienter tous les cercles dans le même sens.

• **Un triangle ABC** est de sens direct si le cercle circonscrit au triangle ABC est parcouru dans le sens direct de A vers B.

• **Un carré ABCD** est de sens direct si le cercle circonscrit au carré ABCD est parcouru dans le sens direct de A vers B.

b) Angles orientés de deux vecteurs non nuls

Définitions

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

• Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ est appelé angle orienté nul.

• Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires alors l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ est appelé angle orienté plat.

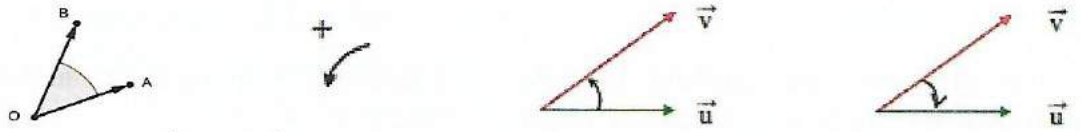
• Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont non colinéaires, on définit l'angle orienté de vecteur $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ comme suit :

O est point du plan , A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, (C) est un cercle de centre O et M, N les points d'intersection respectifs de [OA) et [OB) avec (C).

l'angle orienté de vecteur $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ est l'ensemble des couples $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ pour lesquels l'arc $\overset{\frown}{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens M vers N.

Si les deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ est appelé angle orienté droit positif si $\overset{\frown}{MN}$ est parcouru dans le sens positif et angle orienté droit négatif sinon.

Remarque



- Les deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA}$ sont des angles géométriques de même mesure, toujours positive.
- Mes $(\vec{u}, \vec{v}) = -$ Mes $(\vec{v}, \vec{u})$ si $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas plat.

c) Mesure principale d'un angle orienté

Définitions

Soit $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ un angle orienté.

Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec un cercle de centre O.

La mesure principale en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, notée Mes$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, est définie par :

- Mes $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 0$ si $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ est l'angle nul ;
- Mes $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \pi$ si $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ est l'angle plat ;
- Mes $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = mes\,\widehat{AOB}$ si $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ n'est pas ni l'angle nul ni l'angle plat et le sens du déplacement de M vers N sur le petit arc $\overset{\frown}{MN}$ est le sens direct ;
- Mes $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = -mes\,\widehat{AOB}$ si $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ n'est ni l'angle nul ni l'angle plat et le sens du déplacement de M et N sur le petit arc $\overset{\frown}{MN}$ est le sens indirect.

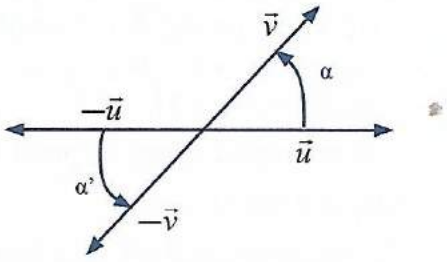
d) Angles orientés égaux, angles orientés opposés

- Les angles orientés $(-\vec{u}, -\vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ sont égaux.

De même que les angles orientés $(-\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, -\vec{v})$

- Les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u})$ sont opposés.

De même que les angles orientés $(-\vec{u}, \vec{v})$ et $(-\vec{v}, \vec{u})$.



Remarque

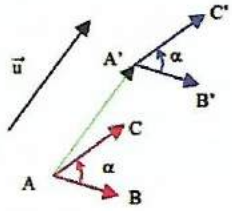
- Etant donné l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$; on a : $(-\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{u}, -\vec{u})$ = angle orienté plat et $(\vec{u}, \vec{u})$ = angle orienté nul.
- Des angles orientés sont égaux si et seulement si leurs mesures principales sont égales.

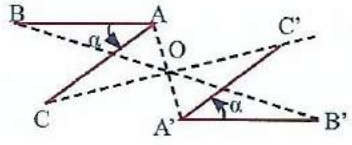
e) Angles orientés et transformations du plan

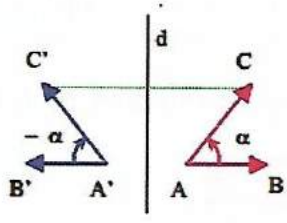
Propriété

Une translation et une symétrie centrale transforment un angle orienté en un angle orienté égal.

Une symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.







$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont égaux.

$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont opposés.

III TRIGONOMÉTRIE

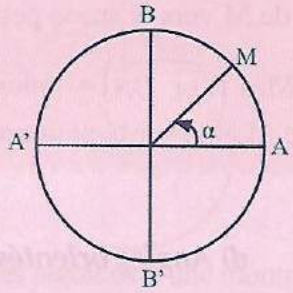
a) Cercle trigonométrique et point-image

Définition

On considère un repère orthonormé direct (O, A, B).

On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1.

On considère le cercle trigonométrique ci-contre :



- A tout point M sur le cercle trigonométrique, on associe le nombre réel, mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM})$.
- Réciproquement, à tout nombre réel α de l'intervalle$]-\pi; \pi]$ est associé le point M du cercle trigonométrique tel que α soit la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM})$.
- M est appelé image ou point image de α sur le cercle trigonométrique.

On note M (α) .

A est l'image de 0 , A' est l'image de π , B est l'image de $\frac{\pi}{2}$, B' est l'image de $-\frac{\pi}{2}$.

On note : A(0), A' (π), B $(\frac{\pi}{2})$ et B'$(-\frac{\pi}{2})$.

b) Cosinus et sinus d'un angle orienté

(Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère le cercle trigonométrique de centre O)

Résumé de la leçon

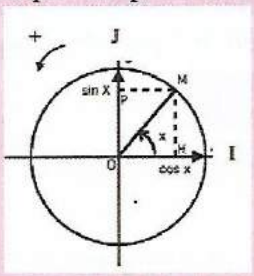
Définition

• Pour tout nombre réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.

- L'abscisse du point M est le cosinus de x, noté *cos x*
- L'ordonnée du point M est le sinus de x, noté *sin x*

• Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté. Soit x la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$.

On a : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos x$ et $\sin(\vec{u};\vec{v}) = \sin x$.



Propriété

Pour tout nombre réel x, on a :

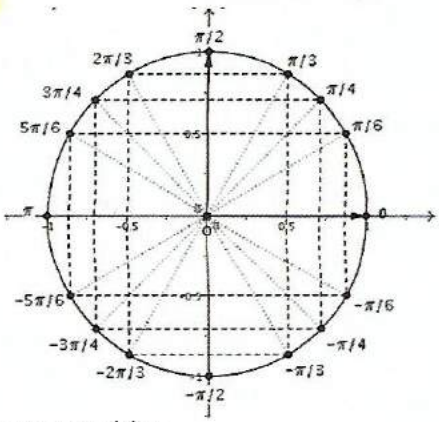
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.



Valeurs remarquables

• On a :

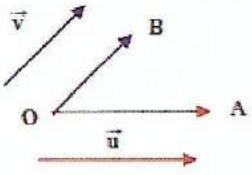
Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

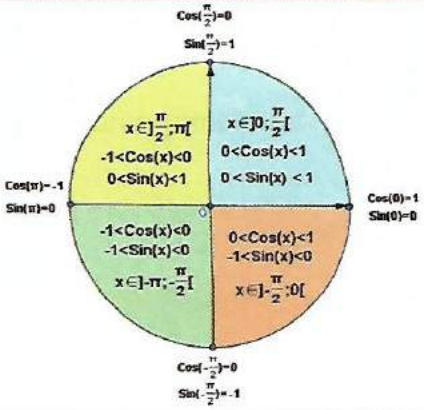


• La figure ci-contre permet d'en déduire d'autres valeurs des angles remarquables.

Remarque

• $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $\sin(\widehat{AOB}) = |\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$





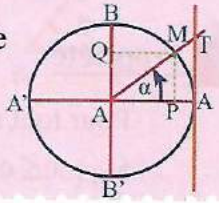
c) Tangente d'un angle orienté

(Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.
On considère le cercle trigonométrique de centre O)

Définition

• Soit un angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ non droit. Soit x la mesure principale de $(\vec{u}; \vec{v})$ tel que : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2}$. La tangente de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou la tangente de x est définie par : $\tan(\vec{u}; \vec{v}) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

• Pour tout angle orienté non droit de mesure principale α et M l'image de α sur le cercle trigonométrique. On a : $\tan(\widehat{OA,OM}) = \tan\alpha = \overline{AT}$



Propriété

Soit x la mesure d'un angle orienté tel que : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2}$. On a :

• $\tan(-x) = -\tan x$

• $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.



EXERCICES DE FIXATION

Radian – longueur d'un arc

1 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par V si l'affirmation est vraie et par F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Sur un cercle de rayon R, un angle de mesure α radians intercepte arc de longueur $l = R\alpha$
2	La longueur d'un cercle de rayon 1 est 2π
3	Le radian est une unité de longueur.
4	Un angle droit mesure π rad .

2

1. Détermine la mesure en radians de chacun des angles ci-dessous :

a) 60° b) −30° c) 80° d) −135° e) −120°

2. Détermine la mesure en degrés de chacun des angles ci-dessous :

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $-\frac{5\pi}{6}$ d) $1{,}5\pi$ e) $-\frac{\pi}{2}$

Angle orientés de deux vecteurs

3 Le plan est orienté.

Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes.

N°	Affirmations
1	Il existe deux angles orientés droits : l'un positif et l'autre négatif.
2	Si la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est différente de celle de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$, alors ces angles ne sont pas égaux.
3	Si la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est égale à celle de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$, alors ces angles sont égaux.
4	Si la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est $\frac{\pi}{8}$ alors l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ mesure $\frac{\pi}{8}$.

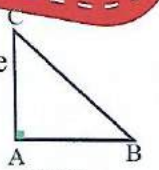
4 Soit un carré ABCD de centre I tel que :

$$Mes\left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{IB}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Détermine une mesure de chacun des angles orientés suivants :

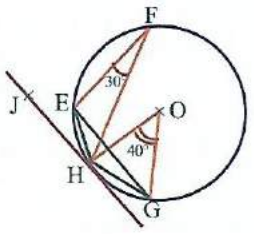
$\left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{ID}\right)$; $\left(\overrightarrow{IB}\,;\,\overrightarrow{ID}\right)$; $\left(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)$; $\left(\overrightarrow{BI}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{DB}\,;\,\overrightarrow{DC}\right)$

5 ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A.



1. Détermine les mesures suivantes :
Mes $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$, Mes $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ et Mes $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
2. Calcule : Mes$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ + Mes $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$.

6 Sur la figure ci-contre, les points E, F, G et H appartiennent au cercle (C) de centre O. (JK) est la tangente à (C) au point H.



Coche la bonne réponse.

a) L'angle $\left(\overrightarrow{HE}\,;\,\overrightarrow{HJ}\right)$ mesure :

☐ 30° ☐ 40° ☐ 15° ☐ 20°

b) L'angle $\left(\overrightarrow{HG}\,;\,\overrightarrow{HK}\right)$ mesure :

☐ −30° ☐ −40° ☐ −15° ☐ −20°

c) L'angle $\left(\overrightarrow{HK}\,;\,\overrightarrow{HE}\right)$ mesure :

☐ 140° ☐ 150° ☐ 165° ☐ 160°

Mesure principale

7 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes

N°	Affirmations
1	La mesure principale d'un angle orienté est toujours positive
2	Un angle orienté admet plusieurs mesures principales
3	La mesure principale d'un angle orienté est un nombre de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$
4	La mesure principale d'un angle plat est $-\pi$

8 Détermine les mesures principales parmi les mesures suivantes :

−180° ; π rad ; 35° ; 2π ; $-\pi$; 360° ; 175° ; −1,5 rad ; 90° ; 2,3rad

9 ABCD est un losange de sens direct tel que BD = AD et I est le milieu de [AB].

On note O le centre de ce losange.

a Détermine la mesure principale en radian des angles orientés suivants: $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AD}\right)$

b Justifie que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BO}\right)$ est $-\frac{2\pi}{3}$

Angles orientés égaux – angles orientés opposés

10 ABCD est un carré de sens direct. Choisis la bonne réponse parmi les réponses suivantes :

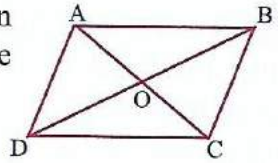
1 La mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$ est égale à la mesure de l'angle orienté :

a $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ b $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right)$ c $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ d $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BA}\right)$

2 La mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$ est l'opposé de la mesure de l'angle orienté :

a $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ b $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right)$ c $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ d $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BA}\right)$

11 La figure ci-contre est un parallélogramme ABCD de centre O.



Détermine :

a deux angles orientés égaux.

b deux angles orientés opposés.

c deux angles orientés plats.

d deux angles orientés nuls.

12 On considère un triangle ABC de sens direct isocèle en A. On note I le milieu de [BC] .

a Cite des angles orientés égaux à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$

b Cite des angles orientés opposés à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$.

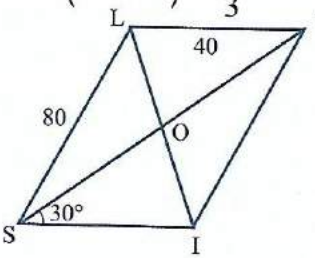
Angles orientés et transformations du plan

13 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations
1	Dans une symétrie centrale, un angle orienté se transforme en un angle orienté opposé
2	Les translations conservent les mesures et l'orientation des angles
3	Dans une symétrie orthogonale, un angle orienté se transforme en un angle orienté opposé

14 Sur la figure ci-contre, LUIS est un parallélogramme de centre O tel que :

$Mes\left(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{SU}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $Mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OS}\right) = -\frac{7\pi}{18}$



En utilisant une transformation du plan, justifie que :

a $Mes\left(\overrightarrow{UL}, \overrightarrow{UL}\right) = \frac{\pi}{3}$ b $Mes\left(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OL}\right) = \frac{7\pi}{18}$

Cercle trigonométrique – points images

15 Dessine le cercle trigonométrique sur la figure codée qui convient.

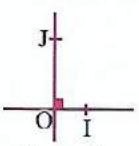


Figure 1

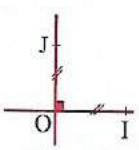


Figure 2

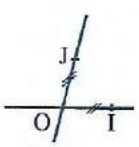


Figure 3

16 Dessine le cercle trigonométrique et place les points images des nombres réels suivants :

$\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{5}$.

Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

17 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

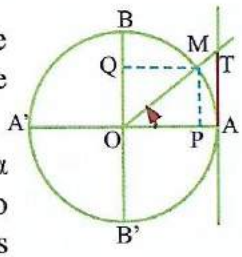
N°	Affirmations
1	Si cos $a = 0,6$ alors sin $a=0,4$.
2	Si cos $x = 1$, alors cos$3x=3$
3	Si deux angles orientés sont opposés, alors leurs sinus et leurs cosinus sont opposés.
4	Si deux angles orientés sont supplémentaires, alors leurs sinus sont opposés.
5	Si deux angles orientés sont opposés, alors leurs tangentes sont opposées
6	Si deux angles orientés ont la même tangente, alors ils sont égaux ou supplémentaires.

18 Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ est :
   (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) π
2. La valeur exacte de $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ est :
   (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 0
3. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right)$ est :
   (a) 1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. La valeur exacte de $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ est :
   (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. La valeur exacte de $\sin(1021\pi)$ est :
   (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) π
6. La valeur exacte de $\tan(1021\,\pi)$ est :
   (a) 1 (b) -1 (c) -1 (d) 0
7. La valeur exacte de $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est :
   (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19 Compare : $\cos\frac{3\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$.

20 Soit le cercle trigonométrique de centre O et M le point image de α.



On pose : $\overline{OP} = \cos\alpha$, $\overline{OQ} = \sin\alpha$ et $\overline{AT} = \tan\alpha$. Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations
1	On a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
2	On a : $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$
3	On a : $\lvert\sin\alpha\rvert \leq 1$
4	On a : T(1 ; $\tan\alpha$)
5	$\tan\alpha < 0$

21 a est un nombre réel tel que : $\sin a = \frac{4}{4}$
Détermine la valeur exacte de cosα dans chacun des cas suivants : (a) $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2} \leq a \leq \pi$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 Recopie et complète le tableau suivant :

Degrés	60	75	135			
Radians				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$	2

2 Soit un carré ABCD de centre I tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}\right) = \frac{\pi}{2}$

❶ Justifie que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CI}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

❷ Détermine une mesure de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{CI}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BI}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}}\right)$.

3 Détermine la mesure principale des angles ci-dessous, puis place-les sur le cercle trigonométrique.

ⓐ $\frac{29\pi}{4}$ ⓑ $-\frac{37x}{8}$ ⓒ $-\frac{41x}{6}$ ⓓ $-\frac{20x}{3}$

4 Dans chacun des cas suivants, place un angle θ sur le cercle trigonométrique, puis donne les signes de cos θ, sin θ et tan θ.

1er cas : $\theta \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$; 2ème cas : $\theta \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$;

3ème cas : $\theta \in \left]-\pi ; \frac{-\pi}{2}\right[$; 4ème cas : $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2} ; 0\right[$.

5 Complète les pointillés avec : cos$x$, sin$x$, −cos$x$ ou −sin$x$.

$\cos(-x) = \ldots$; $\cos(\pi - x) = \ldots$; $\cos(\pi + x) = \ldots$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ldots$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \ldots$;

$\sin(-x) = \ldots$; $\sin(\pi - x) = \ldots$; $\sin(\pi + x) = \ldots$;

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ldots$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \ldots$;

6

❶ Soit x un nombre réel, Justifie que :

$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$ est un entier naturel.

❷ Soit $x \in]-\pi ; \pi]$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2}$,

justifie que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

7 a est un nombre réel tel que :

$\cos a = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.

❶ Détermine la valeur exacte de sin$a$

❷ A l'aide d'une calculatrice, donne la valeur arrondie à 10^{-2} radian près de a.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.



❶ ⓐ Détermine la mesure principale des angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OG}}\right)$.

ⓑ Justifie que : Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{GB}; \overrightarrow{GC}}\right) = \frac{\pi}{8}$.

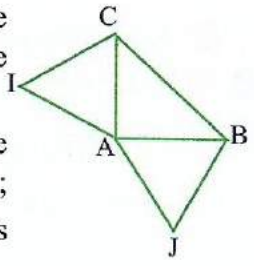
❷ Détermine la mesure principale des angles orientés suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AH}}\right)$

2 ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A tel que : AC = 5 et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}}\right) = \frac{2\pi}{5}$.

❶ Construis le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.

❷ Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{EC}; \overrightarrow{BC}}\right)$.

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Sur la figure ci-dessous :



- ABC est un triangle rectangle isocèle en A et de sens direct ;
- AIC et BJA sont deux triangles équilatéraux indirects.

1 a Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI})$.

b Déduis-en la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AI})$.

c Détermine la nature du triangle AIJ. Déduis-en la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{JI};\overrightarrow{JA})$.

2 a Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{JA};\overrightarrow{JB})$; $(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$.

b Déduis-en la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC})$.

3 a Déduis des consignes 1 b et 2 b la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{JI};\overrightarrow{BC})$.

b Justifie que les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

(On admettra dans tout l'exercice que : $(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MQ})=(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ})$*).*

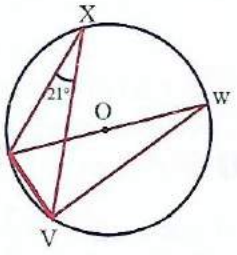
4 E et F sont deux points distincts du plan. Détermine et représente l'ensemble des points M du plan tels que :

1 Mes $(\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MF})=0$.

2 Mes $(\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MF})=\pi$.

3 Mes $(\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MF})=-\frac{\pi}{2}$.

5 On considère la figure ci-contre.



U, V, W et X sont quatre points du cercle (C) de centre O tel que [U, W] soit un diamètre.

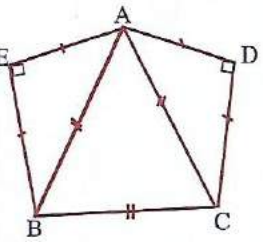
1 Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés ci-dessous :

$(\overrightarrow{WU};\overrightarrow{WV})$, $(\overrightarrow{UW};\overrightarrow{UV})$ et $(\overrightarrow{VU};\overrightarrow{VW})$.

2 Calcule :

$Mes(\overrightarrow{WU},\overrightarrow{WV})+Mes(\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW})$ et $Mes(\overrightarrow{VU},\overrightarrow{VW})$

6 Sur la figure ci-contre, ABCE est un triangle équilatéral ;



ADC et AEB sont des triangles rectangles isocèles.

1 Détermine la mesure principale, en radian, des angles orientés ci-dessous :

a $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ b $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$ c $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA})$

d $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$ e $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ f $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE})$

2 a Donne trois angles orientés égaux à l'angle $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$.

b Donne trois angles orientés opposés à l'angle $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA})$.

7 ABC est un triangle équilatéral de sens direct. D est le symétrique de A par rapport à B.

1 Détermine la mesure principale en radian des angles orientés suivants :

$|\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}|$; $|\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}|$ et $|\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}|$

2 Démontre que le triangle ACD est rectangle.

8

1 Sur la figure ci-contre, (C) est le cercle trigonométrique et A, B, C, ...et S sont des points remarquables de (C).

Dans chacun des cas ci-dessous, cite les points M du cercle (C) sachant que :

a $\sin x=0$; b $\cos x=-1$; c $\sin x=1$

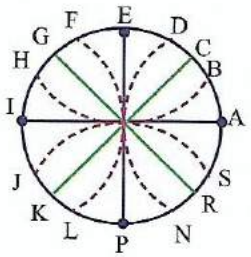
d $|\cos x|=\frac{\sqrt{2}}{2}$; e $\sin^2 x=\frac{3}{4}$;

f $\cos^2 x-\frac{1}{4}=0$; g $\sin x=\cos x$.

2 Dans chacun des cas ci-dessous, reproduis le cercle (C), puis colorie sur ce cercle le lieu des points M tel que la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ appartienne à l'intervalle donné :

ⓐ $\left]-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{4}\right[$; ⓑ $\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

ⓒ $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right[$; ⓓ $\left[-\frac{7\pi}{6};-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$



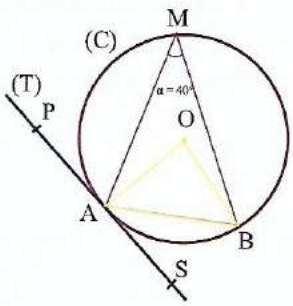
9 (C) est un cercle de centre O. [AB] est une corde de (C),

(T) est la tangente à (C) en A. P et S sont des points de (T).

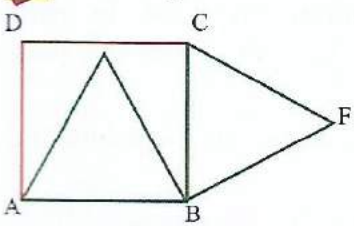
M est un point de (C) tel que Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = 40°$.

❶ Détermine, en radians, Mes $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$.

❷ Détermine, en radians, Mes $(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AB}})$.



10 Sur la figure ci-dessous :



- ABCD est un carré de sens direct ;
- AEB et BCF sont des triangles équilatéraux.

❶ Détermine la nature de chacun des triangles ADE et EBF.

❷ Démontre que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}}) = \frac{5\pi}{12}$.

❸ ⓐ Détermine une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BF}})$.

ⓑ Déduis une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EF}})$.

❹ ⓐ Détermine une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}})$.

ⓑ Conclus quant à la position des points D, E et F.

11 x est un nombre réel tel que : $x\in\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ et M est le point image de x.

❶ Place le point M sur le cercle trigonométrique tel que : $\cos x = -\frac{3}{4}$.

❷ ⓐ Calcule $\sin x$.

ⓑ Déduis-en $\sin(-x)$.

❸ Calcule $\tan x$, puis $\tan(-x)$.

12 x est un nombre réel tel que : $x\in[-\pi;0]$ et $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

❶ Détermine la valeur exacte de $\sin x$

❷ Sachant que x est l'un des réels de l'ensemble $\left\{-\frac{4\pi}{5};-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right\}$, détermine x.

Justifie ta réponse.

13 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) direct.

❶ ⓐ Construis le cercle trigonométrique de centre O, puis place le point A associé à la valeur $\frac{\pi}{6}$.

ⓑ Place les points B, C et D associés aux valeurs $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{6}$, et $-\frac{\pi}{6}$.

❷ ⓐ Rappelle le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{6}$

ⓑ Déduis les cosinus, sinus et tangentes de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

14 x est un nombre réel tel que : $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et M est le point du cercle trigonométrique associé à x.

❶ ⓐ Place le point M sur le cercle trigonométrique tel que : $\sin x = \frac{2}{5}$.

ⓑ Place les points N, P, Q et T associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{2}-x$, $\frac{\pi}{2}+x$, $\pi-x$ et $\pi+x$.

❷ Calcule cos x

❸ Détermine les valeurs exactes de : $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$; $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$; $\cos(\pi-x)$; $\sin(\pi-x)$ et $\sin(\pi+x)$.

❹ Calcule, pour tout réel x différent de 0, $\tan(\frac{\pi}{2}-x)$ et $\tan(\pi-x)$.

15 On pose : $\cos\frac{\pi}{5}=m$ où $m\in]-1;1[$.

❶ ⓐ Calcule, en fonction de m, $\sin\frac{\pi}{5}$.

ⓑ En remarquant que : $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$, place sur le cercle trigonométrique les points M et N images respectives de $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$.

❷ Déduis en fonction de m, les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{4\pi}{5}$.

❸ ⓐ En remarquant que : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{7\pi}{10}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}$, place sur le cercle trigonométrique les points P et Q, images respectives de $\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{7\pi}{10}$.

ⓑ Justifie que : $\cos\frac{3\pi}{10}=\sqrt{1-m^2}$.

ⓒ Détermine : $\sin\frac{7\pi}{10}$.

16 Démontre que pour tout nombre x :

ⓐ $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$

ⓑ $\sin^4x-\cos^4x=\sin^2x-\cos^2x$

ⓒ $(\sin x\cos x)^2=\frac{1}{2}(1-\sin^4x-\cos^4x)$

ⓓ $\cos x-\sin(x+\frac{\pi}{2})+\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$

17 On pose :

$A=\cos^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{5\pi}{12}+\cos^2\frac{7\pi}{12}+\cos^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{11\pi}{12}$

❶ Exprime en fonction de $\frac{\pi}{2}$ chacun des nombres suivants : $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.

❷ On admet que : $\forall x\in\mathbb{R}, \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$.

Justifie que : $A=3$

SITUATIONS D'ÉVALUATION

la fête d'anniversaire

1 En prélude à la fête d'anniversaire de ton frère aîné, tu participes à la décoration. Tu découpes une feuille cartonnée à l'aide d'une paire de ciseaux. Tu obtiens la figure codée ci-dessous sur laquelle :

- AGH est un triangle équilatéral de sens direct ;
- ABFG et CDEF sont des parallélogrammes de sens directs tels que :

  Mes $(\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{6}$;
- L'angle orienté $(\overrightarrow{FG};\overrightarrow{FC})$ est un angle droit positif ;

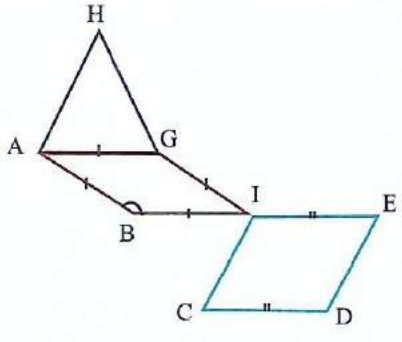
Très observateur, un de tes amis de classe affirme que les droites (AH) et (ED) sont parallèles. Certains élèves ne partagent pas cet avis.
Tu décides donc de vérifier ces propos.

❶ Détermine : Mes $(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AG})$.

❷ Démontre que : Mes $(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6}$ et Mes $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{2}$.

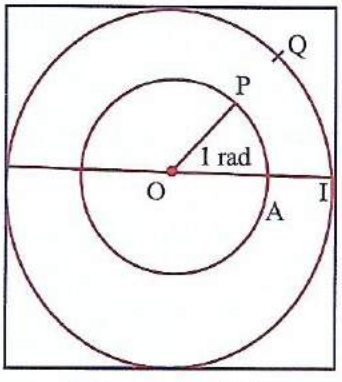
❸ ⓐ En utilisant les questions précédentes, calcule : Mes $(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{DE})$.

ⓐ Réponds à la préoccupation de tes camarades.



Radar

2 Lors d'une sortie détente dans un centre technologique, les élèves d'une classe de seconde C observent un radar terrestre déposé sur une table. Ce radar émet des signaux sous forme de cercles trigonométriques mouvants comme l'indique la figure ci-dessous :



Un guide du centre informe les élèves que :

- Les points P et Q sont des points matériels assimilés à deux positions ennemies.
- L'échelle du radar indique long $\left(\overset{\frown}{QI}\right) = 5$ km ;
- P est le milieu de [OQ].

Emerveillés, les élèves de cette classe veulent déterminer la distance de la première menace.

❶ Justifie que le diamètre de couverture du radar est de 10 km.

❷ Déduis-en la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AP}$ et la distance de la première menace.



Leçon 12

DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Habiletés et contenus

- **Connaître** : les positions relatives d'une droite et d'un plan ; les positions relatives de deux plans ; la propriété sur les positions relatives d'une droite et d'un plan ; les propriétés sur les positions relatives de deux plans ; la propriété sur les positions relatives de deux droites ; les propriétés relatives à la détermination d'un plan ; les propriétés relative au parallélisme de deux droites ; les propriétés relatives au parallélisme d'une droite et d'un plan ; les propriétés relatives au parallélisme de deux plans.
- **Construire** une section plane d'un solide.
- **Justifier** : que deux droites sont coplanaires ; deux droites ne sont pas coplanaires ; une droite est sécante à un plan ; une droite est parallèle à un plan ; deux plans sont parallèles ; deux plans sont sécants.
- **Traiter** une situation faisant appel à la géométrie de l'espace.

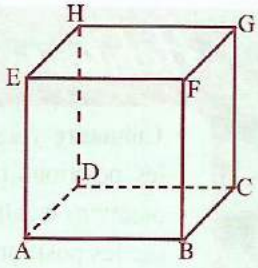
Situation d'apprentissage

Sur la route du lycée se trouve une maison futuriste ayant la forme d'une pyramide sectionnée par un plan. Les élèves de seconde émerveillés par cette beauté architecturale veulent reproduire cette maison sur leur cahier. Pour cela, ils décident d'étudier les positions relatives des droites et des plans de l'espace et de construire des sections planes de solides.



Activité 1 Notion de droite de l'espace

1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. Trace une ligne droite passant par les points H et F puis une autre passant par les points A et G et une dernière passant par les points A et C.



Récapitulatif

Une droite de l'espace est une ligne droite sans épaisseur et illimitée des deux côtés.

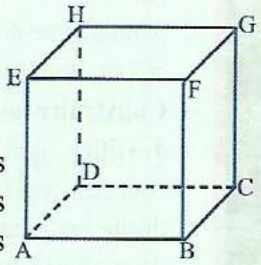
Représentation



(Δ) est une droite de l'espace.

Activité 2 Détermination d'une droite de l'espace

1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. Trace autant de droites que possible passant par le point A.
3. Trace une droite passant par les points H et F puis une autre passant par les points A et G et une dernière droite passant par les points A et C.
4. Détermine le nombre de droites passant par deux points distincts que l'on peut tracer.



Récapitulatif

Dans l'espace, il existe une infinité de droites passant par un point donné.

Dans l'espace, il existe une et une seule droite passant par deux points distincts donnés.

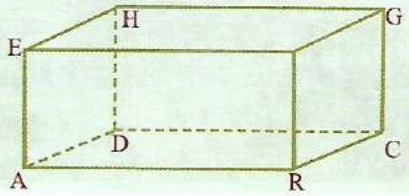
Deux points de l'espace déterminent une droite.

Notation

La droite passant par les points distincts A et B est notée (AB)

Activité 3 Notion de plan de l'espace

1. Reproduis le pavé droit ABCDEFGH ci-contre.
2. Dessine une surface plane contenant les points E, F et G.
3. Dis si oui ou non le point H appartient à cette surface plane.



Récapitulatif

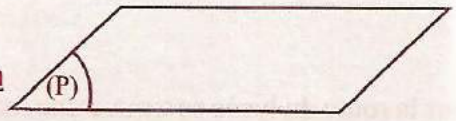
Un plan est une surface plane sans épaisseur illimitée de tous les côtés.

Notation

Pour noter un plan on utilise une lettre majuscule entre parenthèse.

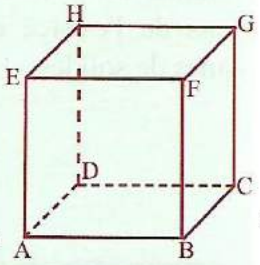
Exemple : le plan (P).

Représentation



Activité 4 Plan passant par des points de l'espace

1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. a) Détermine le nombre de plans qui contiennent la droite (BF).
   b) Cite deux plans contenant les points A et C.
   c) Cite deux plans contenant les points E, B et G puis deux autres contenant les points B, C et G.
3. Détermine le nombre de plans qui passent par trois points non alignés donnés de l'espace.



Récapitulatif

Il existe une infinité de plans contenant une droite donnée.

Par trois points non alignés de l'espace, il passe un plan et un seul.

Notation

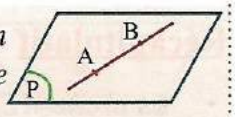
Le plan passant par les points non alignés E, B et G se note (EBG).

Activité 5 Droite contenue dans un plan

1. Trace un plan (P) et marque deux points A et B de (P).
2. Trace la droite (AB).
3. Dis ce que tu observes de la droite (AB) par rapport au plan (P).

Récapitulatif

Si A et B sont deux points distincts d'un plan (P), alors la droite (AB) est contenue dans le plan (P).



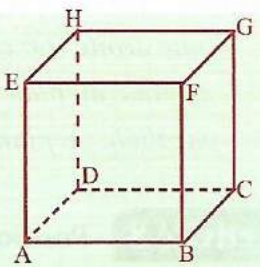
On dit aussi que la droite (AB) est incluse dans le plan (P).

On note : (AB) ⊂ (P).

Activité 6 Positions relatives de deux plans de l'espace

On considère le cube ABCDEFGH et le plan (ABC).

1. a) Justifie que la droite (BC) est contenue dans chacun des plans (ABC) et (EBC).
   b) Justifie que l'intersection des plans (ABC) et (EBC) est la droite (BC).
2. Justifie que les plans (ABC) et (EFH) n'ont aucun point en commun.
3. Fais une synthèse des consignes 1 et 2.
4. Détermine la position relative d'un plan quelconque avec le plan (ABC).



Récapitulatif

- *Dans l'espace il y a des plans disjoints, des plans qui ont une droite en commun et des plans confondus.*
- *Les plans (ABC) et (EBC) se coupent suivant la droite (BC). On dit que les plans (ABC) et (EBC) sont sécants suivant la droite (BC).*

On écrit : (ABC)∩(EBC) = (BC).

- *Les plans (EFH) et (ABC).*

On écrit : (EFH)∩(ABC) = Ø

- *Tout plan (P) est soit :*
  - *confondu avec le plan (ABC) ;*
  - *disjoint du plan (ABC).*
  - *sécant à (ABC) suivant une droite ;*
- *Lorsque le plan (P) est confondu avec le plan (ABC) ou disjoint du plan (ABC), on dit que le plan (P) est parallèle au plan (ABC).*

On note : (P)//(ABC) ou (ABC) // (P).

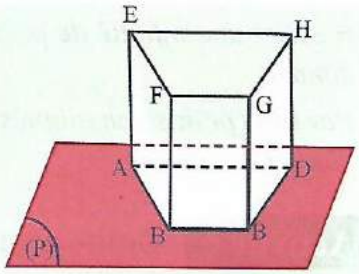
Remarque

Une droite peut être déterminée par la donnée de deux plans sécants.



Activité 7 Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

Reproduis le prisme droit ABCDEFGH ci-contre posé sur un plan (P) et dont les bases sont des trapèzes.



1. Cite trois droites qui rencontrent chacune le plan (ABC) en un seul point.
2. a) Cite une droite contenue dans le plan (ABC).
   b) Cite une droite qui est disjointe du plan (ABC).
3. Fais une synthèse des consignes 1 et 2.
4. Détermine la position relative d'une droite quelconque de l'espace avec le plan (ABC).

Récapitulatif

- *La droite(AE) a un seul point d'intersection avec le plan (ABC). On dit que la droite (AE) est sécante au plan (ABC).*
- *la droite (BC) est incluse dans le plan (ABC) et la droite (FG) n'a aucun point commun avec le plan (ABC). On dit que chacune des droites (BC) et (FG) est parallèle au plan (ABC).*

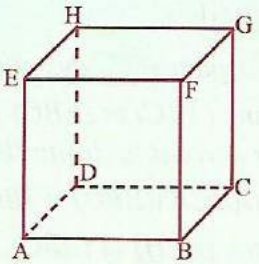
On note : (BC)//(ABC) et (FG)//(ABC).

- *Toute droite (D) est soit :*
  - sécante au plan (ABC) ;
  - parallèle au plan (ABC).



Activité 8 Position relative de deux droites de l'espace

1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. a) Cite deux droites qui sont contenues dans le plan (ABC).
   b) Justifie que les droites (BF) et (HG) ne peuvent pas être contenues dans un même plan.
3. a) Cite deux droites qui sont contenues dans le plan (BCG) dont l'intersection est réduite à un point.
   b) Cite deux droites qui sont contenues dans le plan (EFG) dont l'intersection n'est pas un singleton.



Récapitulatif

- *Les droites (AB) et (BC) sont contenus dans le plan (ABC). On dit que les droites (AB) et (BC) sont coplanaires.*
- *Les droites (BF) et (HG) ne sont pas incluses dans un même plan. On dit que les droits (BF) et (HG) ne sont pas coplanaires ou qu'elles sont non coplanaires.*
- *Les droites (BG) et (FC) ont une intersection réduite à un point. On dit que les droites (BG) et (FC) sont sécantes.*
- *Les droites (EF) et (HG) sont coplanaires et disjointes. On dit que les droites (EF) et (HG) sont parallèles ou coplanaires disjointes.*

On note : (EF)//(HG).

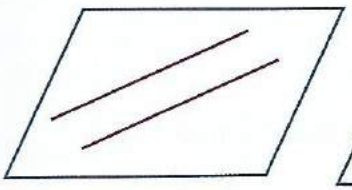
- *L'intersection de la droite (EF) avec elle-même n'est pas un singleton. On dit aussi que la droite (EF) est parallèle à elle-même.*
- *Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si :*
  - elles sont confondues ;
  - ou coplanaires disjointes.

Activité 9 Diverses déterminations d'un plan

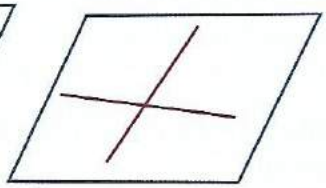
1. Soit (D) une droite et un point A n'appartenant pas à (D).
   Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant A et (D).
2. Soient (D_1) et (D_2) deux droites parallèles disjointes.
   Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant (D_1) et (D_2).
3. Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes.
   Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant (D_1) et (D_2).

Récapitulatif

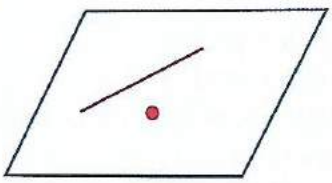
- *Dans l'espace, un plan peut être déterminé par :*
  - trois points non alignés ;
  - une droite et un point n'appartenant pas à la droite ;
  - deux droites sécantes ;
  - deux droites parallèles ;
- *Dans un plan de l'espace, on peut appliquer les propriétés de la géométrie plane.*



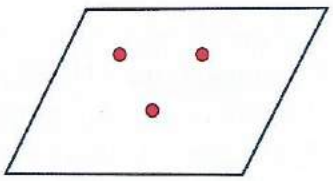
deux droites parallèles



deux droites sécantes



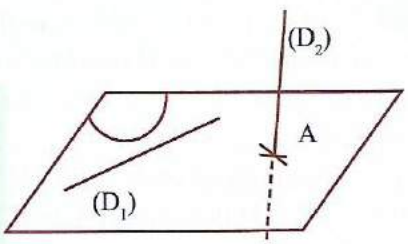
une droite et un point n'appartenant pas à la droite



trois points non alignés

Activité 10 Reconnaitre deux droites non coplanaires

Soient (P) un plan et (D_1) une droite contenue dans le plan (P).
Une droite (D_2) est sécante au plan (P) en un point A qui n'appartient pas à (D_1).
Démontre que (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.
(On fera un raisonnement par l'absurde).







Récapitulatif

Pour démontrer que deux droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires, il suffit de trouver un plan (P) contenant la droite (D_1) tel que la droite (D_2) soit sécante au plan (P) en un point A qui n'appartient pas à (D_1).

Activité 11 Droite passant par un point et parallèle à une droite donnée

Soient (D) une droite et A un point de l'espace.
Démontre qu'il existe une seule droite passant par A et parallèle à (D).

Récapitulatif

Il existe une droite et une seule passant par un point A et parallèle à (D).

Activité 12 Plan qui coupe deux droites parallèles

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles de l'espace.
(P) est un plan qui coupe la droite (D_1) en A.
1. On suppose que (D_1) et (D_2) sont confondues.
Justifie que (D_2) est sécante à (P).
2. On suppose que (D_1) et (D_2) sont disjointes.
Soit (Q) le plan déterminé par (D_1) et (D_2).
a) Justifie que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (Δ) passant par A.
b) Justifie que (Δ) est sécante à (D_2) en un point B.
c) Justifie que (D_2) est sécante à (P) au point B.

Récapitulatif

Si deux droites (D_1) et (D_2) sont parallèles, tout plan (P) qui coupe (D_1) coupe (D_2).

Activité 13 Droites parallèles à une même droite

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles à une droite (D).

1. On suppose que deux des trois droites (D_1), (D_2) et (D) sont confondues.
   Justifie que (D_1) est parallèle à (D_2).
2. On suppose que les trois droites (D_1), (D_2) et (D) sont deux à deux distinctes.
   Soit A un point de la droite (D_2) qui n'appartient pas à la droite (D_1) et (P) le plan déterminé par A et (D_1).
   a) Démontre par l'absurde que les droites (D_1) et (D_2) sont coplanaires.
   b) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

Récapitulatif

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.



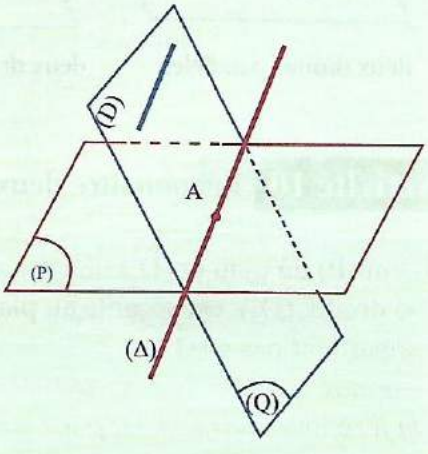
Activité 14 Caractérisation d'une droite parallèle à un plan

D) est une droite et (P) un plan de l'espace.

1. On suppose que (D) est incluse dans (P).
   Démontre que (D) est parallèle au plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite de (P).
   On suppose dans la suite que (D) n'est pas incluse dans (P).
2. On suppose que (D) est parallèle au plan (P).

Soit A un point de (P).

   a) Justifie que A et (D) déterminent un plan (Q).
   b) Justifie que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (Δ).
   c) Démontre par l'absurde que (D) est parallèle à (Δ).
   d) Déduis de ce qui précède que si (D) est parallèle à (P) alors (D) est parallèle à une droite de (P).
3. On suppose que (P) contient une droite (Δ) parallèle à (D).
   a) Justifie que (Δ) et (D) déterminent un plan (R).
   b) Justifie que (P) et (R) sont sécants suivant la droite (Δ).
   c) Déduis de ce qui précède que (D) est parallèle à (P).



Récapitulatif

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite incluse dans (P).

Activité 15 Conséquence de la caractérisation d'une droite parallèle à un plan

(D) est une droite et (P) un plan de l'espace tel que (D) soit parallèle à (P).
Soit (L) une droite parallèle à (D).
Démontre que (L) est parallèle à (P).

Récapitulatif

Si une droite (D) est parallèle à un plan (P) alors toute droite (L) parallèle à (D) est parallèle à (P). incluse dans (P).

Activité 16 Théorème du toit

(D) est une droite, (P_1) et (P_2) sont deux plans sécants suivant une droite (Δ) tel que (D) soit parallèle à (P_1) et parallèle à (P_2).
Soit A un point de (Δ).

1. Justifie qu'il existe une droite (D_1) incluse dans (P_1) et une droite (D_2) incluse dans (P_2) telles que (D_1) soit parallèle à (D_2).
2. Justifie que toute parallèle à (D_1) et à (D_2) passant par un point A de (Δ) est confondue avec (Δ).
3. Déduis de ce qui précède que (D) est parallèle à (Δ).

Récapitulatif

Si une droite (D) est parallèle à deux plans sécants (P_1) et (P_2) suivant une droite (Δ), alors (D) est parallèle à (Δ).

Activités de découverte

Activité 17 Caractérisation de deux plans parallèles



(P_1) et (P_2) sont deux plans de l'espace.
On se propose de démontrer que (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si (P_1) contient deux droites (D) et (L) sécantes et parallèles à (P_2).

1. Examine cette situation lorsque (P_1) et (P_2) sont confondus.
   Supposons dans la suite que (P_1) et (P_2) ne sont pas confondus.
2. a) Supposons que (P_1) et (P_2) sont parallèles, A un point de (P_1), (D) et (L) deux droites sécantes en A incluses dans le plan (P_1). Justifie que les droites (D) et (L) sont parallèles au plan (P_2).
   b) Supposons qu'il existe deux droites (D) et (L) sécantes, contenues dans (P_1) et parallèles à (P_2).
   Démontre par l'absurde que (P_1) et (P_2) sont parallèles en utilisant le théorème du toit.

Récapitulatif

Deux plans (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si (P_1) contient deux droites (D) et (L) sécantes et parallèles à (P_2).

Activité 18 Des plans parallèles à un même plan donné



(P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles à un plan (P).
On se propose de démontrer que (P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles
Soit (D) et (L) deux droites de (P), sécantes en un point A.

1. On suppose que (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ).
   Démontre que (D) et (L) sont parallèles à (Δ).
2. Déduis de ce qui précède que (P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles.

Récapitulatif

Deux plans parallèles à une même troisième sont parallèles entre eux.

Activité 19 Plan passant par un point donné et parallèle à un plan donné



A un point et (P) un plan de l'espace.
On se propose de démontrer que par le point A, il passe un plan et un seul parallèle à (P).

1. On suppose que A est un point de (P). Démontre la propriété ci-dessus.
2. On suppose que le point A n'appartient pas à (P).
   Soit (D) et (L) deux droites de (P) sécantes en B.
   Soit (D') la parallèle à (D) passant par A et (L') la parallèle à (L) passant par A.
   a) Justifie que (Q) est un plan passant par A et parallèle à (P).
   b) Justifie que (Q) est unique.

Récapitulatif

Par un point A de l'espace, il passe un plan et un seul passant par A et parallèle à (P).

Activité 20 Plan sécant à deux plans parallèles



(P_1) et (P_2) sont des plans parallèles et (P) un plan de l'espace.
On suppose que (P) est sécant à (P_1) suivant une droite (D_1).

1. Démontre par l'absurde que (P) est sécante à (P_2).
2. Soit (D_2) la droite d'intersection de (P) et (P_2).
   Démontre que (D_1) et (D_2) sont parallèles.
   (on envisagera le cas où (P_1) et (P_2) sont confondus et le cas où (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles).

Récapitulatif

Si deux plans (P_1) et (P_2) sont parallèles, alors tout plan (P) sécant à (P_1) est sécant à (P_2) et les droites d'intersection sont parallèles.

Activité 21 Droite parallèle ou sécante à deux plans parallèles

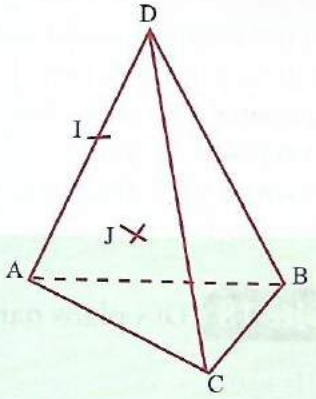


(P_1) et (P_2) sont des plans parallèles et (D) une droite de l'espace.
1. Démontre que si (D) est parallèle à (P_1) alors (D) est parallèle à (P_2).
2. Démontre que si (D) est sécante à (P_1) alors (D) est sécante à (P_2).

Récapitulatif

Si deux plans sont parallèles alors :
- *toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;*
- *toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.*

Activité 22 Section plane d'un solide



On considère le tétraèdre ABCD ci-contre.
Le point I est sur le segment [AD] et J appartient à la face (ACD).
On cherche à déterminer la section du tétraèdre ABCD par le plan (BIJ).
1. a) Construis l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).
   b) Construis, si elle existe, l'intersection de chaque face du tétraèdre avec le plan (BIJ).
2. Déduis de la question précédente la section du tétraèdre par le plan (BIJ).

Récapitulatif

- *L'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD) est l'intersection de la droite (IJ) avec la droite (DC).*
- *Pour obtenir la section du tétraèdre par le plan (BIJ) :*
  - *on détermine les droites d'intersection du plan donné avec le plan de chaque face du solide ;*
  - *et on conserve les segments inclus dans ces faces.*

Résumé de la leçon



I DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

1. Notion de droite

Présentation

Une droite de l'espace est une ligne droite sans épaisseur et illimitée des deux côtés.

Représentation

(D) est une droite de l'espace.



2. Détermination d'une droite



Propriété

Deux points de l'espace déterminent une droite.

Notation

La droite passant par les points A et B est notée : (AB) ou encore (D).

3. Notion de plan

Présentation

Un plan est une surface plane sans épaisseur et illimitée de tous les côtés.

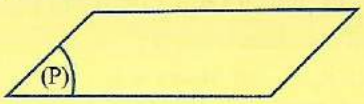
Notation

Pour noter un plan, on utilise une lettre majuscule entre parenthèse.

4. Plan passant par des points de l'espace

Représentation

(D) est une droite de l'espace.





Propriété

Par trois points non alignés de l'espace, il passe un plan et un seul.

Notation

Le plan passant par les points non alignés E, B et G se note (EBG).



5. Droite contenue dans un plan

Propriété

Si A et B sont deux points distincts d'un plan (P), alors la droite (AB) est contenue dans le plan. P.

Vocabulaire

Lorsque la droite (AB) est contenue dans un plan (P), on dit que la droite (AB) est incluse dans le plan (P) et on note : (AB) ⊂ (P).

II POSITIONS RELATIVES DANS L'ESPACE

1. Position relative de deux plans de l'espace

Définition

- Deux plans confondus ou disjoints sont dits parallèles.
- Deux plans qui ne sont pas parallèles sont dits sécants.



Propriété 1

Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.

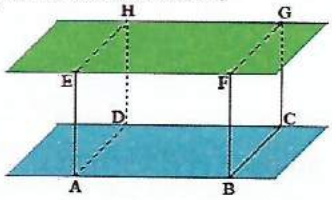
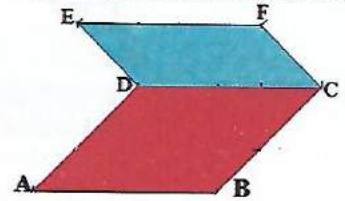
Propriété 2

Deux plans qui ont un point en commun sont :
- soit confondus ;
- soit ont en commun une droite qui passe par ce point.



Remarque

• Pour deux plans de l'espace, on a les configurations suivantes :

Plans parallèles	Plans sécants
Ils sont confondus ou ils n'ont aucun point en commun.  Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.	Ce sont deux plans non parallèles. Leur intersection est une droite.  Les plans (ABC) et (EFC) sont sécants. Leur intersection est la droite (CD).



2. Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

Définition

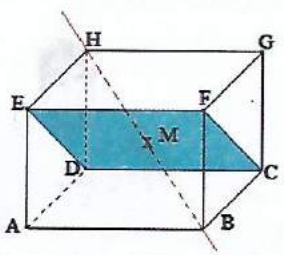
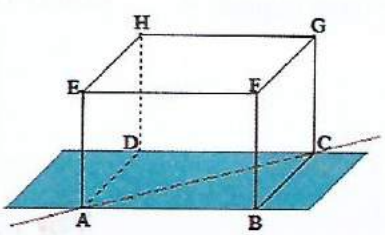
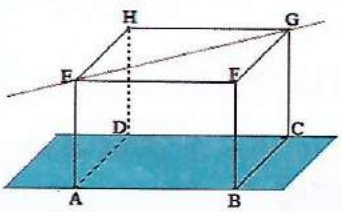
• Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est incluse dans ce plan ou lorsqu'elle est disjointe de ce plan.
• Une droite est sécante à un plan lorsqu'elle n'est pas parallèle à ce plan.

Propriété 2

Une droite de l'espace est soit sécante à un plan, soit parallèle à ce plan.

Remarque

Pour une droite et un plan de l'espace, on a les configurations suivantes :

Droite sécante à un plan	Droite parallèle à un plan	
La droite et le plan ont un seul point en commun.	*La droite est contenue dans le plan.*	*La droite n'a aucun point commun avec le plan*
 La droite (BH) et le plan (EFC) sont sécants en M.	 La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC).	 La droite (EG) est parallèle au plan (ABC).

3. Position relative de deux droites de l'espace

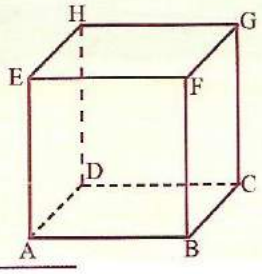
Définition 1

Deux droites de l'espace sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans un même plan.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre :

- les droites (AB) et (BC) sont coplanaires ;
- les droites (AD) et (HG) ne sont pas coplanaires.



Définition 2

Deux droites de l'espace sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et qu'elles sont parallèles dans le plan qui les contient.

Exemple

Dans le parallélépipède ABCDEFGH ci-dessus, les droites (EF) et (HG) sont parallèles ; les droites (EF) et (DC) sont parallèles.

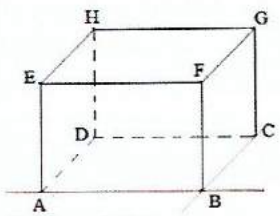
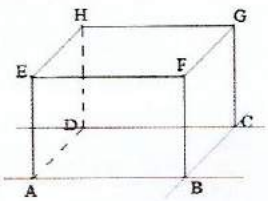
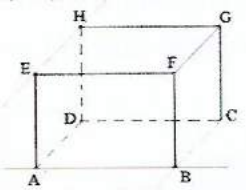
Attention !

Deux droites qui n'ont pas de point commun sont :

- soit parallèles disjointes ;
- soit non coplanaires.

Remarque

Pour deux droites de l'espace, on a les configurations suivantes :

Droites coplanaires		Droites non coplanaires
Droites sécantes	**Droites parallèles**	Il n'existe pas de plan contenant les deux droites (EH) et (AB).
 (AB) et (BC) sont sécantes en B.	 (AB) et (CD) sont parallèles et disjointes.	 (AB) et (EH) ne sont ni parallèles, ni sécantes.

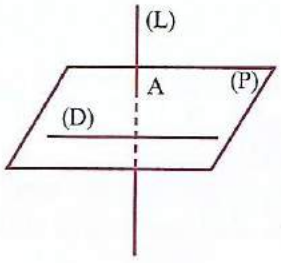
Remarque

Dans tout plan de l'espace, on peut appliquer les propriétés de la géométrie plane.

Propriété 2

Deux droites de l'espace sont non coplanaires si et seulement si elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

Pour démontrer que deux droites (D) et (L) ne sont pas coplanaires, il suffit de trouver un plan (P) contenant (D) tel que (L) soit sécante à (P) en un point qui n'appartient pas à (D).



4. Déterminations d'un plan

Propriété

Un plan peut être déterminé par :
- une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D) ;
- deux droites sécantes ;
- deux droites parallèles non confondues ;
- trois points non alignés.



III PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

1. Droites parallèles

Propriété 1

Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

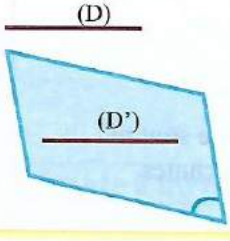
Propriété 2

Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

2. Droite parallèle à un plan

Propriété 1

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite (D') contenue dans (P).



Propriété 2

Si une droite est parallèle à un plan, alors toute droite parallèle à cette droite est parallèle à ce plan.

Propriété 3 *(théorème du toit)*

Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur intersection.

Propriété 4

Par un point de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

3. Plans parallèles

Propriété 1

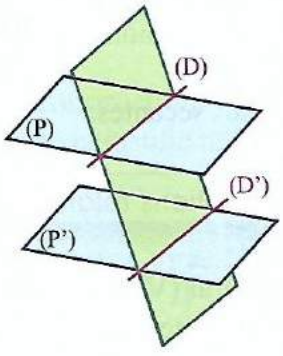
Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes et parallèles à l'autre.

Propriété 2

Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

Propriété 3

Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.



Propriété 4

Si deux plans sont parallèles :

- Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;
- Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.



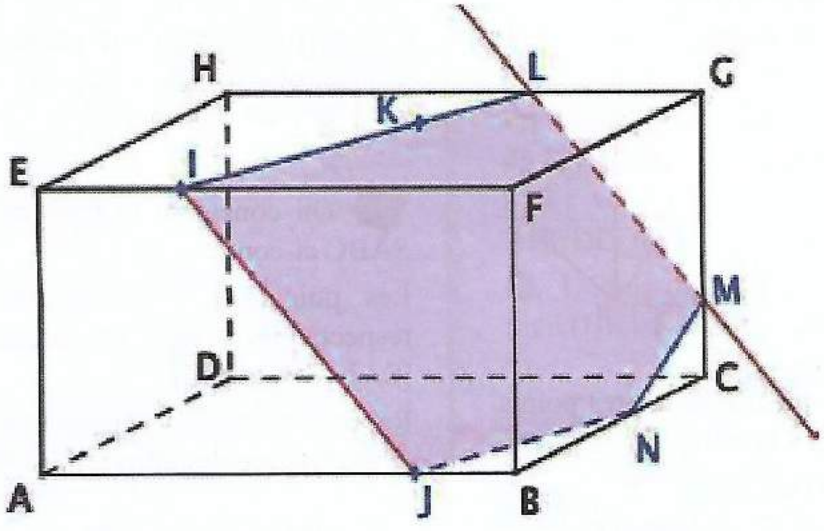
IV SECTION PLANE D'UN SOLIDE

Point méthode

Pour faire la section d'un plan (P) par un solide (S), on détermine l'intersection de (P) avec chacune des faces du solide (S).

Exemple

La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJL).

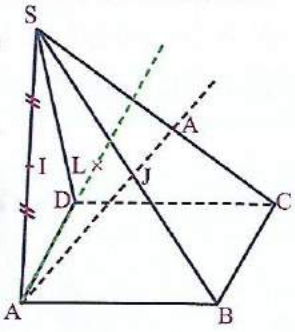


EXERCICES DE FIXATION

Notion de droite et de plan

1 SABCD est une pyramide à base rectangulaire.

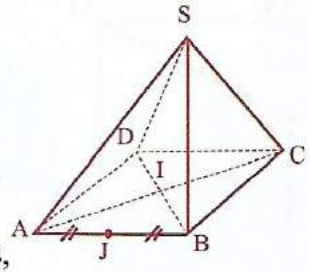
- I et J sont les milieux respectifs des segments [SA] et [SB].
- L est un point de la droite (AD).
- K est un point de la droite (AJ).



Reproduis le tableau suivant et, pour chacune des affirmations,
réponds par (V) si elle est vraie ou par (F) si elle est fausse.

N°	Affirmations	Réponses
1	Le point K appartient à l'arête [SC].	
2	Le point I appartient au plan (SAB).	
3	Les points L, I et J sont alignés.	
4	Le point L appartient au plan (SAB).	
5	Le point L appartient à la face ABCD.	
6	Le point L appartient au plan (ABC).	
7	Les points I, J, K et B sont coplanaires.	
8	Les droites (LB) et (AC) sont coplanaires.	
9	Les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires	
10	Les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.	
11	Les droites (JK) et (BC) sont parallèles.	
12	Les droites (AJ) et (CJ) sont sécantes	

2 La figure ci-contre SABCD est une pyramide régulière. I est le centre du carré ABCD et J est le milieu du segment [AB].

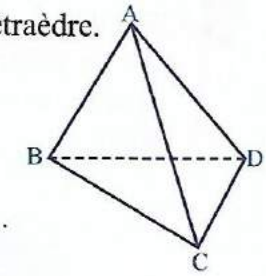


Dans chacun des cas suivants, dis si les éléments donnés déterminent un plan. Si oui, précise les autres points de la figure qui appartiennent à ce plan.

a) (AD) et (BC) ; b) (AJ) et (SB) ;
c) I, B et D ; d) J, D et S ; e) (SD) et I ;
e) (AD) et (BS) ; f) (AJ) et C ; h) (AC) et I.

3 La figure ci-contre est un tétraèdre.

a) Nomme deux droites coplanaires.
b) Nomme deux droites non coplanaires.
c) Cite deux droites sécantes.

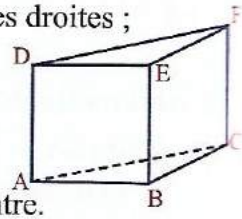


Positions relatives

4 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

a) deux points distincts sont toujours coplanaires.
b) si les droites (D) et (Δ) ne sont pas parallèles dans l'espace, alors elles sont sécantes.

5 (D), (D') et (D") désignent des droites ; (P), (P') et (P") désignent des plans. Pour des éventuels contre-exemples, on s'appuiera sur le prisme droit ABCDEF ci-contre.

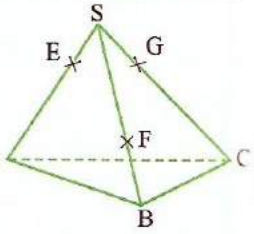


Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations contenues dans le tableau suivant.

N°	Affirmations	Réponses
1	Si (D)//(D') et (D') // (D") alors (D), (D') et (D") sont coplanaires.	
2	Si (D) // (P) et (D') // (P) alors (D) // (D').	
3	Si (D) // (P) et (D) // (P') alors (P) // (P').	
4	Si (D) et (D') sont coplanaires et (D') et (D") sont coplanaires alors (D) et (D") sont coplanaires.	

6 On considère le tétraèdre SABC ci-contre.

Les points E, F et G sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC].

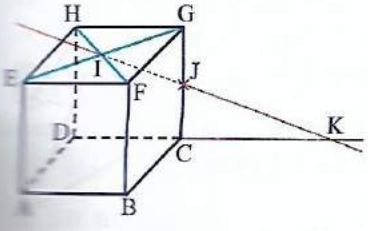


Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes

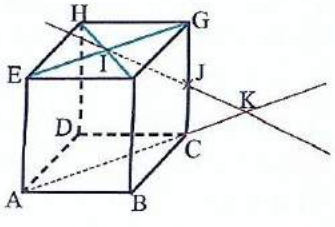
N°	Affirmations	Réponses
1	Les droites (EF) et (FG) sont coplanaires.	
2	Les points E, F et G sont alignés.	
3	Les droites (FG) et (BC) sont coplanaires.	
4	Les droites (EF) et (SC) sont coplanaires.	

7 ABCDEFGH est un cube, I est le centre du carré EFGH et J le milieu de [GC]. On cherche à déterminer K, point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABD).

L'une de ces deux constructions est correcte. Indique celle qui est correcte et justifie ta réponse.



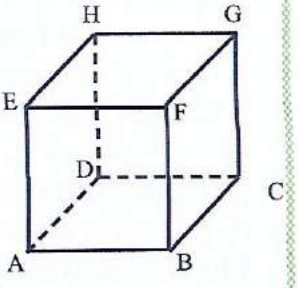
Construction 1



Construction 2

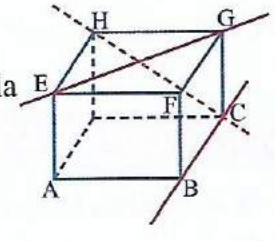
8 La figure ABCDEFGH ci-dessous est un cube. En dehors des arêtes du cube et en utilisant les points de la figure, cite :

a. deux droites coplanaires ;
b. deux droites non coplanaires ;
c. deux droites parallèles ;
d. deux plans parallèles ;
e. deux plans sécants ;
f. une droite sécante à un plan ;
g. une droite parallèle à un plan.



9 Dans le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, donne la position relative :

a. des droites (EG) et (BC) ;
b. des plans (ABF) et (BCG) ;
c. de la droite (CH) et du plan (ABD).



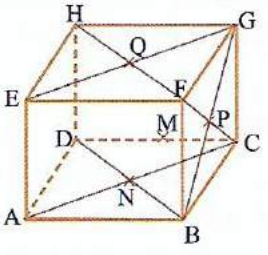
Caractérisation d'un plan

10 Le parallélépipède rectangle ABCDEFGH a été représenté en perspective cavalière.

N, P et Q sont les centres respectifs des rectangles ABCD, BCGF et EFGH.

M est le milieu de [DC].

Dis si les objets proposés définissent ou non un plan, et si oui, nomme-le.



1. Le point A et la droite (CD).
2. Le point E et la droite (EF).
3. Les points N, M et P.
4. Les points E, Q et G.
5. Les droites (HF) et (BN).
6. Les droites (DM) et (BN).

11 Soit A et B deux points d'un plan (P) et C un point extérieur à (P).

a) Justifie que les points A, B et C définissent un plan.

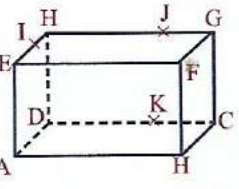
b) Soit D un point du plan (ABC) tel que la droite (DC) coupe le plan (P) en I.

Dis si les points A, B et I définissent un plan. Justifie ta réponse.

Section plane

12 ABCDEFGH est un pavé droit.

I est un point de l'arête [EH], J un point de l'arête [HG] et K un point de l'arête [DC].



1. Construis l'intersection du plan (IJK) avec chaque face du pavé ABCDEFGH.
2. Déduis de la consigne précédente la section du plan (IJK) avec le pavé ABCDEFGH.

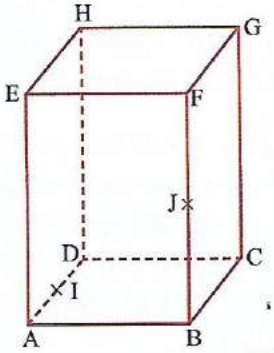
13 La figure ABCDEFGH ci-contre est un cube.

I est le milieu de [AD] et J est le milieu de [FB].

a. Reproduis la figure et construis la droite (D), intersection des plans (HIJ) et (BCG).

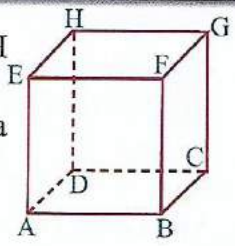
b. On note N le point d'intersection de la droite (D) avec l'arête [FG]. Construis le point M, intersection du plan (HIJ) et de l'arête [AB].

c. Termine la trace de la section du cube par le plan (HIJ).



EXERCICES DE RENFORCEMENT

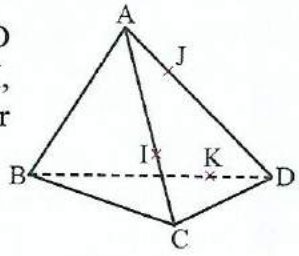
1 La figure ci-contre ABCDEFGH est un cube. En dehors des arêtes du cube et en utilisant les points de la figure, cite :



ⓐ deux droites coplanaires ;

ⓑ deux droites non coplanaires.

2 Sur le tétraèdre ABCD ci-contre, on donne les points I, J et K placés respectivement sur les arêtes [AC], [AD] et [BD].

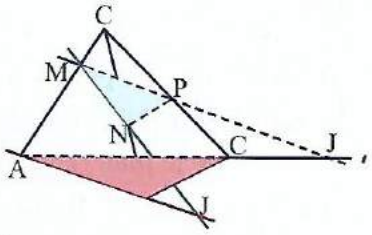


Complète chacune des phrases suivantes par : *sécante* ou *parallèle*.

ⓐ La droite (AK) est ..... au plan (BIJ).

ⓑ La droite (IJ) est ..... au plan (ADC).

3 Sur le tétraèdre ABCD ci-après, les points M, N et P sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC].



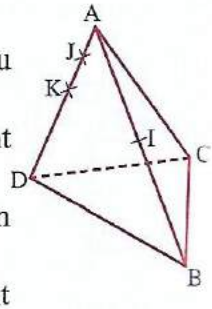
On suppose que les plans (ABC) et (MNP) ne sont pas parallèles.

Représente la droite d'intersection des plans (ABC) et (MNP).

4 Soit (P) et (P') deux plans parallèles. Pour chacune des affirmations suivantes, réponds par vrai (V) ou par faux (F).

N°	Affirmations	Reponses
1	Toute droite de (P) est parallèle à (P').	
2	Toute droite de (P) est parallèle à toute droite de (P').	
3	Toute droite de (P) et toute droite de (P') sont coplanaires.	

5 Soit ABCD un tétraèdre.



I est le milieu de [AB], K est le milieu de [AD] et J est le milieu de [AK].

Dis si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

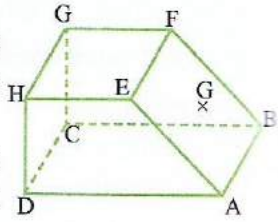
ⓐ La droite (IJ) est sécante au plan (DBC).

ⓑ Les plans (IKC) et (ABD) sont sécants.

6

La figure ci-contre ABCDEFGH est un prisme droit dont la base est un trapèze.

M est un point de la face ABFE.



❶ Reproduis la figure et construis le point d'intersection des plans (DCM) et (ABE).

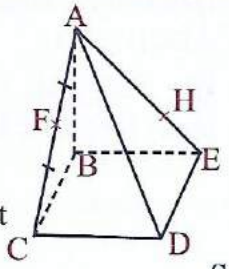
❷ Déduis de la question précédente la trace de la section du prisme par le plan (DCM).

❸ Construis la droite (Δ), intersection des plans (HAB) et (DCM).

❹ Précise la position relative de la droite (Δ) par rapport aux droites (DC) et (AB).

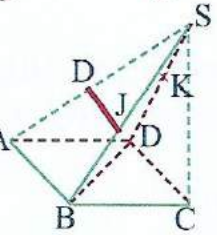
EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1 ABCDE est une pyramide régulière à base carrée. F est le milieu de [AC] et H est le point de [AE] tel que : $AH = \frac{3}{4}AE$.



Démontre que les droites (FH) et (CE) sont sécantes.

2 SABCD est une pyramide dont la base est un quadrilatère. Les points I, J et K sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SD] tels que les droites (IJ) et (KJ) coupent le plan (ABC).

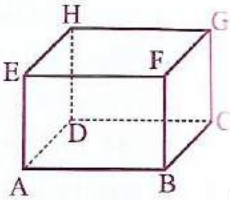


❶ Reproduis la figure ci-dessus.

❷ Détermine le point d'intersection M de la droite (IJ) et du plan (ABC).

❸ Détermine le point d'intersection N de la droite (JK) et du plan (ABC).

3 On considère le cube ABCDEFGH ci-après. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AE] et [BF].



Démontre que les droites (IH) et (JG) sont parallèles.

Les exercices

4 ABCD est un tétraèdre.

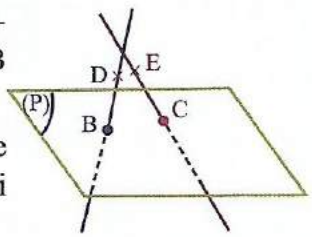
Les points M, P et Q sont trois points respectivement des arêtes [AB], [AC] et [AD].

Les droites (MP) et (BC) sont parallèles.

Les droites (PQ) et (CD) sont parallèles.

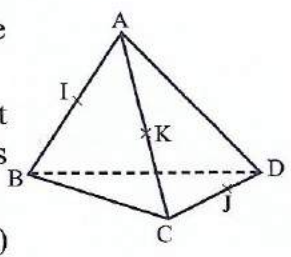
1. Fais une figure.
2. Démontre que la droite (MQ) est parallèle au plan (BCD).

5 On donne la figure ci-dessous où seuls les points B et C sont dans le plan (P).



1. En utilisant les points de la figure, désigne un plan qui contient la droite (DE).
2. Détermine l'intersection de la droite (DE) et du plan (P) (on suppose que (DE) n'est pas parallèle a (P)).

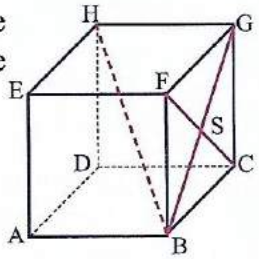
6 On considère le tétraèdre ABCD ci-dessous.



Les points I, J et K sont respectivement les milieux des arêtes [AB], [CD] et [AC].

1. Démontre que les droites (IK) et (DC) ne sont pas coplanaires.
2. Démontre que les points I, J et K ne sont pas alignés.

7 ABCDEFGH est un cube comme l'indique la figure ci-contre.



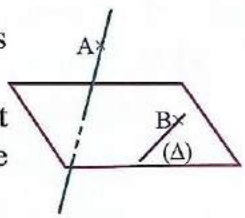
S est le centre du carré BCGF.

Détermine le point d'intersection de la droite parallèle à la droite (BH) passant par le point S et du plan (FEH).

8 Soit un tétraèdre SABC. I et J sont les milieux respectifs des arêtes [SB] et [SC].

1. Fais une figure.
2. Détermine la droite d'intersection des plans (AJB) et (AIC).

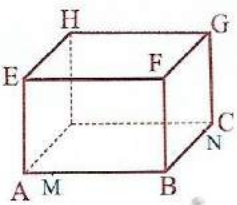
9 Soit (D) et (Δ) deux droites non coplanaires.



A est un point de (D) et B un point de (Δ) comme l'indique la figure ci-contre.

Détermine l'intersection des plans définis par A et (Δ) d'une part, B et (D) d'autre part.

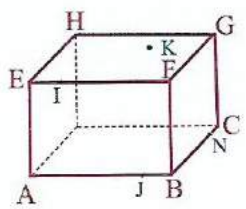
10 Dans le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, M est un point de l'arête [AB] et N un point de l'arête [BC].



Détermine la droite d'intersection des plans (FMN) et (BEG).

11 ABCDEFGH est un pavé droit. I est un point de l'arête [EF], J est un point de l'arête [AB] et K un point de la face EFGH.

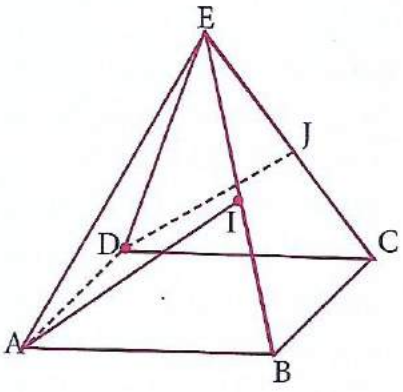
Construis la section du pavé droit par le plan (IJK).



SITUATION D'ÉVALUATION

1

Lors d'une sortie d'étude, les élèves d'une classe de seconde C observent une case en forme pyramidale de base carrée.
Le propriétaire a soutenu la case avec deux planches [AI] et [DJ] comme l'indique la figure ci-après. (I et J sont les milieux respectifs des cotés [EB] et [EC]).



Koffi, un élève de la classe, affirme que :
les points A, D, I et J sont coplanaires et que les plans (AEB) et (DEC) sont sécants. Les camarades revenus en classe décident de vérifier les affirmations de Koffi.

1. Démontre que les points A, D, I et J sont coplanaires.
2. a) Démontre que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.

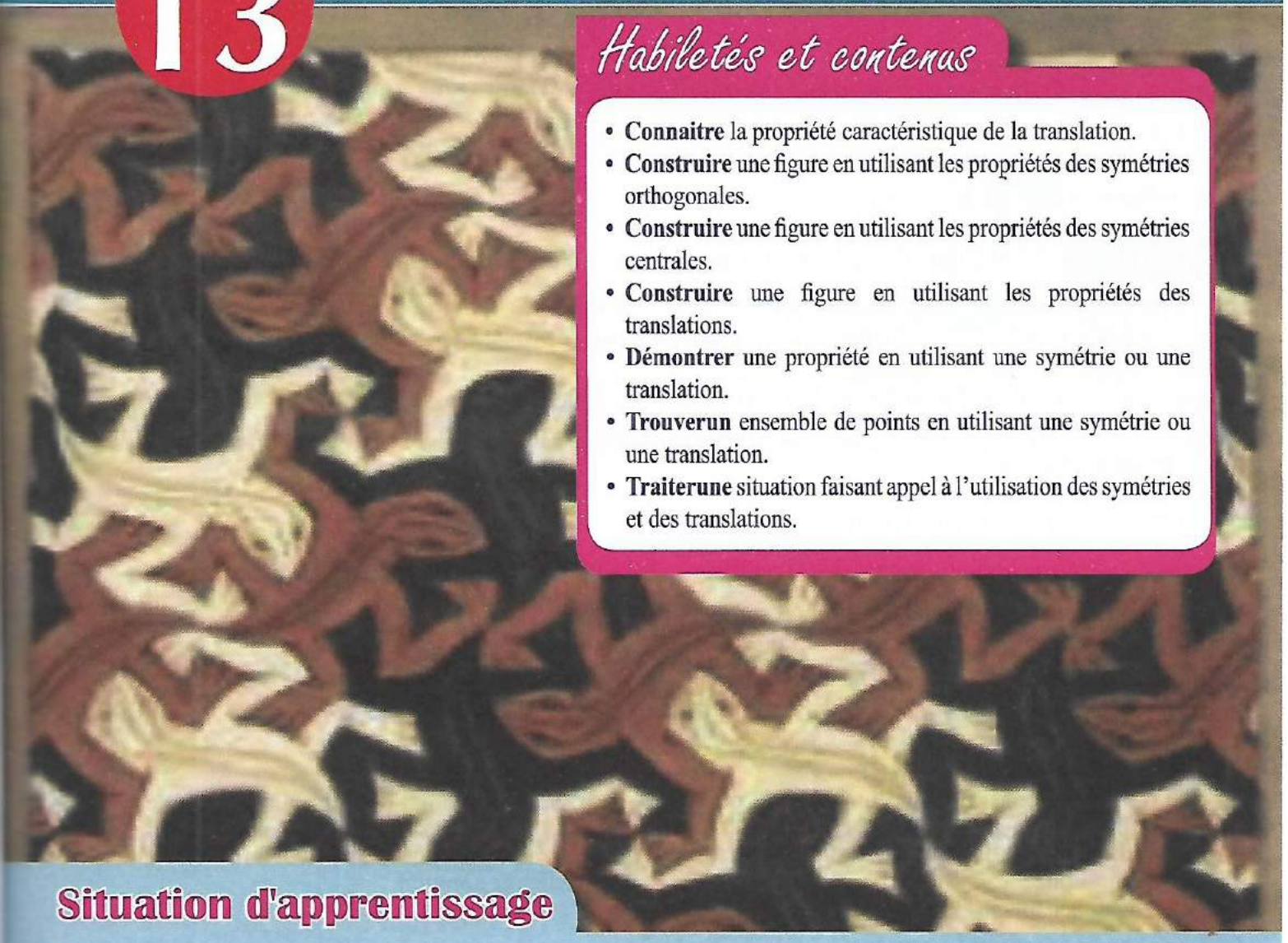
On notera M leur point d'intersection.

b) Place le point M.

3. a) Démontre que M appartient aux plans (AEB) et (DEC).
   b) Déduis-en que la droite (EM) est l'intersection des plans (AEB) et (DEC).
   c) Justifie que la droite (EM) est parallèle au plan (ABC).

Leçon 13

UTILISATION DES SYMÉTRIES ET DES TRANSLATIONS



Habiletés et contenus

- **Connaitre** la propriété caractéristique de la translation.
- **Construire** une figure en utilisant les propriétés des symétries orthogonales.
- **Construire** une figure en utilisant les propriétés des symétries centrales.
- **Construire** une figure en utilisant les propriétés des translations.
- **Démontrer** une propriété en utilisant une symétrie ou une translation.
- **Trouverun** ensemble de points en utilisant une symétrie ou une translation.
- **Traiterune** situation faisant appel à l'utilisation des symétries et des translations.

Situation d'apprentissage

Akissi est une élève de seconde C au Lycée Houphouët-Boigny de Korhogo. Elle amène la gravure ci-contre du peintre ESCHER en classe et raconte à ses camarades ce que son père, professeur de Mathématiques, lui a dit : « On peut obtenir tous les lézards de la figure à partir d'un seul d'entre eux en utilisant des symétries ou des translations ». Emerveillés par la gravure et impressionnés par ce qu'ils viennent d'apprendre, Akissi et ses camarades de classe décident de s'informer sur l'utilisation des symétries et translations pour construire, démontrer des propriétés et trouver des ensembles de points.



Activité 1 Propriété fondamentale d'une translation

On donne un vecteur $\vec{u}$.
Soit un triangle ABC.
1. Construis les images respectives A', B' et C' des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$
2. Démontre que : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Récapitulatif

Étant donnés deux points M et N d'images respectives M' et N' par une translation, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

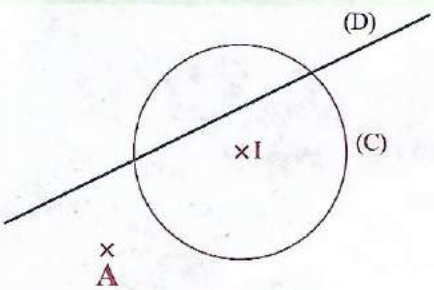
Activité 2 Utilisation d'une symetrie ou d'une translation pour construire

Tu reproduras chaque figure de cette activité sur ton cahier.

2. a) Utilisation d'une symetrie centrale pour construire

ABC est un triangle et I le milieu de [BC]. (D) est la parallèle à (AC) passant par B.
1. Construis le point P, en utilisant uniquement la règle non graduée, tel que le quadrilatère ABPC soit un parallélogramme.
2. Justifie ta construction

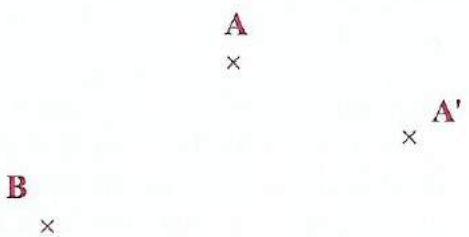
(C) est un cercle, (D) est une droite et A est un point. On se propose de construire un point M de (C) et un point N de (D) tels que A soit le milieu de [MN].



1. a) Marque un point M_1 sur (C).
   b) Effectue la construction d'un point N_1, qui n'est pas forcément sur (D), tel que A soit le milieu de $[M_1N_1]$. Dis ce que te suggère cette configuration.
2. a) Constuis l'image (C') de (C) par la symétrie de centre A.
   b) Soit N un point d'intersection de (C') et de (D). Justifie que son image M par une symétrie centrale appropriée appartient à (C). Marque M.
3. Rédige la solution

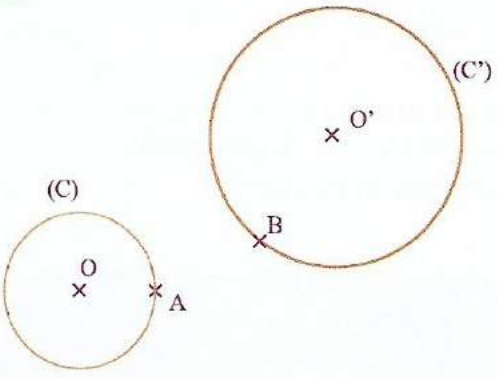
2. b) Utilisation d'une symetrie orthogonale

Sur la figure ci-dessous, le point A' est l'image de A par une symétrie orthogonale.
1. En utilisant seulement le compas, construis le point B', image de B par cette symétrie orthogonale.
2. Explique ta construction. Dis pourquoi tu rejettes l'un des points.



2. c) Utilisation d'une translation

Sur la figure ci-dessous, (C) et (C') sont deux cercles de centres respectifs O et O'. A et B sont des points respectifs de (C) et (C').
1. Construis un point C sur (C ') et un point D sur (C) tel que ABCD soit parallélogramme.
2. Donne ton programme de construction et justifie ton programme.



2. d) Synthèse

Dégage à partir de tout ce qui précède, une méthode pour résoudre un progamme de construction.

Récapitulatif

Pour résoudre un problème de construction, on pourrait suivre les étapes suivantes :

1- Lire l'énoncée : - relever les données

- relever les instruments imposés

2- Rechercher une démarche :

- faire une esquisse

- analyser cette esquisse

- rechercher une méthode de construction

3- Réaliser la solution :

- rédiger le programme de construction

- Construire la figure et la coder

- Examiner éventuellement le nombre de solutions

- Justifier que la construction respecte les contraintes de l'énoncé.



Activité 3 Utilisation des symétries et translations pour démontrer une propriété.

3. a) utilisation d'une symetrie centrale

ABCD est un losange de centre O ; (L) et (L') sont deux droites perpendiculaire en O.

(L) coupe (BC) en P et (AD) en R.

(L') coupe (CD) en Q et (AB) en S.

Demontre que PQRS est un losange.

3. b) utilisation d'une symetrie orthogonale

ABC est un triangle isocèle en A. La médiatrice (Δ_1) du segment [AB] coupe la droite (BC) en E et la médiatrice (Δ_2) du segment [AC] coupe la droite (BC) en F.

Démontre que : BF = CE

3. c) utilisation d'une translation

ABC est un triangle et H est le milieu du segment [AB].

a) Construis les points M et P tels que

$M = t_{\overrightarrow{BC}}(H)$ et $P = t_{\overrightarrow{AH}}(C)$

b) Démontre que le quadrilatère AMPB est un parallélogramme.

3. d) Synthèse

A partir de ce qui précède, dégage une méthode pour résoudre un problème de démonstration utilisant une transformation.

Récapitulatif

Pour résoudre un problème de démonstration d'une propriété, on pourrait suivre les étapes suivantes :

1- Lire l'énoncée afin de relever les données



2- Rechercher une démarche :

- faire une esquisse

- analyser cette esquisse

- rechercher une application qui conviennepour faire la démonstration

3- Rédiger la démonstration : vérifier que la démonstrationrespecte les contraintes de l'énoncé.

Activité 4 Utilisation des symetries et translations pour trouver un ensemble de points

4. a) Utilisation d'une symetrie centrale

Soit ABCD un parallélogramme. La diagonale [BD] est fixe. Le point A décrit le cercle (C) de centre D et de rayon r non nul. Détermine l'ensemble des points C lorsque A décrit (C).

4. b) Utilisation d'une symetrie centrale

ABCD est un losange de centre O ; (L) et (L') sont deux droites perpendiculaire en O.

(L) coupe (BC) en P et (AD) en R.

(L') coupe (CD) en Q et (AB) en S.

Demontre que PQRS est un losange.

4. c) Utilisation d'une symetrie orthogonale

Soient (D) une droite et A et B deux points non situés sur (D).

A tout point M de (D), on associe M' le second point d'intersection du cercle de centre A et de rayon AM et du cercle de centre B et de rayon BM.

Détermine le lieu des points M' lorsque M décrit (D) :

1. lorsque (AB) et (D) ne sont pas perpendiculaires.
2. lorsque (AB) et (D) sont perpendiculaires.

4. d) Utilisation d'une translation

Soit A et Bdeux points distincts du plan et (Δ) une droite fixe.

On considère un point M parcourant (Δ).

Détermine le lieu géométrique des points N tels que ABMN soit un parallélogramme.

4. e) Synthèse

A partir de ce qui précède, dégage une méthode pour résoudre un problème de recherche de lieu géométrique.

Récapitulatif

Pour résoudre un problème de recherche de lieu géométrique, on pourrait suivre les étapes suivantes :

1- Lire l'énoncée :

- relever les données

- relever les instruments à utiliser

2- Rechercher une démarche :

- faire une esquisse

- rechercher l'application appropriée qui permette de considérer un point comme image d'un autre par cette application

3- Réaliser la solution :

- rédiger la méthode à utiliser

- Construire l'ensemble de points cherchés

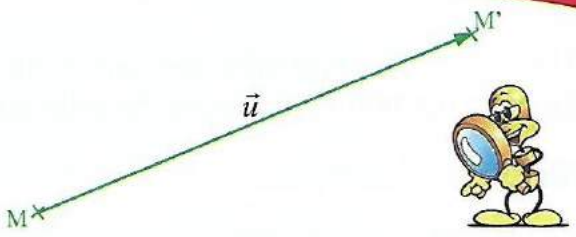
Résumé de la leçon

I TRANSLATION

Définition

$\vec{u}$ est un vecteur.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan associe le M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



POINT INVARIANT :

- Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$, $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant.
- Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, tous les points du plan sont invariants.

Notation

On la note $t_{\vec{u}}$.



Propriété fondamentale de la translation

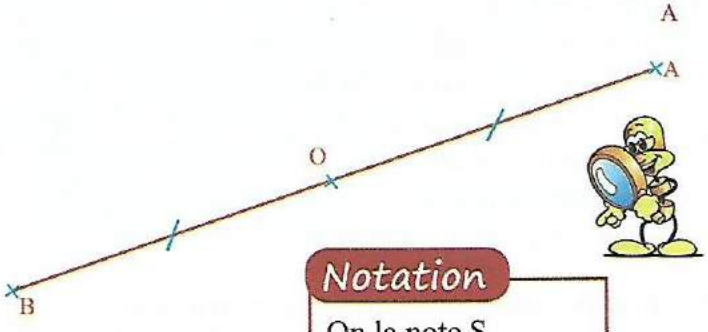
Soit $\vec{u}$ un vecteur.
Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par la translation de vecteur $\vec{u}$, on a :
$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

II SYMÉTRIE CENTRALE

Définition

O est un point du plan.

La symétrie centrale de centre O est l'application du plan dans le plan qui à tout point du plan associe son symétrique par rapport à O.



Notation

On la note S_O.

POINT INVARIANT : Le seul point invariant de la symétrie centrale de centre O est le point O.

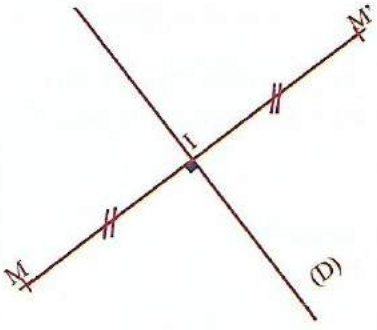
Propriété

Soit O un point du plan et S_0 la symètrie de centre O.
Pour tout point M du plan d'image M' par S_0, on a : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

III SYMÉTRIE ORTHOGONALE

Définition

- (D) est une droite du plan.
- La symétrie orthogonale d'axe (D) est l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan associe le point M', sysmétrique de M par rapport à (D).

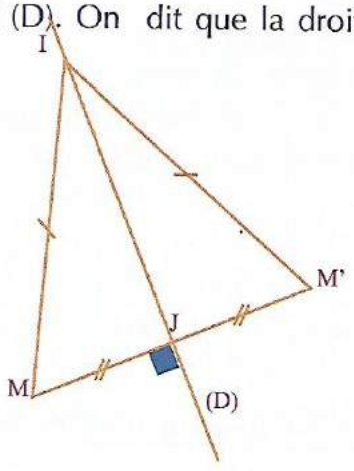


Notation

On la note $S_{(D)}$.

VOCABULAIRE : la symétrie orthogonale d'axe (D) s'appelle aussi la symétrie axiale d'axe (D).

POINT INVARIANT : L'ensemble des points invariants par $S_{(D)}$ est (D). On dit que la droite (D) est invariante point par point par la symétrie orthogonale d'axe (D).



Propriété

Soit une droite (D).

Pour tout point M, n'appartenant pas à (D), d'image M' par $S_{(D)}$ et pour tout point I de (D) n'appartenant pas à (MM'), on a : IMM' est un triangle isocèle en I.

IV POINTS MÉTHODES

1. Résoudre un problème de construction

Pour résoudre un problème de construction, on pourrait suivre les étapes suivantes :

1- Lire l'énoncée :
- *relever les données*
- *relever les instruments imposés*

2- Rechercher une démarche :
- *faire une esquisse*
- *analyser cette esquisse*
- *rechercher une méthode de construction*

3- Réaliser la solution :
- *rédiger le programme de construction*
- *Construire la figure et la coder*
- *Examiner éventuellement le nombre de solutions*
- *Justifier que la construction respecte les contraintes de l'énoncé.*

2. Résoudre un problème de démonstration

Pour résoudre un problème de démonstration d'une propriété, on pourrait suivre les étapes suivantes :

1- Lire l'énoncée afin de relever les données

2- Rechercher une démarche :
- *faire une esquisse*
- *analyser cette esquisse*
- *rechercher une application qui conviennepour faire la démonstration*

3- Rédiger la démonstration :
vérifier que la démonstrationrespecte les contraintes de l'énoncé.

3. Résoudre un problème de recherche de lieu géométrique

Pour résoudre un problème de recherche de lieu géométrique, on pourrait suivre les étapes suivantes :

1- Lire l'énoncée :
- *relever les données*
- *relever les instruments à utiliser*

2- Rechercher une démarche :
- *faire une esquisse*
- *rechercher l'application appropriée qui permette de considérer un point comme image d'un autre par cette application*

3- Réaliser la solution :
- *rédiger la méthode à utiliser*
- *Construire l'ensemble de points cherchés*

EXERCICES DE FIXATION

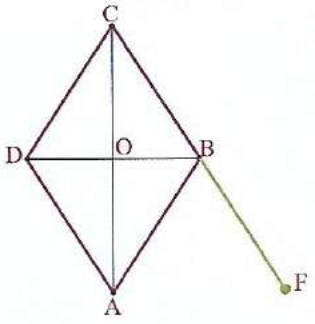
Notion de droite et de plan

1 Complète le texte ci-dessous à l'aide des mots ou groupe de mots suivant : un segment ; même longueur ; la distance ; orthogonale ; parallèle ; la mesure des angles ; les angles orientés

Par une symétrie centrale, une symétrie orthogonale ou une translation, l'image d'un segment est..... de..... On dit que ces applications du plan conservent..... De même, elles conservent..... Mais contrairement aux deux autres, la symétrie ..... ne conserve pas ..... L'image d'une droite par une symétrie centrale ou une translation est une droite qui lui est.....

2 Sur la figure ci-contre, on considère le losange ABCD de centre O.

F est le symétrique de C par rapport à B



Réponds par vrai ou faux aux affirmations du tableau :

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	$S_O([DB]) = [DB]$		
2	$S_O(AD) = (DC)$		
3	L'image de ABCD par S_O est ABCD		
4	$t_{\overrightarrow{AC}}(C) = A$		
5	$t_{\overrightarrow{OB}}(A) = F$		
6	$t_{\overrightarrow{CD}}(AB) = (AB)$		
7	$S_{(AC)}(B) = D$		
8	$S_{(AC)}(DC) = (BF)$		
9	$S_{(BD)}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$		
10	ABCD et son image par $S_{(BC)}$ sont confondus		

3 ABC est un triangle.

1. Construis le point A' tel que : $A' = t_{CD}(A)$.
2. Construis le point B' tel que : $B' = S_{(AC)}(B)$.
   a. Construis le point C' tel que : $C' = S_B(C)$.
   b. Justifie que le quadrilatère ABC'A' est un parallèlogramme.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 Soit (D) et (D') deux droites sécantes. Soit I un point extérieur à (D) et à (D').

Construis un point A sur (D) et un point B sur (D') tel que I soit le milieu de [AB].

2 Soit (C) un cercle de centre O, A un point de (C), B le point défini par $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ et (D) la perpendiculaire à (OB) passant par le point B.

Construis un point M sur (D) et un point N sur (C) tels que OAMN soit un parallélogramme.

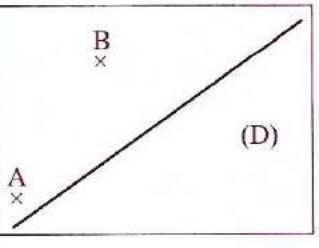
3 Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites sécantes, A et B deux points distincts du plan.

Construis un parallélogramme ABCD tel que les points C et D appartiennent respectivement à (Δ_1) et à (Δ_2).

4 (C) est un cercle de centre O, A et B sont deux points extérieurs au cercle (C).

Construis deux point M et N de (C) tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

5

On donne une droite (D) et deux points A et B comme indiqué ci-contre. Trouve le point M de (D) pour que d(A,M) + d(B,M) soit la plus petite possible.	

6

1. Sur une droite (Δ), marque quatre points A, B, C et D tels que AB = BC = CD.
2. Soit (C) le cercle de diamètre [BD]. Construis le point de contact T d'une tangente à (C) menée par A.
3. a. Démontre que le triangle BTC est équilatéral.
   b. Démontre que : TA = TD

7 ABC est un triangle. Soit I le milieu du segment [BC], E et F les points de la droite (AI) tels que (BE) et (CF) soient perpendiculaires à la droite (AI).

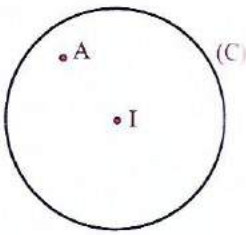
Démontre que : BE = CF.

8 (C) est un cercle ; A et B sont deux points distincts extérieurs à (C) tels que la droite (AB) et le cercle (C) n'aient aucun point commun. Soit M un point du cercle (C) et N le point du plan tel que ABMN soit un parallélogramme.

Détermine l'ensemble des points N lorsque M parcourt le cercle (C).

9 On donne une droite (D) et un vecteur u (qui n'est pas un vecteur directeur de (D) et A un point de (D). Lorsque A parcourt la droite (D), détermine l'ensemble des points B, extrémités des représentants d'origine A du vecteur $\vec{u}$.

10 On donne un cercle (C) de centre I, un point A intérieur au cercle et un point B extérieur au cercle (C)

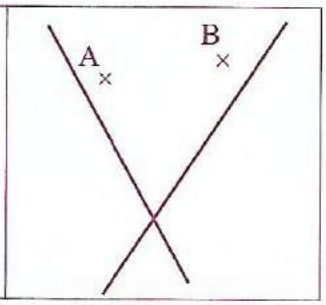


Construis à l'aide du compas uniquement les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C).

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1

Soit (D) et (D') deux droite sécantes et deux points distincts A et B comme indiqués ci-contre.
Détermine un point P sur (D) et un point Q sur (D') tels que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

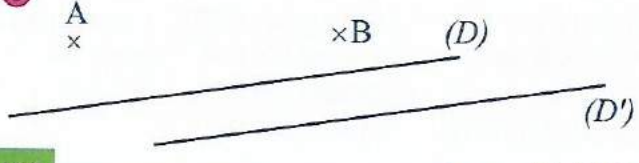


2 Soit (D) et (D') deux droites sécantes, A et B deux points n'appartenant à aucune de ces droites.
Construis un parallélogramme ABCD ayant l'un de ses sommets sur (D) et l'autre sur (D').

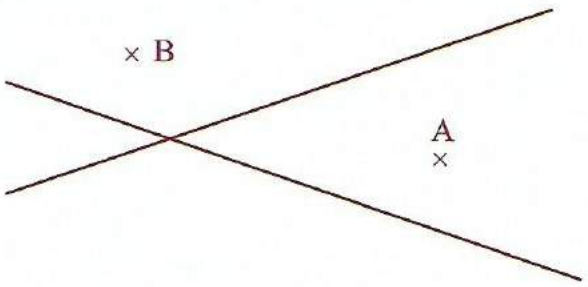
3 Soit (D) et (D') deux droites strictement parallèles et A n'appartenant à aucune de ces droites.
Construis un point M sur (D) et un point N sur (D') tels que A soit le milieu du segment [MN].

4 On donne deux droites (D) et (D') et deux points A et B.
Détermine dans chacun des deux cas ci-dessous, les points M de (D) et N de (D') tels que
d(A,M) + d(M,N) + d(N,B) soit la plus petite possible.

a)



b)



5 ABC est un triangle ; I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AB] et [AC] et D est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). On note (Δ) la médiatrice de [JK].

1) a) Fais la figure

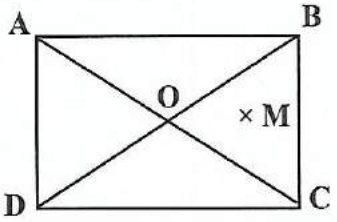
b) Démontre que (Δ) est la médiatrice de [DI].

2) Démontre que : $mes\widehat{DJI} = mes\widehat{DKI}$.

6 (Δ) et (D) sont deux droites sécantes en O.
A et B sont deux points distincts donnés dans un même secteur angulaire.
1. Construis un point M sur (D) et un point N sur (Δ) tels que ABMN soit un parallélogramme.
Donne un programme de construction.
2. Détermine le lieu géométrique des points M lorsque N décrit la droite (Δ).

7 MNPQ est un parallélogramme qui n'est pas un losange.
(D) est la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire à la droite (NQ).
Construis à la règle non graduée la perpendiculaire à (NQ) passant par P.

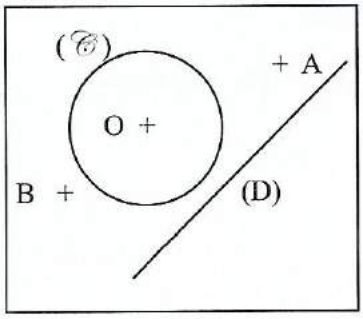
8 ABCD est un parallélogramme de centre O et M un point du plan.



Construis l'image de M par la symétrie de centre O en utilisant seulement la règle non graduée.
Donne un programme de construction.

9 A et B sont deux points donnés.
Le cercle (C), de centre A et de rayon AB, est sécant à une droite (Δ) ne contenant pas le point B.
Construis un point E sur la droite (Δ) et un point F sur le cercle (C) tels que le quadrilatère BAEF soit un parallélogramme.
Donne un programme de construction.

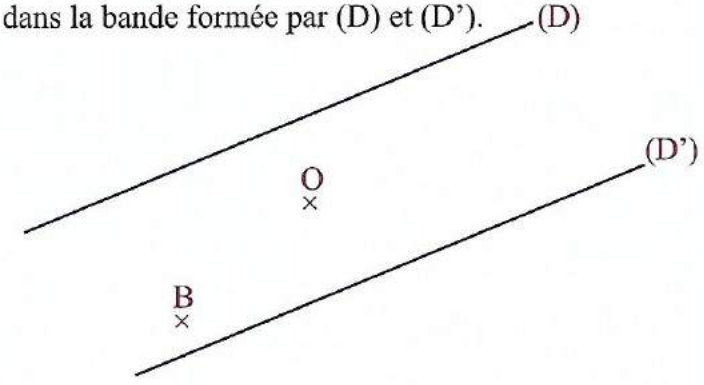
10 Sur la figure ci-dessous ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, A et B sont deux points extérieurs au cercle ($\mathscr{C}$) et (D) est une droite.
(D) et ($\mathscr{C}$) n'ont pas de point en commun.
Construis un point K sur (D) et un point T sur ($\mathscr{C}$) tels que ABTK soit un parallélogramme.
Donne un programme de construction.
On pourra utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



11 On donne une droite (D) et deux points A et B n'appartenant pas à (D) et situés dans le même demi-plan limité par (D).
Construis le point M de la droite (D) tel que la distance MA + MB soit minimale.

12 On donne le triangle ABC et M un point appartenant au segment [BC].
Construis le point P de la droite (AB) et le point Q de (AC) tels que la distance MP + MQ + PQ soit minimale.

13 La figure ci-dessous est constituée de deux droites (D) et (D'), d'un point O tel que (D') soit symétrique de (D) par rapport à O et d'un point B qui se trouve dans la bande formée par (D) et (D').



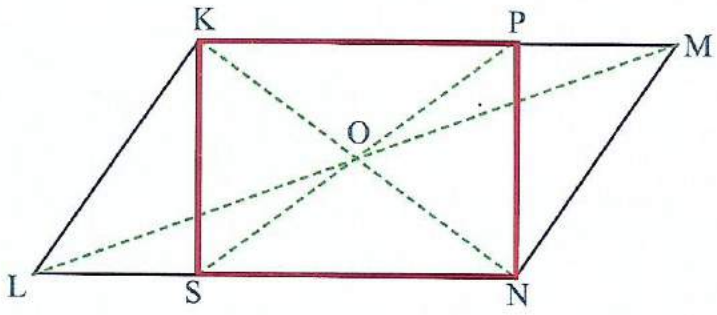
Construis à la règle non graduée uniquement le symétrique de B par rapport à O.

SITUATION D'ÉVALUATION

1

La parcelle d'un riche cultivateur a la forme d'un parallélogramme KMNL de centre O qui n'est pas un losange.

Dans le souci de l'éclairer, il décide d'y placer des lampadaires. Mais, pour plus d'esthétique, il souhaiterait que les lampadaires soient sur la parcelle et disposés de façon parallèle à partir de deux sommets opposés. Il sollicite un technicien qui lui propose le plan ci-contre avec les détails suivants :



- P est le projeté de N sur (KM) ;
- S est le symétrique de P par rapport au point O ;
- [KS] et [PN] sont les segments sur lesquels doivent être déposés les lampadaires.

Rentré à la maison, le riche cultivateur présente le plan à son fils qui lui dit que ce plan ne répond pas à ses aspirations car les droites (KS) et (PN) ne sont pas parallèles.

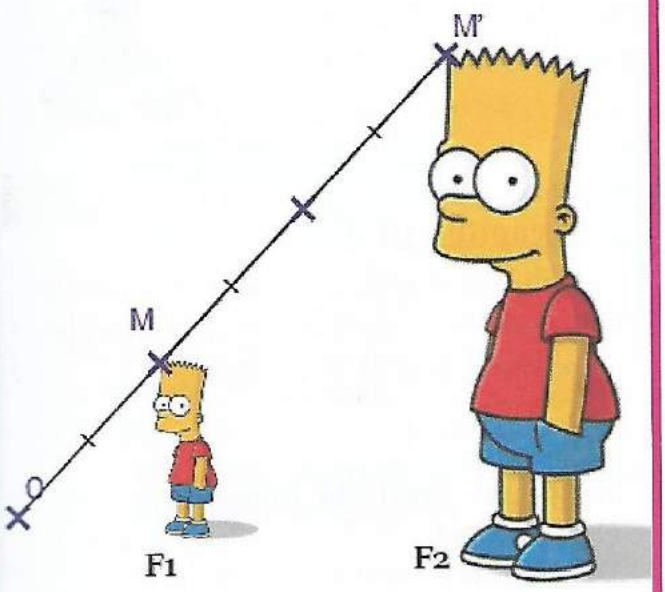
Découragé, il sollicite ton aide pour comprendre si son fils a raison.

❶ Détermine l'image de (PN) par la symétrie centrale de centre O.

❷ Démontre si le fils a raison ou pas.

Leçon 14

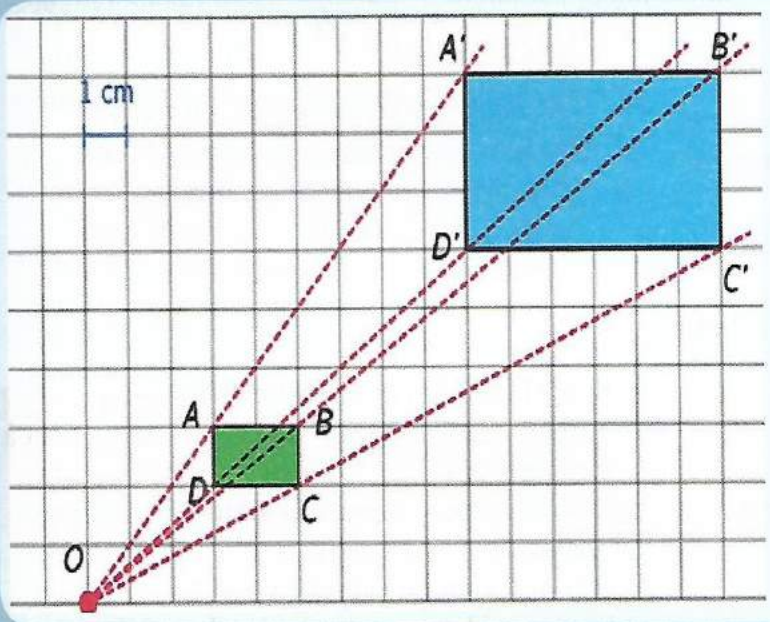
HOMOTHÉTHIES



Habiletés et contenus

- **Connaitre :** la définition d'une homothétie ; la propriété relative à l'alignement d'un point ; la propriété relative aux points invariants par une homothétie ; la propriété fondamentale de l'homothétie ; les propriétés relatives aux images de figures simples par une homothétie ; les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une homothétie ; les propriété relatives à la caractérisation d'une homothétie ; les propriétés relatives à la multiplication des longueurs et des aires par une homothétie.
- **Construire :** l'image d'un point par une homothétie en utilisant la définition ; l'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle par un homothétie , l'image d'un point par une homothétie définie par une de ses caractéristiques.
- **Trouver :** l'image d'un point par une homothétie ; le rapport d'une homothétie caractérisée par deux points et leurs images.
- **Démontrer :** que deux droites sont parallèles en utilisant une homothétie ; que deux droites sont perpendiculaire en utilisant une homothétie ; une égalité angulaire en utilisant une homothétie ; le parallélisme des droites ; qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une homothétie.
- **Traiter une situation :** faisant appel aux homothétie.

Situation d'apprentissage



Lors d'une projection de film organisée par le club de mathématiques du lycée, tu t'aperçois que la pellicule AB CD, projetée sur le grand écran est transformée en A'B'C'D'.
Curieux, tu décides de comprendre ce phénomène d'agrandissement en t'informant sur les homothéties

Activité 1 Définition

1. Place deux points distincts O et M sur ton cahier.
2. Construis le point M' du plan tel que : $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$
3. Marque un autre point P et construis P' tel que : $\overrightarrow{OP'} = -2\overrightarrow{OP}$
4) Justifie que la correspondance qui à tout point M associe le M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$ est une application.

Récapitulatif

- *Etant donné un point O, l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$ est appelée l'homothétie de centre O et de rapport 3.*
- *Le point M' est appelé l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport 3 et on note $M' = h_{(O;3)}(M)$*



Activité 2 Alignement du centre avec le point et son image

On considère l'homothétie h de centre O et de rapport k. On désigne par M' l'image d'un point M par h.
Justifie que les point M, M' et O sont alignés.

Récapitulatif

Si le point M' est l'image d'un point M par une homothétie de centre O, alors les points O, M et M' sont alignés

Activité 3 Point invariant d'une homothétie

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k
On se propose de déterminer suivant les valeurs de k, l'ensemble des points invariants par h, c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan tels que : $h(M) = M$.

1. Justifie que : $h(M) = M$ équivaut à $(1-k)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$
2. Déduis de cette égalité l'ensemble des points invariants par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Récapitulatif

- *Une homothétie de rapport différent de 1 admet pour seul point invariant, son centre.*
- *L'homothétie de rapport 1 est l'application identique du plan, c'est-à-dire l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M.*



Activité 4 Propriété fondamentale de l'homothétie

On considère l'homothétie h de centre O et de rapport k, A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par h.
Justifie que : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Récapitulatif

Si deux points A et B ont pour images respectives les points A' et B' par une homothétie de rapport k, alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

Activité 5 Image d'une droite par une homothétie

On donne un point O, un nombre réel k non nul et une droite (AB).
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.
On se propose de démontrer que l'image de la droite (AB) est la droite (A'B') où $A' = h(A)$;
$B' = h(B)$ et que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

1. a) Soit M un point de la droite (AB).
   Justifie que l'image M' de M par h appartient à la droite (A'B').
   b) Déduis-en que l'image de la droite (AB) par h est inclus dans la droite (A'B').
2. Soit N' un point de la droite (A'B'),
   a) Justifie qu'il existe un point N tel que $N' = h(N)$.

b) Justifie que N appartient à la droite (AB)
c) Justifie la droite (A'B') est incluse dans l'image de la droite (AB) par h.

3. Déduis de 1) et 2) l'image de la droite (AB) par l'homothétie h.
4. Justifie que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
5. Donne une conclusion à cette activité .

Récapitulatif

L'image de la droite (AB) par h est inclus dans la droite (A'B'). On note : $h(AB) \subset (A'B')$.
La droite (A'B') est incluse dans l'image de la droite (AB) par h.
On a : $h(AB) \subset (A'B')$ et $(A'B') \subset h(AB)$ donc $h(AB) = (A'B')$.
L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

Activité 6 Image d'une demi-droite par une homothétie

Soit O un point, [AB) une démi-droite et k un nombre réel non nul. On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport k. Soit A' et B' les images respectives de A et B par h.

1. Soit M un point de la demi-droite [AB).
   a) Justifie que l'image M' de M par h appartient à la demi-droite [A'B').
   b) Conclus.
2. Soit N' un point de la demi-droite [A'B').
   a) Justifie qu'il existe un point N de [AB) tel que : $N' = h(N)$.
   b) Conclus.
3. Donne une conclusion à cette activité.

Récapitulatif

1. $h([AB)) \subset [A'B')$ 2. $[A'B') \subset h([AB))$ 3. $h([AB)) = [A'B')$

L'image de la demi-droite [AB) par l'homothétie h est la demi-droite [A'B').

Activité 7 Image d'un segment par une homothétie

On donne un point O du plan et un segment quelconque [AB].
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

1. On se propose de démontrer que l'image du segment [AB] est le segment [A'B'] où $A' = h(A)$; $B' = h(B)$ et que :
$A'B' = |k|\ AB$. Soit M un point du plan et M' le point tel que $M' = h(M)$
   a) Justifie que si $M \in [AB]$ alors $M' \in [A'B']$
   b) Soit N'un point du segment [A'B'].
   Justifie qu'il existe un point N du segment [AB] tel que : $N' = h(N)$.
2. Justifie que : $A'B' = |k|\ AB$
3. Formule une conclusion de cette activité.



Récapitulatif

- *L'image du segment [A B] par l'homothétie h est le segment [A' B'].*
- *L'homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport.*

Activité 8 Image d'un cercle par une homothétie

On donne un cercle (C) de centre O et de rayon r et h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

On se propose de démontrer que l'image du cercle (C) par h est le cercle (C') de centre O' et de rayon $|k| \times r$ où $O' = h(O)$.

1. a) Soit M un point de (C).

Justifie que l'image M'de M par l'homothétie h appartient au cercle (C').

b) Soit N'un point de (C').

Justifie qu'il existe un point N de (C) tel que : $N' = h(N)$.

2. Formule une conclusion de cette activité.

Récapitulatif

L'image d'un cercle de centre O et de rayon r par une homothétie de rapport k est le cercle de centre O' et de rayon $|k| \times r$ où $O' = h(O)$.

Activité 9 Conservation du milieu d'un segment

Soit un segment [AB] et I le milieu de ce segment. On considère une homothétie de rapport k et on note A', B' et I' les images respectives des points A, B et I par h.

1. En utilisant la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, justifie que I' est le milieu du segment [A' B'].
2. Formule une conclusion de cette activité.

Récapitulatif

L'image du milieu d'un segment par une homothétie, est le milieu de l'image de ce segment



Activité 10 Conservation des angles orientés

Soit O un point du plan. On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'images respectives A', B' et C' par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

1. Compare Mes $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ et Mes $(\overrightarrow{B'A'}; \overrightarrow{B'C'})$.
2. Formule une conjecture à partir de cette activité.



Récapitulatif

On admettra que les homothéties conservent les angles orientés.

Activité 11 Conservation du parallélisme

On considère deux droites parallèles (D) et (Δ) d'images respectives (D') et (Δ') par une homothétie de rapport k.

1. Justifie que les droites (D') et (Δ') sont aussi parallèles.
2. Formule une conclusion de cette activité.



Récapitulatif

Les homothéties conservent le parallélisme.

Activité 12 Conservation de l'orthogonalité

On considère deux droites perpendiculaires (D) et (Δ) d'images respectives (D') et (Δ') par une homothétie de rapport k.

1. Justifie que les droites (D') et (Δ') sont aussi perpendiculaires.
2. Formule une conclusion à partir de cette activité.



Récapitulatif

Les homothéties conservent l'orthogonalité.

Activités de découverte

Activité 13 Caratérisation d'une homothétie par son centre, un point et son image

Etant donné trois points deux à deux distincts O, B et C.
Recherchons l'existence d'une homothétie ayant pour centre le point O et qui applique le point B sur le point C.

1. Justifie que si les points O, B et C ne sont pas alignés, il n'existe aucune homothétie de centre O qui applique B sur C
2. Si les points O, B et C sont alignés, vérifie que l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$ applique B sur C.



Récapitulatif

On peut caractériser une homothétie par son centre, un point et son image.

Activité 14 Caratérisation d'une homothétie par son rapport, un point et son image

On considère deux points distincts A et A' et k un nombre réel non nul, différent de 1.
Justifie qu'il existe un point O et un seul tel que $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.
Déduis-en qu'il existe une et une seule homothétie de rapport k qui applique A sur A'.



Récapitulatif

k étant un nombre réel non nul différent de 1, A et A' étant deux points distincts, on peut caractériser l'homothétie par son rapport, un point et son image. Le centre O est déterminé par :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{k-1}\overrightarrow{AA'}$$

Activité 15 Caratérisation d'une homothétie par deux points distincts et leurs images

Etant donné quatre points A, B, A' et B' tels que : $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Recherchons l'existence d'une homothétie qui applique A sur A' et B sur B'.

1. Si une telle homothétie existe, justifie que : (AB) // (A'B') et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.
2. Cas où les points A, B, A' et B' ne sont pas alignés.

a) Justifie que les droites (AA') et (BB') sont sécantes.

b) Caractérise alors l'homothétie qui applique A sur A' et B sur B'.

3. Cas où les points A, B, A' et B' sont alignés.
Justifie que l'homothétie de rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. qui applique A sur A' est l'unique homothétie qui satisfasse aux conditions du problème.



Récapitulatif

Une homothétie est caractérisée par deux points distincts et leurs images.

Activité 16 Construction de l'image d'un point par une homothétie définie par son centre, un point et son image

On considère trois points alignés et deux à deux distincts I, J et K.
Soit M un point n'appartenant pas à la droite (IJ). On se propose construire l'image du point M par l'homothétie h de centre I qui applique J sur K.

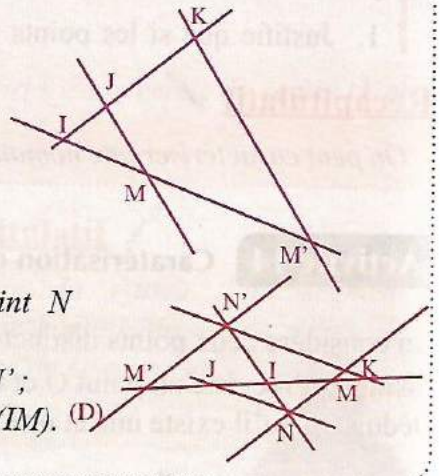


1. Justifie que l'image M' de M par h appartient à la droite (IM).
2. Justifie que M'appartient à la parallèle à la droite (JM) passant par K.
3. Déduis des questions précédentes la construction du point M'.
4. Rédige un programme de construction du point M'.
5. Rédige un programme de construction du point M' dans le cas où le point M appartient à la droite (IJ).

Récapitulatif

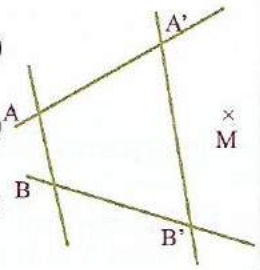
Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par son centre, un point et son image, on peut procéder de la façon suivante :

- *Cas ou M n'appartient pas à la droite (IJ)*
  1. *Construire la droite (IM) ;*
  2. *Construire la droite (JM) ;*
  3. *Construire la parallèle (D) à la droite (JM) et passant par K ;*
  4. *Le point M'est le point d'intersection des droites (D) et (IM).*
- *Cas où M appartient à la droite (IJ)*
  1. *Construire grâce à la méthode précédente l'image N' d'un point N quelconque n'appartenant pas à la droite (IJ) ;*
  2. *Construire la parallèle (D) à la droite (MN) et passant par le point N' ;*
  3. *Le point M'est le point d'intersection de la droite (D) et de la droite (IM).*



Activité 17 Construction de l'image d'un point par une homothétie définie par deux points distincts et leurs images

Sur la figure ci-contre,
• les droites (AB) et (A'B') sont parallèles ;
• les droites (AA') et (BB') sont sécantes.
Soit h l'homothétie définie par : $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$.
On se propose de déterminer l'image M' d'un point M par l'homothétie h (cas où M n'appartient ni à la droite (AA'), ni à la droite (BB').

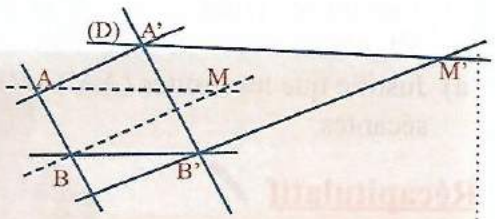


1. Justifie que le point M' appartient à la droite (D) parallèle à (AM) et passant par le point A'.
2. a) Justifie que le point M' appartient à la droite (D_1) passant par B' et parallèle à la droite (BM).
   b) Justifie (D) et (D_1) sont sécantes.
3. Déduis des consignes précédentes un programme de construction du point M'
4. Examine le cas où M appartient à la droite (AA') ou à la droite (BB').

Récapitulatif

Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par deux points distincts et leurs images, on peut procéder de la façon suivante :
Cas où M n'appartient ni à la droite (AA'), ni à la droite (BB')

1. *Construire la droite (AM) ;*
2. *Construire la droite (BM) ;*
3. *Construire la droite (D) parallèle à (AM) et passant par A ;*
4. *Construire la droite (D_1) parallèle à (BM) et passant par B' ;*
5. *M'est le point d'intersection des droites (D) et (D_1).*



Remarque

Dans le cas où M appartient à l'une des droites (AA') ou (BB'), on se ramène aucas de l'activité 15 en construisant l'image d'un point n'appartenant pas à l'une des droites (AA') ou (BB'),

Résumé de la leçon



I DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. Définition

Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul.

On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application du plan dans lui-même qui, a tout point M du plan associe le point M' du plan tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Exemple

- L'homothétie de rapport 1 est l'application identique du plan.
- L'homothétie de centre O et de rapport -1 et la symétrie centrale de centre O.



2. Conséquence de la définition

Propriété

M, M' et O sont trois points du plan et k un nombre réel non nul.
Si M'est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k, alors les points O, M et M' sont alignés.

3. Point invariant

Propriété

O est un point du plan et k un nombre réel non nul et différent de 1.
L'homothétie de centre O et de rapport k non nul et différent de 1 a un seul point invariant : c'est le point O.

4. Propriété fondamentale

Propriété

M, N, M' et N' sont des points du plan et k un nombre réel non nul.
Si M et N sont les images respectives des points M' et N' par une homothétie de rapport k, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

II IMAGES DE FIGURES SIMPLES



1. Image d'une droite, d'une demi-droite

Propriété

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite.

Remarque

Soit h est une homothétie de centre O et (D) une droite du plan.
Si O appartient à la droite (D), alors l'image de la droite (D) par h est la droite (D) elle-même.

Définition

Lorsque l'image d'une droite (D) par une homothétie h est la droite (D) elle-même, on dit que la droite (D) est globalement invariante par l'homothétie h.

2. Image d'un segment

Propriété

Si A et B sont deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par une homothétie de rapport k, alors l'image du segment [AB] par cette homothétie est le segment [A'B'] et on a : $A'B' = |k| AB$.

Propriété

- L'homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue du rapport.
- L'homothétie multiplie les aires de surface plane par le carré de son rapport.

2. Image d'un cercle



Propriété

L'image du cercle (C) de centre O et de rayon r par une homothétie h de centre O et de rapport k est le cercle (C') de centre h(O) et de rayon $|k| r$.

III PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

1. Conservation de l'alignement

Propriété

Des points alignés ont pour images par une homothétie des points alignés.

2. Conservation du milieu d'un segment

Propriété

Le milieu d'un segment a pour image par une homothétie le milieu de l'image de ce segment.

3. Conservation du parallélisme

Propriété

Deux droites parallèles ont pour images par une homothétie deux droites parallèles.

4. Conservation de l'orthogonalité

Propriété

Deux droites perpendiculaires ont pour images par une homothétie deux droites perpendiculaires.

5. Conservation des angles orientés



Propriété

Un angle orienté a pour image par une homothétie un angle orienté qui lui est égal.

IV CARACTÉRISATION D'UNE HOMOTHÉTIE

1. Homothétie caractérisée par son centre, un point et son image



Propriété

Soient A, B, et C trois points alignés et deux à deux distincts du plan.
Il existe une homothétie et une seule, de centre A qui applique B sur C.

2. Homothétie caractérisée par son rapport, un point et son image

Propriété

Soient deux points distincts A et B et k un réel non nul différent de 1.
Il existe une homothétie et une seule, de rapport k qui applique A sur B.



3. Homothétie caractérisée par deux points distincts et leurs images

Propriété

Soient M, N, N' et M' quatre points deux à distincts tels que : (MN)// (M'N') et (MM') et (NN') sécantes.
Il existe une homothétie et une seule qui applique M sur M' et N et N'.

V CONSTRUCTION DE L'IMAGE D'UN POINT PAR UNE HOMOTHÉTIE

1. Homothétie definie par son centre et son rapport

MÉTHODE 1

Pour construire l'image M' de M par une homothétie de centre O de rapport k, on utilise l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

2. Homothétie définie par son centre, un point et son image

MÉTHODE 2

Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par son centre I, un point J et son image K, on peut procéder de la façon suivante :

- Cas où M n'appartient pas à la droite (IJ)
  - Construire la droite (IM) ;
  - Construire la droite (JM) ;
  - Construire la parallèle (D) à la droite (JM) et passant par K ;
  - Le point M'est le point d'intersection des droites (D) et (IM).
- Cas où M appartient à la droite (IJ)
  - Construire grâce à la méthode précédente l'image N' d'un point N quelconque n'appartenant pas à la droite (IJ) ;
  - Construire la parallèle (D) à la droite (MN) et passant par le point N' ;
  - Le point M'est le point d'intersection de la droite (D) et de la droite (IM).

3. Homothétie définie par deux points distincts et leurs images.

MÉTHODE 3

Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par deux points distincts A et B et leurs images respectives A' et B', on peut procéder de la façon suivante :

- Cas où M n'appartient ni à la droite (AA'), ni à la droite (BB')
  - Construire la droite (AM) ;
  - Construire la droite (BM) ;
  - Construire la droite (D) parallèle à (AM) et passant par A ;
  - Construire la droite (D_1) parallèle à (BM) et passant par B'.
- cas où M appartient à l'une des droites (AA') ou (BB')
  - Construire grâce à la méthode précédente l'image N' d'un point N quelconque n'appartenant ni à (AA'), ni à (BB') ;
  - Construire la parallèle (D) à la droite (MN) et passant par le point N' ;
  - Le point M'est le point d'intersection de la droite (D) et de la droite (AA').

EXERCICES DE FIXATION

Définition et premières propriétés

1 Traduis par une égalité vectorielle les affirmations suivantes :

1. M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3 ;
2. B est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$;
3. F est l'image de E par l'homothétie de centre I et de rapport 7.

2 Interpréter les égalités vectorielles ci-dessous en utilisant une homothétie.

1. $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{OM} = -3\overrightarrow{M'O}$
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$

3 Dans chacun des cas ci-dessous, précise le rapport de l'homothétie de centre O qui applique M sur M'.

a) O — M — M'

b) O — M' — M

c) M — O — M'

4 Parmi les trois affirmations ci-dessous, recopie sur ton cahier celle qui est vraie.

- Si M'est l'image du point M par l'homothétie de centre O de rapport 3, alors $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{OM}$
- Si M'est l'image du point M par l'homothétie de centre O de rapport 3, alors $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$
- Si OM' = 3 OM alors M est l'image de M' par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

5 h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -4 et M' = h (M)

Parmi les affirmations suivantes, recopie la bonne réponse.

1. Ω est le milieu du segment [MM']
2. Les points Ω, M et M' sont alignés
3. $\overrightarrow{\Omega M} = -4\overrightarrow{\Omega M'}$

6 Parmi les affirmations suivantes, recopie la bonne réponse.

1. L'homothétie de rapport différent de 1 admet un seul point invariant.
2. L'homothétie de rapport différent de 1 admet une infinité de points invariants
3. L'homothétie de rapport différent de 1 n'admet aucun point invariant.

7 Parmi les trois affirmations ci-dessous, recopie sur ton cahier celle qui est vraie.

- ABC étant un triangle, il existe une homothétie de centre A qui applique B sur C
- L'image d'un carré par une homothétie de rapport 2 est un carré dont l'aire est aussi multiplié par 2
- L'image d'un carré par une homothétie de rapport 2 est un carré dont l'aire est multiplié par 4.

8 Pour chaque affirmation, indique la bonne réponse dans la quatrième colonne du tableau par les chiffres 1, 2 ou 3

Affirmations	1	2	3	Réponse
2 AC = AK	C est l'image de K dans l'homothétie de centre A et de rapport 2	K est l'image de C dans	A est l'image de C dans l'homothétie de centre K et de rapport 2	
h est une homothétie de rapport −2 telle que h(A) = B et h(C) = E	$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BE}$	$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AC}$	
h est une homothétie de rapport −3	L'image d'un cercle (C) par h est un cercle de même rayon	L'image d'un cercle (C) par h est un cercle de rayon trois fois plus petit que celui de (C)	L'image d'un cercle (C) par h est un cercle de rayon trois fois plus grand que celui de (C)	

Les exercices

9 Traduis chacune des égalités ci-dessous par une phrase du type : ..... est l'image de ..... par .....

Exemple : $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ se traduit par : B est l'image de A par l'homothétie de centre I

et de rapport –1

1. $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$
2. $3\overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GC}$
3. $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Propriétés de conservation

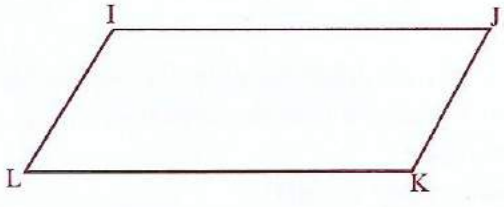
10 Recopie sur ton cahier ces affirmations et barre celle qui n'est pas vérifiée à la fois par la symétrie orthogonale et l'homothétie

1. La conservation des angles géométriques.
2. La conservation des longueurs.
3. La conservation du parallélisme.
4. Le symétrique d'une droite est une droite parallèle

11

1. Construis un triangle ABC rectangle en A.
2. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 1,5.
3. Construis les points A' et B' tels que : $h(A) = A'$ et $h(C) = C'$.
4. Justifie que les droites (A'B) et (A'C') sont perpendiculaires.

12 Sur la figure ci-dessous IJKL est un parallélogramme.



Soit h l'homothétie de centre K et de rapport –0,5

On pose : $h(I) = I'$; $h(J) = J'$; $h(L) = L'$

1. Reproduis la figure
2. Construis les points I' ; J' et L'
3. Démontre que les droites (I'J') et (L'K) sont parallèles.

13 Place deux points distincts A et B

Construis l'image B' du point B par l'homothétie de centre A et de rapport –2

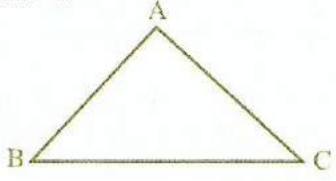
14 Place deux points distincts A et B.

1. Construis l'image A' du point A par l'homothétie de centre B et de rapport 2
2. Construis l'image B' du point B par l'homothétie de centre A et de rapport –2

Propriétés fondamentale

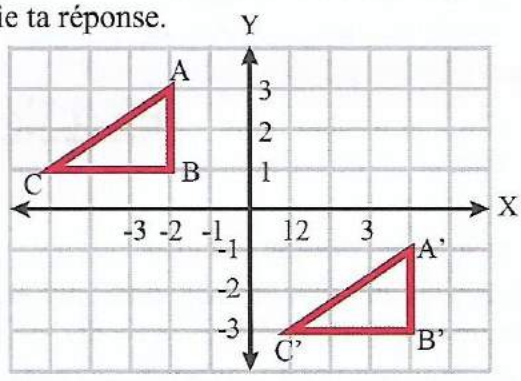
15 Sur la figure ci-dessous ABC est un triangle.

1. Construis le point I tel que : $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Construis la parallèle à (BC) passant par I et qui coupe (AC) en J .
3. Détermine le rapport de l'homothétie qui applique I sur B et J sur C.



16

1. Dis si tu peux trouver une homothétie qui applique A sur A', B sur B' et C sur C'.
2. Justifie ta réponse.



Construction d'images par une homothétie

17 Reproduis puis construis l'image du point M par l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ qui applique A sur B.



18

1. Trace sur ton cahier une droite (D) puis marque un point I n'appartenant pas à la droite (D).
2. Construis la droite (D'), image de (D) par l'homothétie de centre I et de rapport 3.

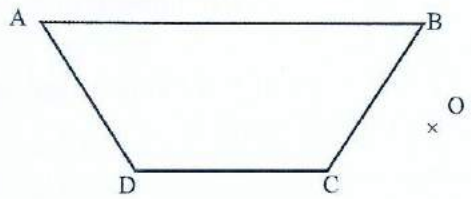
19

1. Construis un triangle ABC.
2. Construis l'image du segment [AB] par l'homothétie de centre C et de rapport –2.

20

1. Construis le cercle (C) de centre O et de rayon 3.
2. Place un point A et construis l'image (C') du cercle (C) par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

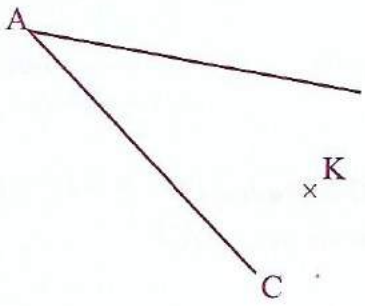
21 ABCD est un trapèze



Reproduis la figure ci-dessus et construis l'image du point O par l'homothétie qui applique A sur D et B sur C.

22

1. Reproduis la figure ci-dessous
2. Construis l'image B'A'C'de l'angle BAC par l'homothétie de centre K et de rapport –2



23

1. Construis un losange MNPQ de centre O.

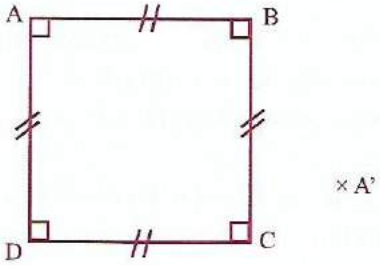
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport –1

2. Reproduis et complète le tableau ci-contre :

h	
M	
N	
Q	
O	
(MN)	
[QM]	

24

1. Reproduis la figure ci-dessous.
2. Retrouve le centre O de l'homothétie h de rapport 1,5 qui applique le point A sur le point A'.
3. Construis l'image du carré ABCD par cette homothétie.



EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

1

1. Construis un triangle EFG isocèle en F.
2. Place le point L image, du point E par l'homothétie de centre F et de rapport –1.
3. Démontre que EGL est un triangle rectangle.

2 Construis un parallélogramme EFGP de centre O .

1. Place le point K tel que F soit le milieu du segment [EK].
2. On note L l'image de K par l'homothétie de centre O et de rapport –1.

Démontre que P est le milieu du segment [LG].

3

Soit ABCD un parallélogramme de centre O, et h l'homothétie de centre O et de rapport -1.

1. Fais une figure
2. Détermine : h(A) et h(B)
3. Détermine h(AB) et h(AC)

La parallèle à la droite (DB) passant par C coupe (AB) en E et (AD) en K.

On considère l'homothétie h' de centre A qui applique B sur E

4. Démontre que h'(D) = K.
5. Compare les aires des triangles ABD et AEK.

Les exercices

4 On donne trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$.

1. Démontre qu'il existe une homothétie h et une seule qui transforme A en B et B en C .
2. Précise le centre et le rapport de *h*.

5 On donne deux points distincts du plan O et O' et deux cercles (C) et (C') de centres O et O', de rayons respectifs R et R' tels que : R' = 3R.

Détermine les homothéties qui transforment (C) en (C').

6 On donne deux droites sécantes (D) et (Δ) et deux points distincts A et G n'appartenant ni à (D) ni à (Δ).

Construis un triangle ABC ayant pour centre de gravité le point G et tel que B soit sur (Δ) et le milieu B' de [AC] soit sur D.

7 Soit *h* une homothétie de rapport *k* ($k \neq 0$) ; soit (P) un rectangle de cotés *a* et *b*.

($a > 0$ et $b > 0$) ; soit (P') l'image de (P) par h .

1. Détermine *k* pour que le périmètre de (P') soit le double de celui de (P).
2. Détermine *k* pour que l'aire de (P') soit le double de celui de (P).

8 Soit ABC un triangle. Trouve un carré DEFG inscrit dans le triangle ABC tel que :

- deux des sommets du carré soient sur [AB] ;
- un troisième sur [AC] ;
- et le quatrième sur [BC].

9 On considère deux points distincts E et F. N est un point tel que le triangle EFN soit rectangle en N et G le centre de gravité du triangle EFN.

1. Détermine l'ensemble des points G lorsque N décrit le plan privé de la droite (EF).
2. Construis cet ensemble.

10 A et B sont deux points distincts du plan.

On considère le cercle (C) de diamètre [AB] et O le point tel que : $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

A tout point M de (C), on associe le point R tel que [MR] soit un diamètre de (C).

On appelle Q le point d'intersection des droites (MO) et (AR).

1. Démontre qu'il existe une homothétie qui applique A sur B et Q sur M.
2. Déduis-en l'ensemble des points Q lorsque M décrit (C).

11 On considère (D) et (D') deux droites sécantes en un point O.

A est un point n'appartenant ni à (D), ni à (D').

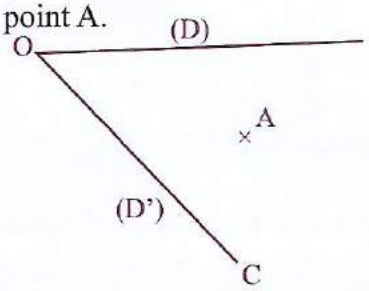
Construis deux points P et Q tels que :

- P appartient à (D) ;
- Q appartient à (D') ;
- $\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QP} = \vec{0}$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

1 Reproduis la figure ci-dessous puis construis un cercle (C) tel que :

1. (C) tangent à (D).
2. (C) tangent à (D').
3. (C) passe par le point A.



2 Soit un triangle ABC, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC], et [AB].

On considère l'application qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$.

1. Démontre que : pour $k = \frac{1}{2}$, *f* est une homothétie que l'on caractérisera.
2. (*On pourra utiliser le point G tel que* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$).
3. Détermine l'image du triangle ABC par cette homothétie.

❹ Démontre que : pour $k = -1$, f est une translation que l'on caractérisera.

3 On considère un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de CD, J le point d'intersection des droites (BI) et (AC) et K le point d'intersection des droites (KI) et (BD).

❶ Justifie que J est le centre de gravité du BCD.

❷ Démontre qu'il existe une homothétie qui applique J sur B et K sur A.

❸ Déduis-en que les droites (AB) et (KJ) sont parallèles.

❹ Compare l'aire du parallélogramme à celle du triangle IJK.

4 On considère un trapèze ABCD de base [AB] et [CD]. Soit O le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

❶ Justifie qu'il existe une homothétie h de centre O qui applique C sur A.

❷ Déterminer h(A).

❸ On pose : B' = h(B). Justifie que B' est un point de la droite (CD).

❹ Déduis-en que B' = D.

❺ Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD], démontre que les points O, I et J sont alignés.

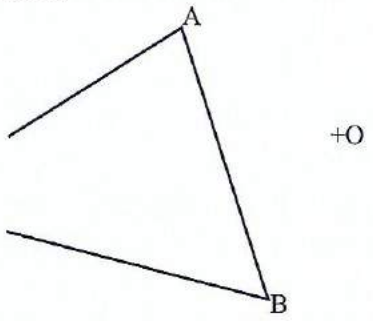
❻ On suppose que : ABCD n'est pas un parallélogramme. On note O' le point d'intersection des droites(AD) et (BC), démontre que les points O', I et J sont alignés.

5 La figure ci-contre présente un triangle dont une partie du triangle ABC a été effacée.

Sans prolonger les côtés [AC] et [BC], tu décides de construire l'image du point C par l'homothétie de centre O et de rapport 2

❶ Reproduis la figure sur ton cahier

❷ Donne un programme de construction du point C' image du point C par l'homothétie de centre O et de rapport 2



SITUATIONS D'ÉVALUATION

1 Kouamé et sa petite sœur Aya viennent d'hériter d'un terrain ayant la forme d'un triangle ABC, rectangle en A tel que : AB = 80 mètres et AC = 250 mètres.

Kouamé décide d'octroyer à sa petite sœur une partie AEFK de ce terrain de telle sorte que AEFK soit un carré et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Il affirme avoir ainsi attribué à Aya 40% de l'aire total du terrain ABC. Aya conteste cette affirmation et exige un agrandissement de cette parcelle afin qu'elle obtienne un terrain carré AE'F'K' où F' est un point du segment [BC], K' un point du segment [AB] et E' un point du segment [AC].

Pour bien comprendre l'exigence de Aya et à l'aide d'un plan du terrain réalisé à l'échelle $\frac{1}{20}$, les deux héritiers essaient de représenter à l'intérieur du terrain ABC, le terrain carré AE'F'K', mais n'y arrivent pas. Témoin de cette situation, tu décides de les aider.

❶ Dis si l'affirmation de Kouamé relative à l'aire qu'il veut octroyer à sa petite sœur est juste ou fausse. (Justifie ta réponse)

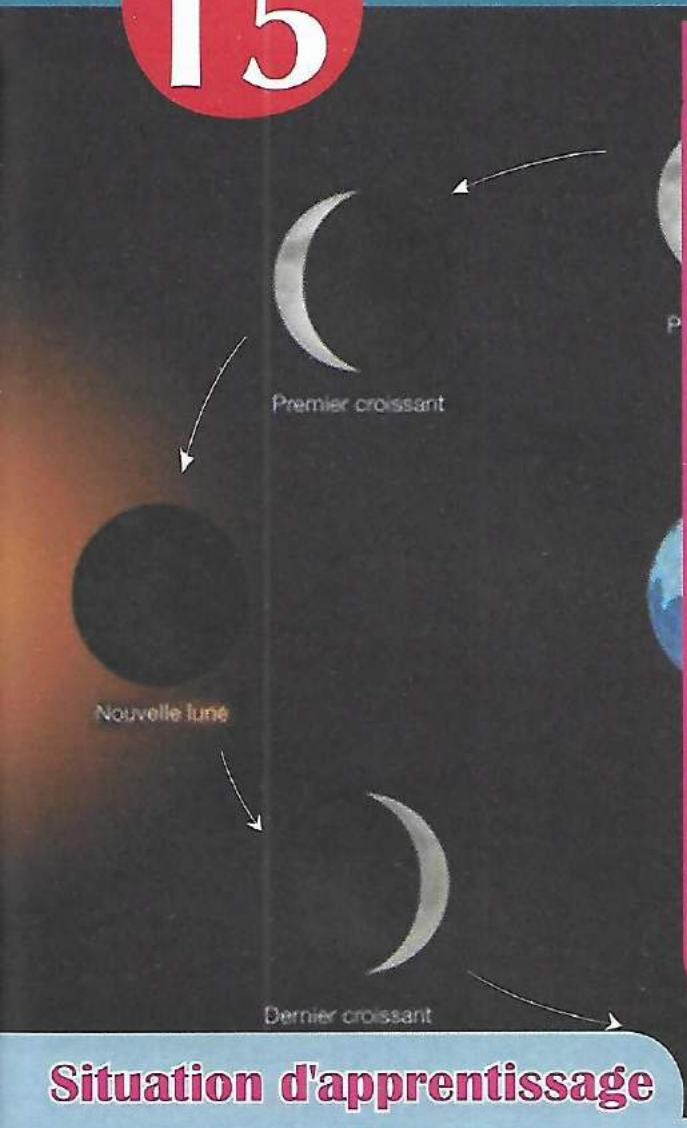
❷ Représente à l'échelle $\frac{1}{20}$, le terrain ABC, les terrains carrés AEFK et AE'F'K'.
(Tu justifieras toutes les étapes de tes constructions)

❸ On suppose que Aya a obtenu le terrain AE'F'K'. Détermine qui de Kouamé ou d'Aya a obtenu le terrain ayant la plus grande aire. (Justifie ta réponse).

Leçon

15

ROTATIONS

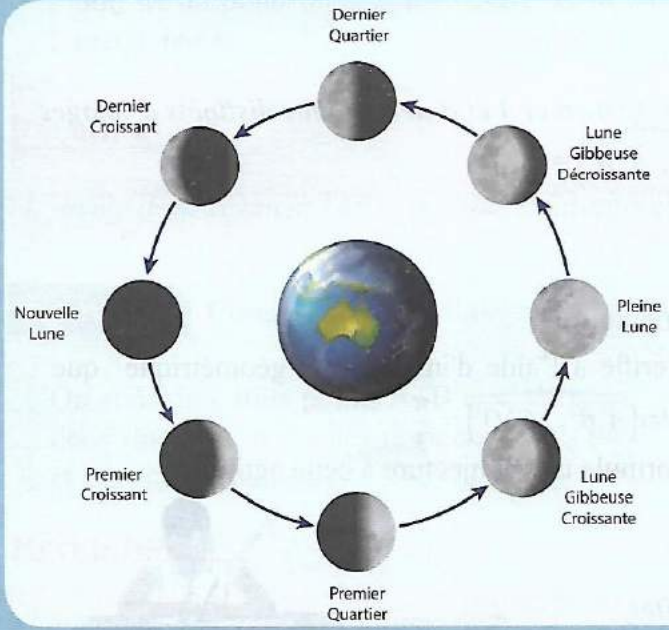


Habiletés et contenus

- **Connaître** : la défintiton d'une rotation ; la propriété relative aux points invariants par une rotation ; la propriété fondamentale de la rotation ; les propriétés relatives aux images de figures simples par une rotation ; les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une rotation ; les propriété relatives à la caractérisation d'une rotation.
- **Construire** : l'image d'un point par une rotation en utilisant la définition ; l'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle par une rotation.
- **Trouver** l'image d'un point par une rotation.
- **Démontrer** : que deux droites sont parallèles en utilisant une rotation ; que deux droites sont perpendiculaire en utilisant une rotation ; une égalité angulaire en utilisant une rotation ; qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une rotation.
- **Traiter une situation** faisant appel aux rotations.



Situation d'apprentissage



La figure ci-dessus indique les phases de la lune autour de la terre. On estime que la distance entre la lune et la terre est d'environ 384 000 kilomètres.
Les élèves de ta classe décident :
1) d'expliquer le passage de la phase « lune Gibbeuse croissant » à la phase «pleine lune ».
2) d'expliquer le passe de la phase « premier quartier » à la phase « dernier quartier ».

Activité 1 Définition

1. Place un point O sur ton cahier.
2. Place un autre point M sur ton cahier.
3. a) Construis un point M' du plan tel que :

OM = OM' et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Détermine le nombre de points M' que tu peux ainsi construire.

4. Supposons que M est égal à O. Conjecture la position du point M'.
5. A partir de ce qui précéde, justifie qu'il existe une application du plan dans le plan qui laisse le point O invariant et qui applique M sur M'.

Récapitulatif

Etant donné un point O, l'application du plan dans lui-même définie par :

- *Si M est distinct de O, alors l'image du point M est le point M' tel que : OM = OM' et* $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{2}$;
- *Si M = O, alors M'= O.*

Cette application est appelée la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$. *Le point M'est appelé l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

On note : $M' = r(M)$ *ou* $M' = r\left(O ; \frac{\pi}{2}\right)(M)$.

- *Par définition, le centre O d'une rotation d'angle non nul est le seul point invariant par r.*

Activité 2 Propriété fondamentale de la rotation

O, A et B étant trois points donnés et deux à deux distincts du plan, on considère la rotation r de centre O et d'angle α.

On désigne par A' et B' les images respectives des points A et B par la rotation r.

1. Construis A' et B' pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ puis pour $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.
2. Vérifie à l'aide des instruments géométriques dans chaque cas que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) = \alpha$ et A'B' = AB.
3. Formule une conjecture de cette activité.

Récapitulatif

On admet que si r est une rotation d'angle de mesure principale α et A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par r, alors : A'B' = AB et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) = \alpha$.

Activité 3 Conservation des angles orientés

1. Place dans le plan cinq points distincts O, A, B, C et D tels que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \frac{\pi}{3}$
2. Construis les points A', B', C' et D' images respectives des points A, B, C et D par la rotation de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.
3. Vérifie à l'aide d'instruments géométrique que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}}\right) = \frac{\pi}{3}$
4. Formule une conjecture à cette activité.

Récapitulatif

On admettra que toute rotation conserve les angles orientés.



Activité 4 Conservation du parallélisme

Soit O un point du plan.

On considère deux droites strictement parallèles (D) et (Δ) d'images respectives (D') et (Δ') par la rotation r de centre O et d'angle orienté α. Le point O n'appartient ni à (D), ni à (Δ).

(Pour les constructions, on prendra $\alpha = \frac{\pi}{3}$).

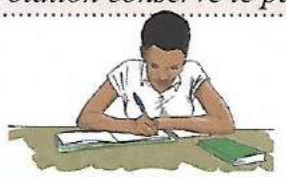
1. Place deux points distincts A et B sur la droite (D) et un point C sur la droite (Δ).
2. Construis le point E de la droite (Δ) tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

Construis les points A', B', C' et E' images respectives des points A, B, C et E par la rotation r.

1. Justifie que : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'E'}$.
2. Déduis-en que les droites (D') et (Δ') sont aussi parallèles.
3. Formule une conclusion à cette activité.

Récapitulatif

Toute rotation conserve le parallélisme.



Activité 5 Conservation de l'orthogonalité

Soit O un point du plan et α un élément de $]-\pi, \pi]$.

On considère deux droites perpendiculaires (D) et (Δ) d'images respectives (D') et (Δ') par la rotation r de centre O et d'angle orienté α. O n'est pas le point d'intersection de (D) et (Δ).

(Pour les constructions, on prendra $\alpha = \frac{\pi}{3}$)

1. Construis les droites (D') et (Δ')
2. En utilisant la propriété relative à la conservation des mesures d'angles orientés, justifie que les droites (D') et (Δ') sont perpendiculaires.

Récapitulatif

Toute rotation conserve l'orthogonalité.



Activité 6 Image d'un segment

Reprends l'activité précédente.

Soit M un point du segment [AB] et M' son image par r.

1. Justifie que M' appartient au segment [A'B'].
2. Soit N' un point du segment [A'B'].

Justifie qu'il existe un point N du segment [AB] tel que $r(N) = N'$.

3. Donne une conclusion à cette activité.

Récapitulatif

L'image d'un segment [AB] par une rotation r est le segment [A'B'] où A' = r(A) et B' = r(B).

Activité 7 Conservation de l'alignement des points

On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'images respectives A', B' et C' par une rotation r.

Justifie que si les points A, B et C sont alignés, alors les points A', B' et C' sont alignés.

Récapitulatif

Toute rotation conserve l'alignement.



Activité 8 Image d'une droite

On considère trois points A, B et C deux à deux distincts et r la rotation de centre C et d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$.

1. Trace la droite (AB) et marque un point M sur cette droite.
2. Construis les points A' et B' images respectives des points A et B par la rotation r puis trace la droite (A'B').
3. Construis le point M' tel que M' = r(M) puis justifie que M' est un point de la droite (A'B').
4. Soit N'un point de la droite (A'B'), construis le point N tel que r(N) = N'.
5. Justifie que le point N est situé sur la droite (AB).
6. Enonce une conclusion à cette activité.



Récapitulatif

On admettra que l'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite (A'B') où A' = r(A) et B' = r(B).

Activité 9 Conservation du milieu d'un segment

Construis un segment [AB] de milieu I et O un point du plan distinct de I.

On considère la rotation r de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

On note A', B' et J les images respectives des points A, B et I par r.

Justifie que J est le milieu du segment [A'B'].

Récapitulatif

Toute rotation conserve les milieux.



Activité 10 Image d'une demi-droite

Reprends les hypothèses de l'activité précédente.

1. Trace la demi-droite [AB) et marque un point M sur cette demi-droite.
2. Construis les points A' et B' images respectives des points A et B par la rotation r puis trace la demi-droite [A'B').
3. Construis le point M' tel que M' = r(M) puis justifie que M'est un point de la demi-droite [A'B').
4. Soit N'un point de la droite [A'B'), construis le point N tel que r(N) = N'
5. Vérifie que le point N est situé sur la droite [AB).
6. Enonce une conjecture à partir de cette activité.

Récapitulatif

L'image d'une demi-droite [AB) par une rotation r est la demi-droite [A'B') où A' = r(A) et B' = r(B).

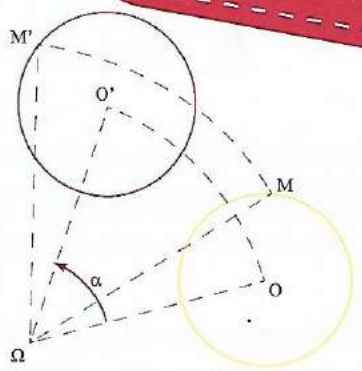
Activités de découverte

Activité 11 Image d'un cercle

On considère une rotation r de centre Ω et d'angle orienté α. (C) est le cercle de centre de O et de rayon R.

Soit M un point de (C) et M' l'image de M par la rotation r.

1. Démontre que M' appartient au cercle (C') de centre O' et de rayon R où O' = r(O).
2. Soit N'un point de (C'). Justifie qu'il existe un point N de (C) tel que : r(N) = N'.
3. Donne une conclusion à cette activité.



Récapitulatif

L'image d'un cercle de centre O et de rayon R par une rotation r est le cercle de même rayon et de centre O', image de O par r.

Activité 12 Rotation caractérisée par son centre, un point et son image

Soit O, A et B trois points deux à deux distincts du plan tel que : OA = OB.

Justifie qu'il existe une rotation et une seule de centre O qui applique A sur B.

Récapitulatif

Etant donné trois points deux à deux distincts O, A et B tel que OA = OB, la rotation r de centre O et d'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ applique A sur B.

Activité 13 Rotation caractérisée par deux points distincts et leurs images

On considère quatre points A, B, C et D deux à deux distincts.

1. Détermine une condition nécessaire pour qu'il existe une rotation r telle que : r(A) = C et r(B) = D.
2. A l'aide d'un contre exemple, justifie que cette condition n'est pas suffisante
3. Détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une rotation r telle que : r(A) = C et r(B) = D.
4. Propose une méthode construction du centre Ω de la rotation r.

Récapitulatif

Etant donné quatre points deux à deux distincts A, B, C et D tels que AB = CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, la rotation r de centre Ω et d'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ applique A sur C et B sur D où Ω est le point d'intersection s'il existe des médiatrices des segments [AC] et [BD] si elles sont distinctes ou de (AB) et (A'B') si elles sont confondues.

Activité 14 Rotation caractérisée par son angle orienté, un point et son image

Etant donné deux points distincts A et A' et un angle orienté de mesure principale α.

Cherchons s'il existe une rotation d'angle orienté α qui applique A sur A'.

En utilisant la notion d'arcs capables, donne un programme de construction du centre O de cette rotation.

Récapitulatif

Si A et B sont deux point distinct et α un élément de $]-\pi, \pi]$ alors, il existe une rotation d'angle α qui applique A sur B.

Son centre est l'intersection de la médiatrice de [AB] et de l'un des arcs capables de l'angle α d'extrémité [AB].

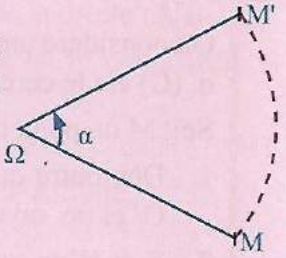
I ROTATION

1. Définition

Soit O un point du plan orienté et α un nombre réel appartenant à $]-\pi, \pi]$.

On appelle rotation de centre Ω et d'angle orienté de mesure principale α, l'application du plan dans lui-même qui, a chaque point M du plan associe le point M' du plan tel que :

- Si $M \neq \Omega$ alors $\Omega M = \Omega M'$ et $Mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha$;
- Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$.



Notation

On note : $M' = r_{(\Omega,\alpha)}(M)$
ou
$M' = r(M)$ s'il n'y a pas de confusion.

Exemple

- La figure 1 ci-contre est construiction de l'image A' du point A par $r\left(\Omega ; \frac{\pi}{4}\right)$

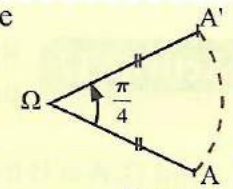


Figure 1

- La figure 2 ci-contre est la construction de l'image de B' du point B par $r\left(\Omega ; -\frac{\pi}{6}\right)$.

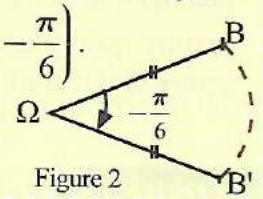
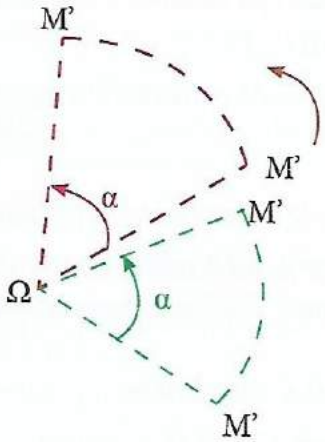


Figure 2

2. Cas particuliers

- Une rotation d'angle π ou demi-tour est une symétrie centrale.
- Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est appelée un quart de tour direct.
- Une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est appelée un quart de tour indirect.



3. Conséquence de la définition

Propriété

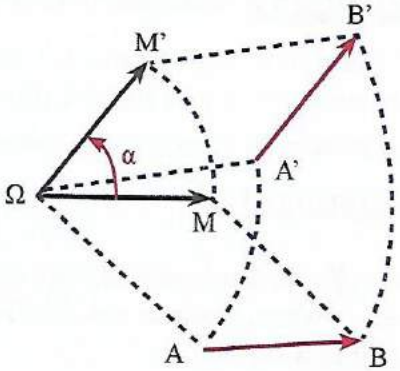
Le seul point invariant par une rotation d'angle α non nul est le centre de rotation.



II PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Propriété

Si A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par une rotation d'angle orienté de mesure principale α alors : AB = A'B' et $Mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha$.



III PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION PAR UNE ROTATION

1. Conservation des angles orientés

Propriété

Toute rotation conserve les angles orientés.

Si A, B, C, et D sont quatre points du plan d'images respectives A', B', C', et D' par une rotation, alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$.



2. Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité

Propriété

Toute rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

- Si (D) et (Δ) sont deux droites parallèles, d'images respectives (D') et (Δ') par une rotation, alors les droites (D') et (Δ') sont parallèles.
- Si (D) et (Δ) sont deux droites perpendiculaires, d'images respectives (D') et (Δ') par une rotation, alors les droites (D') et (Δ') sont perpendiculaires.

3. Conservation du milieu d'un segment

Propriété

Soient A, B et I trois points deux à deux distincts du plan, d'images respectives A', B' et I' par une rotation.

Si I est le milieu du segment [AB], alors I' est le milieu du segment [A'B'].

4. Conservation de l'alignement

Propriété

Des points alignés ont pour images par une rotation des points alignés.

IV IMAGES DE FIGURES SIMPLES PAR UNE ROTATION



1. Image d'une droite

L'image d'une droite par une rotation est une droite.

2. Image d'un segment

Si A et B sont deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par une rotation, alors l'image du segment [AB] par cette rotation est le segment [A'B'].

3. Image d'une demi-droite

Si A et B sont deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par une rotation, alors l'image de la demi-droite [AB) par cette rotation est la demi-droite [A'B').

4. Image d'un cercle

On considère un point O du plan et r une rotation telle que $r(O) = O'$. L'image du cercle (C) de centre O et de rayon R par la rotation r est le cercle (C') de centre O' et de même rayon R.

V CARACTÉRISATION D'UNE ROTATION

1. Rotation déterminée par son centre, un point et son image

Soit A, B, et C trois points deux à deux distincts du plan tels que : AB =AC.
Il existe une rotation et une seule, de centre A qui applique B sur C.

2. Rotation déterminée par deux points distincts et leurs images

Soient quatre points deux à deux distincts M, N, N' et M' tels que : MN = M'N' et $\overrightarrow{MM'} \neq \overrightarrow{NN'}$.
Il existe une rotation r et une seule telle que r(M) = M' et r(N) = N'.

Méthode

Pour déterminer le centre et l'angle d'une rotation r telle que : r(A) = A' et r(B) = B'
(A ≠A' et B ≠ B').

- On construit les médiatrices (Δ) et (Δ') respectives de [AA'] et [BB'].

Premier Cas : (Δ) et (Δ') se coupent en un point Ω.

Ω est le centre de la rotation et l'angle orienté est : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.

Deuxième cas : (Δ) et (Δ') et sont confondues.

Ω est le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'). L'angle de la rotation est $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$

3. Rotation déterminée par la donnée de l'angle orienté, un point et son image

Une rotation est déterminée par la donnée de son angle orienté α, d'un point M et son image M'.
Dans ce cas, son centre Ω est l'intersection de la médiatrice du segment [MM'] et de l'un des deux arcs capables de mesure |α| et d'extrémité [MM'].

EXERCICES DE FIXATION

Définition et premières propriétés

1 r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

Pour chaque affirmation, indique la bonne réponse.

Affirmations	1	2	3
M' = r (M)	Ω est le milieu du segment [MM']	ΩM = ΩM' et $Mes\left(\widehat{\Omega M', \Omega M}\right) = -\frac{\pi}{6}$	ΩM = ΩM' et $Mes\left(\widehat{\Omega M, \Omega M'}\right) = -\frac{\pi}{6}$
ΩQ = ΩP et $Mes\left(\widehat{\Omega Q, \Omega P}\right) = -\frac{\pi}{6}$	R(P) = Q	R(Q) = P	Ω, P et Q sont alignés

2 Place deux points distincts A et B.

❶ Construis l'image A' du point A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

❷ Construis l'image B' du point B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B de telle sorte que le triplet (A, B, C) soit de sens direct.
Détermine l'angle de la rotation de centre B qui applique A sur C.

4 ABCD est un carré de centre direct et de centre O.

❶ Détermine l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

❷ Détermine l'image du point A par la rotation r_1 de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

5 A étant un point fixé du plan, on considère la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$.

Pour chaque affirmation, indique la bonne réponse

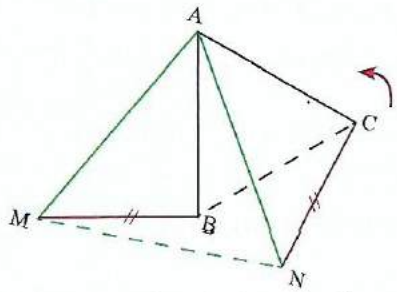
Affirmations	1	2	3
Q = r (M) et P = r(N)	$mes\left(\widehat{NM', QP}\right) = \frac{\pi}{4}$	$mes\left(\widehat{MN, PQ}\right) = \frac{\pi}{4}$	$mes\left(\widehat{MN, QP}\right) = \frac{\pi}{4}$
Q = r (M) et P = r(N)	MN = PQ	MP = NQ	MQ = QP

6 Sur la figure ci-dessous, ABC et AMN sont deux triangles équilatéraux de sens direct.
On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

❶ Justifie que r(B) = C et que r(M) = N.

❷ Justifie que : BM = CN.

❸ Détermine : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}}\right)$.



7 Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet A.
On considère les triangles équilatéraux directs ADB et ACE.

❶ Détermine : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BE}}\right)$.

❷ Justifie que : DC = BE.

8 Construis un losange ABCD tel que :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

❶ Construis le point C'.

❷ Justifie que : Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}}\right) = \frac{\pi}{6}$

9 Construis un losange ABCD tel que :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Construis les points C' et B' images respectives des points C et B par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.
Justifie que les droites (AB') et (BC') sont parallèles.

10 Construis un carré direct ABCD.
Construis les points D' et C', images respectives des points D et C par la rotation de centre A et justifie que les droites (DD') et (AC') sont perpendiculaires.

11 En utilisant les données de l'exercice 6, notons K et L les milieux respectifs des segments [BM] et [CN].
Justifie que : r(K) = L.

12 Construis un carré ABCD direct de centre O. On considère la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

On pose : O' = r(O), D' = r(D).

Justifie que les points O', D' et D sont alignés.

13 Construis un carré ABCD de centre O et de sens indirect.

Détermine l'image de la droite (AB) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Détermine l'image de la droite (DC) par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

14 On considère un segment [AB], O un point n'appartenant pas à [AB] et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Construis l'image du segment [AB] par la rotation r.

15 Soit EFGK un carré de centre I et de sens direct.

Soit r la rotation de centre I et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

Détermine par r l'image du segment [FE] et du segment [GF].

15 Soit EFGK un carré de centre I et de sens direct.

Soit r la rotation de centre I et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

Détermine par r l'image de la demi-droite [FE) et de la demi-droite [GF).

17 Parmi les phrases ci-dessous, recopie dans ton cahier celle qui est vraie.

❶ L'image d'un cercle (C) par une rotation est un cercle (C') de rayon plus grand que celui de (C).

❷ L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon.

18 Parmi les phrases ci-dessous, recopie dans ton cahier celle qui est vraie.

❶ L'image d'un cercle (C) par une rotation est un cercle (C') de rayon plus grand que celui de (C).

❷ L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon.

19 Place un point O et construis le cercle de centre O et de rayon 3 cm.

Soit A un point du plan distinct de O.

On considère la rotation r de centre A et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.

Construis l'image (C') du cercle (C) par la rotation r.

Rotation définie par son centre, un point et son image ou par deux points distincts et leurs images

20 Construis sur ton cahier quatre points M, N, P et Q deux à deux distincts tels que :

$Mes\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}\right) = \frac{\pi}{4}$ et MN = PQ = 7cm

❶ Existe-t-il une rotation qui applique M sur N et P sur Q ? Justifie ta réponse.

❷ Justifie l'existence d'une rotation r telle que : r(M) = P et r(N) = Q.

❸ Place un point A du plan, construis le point A' image de A par r.

❹ Construis le point Ω, centre de la rotation r.

Rotation déterminée par son angle orienté, un point et son image

21 Marque sur ton cahier deux points distincts A et B.

Construis le centre O de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ qui applique A sur B.

22 Recopie sur ton cahier les affirmations qui sont vraies

❶ L'image d'une droite par une rotation d'angle droit est une droite qui lui est perpendiculaire.

❷ Si l'image d'une droite par une rotation est une droite qui lui est perpendiculaire, alors l'angle orienté de cette rotation est $\frac{\pi}{2}$.

❸ Il n'existe aucune rotation transformant une droite en une droite qui lui est parallèle.

❹ Si une droite est invariante par une rotation, l'angle de cette rotation est nul.

23 On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et ACD.

1. Détermine le centre de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui applique B sur D.
2. Détermine l'image C' du point C par cette rotation.
3. Justifie que A est le milieu de [BC'].

24 On considère un triangle rectangle isocèle direct ABC de sommet principal A.

1. Détermine le centre et l'angle de la rotation r qui transforme A en C et B en A.
2. Soit C' l'image de C par la rotation r, construis le point C'.
3. Justifie que le quadrilatère BACC' est un carré.

25 Soit ABC un triangle équilatéral direct.

1. Construis les images respectives A', B' et C' des points A, B et C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Détermine : $Mes\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}\right)$.

26 Soit ABCD un carré direct.

Caractérise une rotation d'angle orienté non nul qui laisse ce carré globalement invariant.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Propriété d'une rotation

1 Soit ABC un triangle direct non rectangle.

On considère la rotation r de centre C et d'angle $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

1. Construis les images respectives A' et B' de A et B par la rotation r.
2. Le cercle de centre C qui passe par A coupe (AB) en un point M distinct de A'.
3. Prouve que N est l'image de M par la rotation r.

2 Soit ABC un triangle équilatéral direct et D l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe (BC). Soit M un point du segment [BC], le cercle de centre C qui passe par M coupe le segment [CD] en un point N.

En utilisant une rotation, justifie que AM = BN.

3 Soient A, B et C trois points alignés distincts.

Construis les triangles équilatéraux directs ABI et BCJ.

(Faire deux figures, l'une avec B ∈ [AC], l'autre avec C ∈ [AB].

Démontre dans chaque cas à l'aide d'une rotation que IC = AJ.

Image de figures simples

4 Soit (D) une droite et O un point du plan

Construis l'image de (D) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(Faire deux figures : cas où O ∈ (D) et cas où O ∉ (D).

5 On considère un segment [OB] de milieu A et la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

1. Construis l'image du segment [AB] par la rotation r.
2. On note A' et B' les images respectives de A et B par r et I le milieu du segment [BB']
3. Démontre qu'il existe une rotation de centre I qui transforme le segment [AB] en le segment [A'B'].

6 Soit ABCD un carré direct et M un point de la droite (AD).

1. Fais une figure.
2. Construis l'image A'B'C'D' du carré ABCD par la rotation de centre M et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.
3. Justifie que les droites (B'C') et (BC) sont perpendiculaires.

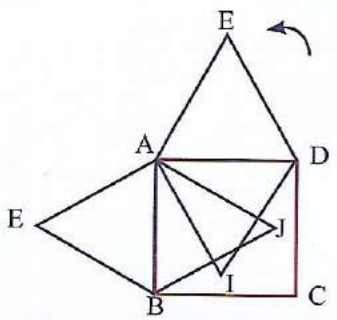
Centre et angle d'une rotation

7 Sur la figure ci-après, les triangles ADE, AID, ABJ et AFB sont équilatéraux et ABCD est un carré de centre O.

Détermine dans chacun des cas le centre et l'angle de la rotation r:

❶ $r(D) = C$ et $r(F) = E$; ❷ $r(B) = J$ et $r(D) = E$;

❸ $r(D) =$ et $r(I) = B$; ❹ $r(F) = D$ et $r(B) = E$.



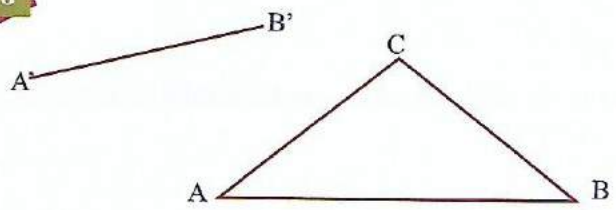
7 Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal A

❶ Construis le point A' image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

❷ Construis le point C' image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

❸ Démontre que les points A, A' et C' sont alignés.

8



Les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par une rotation r

❶ Reproduire la figure ci-dessus.

❷ Sans construire le centre de cette rotation, construis l'image du point C.

❸ Démontre que les médiatrices des segments [AA'], [BB'] et [CC'] sont concourantes.

9 Soit ABCD un parallélogramme tel que le triplet (A,B,C) soit de sens direct.

On considère les points E et F tels que : ABE et ADF soient des triangles rectangles isocèles directs de sommet principal A. Soit G le point défini par : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE}$.

Démontre que le triangle AGC est rectangle isocèle indirect de sommet A.

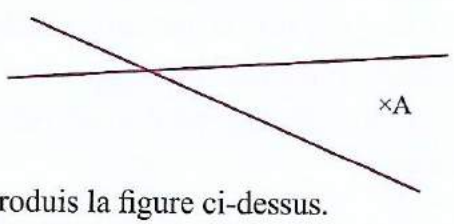
10 On considère un triangle ABC direct.

1. Construis le centre Ω de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui applique A sur B
2. Construis le point C' image de C par r
3. Démontre que CA = BC' et que la droite (BC') est une hauteur du triangle ABC

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Deux problèmes de construction

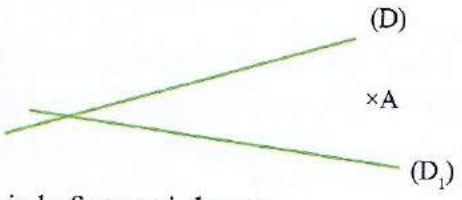
1



❶ Reproduis la figure ci-dessus.

❷ Construis un carré ABCE tel que les sommets B et E appartiennent respectivement à (D) et (D_1).

2



Reproduis la figure ci-dessus.

Construis deux triangles équilatéraux tels que un des sommets est A et les deux autres sommets appartiennent l'un à (D) et l'autre à (D_1).

Détermination d'un ensemble de points

3 On donne une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D). Soit B un point quelconque de la droite (D).

❶ Construis le triangle équilatéral ABC tel que $Mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$

❷ Détermine l'ensemble décrit par le point C lorsque B décrit la droite (D).

4 Soit ABC un triangle isocèle tel que : AB = AC.
Par un point M de la droite (BC), on mène la droite parallèle à la droite (AB) qui coupe (AC) en D et la parallèle à (AC) qui coupe (AB) en E.

❶ Justifie l'existence d'une rotation et une seule qui applique B sur A et E sur D.

❷ Détermine l'image de A par cette rotation.

❸ Justifie que la médiatrice de [ED] passe par le même point lorsque M décrit la droite (BC).

5 On considère un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que :
Mes (AB;AC) = $\frac{\pi}{6}$.
On considère la rotation r_1 de centre B et d'angle orienté $\frac{5\pi}{12}$ et la rotation r_2 de centre C et d'angle orienté $-\frac{5\pi}{12}$.

❶ On pose : $r_1(C) = C'$ et $r_2(B) = B'$

❷ Justifie que C' appartient à la droite (AB).

❸ Justifie que B' appartient à la droite (AC).

❹ Déduis-en la construction de B' et de C'.

❺ Construis les points A_1 et A_2 tels que :
$A_1 = r_1(A)$ et $A_2 = r_2(A)$.

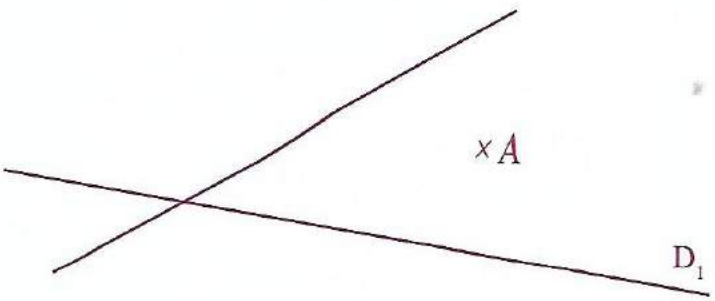
❻ Justifie que le triangle AB'C' est isocèle.

❼ Justifie que les droites $(C'A_1)$ et $(B'A_2)$ sont parallèles à la droite (BC).

❽ Déduis-en que les points A_1, A_2, C'et B' sont alignés.

SITUATIONS D'ÉVALUATION

1 La figure ci-dessus représente le plan d'une région plane où deux fleuves supposés rectiligne en cet endroit sont représentés par deux droites *sécantes* (D_1) *et* (D_2).
Le point A représente un village situé entre les deux fleuves.



Pour faciliter le déplacement des populations du village A de part et d'autre des ces deux fleuves, le conseil régional décide de la construction d'un point P_1 sur le fleuve (D_1) et d'un second pont (P_2) sur le fleuve (D_2).

Informé, le chef du village, après avoir remercié le président du conseil régional, souhaite cependant que son village, et chacun des deux ponts soient situés deux à deux à la même distance l'un par rapport à l'autre.

Certains habitants estiment qu'une telle construction est impossible.

Témoin de cette discussion, tu décides de leur proposer un plan.

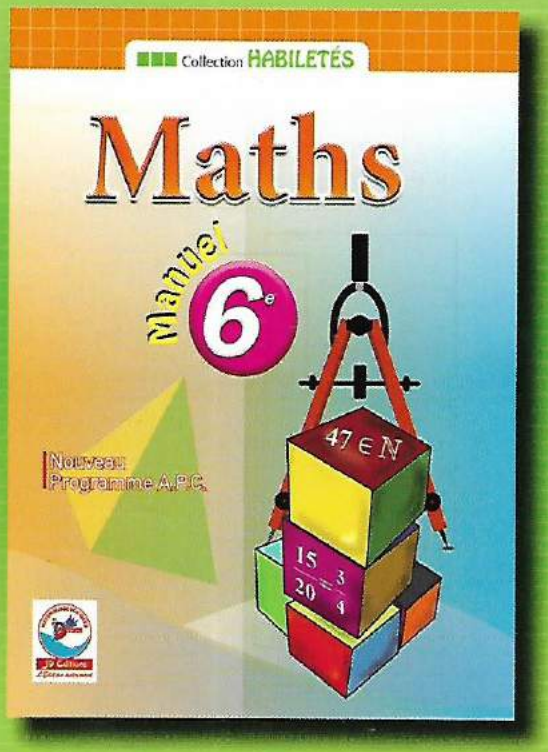
Reproduis sur ton cahier la figure ci-dessus et propose sur cette figure, un emplacement de P_1 et de P_2 conforme aux vœux du chef du village. (Tu justifieras chaque étape de tes constructions)

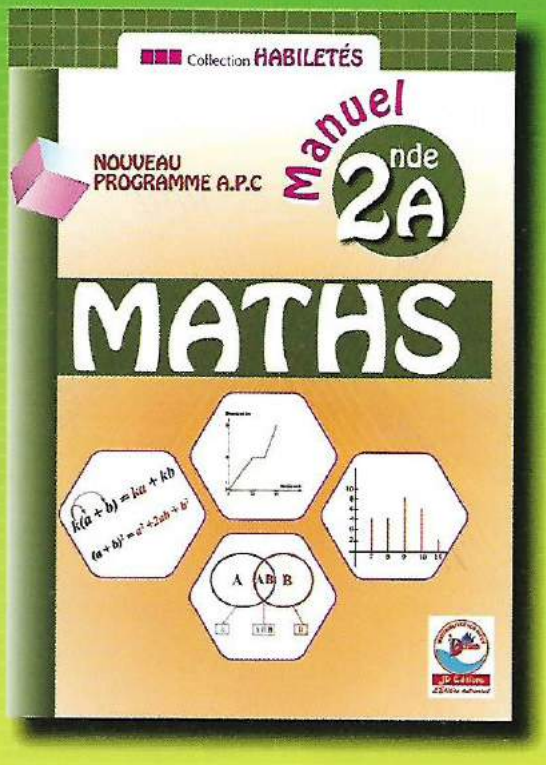
JD Editions
Specimen

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
pour le compte de JD éditions.
Tél. : 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions
03 trimestre 2019

Dépôt légal N°15505 du 09 Avril 2019

De la même Collection





ISBN : 979-10-91832-61-8