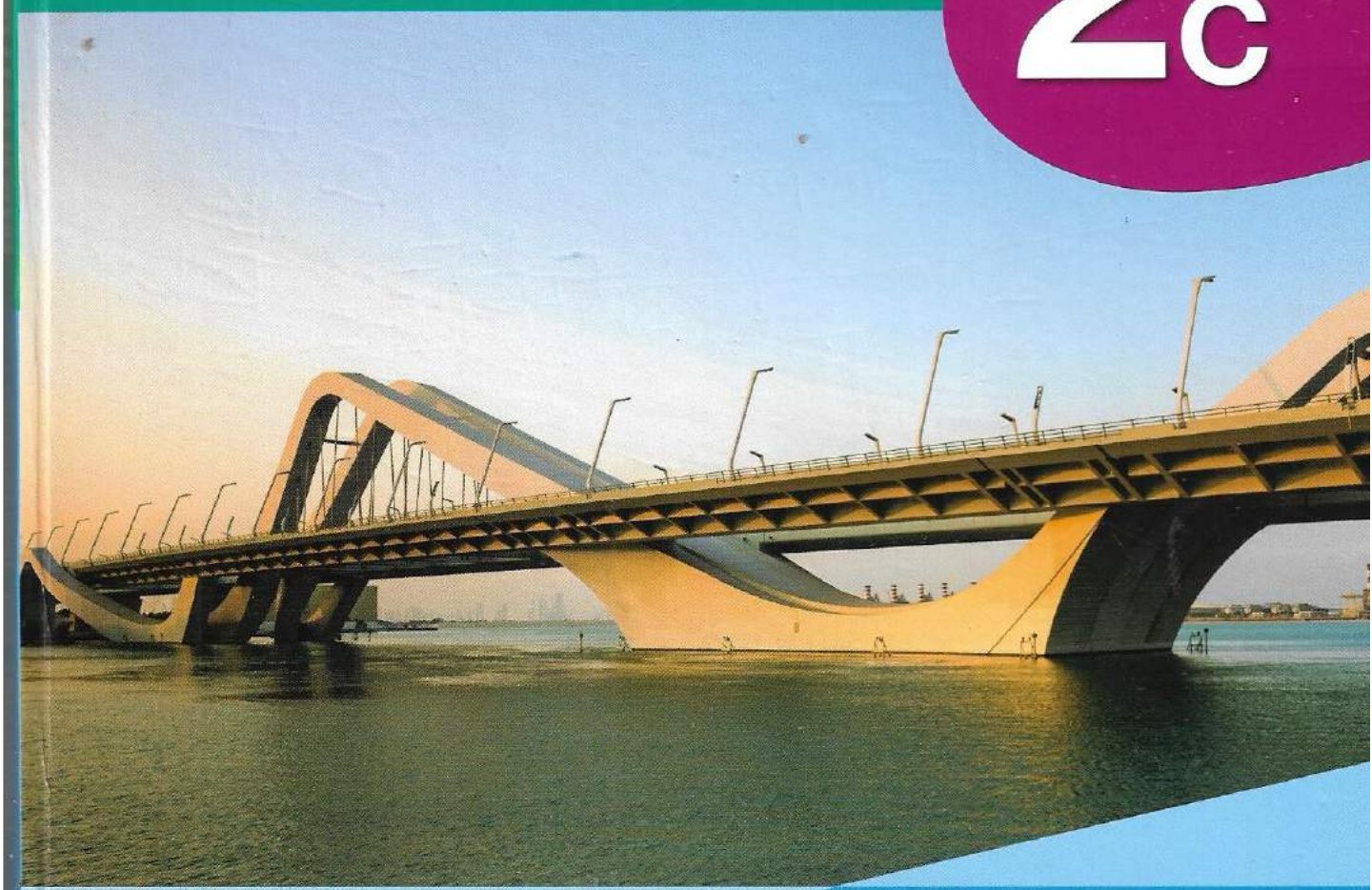
Collection
La Réussite

Mathématiques

Manuel

2nde C



Vallesse

Préacquis

Calcul littéral

Puissances

a et b sont des nombres réels non nuls. n et m sont des entiers naturels.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$;
- Par convention : $a^0 = 1$.
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$;
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
- $(ab)^n = a^n \times b^n$
- $10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ fois}}$;
- $10^{-n} = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ fois}}$

Quotients

a, b, c et d sont des nombres réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$;
- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
- $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

Égalités remarquables

a et b sont des nombres réels.

Développer ↓

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

↑ *Factoriser*

Racines carrées

Propriétés

a et b sont des nombres réels positifs.

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
- $(\sqrt{a})^2 = a$.
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, avec $b \neq 0$.

Valeur absolue d'un nombre réel

- $\begin{cases} |x| = x \text{ si } x \text{ est positif} \\ |x| = -x \text{ si } x \text{ est négatif} \end{cases}$
- Si a est un nombre réel, alors $\sqrt{a^2} = |a|$.

Triangle rectangle

Théorème de Pythagore

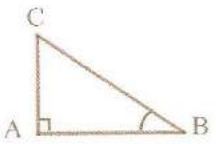
Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque du théorème de Pythagore

Dans un triangle ABC, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Trigonométrie

Dans un triangle ABC rectangle en A :



- $\cos\widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$;
- $\sin\widehat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$;
- $\tan\widehat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$;
- $0 < \cos\widehat{B} < 1$ et $0 < \sin\widehat{B} < 1$;
- $\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = 1$;
- $\tan\widehat{B} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}$.

Propriété de Thalès

Propriété de Thalès

ABC est un triangle. Si $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ tel que $(MN)//(BC)$, alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

Réciproque de la propriété de Thalès

ABC est un triangle, M est un point de (AB) et N un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C.

Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors $(MN) // (BC)$.

Calcul numérique

Comparaison

- a, b, c et d sont des nombres réels,
si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

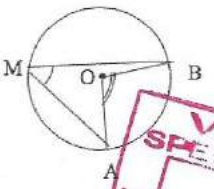
- a, b, c et d sont des nombres réels positifs,
si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

- a et b sont des nombres positifs,
$a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$.

- a et b sont deux nombres de même signe et différents de 0, $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

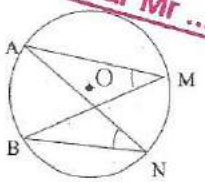
Angles inscrits

Un angle aigu inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre associé.



$\text{mes}\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$

Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ces deux angles ont la même mesure.

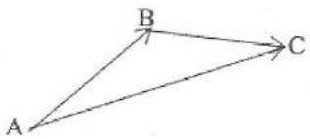


$\text{mes}\widehat{AMB} = \text{mes}\widehat{ANB}$

Vecteurs

Égalité de Chasles

A, B et C sont trois points distincts du plan.
On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Propriétés

- A, B, C et D sont quatre points du plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction équivaut à on peut trouver un nombre réel k non nul tel que :
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

- A, B, C et D sont quatre points du plan. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

- A, B et M sont trois points du plan.
M appartient à la droite (AB) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

- A, B et M sont trois points du plan.
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si on peut trouver un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

- A, B et I sont trois points du plan.
I est le milieu du segment [AB] équivaut à $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Coordonnées de vecteurs

Le plan est muni du repère (O, I, J). A et B sont deux points du plan. Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$,
alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Vecteurs colinéaires

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires

équivaut à $xy' - x'y = 0$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

équivaut à $xx' + yy' = 0$.

Distance de deux points dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A et B sont deux points du plan.

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Équations de droites

- Une équation de droite de la forme : $y = ax + b$ ou $x = c$ est appelée **équation réduite** de cette droite.

a est appelée **coefficient directeur** de la droite (D) ou pente de la droite (D).

b est appelée **ordonnée à l'origine** de la droite (D).

- Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de la droite passant par A et B est : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- Le plan est muni du repère.

Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

(D) // (D') équivaut à $a = a'$.

- Le plan est muni du repère orthonormé.

Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b$.

(D)⊥(D') équivaut à $a \times a' = -1$.

Équation dans $\mathbb{R}$

a, b, c et d sont des nombres réels.

- $ax + b = 0$ équivaut à $x = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$.
- $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.
- $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}, a \geq 0$.

Application affine

- a et b sont deux nombres réels.

f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- f est croissante lorsque $a > 0$.
- f est décroissante lorsque $a < 0$.
- f est constante lorsque $a = 0$.

- On appelle application linéaire, une application affine définie par : $f(x) = ax$, a étant un nombre réel.

Statistique

- **L'effectif cumulé croissant** d'une modalité est la somme des effectifs de toutes les modalités inférieures ou égales à cette modalité.

- **La fréquence cumulée croissante** d'une modalité est la somme des fréquences de toutes les modalités inférieures ou égales à cette modalité

- **La médiane d'une série statistique** est un nombre qui partage cette série statistique en deux groupes de même effectif ; l'un contient les valeurs plus petites que ce nombre et l'autre les valeurs plus grandes que ce nombre.

- **La moyenne d'une série statistique** regroupée en classes est le nombre noté $\overline{x}$, tel que :

$\overline{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + ... + n_p c_p}{n}$; où $c_1, c_2, ..., c_p$ sont les centres des classes d'effectifs respectifs $n_1, n_2, ..., n_p$.

Collection
La Réussite

Mathématiques
Manuel

BENGALY
KALIFA

2nde C

Auteurs

Jean-Marie KOFFI
Inspecteur en chef
Coordonnateur régional disciplinaire

KY Gerard
Inspecteur pédagogique principal

AKÉ Djebri Antonin
Professeur de lycée

Vallesse

Avant-Propos

Toutes les leçons de ce manuel sont conformes au programme en vigueur.

On y trouve successivement :

- **Le titre de la leçon** : il est conforme à celui du programme.
- **Une image** : elle illustre et suscite une réflexion sur le titre de la leçon.
- **Une situation d'apprentissage** : elle comporte un contexte, une circonstance et des tâches.
- **Habiletés et contenus** : ils sont organisés pour faire apparaître le plan suivant lequel sera traitée la leçon.
- **Installation des habiletés** : c'est une succession d'activités en rapport avec le plan précédant et permettant le développement des habiletés/contenus. Chaque activité est suivie d'exercices de fixation.
- **Apprentissage de la rédaction** : un ou plusieurs exercices sont proposés et corrigés. Ces exercices peuvent être suivis de points méthodes.
- **Résumé de cours** : il présente l'essentiel de la leçon à retenir. Chaque résumé de cours est le bilan d'une activité. L'utilisateur doit s'y référer.
- **Exercices** : ils sont rangés en trois groupes :
  - les exercices de renforcement ;
  - les exercices d'approfondissement ;
  - les situations d'évaluation.
- **Coups de pouce** : des indications sur certains exercices d'approfondissement ou des situations d'évaluation sont données à l'utilisateur.

Les auteurs

© Vallesse Éditions, Abidjan, 2019

ISBN : 978-2-916532-96-7

Toute reproduction interdite sous peine de poursuites judiciaires.

Sommaire

Leçon 1 ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS — 05

1. Ensemble des nombres rationnels et irrationnels
2. Ordre dans $\mathbb{R}$
3. Minorant, majorant, minimum et maximum d'un ensemble
4. Valeur absolue et distance de deux nombres réels
5. Calculs approchés
6. Partie entière d'un nombre réel
7. Traitement de situation

Leçon 2 POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES — 21

1. Généralité sur les polynômes
2. Forme canonique d'un polynôme du second degré
3. Fractions rationnelles
4. Traitement de situation

Leçon 3 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$ — 35

1. Équation dans $\mathbb{R}$
2. Inéquation dans $\mathbb{R}$
3. Traitement de situation

Leçon 4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — 47

1. Système d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
2. Méthodes de résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
3. Système d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
4. Traitement de situation

Leçon 5 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS — 63

1. Notion de fonction
2. Étude graphique d'une fonction
3. Variations d'une fonction
4. Traitement de situation

Leçon 6 ÉTUDES DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE — 85

1. Fonctions de référence
2. Fonction affine par intervalles
3. Fonctions du type $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto \frac{a}{x}$
4. Traitement de situation

Leçon 7 STATISTIQUE — 101

1. Effectif cumulé décroissant - Fréquence cumulée décroissante
2. Courbe cumulative des effectifs - Courbe cumulative des fréquences
3. Paramètres de position
4. Paramètres de dispersion
5. Traitement de situation

Leçon 8 VECTEURS ET POINTS DU PLAN — 119

1. Vecteurs
2. Base et repère
3. Mesure algébrique
4. Traitement de situation

Sommaire

Leçon 9 ANGLES INSCRITS — 141

1. Angles inscrits
2. Arcs capables
3. Relations métriques dans un triangle
4. Polygones réguliers
5. Traitement de situation

Leçon 10 ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE — 157

1. Le radian
2. Le cercle trigonométrique
3. Angle orienté de deux vecteurs
4. Cosinus, sinus et tangente d'un angle
5. Traitement de situation

Leçon 11 PRODUIT SCALAIRE — 171

1. Définition du produit scalaire
2. Relations métriques dans un triangle
3. Forme analytique du produit scalaire
4. Traitement de situation

Leçon 12 DROITES ET PLANS DE L'ESPACE — 189

1. Déterminations d'un plan
2. Droites et plans de l'espace
3. Plans de l'espace
4. Parallélisme de droites et de plans
5. Section plane d'un solide
6. Traitement de situation

Leçon 13 UTILISATION DES SYMÉTRIES ET TRANSLATIONS — 213

1. Symétrie et translation
2. Problème de construction
3. Démonstration d'une propriété
4. Détermination d'un lieu géométrique
5. Traitement de situation

Leçon 14 HOMOTHÉTIES — 221

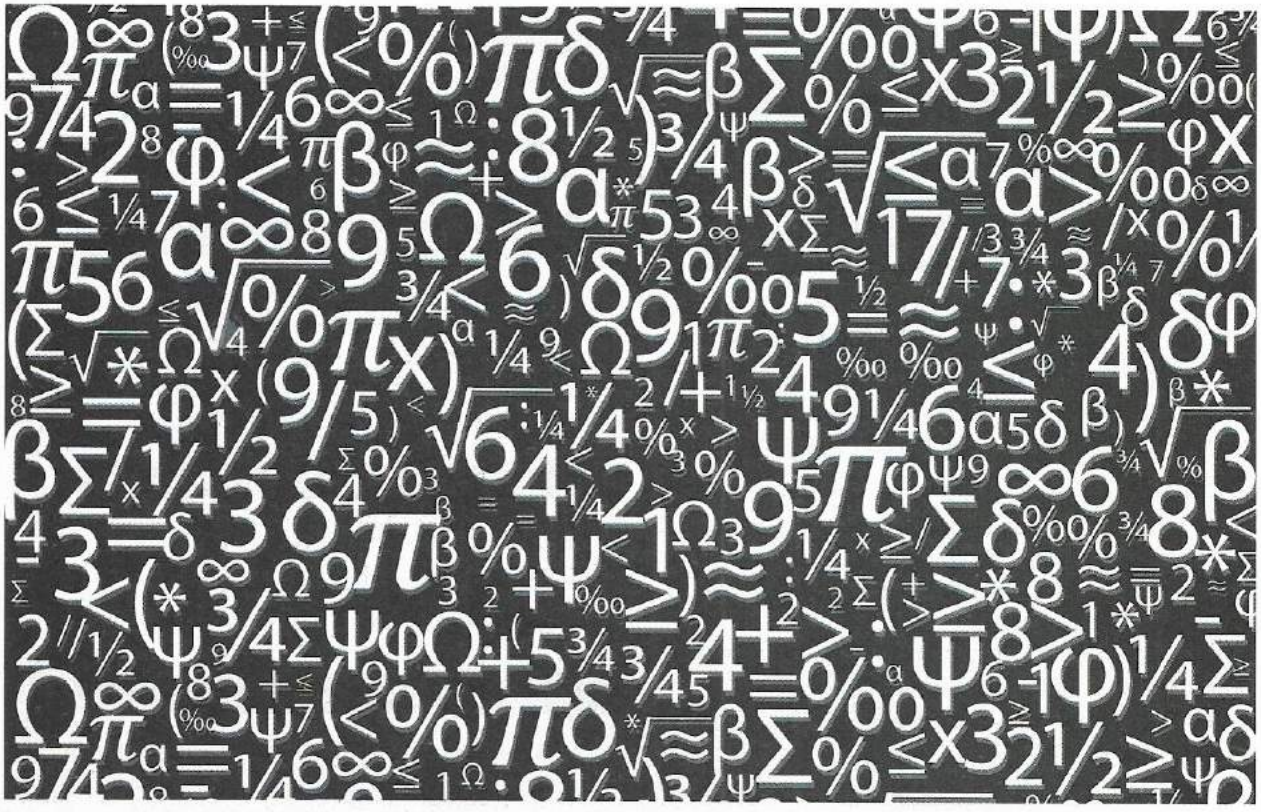
1. Définition et premières propriétés
2. Image de figures simples
3. Propriétés de conservation
4. Diverses déterminations d'une homothétie
5. Traitement de situation

Leçon 15 ROTATIONS — 239

1. Définition et premières propriétés
2. Images de figures simples
3. Propriétés de conservation
4. Caractérisation d'une rotation
5. Traitement de situation

Leçon

1 ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS



Identifie les différents nombres et opérations rencontrés dans l'image ci-dessus.
Peut-on regrouper tous ces nombres dans l'ensemble $\mathbb{Q}$?
À quel ensemble appartiennent les nombres $\sqrt{2}$ et π ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève d'une classe de Seconde vient de retrouver un document de son grand-père qui était un exploitant minier. Sur ce document figure le plan de son campement et le message suivant : « Sur la ligne qui passe par le cocotier et le puits, j'ai caché un trésor. Deux fois la distance du trésor au cocotier qui est à 30 pas du puits est inférieure ou égale à 70 pas. La distance du trésor au Manguier qui est à 10 pas de l'autre côté du puits sur la même ligne que le cocotier et le puits est inférieure à 20 pas ».

Ne pouvant pas déchiffrer ce message codé, il fait appel à ses camarades de classe.

Ceux-ci, après analyse, décident de le décoder en s'informant sur la résolution des équations et inéquations du type $|x-a|=r$ et $|x-a|<r$ dans $\mathbb{R}$.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Ensemble des nombres rationnels et irrationnels

Présenter :
- un nombre irrationnel
- un nombre réel

Démontrer : une propriété en utilisant le raisonnement par l'absurde

2 Ordre dans $\mathbb{R}$

Comparer : deux nombres réels

3 Minorant, majorant, minimum et maximum d'un ensemble

Connaître :
- la définition d'un majorant d'un ensemble
- la définition d'un minorant d'un ensemble
- la définition du maximum d'un ensemble
- la définition du minimum d'un ensemble

Déterminer :
- un majorant d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible
- un minorant d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible
- le maximum d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible
- le minimum d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible

4 Valeur absolue et distance de deux nombres réels

Connaître :
- la définition de la valeur absolue d'un nombre réel
- les propriétés relatives à la valeur absolue d'un nombre réel
- la distance de deux nombres réels.

Résoudre :
- algébriquement une équation du type $|x-a| = r$
- graphiquement une équation du type $|x-a| = r$
- algébriquement une inéquation du type $|x-a| \leq r$
- graphiquement une inéquation du type $|x-a| \leq r$

5 Calculs approchés

Déterminer :
- l'approximation décimale d'ordre n d'un nombre réel
- l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel
- un encadrement d'un nombre réel

6 Partie entière d'un nombre réel

Connaître : la définition de la partie entière d'un nombre réel

Déterminer : la partie entière d'un nombre réel

7 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux nombres réels

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Ensemble des nombres rationnels et irrationnels

1.1. Nombres irrationnels

1. Recopie le tableau ci-contre et mets une croix si le nombre appartient à l'ensemble.
2. Relève dans le tableau les nombres qui n'appartiennent à aucun des ensembles.
3. Donne les caractéristiques d'un nombre rationnel.

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
-2			
253			
$\frac{10}{5}$			
$-3,14$			
$\frac{22}{7}$			
π			
$-\frac{15}{2}$			
$\sqrt{2}$			

Synthese

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme : $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Tout nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel est un nombre irrationnel.

Exercices de fixation

1-1-1 Complète par $\in$ ou $\notin$

$-\pi$ ..... $\mathbb{Z}$; $\frac{1}{3}$ .....$\mathbb{Q}$; -7..... $\mathbb{N}$

π .....$\mathbb{Q}$; $\frac{1}{3}$ ..... $\mathbb{D}$

1-1-2
1. Cite un nombre réel appartenant à $\mathbb{D}$ mais pas à $\mathbb{Z}$.
2. Cite un nombre réel appartenant à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$.
3. Cite un nombre réel appartenant à $\mathbb{Q}$ mais pas à $\mathbb{D}$.

1.2. Raisonnement par l'absurde

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$; p et q sont des nombres entiers naturels ($q \neq 0$) et $\frac{p}{q}$ est irréductible.

1. Justifie que : $p^2 = 2q^2$.

2. a) Suivant le chiffre des unités de p, détermine le dernier chiffre de son carré en utilisant le tableau ci-dessous.

Chiffre des unités de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2										

b) Suivant le dernier chiffre de q, détermine le dernier chiffre de $2q^2$ en utilisant le tableau ci-dessous.

Chiffre des unités de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités des $2q^2$										

3. a) Si on a $p^2 = 2q^2$, détermine la seule possibilité pour leur dernier chiffre.
b) Dans ce cas, identifie les chiffres qui terminent p et q.
c) La fraction $\frac{p}{q}$ est-elle irréductible ?
d) Conclus.

Synthèse

Pour démontrer que « $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel », on a supposé que cette affirmation est fausse, c'est-à-dire que « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel », puis on a démontré que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Exercices de fixation

1-2-1 On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Démontre que $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

1-2-2 Démontre que $\sqrt{8}$ est irrationnel.

Activité 2 Ordre dans $\mathbb{R}$

1. On considère les nombres A et B tels que : $A = (x + 3)^2$ et $B = x^2 + 9$, x étant un nombre réel positif.
a) Étudie le signe de $A - B$.
b) Compare A et B.
c) Déduis-en une méthode de comparaison de deux nombres réels.

2. On considère les nombres réels c et d suivants :
$c = \sqrt{29}$ et $d = 3\sqrt{3}$.
a) Calcule c^2 et d^2.
b) Compare c et d.
c) Déduis-en une méthode de comparaison de deux nombres réels.

3. On considère les nombres e et f tels que :
$e = \frac{1}{13}$ et $f = \frac{1}{5\sqrt{7}}$.
a) Compare l'inverse de e et l'inverse de f.
b) Compare e et f.
c) Déduis-en une méthode de comparaison de deux nombres réels.

Synthèse

Pour comparer deux nombres réels, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :
- Étudier le signe de leur différence ;
- Comparer leurs carrés s'ils sont tous deux positifs ;
- Comparer leurs inverses s'ils sont non nuls et de même signe.

Exercices de fixation

2-1 Compare dans chaque cas les nombres suivants :
$\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{24}$; $\frac{859}{857}$ et $\frac{759}{757}$; $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{5}$; $7-8\sqrt{5}$ et $7-6\sqrt{10}$; $-3-\pi$ et $-5-\pi$.

2-2 Compare, sans la calculatrice, les nombres suivants :
a) $\frac{145}{8}$ et $\frac{137}{5}$; b) $\frac{43}{117}$ et $\frac{42}{116}$; c) -17 et $-12\sqrt{2}$.

2-3 Compare : $\sqrt{21}+\sqrt{11}$ et $\sqrt{22}+\sqrt{10}$.

Activité 3 Minorant, majorant, minimum et maximum d'un ensemble

Soit $E = \left\{-10 ; -4 ; -\frac{5}{3} ; 0 ; 1,5 ; \frac{7}{4} ; 7 ; \frac{68}{5} ; 37\right\}$.

1. a) Cite cinq nombres plus grands ou égaux à tous les éléments de l'ensemble E.
   b) Parmi les nombres cités, détermine celui qui est élément de E.
2. a) Cite cinq nombres plus petits ou égaux à tous les éléments de l'ensemble E.
   b) Parmi les nombres cités, détermine celui qui est élément de E.

Synthèse

Les nombres qui sont plus grands que tous les éléments de E sont des majorants de E.
Le majorant de E qui appartient à E est le maximum de E.
Les nombres qui sont plus petits que tous les éléments de E sont des minorants de E.
Le minorant de E qui appartient à E est le minimum de E.

Exercices de fixation

3-1 Pour chaque ligne, écris le numéro et la lettre correspondant à la bonne réponse.

		a	*b*	*c*
1	M est un majorant d'un ensemble E si :	M est un élément de E.	M est supérieur ou égal à tout élément de E.	M est inférieur ou égal à tout élément de E.
2	M est un minorant d'un ensemble E si :	M est un élément de E.	M est supérieur ou égal à tout élément.	M est inférieur ou égal à tout élément.
3	Le maximum d'un ensemble E s'il existe :	n'est pas dans E.	est un élément quelconque de E.	est le plus grand des éléments de E.

3-2 On considère l'ensemble A tel que :
$A = \left\{1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{7} ; \frac{1}{8}\right\}$.
1. a) Détermine deux majorants de A qui ne sont pas éléments de A
   b) Détermine le maximum de A.
2. a) Détermine deux minorants de A.
   b) Justifie que $\frac{1}{8}$ est le minimum de A.

3-3 On considère l'ensemble suivant $A = \left[-8 ; \frac{15}{4}\right]$.
a) Justifie que 4 est un majorant de A.
b) Justifie que -8 est le minimum de A.

Activités 4 Valeur absolue et distance de deux nombres réels

4.1. Valeur absolue

1. Soit a un nombre réel.
Détermine la distance à zéro de a suivant le signe de a.
2. a et b sont deux nombres réels. Recopie et complète le tableau suivant :

	a	b	$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	$\lvert a.b\rvert$	$\lvert a\rvert\times\lvert b\rvert$	$\sqrt{a^2}$	$\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\lvert\frac{a}{b}\rvert$
1	-3	5									
2	14	17									
3	-7	-11									
4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{2}$									

3. Compare dans chaque cas :
a) $\lvert a\times b\rvert$ et $\lvert a\rvert\times\lvert b\rvert$; b) $\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ et $\lvert\frac{a}{b}\rvert$; c) $\sqrt{a^2}$ et $\lvert a\rvert$; d) $\lvert a+b\rvert$ et $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$

Synthèse

La valeur absolue d'un nombre est la distance à zéro de ce nombre.
La valeur absolue du produit de deux nombres est égale au produit de leurs valeurs absolues.
La valeur absolue du quotient de deux nombres est égale au quotient de leurs valeurs absolues.

Exercices de fixation

4-1-1 Réponds par vrai ou par faux à chaque égalité.

1. $\lvert 2-\sqrt{5}\rvert = 2-\sqrt{5}$.
2. $\lvert\sqrt{5}-\sqrt{3}\rvert = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.
3. $\left\lvert\frac{\sqrt{7}-2}{3-\sqrt{10}}\right\rvert = -\frac{\sqrt{7}-2}{3-\sqrt{10}}$.

4-1-2 Écris sans les barres de valeur absolue les nombres suivants : $\lvert -2\rvert$; $\lvert -2-\sqrt{5}\rvert$; $\lvert\pi-3{,}14\rvert$; $\lvert 10^{-3}\rvert$.

4-1-3 a) Détermine les nombres réels x tels que : $\lvert x\rvert = 5$.
b) Représente sur une droite l'ensemble des nombres réels x tels que : $\lvert x\rvert \leq 2$.

4.2. Distance de deux nombres réels

L'unité est le centimètre.
Sur une droite graduée, on donne les points A, B, C et D d'abscisses respectives : $-1{,}8$; $2{,}3$; $-5{,}2$ et x.
1. Calcule AB, CD et DB.
2. Détermine les valeurs de x telles que : CD = 2.
3. Détermine sur la droite graduée les valeurs de x qui sont telles que : DB $\leq$ 3.

Synthèse

La distance de deux nombres réels est égale à la valeur absolue de leur différence.

Exercices de fixation

4-2-1 Recopie la bonne réponse.
Sur une droite graduée d'origine O, le point M a pour abscisse x, OM = 5 est équivalent à :
a) $x = -5$; b) $x = 5$; c) $\lvert x\rvert = 5$.

4-2-2 Détermine la distance entre : -3 et 4 ; 0 et -5 ; $\frac{3}{2}$ et $\sqrt{3}$; 3 et π ; $-\frac{7}{3}$ et $-\frac{9}{4}$.

4.3. Résolution d'équation du type : $x \in \mathbb{R}, |x-a| = r$

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, |x-3| = 5$.

1. En utilisant la propriété $|a| = r,\ r > 0, \Leftrightarrow a = -r$ ou $a = r$, résous l'équation (E).
2. Trace une droite et munis-la d'un repère.
Place sur cette droite le nombre 3 ainsi que les nombres dont la distance à 3 est égale à 5.
Déduis-en les solutions de l'équation (E).

Synthèse

Une équation du type : $x \in \mathbb{R}, |x-a| = r$ peut se résoudre algébriquement (voir question 1) ou graphiquement (voir question 2).

Exercices de fixation

4-3-1 Résous algébriquement dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $|x-2| = 5$; 2. $\left|x+\frac{10}{3}\right| = \frac{7}{3}$;
3. $|x-0,6| = -3$.

4-3-2 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $|x-5| = 7$; 2. $\left|x+\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4}$;
3. $|x+2| = 3$.

4.4. Résolution d'inéquation du type : $x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq r$

On considère l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq 3$.

1. En utilisant la propriété $|a| \leq r,\ r > 0, \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$, résous l'inéquation (I).
2. Trace une droite et munis-la d'un repère.
Place sur cette droite le nombre 2 ainsi que les nombres dont la distance à 2 est inférieure ou égale à 3.
Déduis-en les solutions de l'inéquation (I).

Synthèse

Une inéquation du type : $x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq r$ peut se résoudre algébriquement (voir question 1) ou graphiquement (voir question 2).

Exercices de fixation

4-4-1 Résous algébriquement dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $|x-4| \leq 3$; 2. $\left|x-\frac{2}{3}\right| < \frac{5}{6}$; 3. $|x+7| \leq 9$.

4-4-2 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $|x-0,4| \leq 0,8$; 2. $\left|x+\frac{2}{3}\right| < \frac{5}{6}$.

Activité 5 Calculs approchés

À l'aide d'une calculatrice, détermine :

1. a) l'approximation décimale par défaut d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ et de $-\frac{22}{7}$.
   b) l'approximation décimale par excès d'ordre 6 de $\sqrt{2}$ et de $-\frac{22}{7}$.
2. a) l'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{2}$.
   b) l'arrondi d'ordre 4 de $-\frac{22}{7}$.
3. l'encadrement d'ordre 2 de : $\sqrt{2}\ -\frac{22}{7}$.

Synthèse

Pour encadrer une somme, une différence, un produit ou un quotient, on utilise les propriétés relatives aux inégalités et opérations.

Exercices de fixation

5-1 Recopie et complète les pointillés.

Soit : $a = 2{,}236067$.

La valeur approchée par excès de a à 10^{-2} est : ....

La valeur approchée par excès de a à 10^{-3} est ....

La valeur approchée par défaut de a à 10^{-3}est ....

L'arrondi de a à l'ordre 2 est : ....

L'arrondi de a à l'ordre 3 est : ....

5-2 Sachant que : $3{,}3166 < \sqrt{11} < 3{,}3167$, encadre à l'ordre 3 chacun des nombres suivants :

$3 + \sqrt{11}$; $5 - \sqrt{11}$; $\frac{\sqrt{11}}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{11}}$.

5-3 Sachant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ et $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$, donne un encadrement à l'ordre 2 de chacun des nombres suivants : $\pi + \sqrt{5}$; $\pi - \sqrt{5}$; $\frac{\pi}{5}$ et $-\pi \times \sqrt{5}$.

Activité 6 Partie entière d'un nombre réel

1. Trouve le nombre entier relatif n tel que $-2{,}54$ appartienne à $[n\,;\,n+1[$.
2. Trouve le nombre entier relatif n tel que $7{,}31$ appartienne à $[n\,;\,n+1[$.

Synthèse

Si x est un nombre réel, alors il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.
La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Exercices de fixation

6-1 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

a) La partie entière de $-0{,}23$ est 0.

b) La partie entière de $-5{,}89$ est -6.

c) La partie entière de $0{,}17$ est 0.

d) La partie entière de 9 est 9.

e) La partie entière de chacun des nombres de l'intervalle $[1\,;\,2[$ est 1.

f) La partie entière de chacun des nombres de l'intervalle $[-4\,;\,-3[$ est -3.

6-2 Détermine la partie entière des nombres suivants :

$\sqrt{3}$; $\frac{2}{3}$; $-\pi$; $\frac{22}{7}$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Encadrer des nombres réels

Encadre $x + y$, $x - y$, $x \times y$ et $\frac{x}{y}$ sachant que : $x \in [3,6]$ et $y \in [-4,-2]$.

Corrigé

On sait que : $3 \leq x \leq 6$ et $-4 \leq y \leq -2$.

• Encadrons $x + y$.
En faisant la somme membre à membre on a :
$-1 \leq x + y \leq 4$.

• Encadrons $x - y$.
On sait que : $3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$.
En faisant la somme membre à membre on a :
$5 \leq x - y \leq 10$.

• Encadrons $x \times y$.
Comme y est négatif, encadrons d'abord son opposé :
$2 \leq -y \leq 4$ puis encadrons ensuite $-yx$.
On a : $6 \leq -yx \leq 24$.

Encadrons enfin l'opposé de $-yx$.
Donc : $-24 \leq yx \leq -6$.

• Encadrons $\frac{x}{y}$.
$3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$ et $\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$.

Encadrons d'abord $\frac{x}{-y}$.

On a : $\frac{3}{4} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{6}{2}$; donc : $-3 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{3}{4}$.

Méthode

Pour encadrer :
$x - y$, $x \times y$ et $\frac{x}{y}$, on utilise les propriétés des inégalités et opérations.

Exercice 2 Déterminer un majorant, un minorant

Soit C l'ensemble tel que : $C = \left\{\frac{3n}{3n+2}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

1. a) Trouve trois éléments de C.
   b) Justifie que 0 est un minorant de C.
   c) Déduis-en que 0 est le minimum de C.
2. Démontre que C est majoré par 1 mais qu'il n'est pas le maximum de C.

Corrigé

1. a) $\frac{3}{5}; \frac{6}{7}; \frac{9}{11}$. sont des éléments respectifs de C pour $n = 1$; $n = 2$ et $n = 3$.

   b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3n}{3n+2} \geq 0$; donc 0 est un minorant de C.

   c) 0 est le minimum de C car $0 = \frac{3 \times 0}{3 \times 0 + 2} = 0$; $0 \in C$.

2. Démontrons que C est majoré par 1.

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3n}{3n+2} - 1 = -\frac{2}{3n+2} < 0$,

on a $\frac{3n}{3n+2} < 1$; 1 est plus grand que tous les éléments de C. Donc C est majoré par 1.

Démontrons par l'absurde que 1 n'est pas le maximum de C.

Supposons que 1 est le maximum de C.

Alors on peut trouver un entier naturel n tel que : $1 = \frac{3n}{3n+2}$.

$1 = \frac{3n}{3n+2} \Leftrightarrow 3n + 2 = 3n \Leftrightarrow 0 = 2$.

C'est impossible, donc 1 n'est pas le maximum de C.

Méthode

- Pour justifier que a est le minimum d'un ensemble E, on démontre que :
  $a \in E$, $\forall x \in E$ et $x \geq a$
- Pour justifier que a n'est pas le minimum (resp maximum) on peut utiliser un raisonnement par l'absurde.

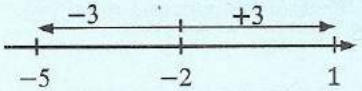
Exercice 3 Résoudre une équation du type $|x - a| = r$ et une inéquation du type $|x - a| \leq r$

1. a) Résous algébriquement l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $|x - 5| = 2$.
   b) Résous graphiquement l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $|x + 2| = 3$.
2. a) Résous algébriquement l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq 2$.
   b) Résous graphiquement l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $|x + 5| \leq 4$.

Corrigé

1. a) Résolvons algébriquement l'équation (E) :
$x \in \mathbb{R}$, $|x - 5| = 2$
$|x - 5| = 2 \Leftrightarrow x - 5 = 2$ ou $x - 5 = -2$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 7$
$S_{\mathbb{R}} = \{3;7\}$.

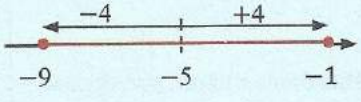
b) Résolvons graphiquement l'équation (E) :
$x \in \mathbb{R}$, $|x + 2| = 3$.
$|x + 2| = 3 \Leftrightarrow |x - (-2)| = 3$.



$S_{\mathbb{R}} = \{-5;1\}$.

2. a) Résolvons algébriquement l'inéquation (I) :
$x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq 2$.
$|x - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2$
$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

b) Résolvons graphiquement l'inéquation (I) :
$x \in \mathbb{R}$, $|x + 5| \leq 4$.
$|x + 5| \leq 4 \Leftrightarrow |x - (-5)| \leq 4$,



$S_{\mathbb{R}} = [-9 ; -1]$.

Méthode

- Pour résoudre algébriquement l'équation $|x - a| = r$, on écrit : $x - a = r$ ou $x - a = -r$.
- Pour résoudre algébriquement l'inéquation $|x - a| \leq r$, on écrit : $-r \leq x - a \leq r$.
- Pour résoudre graphiquement $|x - a| = 2$ ou $|x - a| \leq r$, on représente un segment de centre a et d'extrémités $a - r$ et $a + r$.

1 Ensemble des nombres rationnels et irrationnels

1.1. Nombre rationnel

Définition Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*)$.

1.2. Nombres irrationnels

Présentation

$\sqrt{2}$ et π ne sont pas des nombres rationnels : ils sont des nombres irrationnels.

Remarque

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres irrationnels.
En particulier : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.3. Le raisonnement par l'absurde

Point méthode

Pour prouver qu'une affirmation est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une contradiction.

2 Ordre dans $\mathbb{R}$

Propriétés Soient x, y et z des nombres réels. On a :
- $x \leq x$.
- Si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.
- Si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (propriété valable aussi pour les inégalités strictes).

Propriétés Soient x, y et z des nombres réels. On a :
- ordre et addition ;

Si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$.
- ordre et multiplication ;

Si $x \leq y$ et z positif alors $xz \leq yz$.
Si $x \leq y$ et z négatif alors $xz \geq yz$.
(Propriétés valables aussi pour les inégalités strictes).

Propriétés
- Si on ajoute membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.
- Si on multiplie membre à membre deux inégalités de même sens et de membres positifs, on obtient une inégalité de même sens.
- Deux nombres réels positifs sont rangés dans le même sens que leurs carrés et leurs racines carrés.
- Deux nombres réels positifs non nuls sont rangés dans le sens contraire de l'ordre de rangement de leurs inverses.

Point méthode

Pour comparer deux nombres réels :
- on peut étudier le signe de leurs différences ;
- on peut les comparer à un nombre intermédiaire ;
- si les nombres réels ont le même signe, on peut comparer leurs carrés, leurs racines carrées ou leurs inverses.

3 Minorant, majorant, minimum et maximum d'un ensemble

3.1. Majorants - Minorants

Définitions Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.
- On dit qu'un nombre réel M est un majorant de E si M est supérieur ou égal à tous les éléments de E.
- Un ensemble qui admet un majorant est dit majoré.
- On dit qu'un nombre réel m est un minorant de E si m est inférieur ou égal à tous les éléments de E.
- Un ensemble qui admet un minorant est dit minoré.
- Un ensemble est dit borné s'il est à la fois minoré et majoré.

3.2. Maximum - Minimum

Définition Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.
- Lorsqu'il existe un nombre réel M de E, supérieur ou égal à tous les éléments de E, on dit que M est le maximum de E.
- Lorsqu'il existe un nombre réel m de E, inférieur ou égal à tous les éléments de E, on dit que m est le minimum de E.

Remarque
- Le maximum et le minimum de E, s'ils existent sont toujours éléments de E.
- Le maximum de E, s'il existe est le plus petit des majorants de E.
- Le minimum de E, s'il existe est le plus grand des minorants de E.
- Le minimum et le maximum de E, s'ils existent sont uniques.

4 Valeur absolue et distance de deux nombres réels

4.1. Valeur absolue

Définition Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x la distance à 0 de x.

On la note $|x|$ et on lit : « valeur absolue de x ».

Ainsi $\begin{cases} |x| = x, \text{ si } x \text{ est positif} \\ |x| = -x, \text{ si } x \text{ est négatif} \end{cases}$

Propriétés Soient x et y des nombres réels. On a :

- $|x| \geq 0$; $|x| = |-x|$; $|xy| = |x||y|$; $|x| = \sqrt{x^2}$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
- si r est un réel strictement positif, $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

4.2. Distance de deux nombres réels

Définition x et y étant deux nombres réels, la distance de x et y est notée $d(x ; y)$ et on a : $d(x ; y) = |x - y|$.

Point méthode

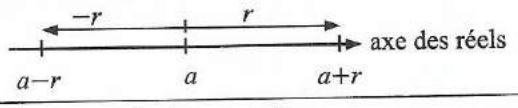
Équations du type : $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| = r$ avec r réel strictement positif et a réel quelconque.

- Résolution algébrique

$|x-a| = r \Leftrightarrow x-a = r$ ou $x-a = -r$
$\Leftrightarrow x = a + r$ ou $x = a - r$

$S = \{a - r ; a + r\}$.

- Résolution graphique

Interprétation	$\|x-a\| = r \Leftrightarrow d(x ; a) = r$
Traduction graphique :	
Identification des solutions :	$\{a + r ; a - r\}$

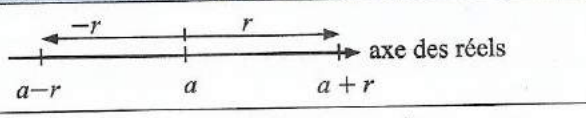
Inéquations du type : $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| \leq r$ avec r réel strictement positif et a un nombre réel quelconque.

- Résolution algébrique

$|x-a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r$
$\Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$
$\Leftrightarrow x \in [a-r ; a + r]$

$S = [a-r ; a+r]$

- Résolution graphique

Interprétation	$\|x-a\| \leq r \Leftrightarrow d(x ; a) \leq r$
Traduction graphique :	
Identification des solutions :	Intervalle $[a-r ; a + r]$

5 Calculs approchés

5.1. Approximation décimale d'ordre n

Définition Soit a un nombre décimal d'ordre n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Si $a \leq x \leq a + 10^{-n}$ alors :
- a est l'approximation décimale d'ordre n par défaut de x ;
- $a + 10^{-n}$ est l'approximation décimale d'ordre n par excès de x.

5.2. Arrondi d'ordre n

Point méthode

Pour obtenir l'arrondi d'ordre n d'un nombre réel dont on connaît les $n + 1$ premiers chiffres après la virgule, on procède comme suit :
- Si le $(n + 1)^{ième}$ chiffre après la virgule est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4, on conserve les n premiers chiffres après la virgule ;
- Si le $(n + 1)^{ième}$ chiffre après la virgule est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ou 9, on conserve les n premiers chiffres après la virgule en augmentant de 1 le dernier chiffre écrit.

5.3. Encadrement

Définition Soient a et b deux nombres réels, si l'on a : $a \leq x \leq b$, on dit qu'on a un encadrement de x d'amplitude : $a - b$.

Méthode d'encadrement

Soient x et y deux réels encadrés	méthodes
Encadrement de la somme $x + y$	Additionner « membre à membre » les inégalités de même sens.
Encadrement de la différence $x - y$	- Encadrer $-y$ - Encadrer $x + (-y)$
Encadrement du produit xy	Si tous les termes sont positifs, multiplier "membre à membre" les inégalités de même sens.
Encadrement du quotient $\frac{x}{y}$ (y étant non nul)	Si tous les termes sont positifs : - Encadrer $\frac{1}{y}$; - Encadrer $x \times \frac{1}{y}$.

Remarque

Éviter les quotients et les différences « membre à membre » même si les inégalités sont de même sens.

6 Partie entière d'un nombre réel

Propriété - définition Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif n qui vérifie : $n \leq x < n + 1$. Ce nombre entier relatif est appelé partie entière de x.

Notation : La partie entière de x est notée $E(x)$ ou $[x]$.

Remarque : La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Exercices de renforcement

1 Effectue les opérations suivantes et donne les résultats sous forme de fraction irréductible.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$; b) $3-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$; c) $\frac{5}{4}\times\frac{12}{35}$;

d) $4\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$; e) $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$.

2 Effectue les opérations suivantes et donne les résultats sous forme de fraction irréductible.

a $= 15 : \frac{5}{4}$ b $= \frac{7}{5} : \frac{14}{3}$ c $= 3-2\times\frac{5}{3} : \frac{20}{21}$

d $= \frac{5}{3}-\frac{4}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{21}{3}$ e) $= \left(1+\frac{2}{5}\right) : \left(3-\frac{1}{5}\right)$.

3 Effectue les opérations suivantes et donne les résultats sous forme de fraction irréductible :

$A=\dfrac{5}{\frac{2}{3}}$; $B=\dfrac{2}{\frac{5}{6}}$; $C=\dfrac{2-\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}}$; $D=\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}}$;

$E=\dfrac{5\left(2-\frac{19}{3}\right)}{\frac{11}{6}:\frac{5}{2}}$; $F=\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}$.

4 Effectue les opérations suivantes et donne les résultats sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}-\frac{4}{7}+\frac{1}{6}}$; b) $3+5\times\dfrac{\frac{7}{2}-2}{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}$;

c) $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15+\frac{1}{2}}}$; d) $\dfrac{\frac{90}{71}}{\frac{9}{29}}\times\dfrac{\frac{13}{58}}{\frac{39}{71}}$.

5 Écris les nombres suivants sans le symbole de racine carrée.

$\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{75}}$; $\sqrt{8}\times\sqrt{72}\times\sqrt{144}$; $\sqrt{7}\times\sqrt{0{,}0007}$; $\sqrt{\sqrt{6^8}}$.

6 Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, a un nombre réel et b étant un entier, le plus petit possible.

$\sqrt{3}+5\sqrt{0{,}12}$; $\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}$; $\frac{2\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$; $\sqrt{3\times5^4}$;

$3\sqrt{50}-\sqrt{98}$; $\sqrt{0{,}12}\times\sqrt{\frac{3}{125}}$; $\frac{5}{5-\sqrt{5}}$;

$\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}-\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$.

7 Écris les nombres suivants sous forme de $2^n\times3^m$ où n et m sont des nombres entiers relatifs.

a $= (3^5)^{-3}\times16^3$; b $= \frac{27^3}{2^{-5}}$;

c $= \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$; d $= \frac{(10^2)^4}{3^7\times5^8}$.

8 Mets A, B, C, D et E sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$A=\left(\frac{4}{3}\right)^{50}\times0{,}75^{51}$; $B=-\frac{4}{11}\times\left(\frac{2}{11}\right)^{-3}\times(5{,}5)^{-1}$;

$C=\dfrac{(3^5\times2^{-2})^2}{(9^{-1}\times2^3)^3}$. ; $D=\dfrac{10^9-6^3}{25^4\times3\times2^{11}}$.

9 Écris les nombres A, B, C, D, E, F et G suivants sous la forme $a^n\times b^m$ où n et m sont des nombres entiers relatifs et a et b sont des nombres entiers naturels.

$A=\dfrac{12^5\times35^{-2}}{49^{-3}\times21^4}$; $B=\dfrac{(7^2\times3)^{-3}\times5^2}{7\times3^{-3}}$;

$C=\left(\dfrac{7^5\times3^{-3}}{9\times49}\right)^2$; $D=\dfrac{49\times105^2\times32}{(100\times7)^3}$;

$E=\dfrac{(4^{-3}\times10^2)^2\times75^{-3}}{4000^{-1}\times16}$; $F=\dfrac{(3^3\times5^3)^3\times2^7}{5^2\times(3\times2^3)^2}$;

$G=\dfrac{(-2)^7\times(-6)^5\times(-3)^{10}}{(18)^4\times(-12)^3}$.

10 Écris les nombres suivants sous la forme $a^n\times b^m$ où n et m sont des nombres entiers relatifs et les nombres a et b sont non nuls.

$A=(-a)^5\times(-b)^4$; $B=-\dfrac{a^3b^{-2}{}^4}{a^5b^{-5}}$; $C=-\dfrac{16a^2b^5}{(2ab)^4}$;

$D=\dfrac{(a^{-2}\times b)^4\times(-a^2\times b)^{-1}}{(-ab^{-1})^{-3}}$;

$E=(a^{-3}b)^2\times(a^2b^{-1})^{-1}$; $F=\dfrac{(a^2b)^3\times b^{-2}c^3}{a^2c^{-1}(c^2b)^2}$,

c est un nombre entier non nul.

11 Compare, dans chacun des cas, les nombres suivants :

$\frac{1}{2\sqrt{30}}$ et $\frac{1}{11}$; $9+\sqrt{10}$ et $12+\sqrt{11}$;

$-7(1-\sqrt{2})$ et $-5(1-\sqrt{2})$; $3-2\sqrt{7}$ et $3-3\sqrt{3}$.

12 Soit (D) une droite graduée.

1. Place sur (D) le nombre $\frac{22}{7}$.
2. Place sur (D) le nombre $\frac{23}{8}$.
3. Déduis-en la comparaison de $\frac{22}{7}$ et $\frac{23}{8}$.

13 Compare les nombres suivants :

1) $5\sqrt{13}$ et 18 ; 2) $\frac{1}{11\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{9}$; 3) $\sqrt{21}+\sqrt{11}$ et $\sqrt{22}+\sqrt{10}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Exercices

14 Compare les nombres donnés dans chaque cas :

a) $4-7\sqrt{2}$ et $4-4\sqrt{6}$; b) $19+2\sqrt{7}$ et $13+2\sqrt{3}$; c) $\frac{1}{1-\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$; d) $\sqrt{5}+\sqrt{13}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{14}$; e) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{3}$.

15 Compare les nombres donnés dans chaque cas :

a) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ et $\sqrt{5-\sqrt{3}}$; b) $2\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ et $4\sqrt{5}-9$ c) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$ et $9-4\sqrt{5}$.

16 a, b et c sont trois nombres réels non nuls, compare :

1) $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b+1}$ où $b > a > 0$;

2) $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ où $a < b < 0$ et $c > 0$;

3) $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{2ab}{a+b}$ où $a > 0$ et $b > 0$.

17 a, b et c sont trois nombres réels.

1. Compare $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$ dans chacun des cas suivants :
   a) $c > 0$ et $0 < a < b$;
   b) $c > 0$ et $0 < b < a$.
2. Déduis-en la comparaison de :
   a) $\frac{2}{5}$ et $\frac{2+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$; b) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{173}}{\sqrt{3}+\sqrt{173}}$.

18 Compare dans chaque cas A et B.

1. $A = \frac{n-2}{n+2}$ et $B = \frac{n-1}{n+3}, n \in \mathbb{N}$;
2. $A = \frac{2}{5}$ et $B = \frac{2}{5+\sqrt{3}}$.
3. $A = ab - 1$ et $B = (a+1)(b+1)$, a et b sont deux réels strictement positifs.

19 Range dans l'ordre croissant les nombres a ; $\frac{1}{a}$; $\sqrt{a}$; $\frac{1}{\sqrt{a}}$; a^2 ; $\frac{1}{a^2}$, dans chacun des cas suivants :

1. $a > 1$; 2. $0 < a < 1$.

20 a et b sont deux nombres réels strictement positifs. Compare : $\frac{1}{a+b}$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

21 a et b sont deux nombres réels positifs. Compare : $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

22 a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

1. Détermine dans quel cas le nombre $\frac{a-1}{a}$ est plus grand que le nombre $\frac{b-1}{b}$.
2. Déduis-en la comparaison de : $\frac{987,654321}{987,654322}$ et $\frac{987,654322}{987,654323}$.

23 Soit l'intervalle $B =]-2 ; 7]$.

1. Détermine trois minorants et trois majorants de B.
2. Détermine le maximum et le minimum si possible de B.
3. Écris l'ensemble de tous les majorants de B.
4. Écris l'ensemble de tous les minorants de B.

24 Détermine si possible, le minimum et le maximum des ensembles A, B, C, D et E suivants :

$A = [-1;8]$; $B = [-3;\sqrt{13}[\cap \mathbb{Z}$;
$C =]-3;\frac{19}{2}[\cap \mathbb{Z}$; $D =]-\pi;3,14[\cap \mathbb{N}$;
$E =]-4;\sqrt{5}]$.

25 Soit $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Détermine trois éléments de A.
2. a) Justifie que 1 est un majorant de A.
   b) Déduis-en que 1 est le maximum de A.
3. Justifie que A est minoré par 0, mais que 0 n'est pas le minimum de A.

26 On considère l'ensemble B des nombres réels pouvant s'écrire sous la forme $\frac{n}{n+2}$, où n est un nombre entier naturel quelconque.

1. Démontre que B admet 0 pour minimum.
2. Démontre que B est majoré par 1 mais que 1 n'est pas le maximum de B.

27 Soit C un ensemble tel que : $C = \left\{2-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. a) Trouve trois éléments de C.
   b) Justifie que 1 est un minorant de C.
   c) Déduis-en que 1 est le minimum de C.
2. a) Justifie que C est majoré par 2.
   b) Démontre par l'absurde que 2 n'est pas le maximum de C.
3. Démontre que l'ensemble C est borné.

28 Résous algébriquement les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, |x+2| = 5$; b) $x \in \mathbb{R}, \left|x-\frac{2}{3}\right| - \frac{7}{4} = 0$;
c) $x \in \mathbb{R}, |x-1| + 10 = 0$; d) $x \in \mathbb{R}, |5x-6| = 15$;
e) $x \in \mathbb{R}, |2x+5| = 3$.

29 1. Résous algébriquement les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \left|x+\frac{2}{7}\right| < \frac{9}{7}$; b) $x \in \mathbb{R}, |2-x| \leq 5$;
c) $x \in \mathbb{R}, |2x-5| < 1$; d) $x \in \mathbb{R}, |3-2x| \leq \frac{1}{2}$.

2. Résous graphiquement et algébriquement les équations et inéquations suivantes :
a) $x \in \mathbb{R}, |2x - 1| = 4$; b) $x \in \mathbb{R}, |-4x + 1| = 8$;
c) $x \in \mathbb{R}, |-3x - 6| = 12$; d) $x \in \mathbb{R}, |-x - 1| = 3$.

30 Résous graphiquement les inéquations suivantes :
a) $x \in \mathbb{R}, |x - 6| \leq 5$; b) $x \in \mathbb{R}, \left|x + \frac{2}{7}\right| < \frac{9}{7}$;
c) $x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq \frac{1}{2}$; d) $x \in \mathbb{R}, |5 - 3x| < 1$;
e) $x \in \mathbb{R}, |x - \sqrt{3}| \leq 2 - \sqrt{3}$; f) $x \in \mathbb{R}, |-3x + 1| \leq 3$.

31 Soit x un nombre réel tel que $-1 \leq x \leq 3$.
Écris sans le symbole de valeur absolue les nombres suivants :
$|x + 1|$; $|x - 3|$; $|2x + 2|$; $\left|\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right|$; $|x + 5|$.

32 x et y sont des nombres réels tels que :
$|x - 2| < 0{,}1$ et $|y - 2| < 0{,}2$.
Détermine un encadrement de :
$|x + y|$; $|x - y|$; $|xy|$ et $\frac{x}{y}$.

33 Sachant que : $1{,}144 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$, donne un encadrement de : $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5}$ et de $\frac{3(\sqrt{2} - 3\sqrt{3})}{2}$.

34 a et b sont deux nombres réels tels que :
$1{,}76 < a < 1{,}78$ et $2{,}43 < b < 2{,}45$.
Donne un encadrement de chacun des nombres suivants :
a) $3a^2 + 2b$; b) $b^2 - 3a + 5$; c) $3b - 2a$;
d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; e) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Donne l'amplitude de chaque encadrement.

35 x et y sont deux nombres réels tels que :
$4 < x < 5$ et $-\frac{1}{2} < y < -\frac{1}{3}$.
Détermine un encadrement de : $x + y$; xy ; $x - y$; x^2 ; y^2 et $\frac{x}{y}$.
(On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).

36 Recopie et complète le tableau ci-dessous :

	Valeur approchée par excès à 10^{-3} près	Valeur approchée par défaut à 10^{-3} près	Arrondi d'ordre 2	Arrondi d'ordre 3
465,76543				
−78,98554				
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$				
$\frac{1}{4}\pi\left(\frac{5}{7}\right)^3$				
$\frac{3\pi}{2}$				

Exercices d'approfondissement

37* Sachant que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel, démontre par l'absurde que les nombres A et B suivants sont irrationnels :
$A = 2 + \sqrt{3}$; $B = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$.

38* Soit un ensemble $E = \{ 2x^2 + 4x + 3 / x \in \mathbb{R} \}$.
1. Détermine dix éléments de E.
2. Compare les valeurs trouvées à 1.
Que remarques-tu ?
3. a) Justifie que : $2x^2 + 4x + 3 = 2\left[(x + 1)^2 + \frac{1}{2}\right]$.
b) Démontre que 1 est un minorant de E.
4. Détermine l'élément de E correspondant à $x = -1$.
5. Déduis que 1 est le minimum de E.

39* Transforme les écritures suivantes sous forme de fraction irréductible ou sans radical au dénominateur.
$a = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$; $b = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}}$;
$c = \dfrac{1 - \frac{1}{3} + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{3} + \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}}}$.

40* a et b sont des nombres réels.
Démontre que : $|a + b| \leq |a| + |b|$.

41* a, b et c sont des nombres réels.
1. Démontre que : $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
2. Démontre que : $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.
3. Démontre que : $3ab + 3bc + 3ac \leq (a + b + c)^2$.

42* Soient x et y deux nombres réels tels que : $0 < x \leq y$.
On pose : $m = \frac{x + y}{2}$; $g = \sqrt{xy}$ et $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.
1. Démontre que : $x \leq m \leq y$.
2. Démontre que : $x \leq g \leq y$..

3. Démontre que : $x \leq g \leq m \leq y$.
4. Démontre que : $x \leq h \leq y$.
5. a) Démontre que : $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$.
b) Déduis-en que : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

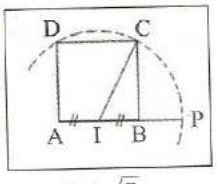
43 x est un nombre réel.
Démontre que : $|2x+3| \leq |x-2| + |x+5|$.

44 Résous algébriquement ou graphiquement les inéquations suivantes :
a) $|x-5| > 2$; b) $\left|x+\frac{3}{4}\right| \geq \frac{1}{2}$; c) $|3x-12| \geq 15$.

45 x et y sont deux nombres réels.
Démontre que : $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

46 x et y sont deux nombres réels.
Justifie les égalités suivantes :
a) $|xy| = |x| \times |y|$ b) si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

47 On considère un carré ABCD de côté 1. Le point I est le milieu du segment [AB]. Le cercle de centre I et de rayon IC coupe la demi-droite [IB) en P.
1. Calcule les distances IB, IC et AP.



2. On note $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ϕ se lit phi en majuscule et minuscule φ et s'appelle nombre d'or).
Démontre que : $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{BP} = \phi$.
3. a) Calcule ϕ^2 et vérifie que : $\phi^2 = \phi + 1$.
b) vérifie les égalités suivantes : $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ et $\phi^3 = 2\phi + 1$.

Situations d'évaluation

48* Un agriculteur a un terrain en forme de triangle rectangle dont les mesures des côtés qui forment l'angle droit sont x et y tels que : 30,21 m $< x <$ 30,22 m et 40,52 m $< y <$ 40,53 m. Il désire avoir une idée de la longueur de l'hypoténuse pour engager des travaux.
1. Détermine un encadrement de l'hypoténuse par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
2. Donne une valeur approchée d'ordre 1 par excès de la longueur de l'hypoténuse.

Coup de Pouce

37 Supposer que $2+\sqrt{3}$ est rationnel, alors $2+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$; avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$.
On a $\sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$ serait aussi un rationnel, impossible car $\sqrt{3}$ serait rationnel.
Donc $2+\sqrt{3}$ est irrationnel.

38 3. b) $(x+1)^2 \geq 0$ et $2\left[(x+1)^2 + \frac{1}{2}\right] \geq 1$.
5. Pour $x = -1$, l'élément de E est 1, 1 est le minimum.

39 On commence le calcul par le bas.
$a = \frac{41}{29}$; $b = \sqrt{2}$; $c = \frac{17}{26}$.

40 On sait que : $a^2 = |a|^2$.
$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, or : $ab \leq |a|.|b|$
On a : $|a+b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a|.|b|$.
Ainsi : $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$, donc $|a+b| \leq |a|+|b|$.

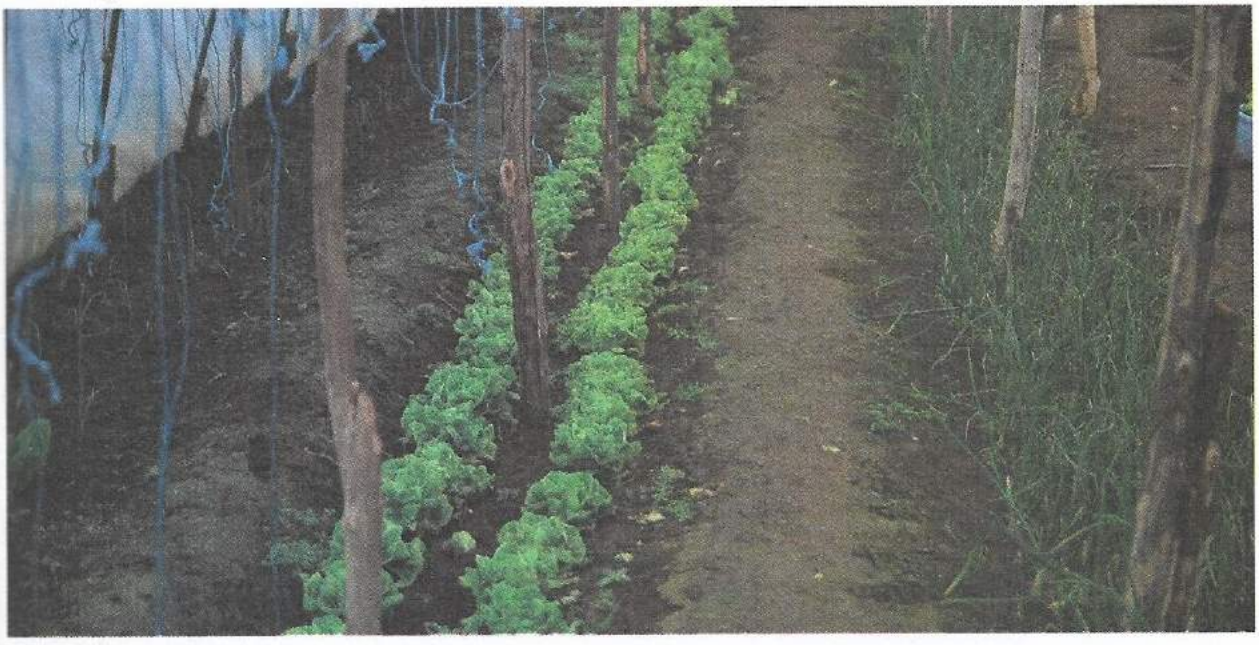
41 1. On sait que : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
on a : $2ab \leq a^2 + b^2$.
2. Démontrons que : $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.
D'après la question 1,
$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$; $bc \leq \frac{b^2+c^2}{2}$ et $ac \leq \frac{a^2+c^2}{2}$.
En additionnant membre à membre on a :
$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$
3. Démontre que : $3ab + 3bc + 3ac \leq (a+b+c)^2$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
D'après la question 2, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$;
on a : $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 2ab + 2bc + 2ac + ab + bc + ac$
on a : $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 3ab + 3bc + 3ac$
donc : $(a+b+c)^2 \geq 3ab + 3bc + 3ac$.

42 1. On démontre que $m - x \geq 0$ et $x - y \leq 0$.
2. $x = \sqrt{xx} \leq \sqrt{xy} \leq \sqrt{yy}$.
3. $m - g = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0$.
4. D'après 1), $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{y}$.

48 Encadrer successivement x^2 ; y^2 ; x^2+y^2 et $\sqrt{x^2+y^2}$.
(Pour tous nombres réels a et b positifs, si $a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$).

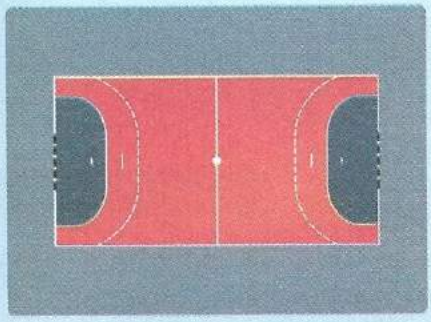
Leçon 2

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES



Pour aménager un terrain pour différentes cultures, on peut partager le terrain en différents espaces d'aires données. Pour un terrain de 1000 m² ayant la forme d'un rectangle, 300 m² doivent servir à la culture de tomates et le reste à celle des aubergines. En utilisant un polynôme, partage ce terrain.

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Pour encourager et diversifier la pratique du sport dans son lycée, le comité de gestion du lycée souhaite construire un terrain de handball sur un espace rectangulaire de 30 m de longueur et 16 m de largeur. Le proviseur souhaite par la même occasion construire une piste d'athlétisme de même largeur en béton préfabriqué tout autour du terrain de handball. Pour commander la quantité de béton vendue par mètre carré nécessaire à la piste d'athlétisme, il doit déterminer l'aire de cette piste. Samuel, le Président du conseil scolaire, élève en Seconde ayant assisté à l'assemblée générale du comité, fait le compte rendu à ses camardes de classe afin d'aider le comité à déterminer l'aire de la piste d'athlétisme.

Leur professeur de mathématique affirme que la détermination de l'aire n'est rien d'autre que l'application des polynômes. Curieux, ceux-ci décident d'étudier les polynômes et les fractions rationnelles.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Généralité sur les polynômes

Connaître :
- la définition d'un polynôme
- la définition du degré d'un polynôme
- la définition du zéro d'un polynôme
- la propriété relative à l'égalité de deux polynômes
- la propriété relative à la somme de deux polynômes
- la propriété relative au produit de polynômes
- les produits remarquables
- le théorème fondamental relatif à la factorisation par $x - \alpha$

Reconnaître :
- le coefficient d'un polynôme
- la forme factorisée d'un polynôme

Vérifier : qu'un nombre réel donné est zéro d'un polynôme

Effectuer :
- la somme de deux polynômes
- le produit de deux polynômes

Factoriser :
- un polynôme en utilisant les égalités remarquables
- par $x - a$ (a étant un zéro) et rechercher les zéros en utilisant la méthode des coefficients indéterminés
- par $x - a$ (a étant un zéro) et rechercher les zéros en utilisant la méthode de la division euclidienne

2 Forme canonique d'un polynôme du second degré

Écrire : la forme canonique d'un polynôme du second degré

Factoriser : un polynôme du second degré en utilisant la forme canonique

Étudier : le signe d'un polynôme du second degré en utilisant une expression déjà factorisée

3 Fractions rationnelles

Connaître :
- la définition d'une fraction rationnelle
- les différentes écritures d'une fraction rationnelle

Transformer :
- les fractions rationnelles par la méthode de la division euclidienne
- les fractions rationnelles par la méthode d'identification

Étudier : le signe d'une fraction rationnelle

4 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux polynômes et/ou aux fractions rationnelles

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Généralités sur les polynômes

1.1. Définition d'un polynôme

Mohamed, élève en Seconde, apprend sur le Net que le produit de trois nombres entiers consécutifs auquel on ajoute le deuxième nombre est le cube du deuxième nombre.

1. Choisis comme premier nombre, $x - 1$. Donne l'expression obtenue.
2. Choisis comme premier nombre, x. Donne l'expression obtenue.
3. Justifie que l'affirmation est correcte.

Synthèse

Un polynôme est une somme de monômes.

Exercices de fixation

1-1-1 Recopie les expressions qui sont des polynômes.

$2x^3+x$; $\frac{1}{x}-1$; 4 ; $\sqrt{x}$; $-2x+3$.

1-1-2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) x^8-7x^5+3x-1 est un polynôme.

b) $\frac{1}{x}+2x+9$ est un polynôme.

c) $x^7-2\sqrt{x}+1$ est un polynôme.

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}x^3-4$ est un polynôme.

1.2. Forme développée réduite et ordonnée d'un polynôme

Soit le polynôme P tel que : $P(x)=(1-2x)(x^2-3)-x^2(4-x)+5$.
Développe, réduis et ordonne le polynôme P suivant les puissances décroissantes de x.

Synthèse

Un polynôme P s'écrit de manière unique sous forme développée, réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x.

Exercices de fixation

1-2-1 Développe, réduis et ordonne les polynômes R et S tels que :

$R(x)=(x^2-1)(2x+3)-x^2+9$.

$S(x)=(9x-1)(9x+1)(x-7)^2+10$.

1-2-2 Développe, réduis et ordonne les polynômes P et Q tels que :

$P(x)=(x-1)^2$.

$Q(x)=(x-2)^3$.

1.3. Degré, coefficient d'un polynôme

Soit le polynôme P tel que : $P(x)=x^8+3x^7-x^5+4x^3-x^2-2019$.
1. Détermine le coefficient du monôme de degré 3.
2. Détermine le plus grand degré des monômes.

Synthèse

Le degré d'un polynôme est le degré de son monôme de plus haut degré.
La forme développée, réduite et ordonnée suivant les puissances croissantes d'un polynôme permet d'avoir ses coefficients.

Exercices de fixation

1-3-1 Donne la liste des coefficients du polynôme suivant :

$-17x^5-x^3+x^2-100x+3$.

1-3-2 Détermine le degré du polynôme P dans chacun des cas suivants :

a) $P(x)=-12x^8-4x^4-2x+1$; b) $P(x)=x+4$;

c) $P(x)=7$; d) $P(x)=4x^2-x^3-2x^4+1$.

1.4. Zéro d'un polynôme

Soit le polynôme P tel que : $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 2$.
Calcule $P(-1)$.

Synthèse

$P(-1) = 0$. On dit que -1 est un zéro du polynôme P.
Tout nombre réel α tel que $P(\alpha)$ est égal à 0 s'appelle zéro du polynôme P.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifie si α est un zéro du polynôme P.

a) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ avec $\alpha = 1$.
b) $P(x) = -x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$ avec $\alpha = -2$.
c) $P(x) = -x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 2$ avec $\alpha = 2$.
d) $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + x - 3$ avec $\alpha = \sqrt{2}$.

1.5. Somme et produit de deux polynômes

Soit les polynômes R et T tels que :
$R(x) = -x^5 + 2x^4 - x^2 + 2$ et $T(x) = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 1$.
1. Calcule $R(x) + T(x)$ et $R(x) \times T(x)$.
2. a) Complète les phrases suivantes :
R+T est un ..... de degré .....
R×T est un ..... de degré .....
b) Compare d°(R+T) et d°R, puis d°(R×T) et d°R + d°T.

Synthèse

- La somme de deux polynômes est un polynôme dont le degré est inférieur ou égal au degré de chacun d'eux.
- Le produit de deux polynômes est un polynôme dont le degré est égal à la somme de leurs degrés.

Exercice de fixation

Soit n, un entier naturel : P, Q et R les polynômes définis par :
$P(x) = (x^3 + x + 1)(-5x^7 + 3x^2 - 4) + 5x(x^9 - 1)$; $Q(x) = (x^3 - 5x + 1)^n$; $R(x) = x^{2n} - 1$.
1. Développe, réduis et ordonne $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.
2. Détermine d°P ; d°Q ; d° QR ; d°(Q+R).
On ne demande pas de déterminer les polynômes QR et Q + R.

1.6. Factorisation d'un polynôme

Factorise chacun des polynômes P, R et T suivants en utilisant un produit remarquable.
$P(x) = 4x^2 - 9$; $R(x) = x^3 + 64$; $T(x) = (2x-1)^2 - (x+2)^2$.

Synthèse

Pour factoriser un polynôme, on peut utiliser le développement d'un produit remarquable.

Exercices de fixation

Factorise chacun des polynômes Q, S et H suivants en utilisant un produit remarquable.

$Q(x) = x^2 - 49$; $S(x) = x^2 - 5$; $H(x) = (2x+1)^2 - 9$.

1.7. Factorisation par $x - a$

Soit le polynôme P tel que : $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 7x + 2$.
1. Calcule P(2).
2. Justifie que : $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 - (-2 \times 2^3 + 7 \times 2^2 - 7 \times 2 + 2)$.
3. Déduis-en le polynôme Q tel que : $P(x) = (x - 2)Q(x)$.

Synthèse

P est un polynôme et α un nombre réel. Lorsque $P(\alpha) = 0$, on peut factoriser $P(x)$ par $x - \alpha$.

Exercices de fixation

1-7-1 Soit le polynôme P tel que : $P(x) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 6$.
1. Vérifie que 1 est un zéro du polynôme P.
2. En utilisant la méthode de la division euclidienne, trouve le polynôme Q de degré 3 tel que : $P(x) = (x - 1)Q(x)$.

1-7-2 Soit le polynôme P tel que : $P(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$.
1. Vérifie que -1 est un zéro du polynôme P.
2. En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, trouve le polynôme Q de degré 2 tel que : $P(x) = (x + 1)Q(x)$.

1-7-3 Soit le polynôme P tel que : $P(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$.
1. Vérifie que -3 est un zéro du polynôme P.
2. Trouve le polynôme Q de degré 2 tel que : $P(x) = (x + 3)Q(x)$.

1.8. Signe d'un polynôme du premier degré

Soit le polynôme du premier degré $ax + b$, avec $a \neq 0$.
1. Pour $a > 0$, résous l'inéquation $ax + b > 0$ puis l'inéquation $ax + b < 0$.
2. Pour $a < 0$, résous l'inéquation $ax + b > 0$ puis l'inéquation $ax + b < 0$.
3. Déduis-en le tableau de signe de $ax + b$.

Synthèse

Le polynôme $ax + b$, $a \neq 0$, est du signe de a lorsque x est supérieur à $-\frac{b}{a}$ et du signe contraire de a lorsque x est inférieur à $-\frac{b}{a}$.

Exercice de fixation

Détermine le tableau de signe du polynôme P dans chacun des cas suivants :
a) $P(x) = 5x - 7$; b) $P(x) = -2x + 34$; c) $P(x) = -x - 1$.

Activité 2 Forme canonique d'un polynôme du second degré

Soit le polynôme du second degré Q tel que : $Q(x) = x^2 - 2x - 8$.
1. Développe $(x - 1)^2$ et remarque que $x^2 - 2x$ est le début du développement précédent.
2. a) Détermine ainsi le nombre réel b tels que : $x^2 - 2x = (x - 1)^2 + b$.
   b) Deduis-en une autre écriture de $Q(x)$.

Synthèse

L'écriture $(x - 1)^2 - 9$ s'appelle la forme canonique de Q.
Tout polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet pour forme canonique l'écriture $a[(x + \alpha)^2 + \beta]$ où α et β sont des nombres réels.

Exercices de fixation

2-1 Détermine la forme canonique du polynôme P dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = x^2 - 2x + 4$; b) $P(t) = t^2 + 4t + 3$;

c) $P(x) = 3x^2 - 6x - 6$; d) $P(x) = -x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.

2-2 Soit $Q(t) = -2t^2 - 2t + 12$.

1. a) Écris $Q(t)$ sous forme canonique.
   b) Déduis-en la forme factorisée de $Q(t)$.
2. Détermine le signe de $Q(t)$ suivant les valeurs de t.

Activité 3 Fractions rationnelles

On donne les polynômes f et g définies par : $f(x) = x(x-2)$ et $g(x) = x^2 - 4$

1. Écris l'expression de la fraction rationnelle h définie par : $h(x) = \frac{9x^2}{4} - \frac{f(x)}{g(x)}$.
2. Détermine la condition d'existence de h.
3. Étudie le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Synthèse

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.
Le signe d'une fraction rationnelle s'obtient à partir des signes du numérateur et du dénominateur.
Toute fraction rationnelle admet différentes écritures.

Exercices de fixation

3-1 On donne la fraction la fraction rationnelle F définie par : $F(x) = \frac{-9x^2 + 6x - 14}{-x+1}$.
En utilisant la division euclidienne, détermine les nombres réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de 1, on a : $F(x) = ax + b + \frac{c}{-x+1}$.

3-2 Étudie le signe de :

1. $F(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x}$;
2. $G(x) = x - 3 + \frac{4}{x+2}$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Factoriser un polynôme

1. Vérifie que -1 est un zéro du polynôme P tel que : $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 2$.
2. Effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$.
3. Factorise $P(x)$ en utilisant la division euclidienne.

Corrigé

1. On a : $P(-1) = -1 + 4 - 1 - 2$
   $P(-1) = 0$
   $P(-1) = 0$, donc -1 est un zéro de $P(x)$.

2.
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x - 2 & x+1 \\ \hline -x^3 - x & x^2 + 3x - 2 \\ \hline 3x^2 + x & \\ -3x^2 - 3x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Méthode

Pour effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$,
- on vérifie que $d^0P \geq d^0Q$;
- on élimine les monômes de P du degré le plus élevé au plus petit.

3. $P(x) = (x+1)(x^2 + 3x - 2)$.

Exercice 2 Étudier le signe d'un polynôme

On considère le polynôme P tel que : $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 10x + 28$.

1. a) Vérifie que 2 est un zéro du polynôme P.
   b) Détermine les nombres réels a, b, et c tels que : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.
2. Soit le polynôme Q tel que : $Q(x) = 2x^2 - 12x - 14$.
   a) Écris $Q(x)$ sous forme canonique.
   b) Factorise $Q(x)$ puis déduis-en que : $P(x) = 2(x-7)(x+1)(x-2)$.
   c) Étudie le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

Corrigé

1. a) On a : $P(2) = 16 - 64 + 20 + 28 = 64 - 64 = 0$.
   b) En utilisant la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminés, on obtient : $a = 2$; $b = -12$; $c = -14$

2. a) $Q(x) = 2x^2 - 12x - 14$
   $= 2(x^2 - 6x - 7)$
   $= 2[(x-3)^2 - 16]$

   b) $Q(x) = 2[(x-3)^2 - 4^2]$
   $= 2[(x-3-4)(x-3+4)]$
   $= 2(x-7)(x+1)$

On sait que : $P(x) = (x-2)Q(x)$
Donc $P(x) = 2(x-7)(x+1)(x-2)$.

c) Étude du signe de $P(x)$.
Les zéros de $P(x)$ sont donc -1 ; 2 et 7.

Méthode

Pour déterminer les nombres, a, b, et c, on peut utiliser :
- la méthode de l'identification des coefficients ;
- la division euclidienne.

x	$-\infty$		-1		2		7		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

- $P(x)$ est strictement positif $x \in]-1 ; 2[\cup]7 ; +\infty[$.
- $P(x)$ est strictement négatif si $x \in]-\infty ; -1[\cup]2 ; 7[$.
- $P(x) = 0$ pour $x \in \{-1 ; 2 ; 7\}$.

Exercice 3 Utiliser la méthode des coefficients indéterminés

Soit le polynôme P tel que : $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$.
Détermine les nombres réels a, b, c, et d tels que : $P(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$.

Corrigé

On a : $P(x) = a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + b(x^2 - 2x + 1) + cx - c + d$
$P(x) = ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a + bx^2 - 2bx + b + cx - c + d$
$= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (3a - 2b + c)x - a + b - c + d$
Or $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$.
Par identification,

$$\text{on a : } \begin{cases} a = 1 \\ -3a + b = -5 \\ 3a - 2b + c = 3 \\ -a + b - c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -4 \\ d = 1 \end{cases}$$

Ainsi : $P(x) = (x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 4(x-1) + 1$.
Donc : $a = 1$; $b = -2$; $c = -4$ et $d = 1$.

Méthode

On utilise la méthode de l'identification des coefficients.

Exercice 4 Étudier le signe d'une fraction rationnelle

Soit la fraction rationnelle F définie par : $F(x) = \dfrac{(-2x+1)(x-3)(x+1)}{x^2-1}$.

1. a) Détermine l'ensemble de définition D_F de F.
   b) Simplifie F sur D_F.
2. Étudie le signe de la fraction rationnelle F.

Corrigé

1. a) $D_F = \mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$.

b) $\forall x \in D_F,\ F(x) = \dfrac{(-2x+1)(x-3)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{(-2x+1)(x-3)}{x-1}$

2. Tableau de signe.

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$-2x+1$	$+$	$+$	$\|$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$x-3$	$-$	$-$	$\|$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$F(x)$	$+$	$\|\|$	$+$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$-$	

$\forall x \in]-\infty\,;\,-1[\cup]-1;\frac{1}{2}[\cup]1\,;\,3[\,,\ F(x) > 0.$

$\forall x \in]\frac{1}{2};1[\cup]3\,;\,+\infty[\,,\ F(x) < 0.$

$\forall x \in \left\{\frac{1}{2};3\right\}\ ;\ F(x) = 0.$

Méthode

Pour étudier le signe d'une fraction rationnelle, on peut :
- factoriser le numérateur et le dénominateur ;
- simplifier si possible la fraction ;
- utiliser un tableau de signe.

Exercice 5 Écrire une fraction rationnelle sous différentes formes

Soit la fraction F définie par : $F(x) = \dfrac{-2x^2+7x-3}{x-1}$.
Détermine les nombres réels m ; n et t tels que : $F(x) = mx + n + \dfrac{t}{x-1}$.

Corrigé

Effectuons la division euclidienne de $-2x^2+7x-3$ par $x-1$.

$-2x^2+7x-3$	$x-1$
$2x^2-2x$	$-2x+5$
$5x-3$	
$-5x+5$	
2	

Donc : $F(x) = -2x+5+\dfrac{2}{x-1}$; ainsi $m=-2$; $n=5$; $t=2$.

Méthode

Pour déterminer les nombres m, n et t, on peut :
- effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur ;
- écrire $mx + n + \dfrac{t}{x-1}$ sous forme d'un quotient, puis identifier les coefficients.

1 Généralités sur les polynômes

1.1. Définition d'un polynôme

Définitions

- Soient a un nombre réel et n un entier naturel. On appelle monôme de la variable réelle x, toute expression de la forme ax^n.
- On appelle fonction monôme toute fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = ax^n$.
- Lorsque a est non nul, il est appelé le coefficient et n le degré du monôme ax^n.
- Un polynôme est une somme algébrique de monômes de la même variable réelle.
- Une fonction polynôme est toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel x, associe une somme algébrique de monômes.
- La fonction nulle est appelée le polynôme nul.

Notation :

Un polynôme est noté P ou $P(x)$.

Remarque :

- On ne distinguera pas polynôme et fonction polynôme dans cette leçon.
- Tout monôme est un polynôme.

1.2. Forme développée réduite et ordonnée d'un polynôme

Propriété Tout polynôme admet une et une seule forme développée réduite et ordonnée.

1.3. Degré, coefficient d'un polynôme

Définition Le degré d'un polynôme non nul est le plus grand degré des monômes.
Les coefficients d'un polynôme sont les coefficients de ses monômes.

Remarque : Le polynôme nul n'a pas de degré.

Notation : Le degré d'un polynôme P se note en général d°P.

Propriété Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

1.4. Zéro d'un polynôme

Définition On appelle zéro d'un polynôme P, tout nombre réel a tel que : $P(a) = 0$.

1.5. Somme et produit de deux polynômes

Propriété La somme de deux polynômes R et T est un polynôme, noté R+T.
Le produit de deux polynômes R et S est un polynôme, noté R×T.

Propriété Soit P et Q deux polynômes.
- $d^0(P + Q)$ est inférieur ou égal au plus grand des nombres d^0P et d^0Q.
- $d^0(P \times Q) = d^0P + d^0Q$.

1.6. Factorisation d'un polynôme

Définition Un polynôme mis sous forme d'un produit de polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 est dit factorisé.

Égalités remarquables

Pour tous nombres réels a et b.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

1.7. Factorisation par $x - a$

Propriété 1 Un polynôme $P(x)$ est factorisable par $(x - a)$ si et seulement si $P(a) = 0$.

Propriété 2 P est un polynôme et α un nombre réel.
α est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout x, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où $d^0Q = d^0P - 1$.

Méthode

Pour factoriser un polynôme, on peut :
- trouver un facteur commun ;
- reconnaître un produit remarquable ;
- trouver un zéro évident a et soit diviser le polynôme par $x - a$, soit utiliser la méthode des coefficients indéterminés.

1.8. Signe d'un polynôme du premier degré

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$ $(a \neq 0)$	*Signe de l'opposé de a*	0	*Signe de a*

2 Forme canonique d'un polynôme du second degré

Définition Soit $P(x)$ un polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
L'écriture : $P(x) = a[(x + \alpha)^2 + \beta]$ où α et β sont des nombres réels, est appelée forme canonique de $P(x)$.

Méthodes

- Détermination de la forme canonique d'un polynôme du second degré.
- Pour déterminer la forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$:
  - on met le nombre a en facteur : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{d}\right)$;
  - on considère que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$;
  - on cherche le nombre β qu'il faut ajouter à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ pour avoir $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{d}$.

- Factorisation d'un polynôme du second degré.
- Pour factoriser un polynôme du second degré $P(x)$ on peut écrire sa forme canonique : $P(x) = a[(x + a)^2 + \beta]$.
  - si $\beta > 0$, alors $p(x)$ n'est pas factorisable ;
  - si $\beta \leq 0$, alors $p(x)$ est factorisable et on considère $(x + a)^2 + \beta$ comme la différence de deux carrés.

- Signe d'un polynôme du second degré.
- Pour étudier le signe d'un polynôme du second degré $P(x)$ on peut écrire sa forme canonique : $P(x) = a[(x + a)^2 + \beta]$.
  - Si $\beta \geq 0$, alors $P(x)$ est du signe de a ;
  - Si $\beta < 0$,alors on écrit $(x + a)^2 + \beta$ sous la forme du produit de deux polynômes de degré 1 et on fait un tableau de signes.

3 Fractions rationnelles

Définition Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Remarque

La fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est définie lorsque Q est différent de zéro.

Méthode

- Signe d'une fraction rationnelle.

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes,
Pour étudier le signe de la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$, on peut étudier le signe du produit $P(x) \times Q(x)$ en tenant compte des conditions d'existence de $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Exercices de renforcement

1 Détermine le degré de chacun des polynômes R, S et T.
$R(x) = (3x^2 - 5x - 2)(x - 2)$.
$S(x) = (x^5 - x - 7)(2x^2 + 2)$.
$P(x) = (x - 1)(8x - 7)(9x^2 + 5)$.

2 On donne les polynômes P, Q et R tels que :
$P(x) = 7x^3 - 5x - 2$;
$Q(x) = -7x^3 + x^2 - x - 9$;
$R(x) = 5x^2 - 2x + 3$.
Détermine le degré de chacun des polynômes P, Q, R, P + Q, P + R et PR.

3 Détermine la forme canonique puis factorise si possible le polynôme P dans chacun des cas.

1. $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$; 2. $P(x) = 4x^2 - 12x + 9$;
3. $P(x) = -2x^2 - x + 1$; 4. $P(t) = -2t^2 - t + 10$;
5. $P((x) = 5x^2 + 2x + 3$; 6. $P(t) = -t^2 - t - 1$.

4 Étudie suivant les valeurs de x, le signe de chacun des polynômes suivants :
$T(x) = (2x + 1)^2 - 9$; $A(x) = 2x^2 - 9$;
$B(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$; $P(x) = 2x - 5$;
$N(x) = -2(x + 1)(3x - 1)(x + 2)$.

5 Détermine les nombres réels a ; b et c tels que :
$3x^4 - 4x^3 + 1 = (x - 1)^2(ax^2 + bx + c)$

6 Soit la fraction rationnelle g définie par :
$g(x) = \frac{6x + 2}{2x - 5}$.
1. Détermine l'ensemble de définition D_g de g.
2. a) Détermine les nombres réels a et b tels que :
$\forall x \in D_g$, $g(x) = a + \frac{b}{2x - 5}$.
b) Détermine un encadrement de $g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]$.

7 Simplifie si possible puis étudie le signe de chacune des fractions rationnelles suivantes sur leur ensemble de définition.

$R(x) = \frac{(x + 7)(x - 1)}{(2x - 5)(x - 7)}$; $S(x) = \frac{(7 - 4x)(1 - 5x)}{(4x + 7)(5x - 1)}$.

8 Soit le polynôme P tel que : $P(x) = x^3 - 7x - 6$.
1. Justifie que 3 est un zéro de $P(x)$.
2. Détermine le polynôme $Q(x)$ tel que :
$P(x) = (x - 3)Q(x)$.
3. Factorise $Q(x)$ et démontre que
$P(x) = (x + 1)(x - 3)(x + 2)$
4. Étudie le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Trouve le signe des nombres $P(-0,5)$; $P(0)$; $P(\sqrt{2})$; $P\left(-\frac{7}{2}\right)$; $P(2\sqrt{3})$.

9 Détermine les nombres réels α ; β ; δ et λ pour que le polynôme $R(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ soit égal au polynôme S défini par $S(x) = \alpha x^3 + x(\beta x - \delta) - 2x + \lambda$.

10 Soit $P(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$.
1. Calcule P(−1) et démontre que $P(x) = (x + 1)Q(x)$ où Q est un polynôme.
2. Détermine la forme canonique de Q et déduis-en que : $P(x) = -2(x + 1)(x - 2)(x + 3)$.
3. Détermine le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

11 Détermine les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de $\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$, on a :
$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 3}$.

12 Soit la fraction rationnelle F définie par
$F(x) = \frac{x^2 - 1}{(2x + 3)(x - 1)}$.
1. Détermine l'ensemble de définition de F.
2. a) Prouve que la forme simplifiée de F sur son ensemble de définition est $F(x) = \frac{x + 1}{2x + 3}$.
b) Justifie que $F(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.
3. Détermine les nombres réels a et b tels que :
$F(x) = a + \frac{b}{2x + 3}$.
4. Étudie le signe de $\frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 3}$.

13 On considère la fonction polynôme P définie par :
$P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$.
1. a) Vérifie que −1 est un zéro du polynôme P.
b) Détermine la fonction Q de degré 2 tel que :
$P(x) = (x - 1)Q(x)$.
2. On donne $Q(x) = 3x^2 + 10x - 8$.
a) Écris $Q(x)$ sous forme canonique.
b) Factorise $Q(x)$, puis déduis que
$P(x) = (x - 1)(x + 4)(3x - 2)$.

14 On donne le polynôme P tel que :
$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$.
1. a) Calcule $P(-2)$
b) Détermine le polynôme Q tel que :
$P(x) = (x + 2)Q(x)$.
2. a) Détermine la forme canonique de Q.
b) Factorise Q.

c) Déduis-en que : $P(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 4)$.
d) Étudie le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

15 Soit le polynôme P tel que :
$P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 10x + 28$.
1. a) Vérifie que 2 est un zéro du polynôme P.
b) Détermine les nombres réels a, b, et c tels que :
$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.
2. Soit $Q(x) = 2x^2 - 12x - 14$.
a) Écris $Q(x)$ sous forme canonique
b) Factorise $Q(x)$, puis déduis-en que :
$P(x) = 2(x - 7)(x + 1)(x - 2)$.
c) Étudie le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

16 On donne : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^2 - 3x - 4}$.
On pose : $P(x) = x^2 - 3x - 4$ et $h(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.
1. a) Après avoir donné la forme canonique de P(x), justifie que : $P(x) = (x + 1)(x - 4)$
b) Déduis-en l'ensemble de définition de f noté Df.
2. a) Démontre que pour tout $x \in Df$,
$f(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 4}$.
b) Étudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Détermine les nombres réels a, b et c tels que tout $x \in Df$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 4}$.

17 Soit P un polynôme défini par : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.
1. Vérifie que 2 est un zéro de P.
2. On considère Q est un polynôme du second degré tel que : $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
a) Détermine puis factorise le polynôme Q.
b) Déduis-en la factorisation de P.
c) Étudie le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

18 Soit $Q(x) = 2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
1. Écris $Q(x)$ sous forme canonique.
2. Prouve que $Q(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)(2x + \sqrt{3})$.
3. Soit $F(x) = \dfrac{1 - 4x^2}{Q(x)}$.
a) Détermine l'ensemble de définition D_F.
b) Étudie le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x.

19 1. Démontre que, pour tout nombre réel x,
$(x - 1)^3 + 6(x - 1)^2 + 9(x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4$.
2. On considère le polynôme P défini par :
$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
a) Vérifie que 1 est un zéro de P.
b) Trouve les nombres réels a, b, et c pour que le polynôme P soit égal au polynôme Q défini par :
$Q(x) = ax^3 + x(bx - c) - 2x + d$.

20 On considère le polynôme R défini par :
$R(x) = 3x^2 + 3x - 6$.
1. Justifie que la forme canonique de R est :
$R(x) = 3\left[\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}\right]$.
2. Trouve les zéros de R.

21 Soit le polynôme P tel que : $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x - 3$.
1. Calcule P(3) et détermine le polynôme Q tel que :
$P(x) = (x - 3)Q(x)$.
2. On suppose que $Q(x) = -2x^2 - x + 1$.
a) Détermine la forme canonique de $Q(x)$.
b) Factorise $Q(x)$.
c) Déduis-en que $P(x) = (-2x + 1)(x + 1)(x - 3)$.
3. a) Étudie le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
b) Détermine l'ensemble de définition de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{P(x)}$.

22 On considère le polynôme P défini par :
$P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$.
1. a) Vérifie que -1 est un zéro de P.
b) Factorise $P(x)$.
2. On considère la fraction rationnelle F définie par :
$F(x) = \dfrac{P(x)}{x^2 - x - 2}$.
a) Détermine l'ensemble de définition D_F de F.
b) Simplifie F sur D_F.
3. a) Étudie le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x.
b) Déduis-en l'ensemble de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{-F(x)}$.
c) Détermine les nombres réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_F$, $F(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$.

Exercices d'approfondissement

23 f et h sont les polynômes définis pour tout nombre réel x par :
$f(x) = x^3 - 8 + (x^2 + 2x + 4)(4x^2 + 3x + 3)$.
$h(x) = 4x^2 + 4x + 1$.
1. En utilisant la forme canonique, démontre que :
$h(x) = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$.
2. On considère le polynôme g défini par :
$g(x) = x^2 + 2x + 4$.
a) Démontre que pour tout nombre réel, on a : $g(x) = (x + 1)^2 + 3$.
b) Déduis de ce qui précède que g n'est pas factorisable.
3. a) Démontre que $f(x) = 4(x^2 + 2x + 4)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$.
b) Justifie que : $-\dfrac{1}{2}$ est le zéro de f.

24 Démontre qu'il existe un unique polynôme R de degré 3 qui s'annule en 0 et vérifiant pour tout nombre réel x, $R(x + 1) - R(x) = x^2$.

Exercices

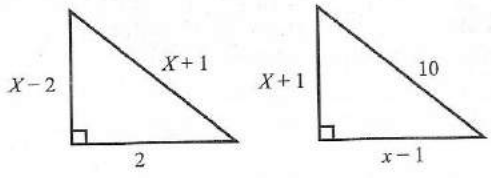
25* Soit la fraction rationnelle définie par :
$F(x) = \frac{x^5+x^4+1}{x^3-x}$.

On souhaite déterminer les nombres réels a, b, c, d, e et f tels que :
$F(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{x-1}$.

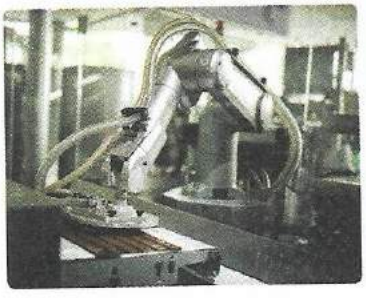
1. a) Détermine l'ensemble de définition D_F de F.
   b) Démontre que pour tout élément de D_F,
   $F(x) = x^2 + x + 1 + G(x)$.
   Où $G(x)$ est une fraction rationnelle à déterminer.
2. En remarquant que $G(x) = \frac{d}{x} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{x-1}$. (1)
   a) Multiplie l'égalité (1) par x et justifie que $d = -1$.
   b) En utilisant le même procédé qu'au 2. a), calcule e et f.

Situations d'évaluation

26 Paul, élève en Seconde C, affirme à Mariam sa voisine de classe que dans chacun des cas ci-dessous, il existe une valeur de x pour laquelle les triangles ci-dessous sont rectangles.
Aide sa voisine à vérifier l'affirmation de Paul.



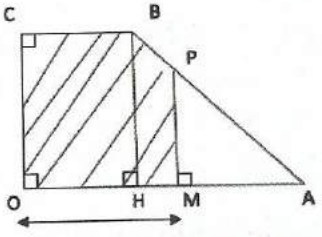
27 Un père de trois enfants laisse en héritage 1 600 hectares de forêt. Le testament précise que l'aîné doit recevoir 200 hectares de plus que le deuxième, et le deuxième 100 hectares de plus que le dernier. Une entreprise, pour son extension, souhaite acheter aux héritiers 400 hectares afin d'y installer sa nouvelle usine de fabrication de chocolat. Les héritiers souhaitent conserver les parts de l'aîné et du dernier.
Ils te sollicitent pour savoir si dans ces conditions l'entreprise sera satisfaite.





28* Sur le Net, Roxane découvre cette égalité :
$10^2 + 11^2 + 12^2 - 13^2 - 14^2 = 0$.
Émerveillée, elle décide de vérifier s'il existe d'autres séries de cinq entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois plus petits.
1. Si x est le plus petit entier naturel, alors
$x^2 - 8x - 20 = 0$.
2. Réponds à la préoccupation de Roxane.

29 Le club environnement du lycée dispose d'un terrain OABC qui a la forme d'un trapèze rectangle dont les dimensions sont OA = 7 ; OC = 4 et CB = 3.
Le club doit faire une pépinière sur une superficie de 18 m² représentée par la partie hachurée qu'il doit clôturer avec du grillage.
Les membres souhaitent savoir où positionner le piquet M entre H et A.
On désigne par x la distance OM avec $3 \leq x \leq 7$ et $A(x)$ l'aire de la partie hachurée en m².





1. a) Démontre que l'aire du trapèze HMPB est :
$\frac{(11-x)(x-3)}{2}$.
   b) Déduis-en que l'aire de la partie hachurée est :
$A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - \frac{9}{2}$.
2. Détermine la position du point M.

Coup de Pouce

25 1. b) Effectuer la division euclidienne de $x^5 + x^4 + 1$ par $x^3 - x$.

28 Résoudre $x \in \mathbb{N}$.
$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2$.

Leçon 3

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$



En partance pour le marché en vue d'écouler les produits champêtres, les villageois vietnamiens utilisent un mécanisme très ingénieux (un bambou, deux corbeilles et des fils) pour faciliter le transport de leurs marchandises. Comment doivent-ils repartir les produits sur le mécanisme pour ne pas subir l'effet de balance durant le trajet ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève raconte à ses camarades de classe comment la fête de son village a été belle. Un défilé long de 250 m y a été organisé. Il a défilé en tête des scouts portant le drapeau du village et la fanfare à la queue. Juste après le départ, il se souvint avoir confié son foulard d'uniforme à son frère au dernier rang de la fanfare. Il est parti en courant à 10 km/h (sa vitesse au sprint) pour chercher son foulard et est revenu 3 min 18 s plus tard.

Ses camarades, émerveillés, décident de calculer la vitesse à laquelle avançait le défilé.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Équation dans $\mathbb{R}$

Identifier :
- une équation dans $\mathbb{R}$
- deux équations équivalentes

Résoudre :
- des équations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux polynômes
- des équations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux fractions rationnelles
- des équations avec valeur absolue

2 Inéquation dans $\mathbb{R}$

Identifier :
- une inéquation dans $\mathbb{R}$
- deux inéquations équivalentes

Résoudre :
- des inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux polynômes
- des inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux fractions rationnelles
- des inéquations avec valeur absolue

3 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Équation dans $\mathbb{R}$

1.1. Définition d'une équation dans $\mathbb{R}$

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $2x + \frac{1}{3} = \frac{x(x-1)}{x^2-3x}$.

Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = 2x + \frac{1}{3}$ et $g(x) = \frac{x(x-1)}{x^2-3x}$.

1. Réécris l'équation (E) en utilisant les fonctions f et g.
2. a) Détermine les ensembles de définition D_f et D_g respectifs des fonctions f et g.
   b) Détermine les conditions sur x pour que l'équation (E) ait un sens.
3. Calcule $f\left(\frac{10}{3}\right)$ et $g\left(\frac{10}{3}\right)$ puis compare les résultats obtenus.
4. Calcule $f(-2)$ et $g(-2)$ puis compare les résultats obtenus.

Synthèse

Une équation à une inconnue est une égalité de la forme $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}$.

Exercices de fixation

1-1-1 Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. L'équation $2x + 5y = 0$ est une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $(x+1)^2 = \frac{1}{x+3}$ est une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
3. L'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

1-1-2 Pour chaque ligne, choisis la bonne réponse.

		a	b	c
1	Le nombre -3 est solution de l'équation	$-2x+1=-5$	$-3x+7=1-5x$	$-2x=3$
2	L'équation $(2x-5)(6x-18)=0$ a pour solutions	$\frac{5}{2}$ et 3	$\frac{2}{5}$ et -3	$\frac{5}{2}$ et -3
3	L'équation $x^2-18=0$ a pour solutions	$3\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$ et $-2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$ et $-3\sqrt{2}$

1.2. Équations équivalentes

Dans chacun des cas suivants, résous dans $\mathbb{R}$ les équations (E_1) et (E_2) proposées puis compare leurs ensembles de solutions.

a) $(E_1) : |x| = 2$ et $(E_2) : x^2 - 4 = 0$; b) $(E_1) : x(x-1) = 0$ et $(E_2) : x^2 + x = 2x$;

c) $(E_1) : \frac{1}{x} = x$ et $(E_2) : x^2 - 1 = 0$.

Synthèse

Lorsque deux équations ont le même ensemble de solutions, on dit qu'elles sont équivalentes.

Exercices de fixation

1-2-1 Recopie les équations équivalentes parmi les équations ci-dessous :

$(E_1) : x^2 = 1$; $(E_2) : 1 - |x| = 0$; $(E_3) : |x-1| = 0$; (E_4) $\frac{1}{x} = x$; $(E_5) : |x+1| = 2$.

1-2-2 Réponds par vrai ou par faux.

1. Les équations $(x-1)(2x-14) = 0$ et $\frac{(x-1)(x-7)}{x} = 0$ sont équivalentes.
2. Les équations $(x^2-1)(x-2) = 0$ et $(x+1)(3x^2 - x + 2) = 0$ sont équivalentes.

1.3. Équations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont des polynômes

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $(E_1) : (3x-4)^2 = -x(4-3x)$; 2. $(E_2) : 49x^2 + (7x+2)^2 = -14x$; 3. $(E_3) : 25x^2 - 1 - (5x+2)^2 = -5x + 1$.

Synthèse

Pour résoudre une équation dont les membres sont des fonctions polynômes, on peut la ramener à une équation de la forme $p(x) = 0$.

Exercices de fixation

1-3-1 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(E_1) : x \in \mathbb{R}$, $x + \frac{x+6}{5} + \frac{(x-3)}{2} = 6 - \frac{3-5x}{4}$.

b) $(E_2) : x \in \mathbb{R}$, $(3x+6)(3x-1) = (x+2)(2x-4)$.

c) $(E_3) : x \in \mathbb{R}$, $(3x+1)(1-6x) - (3x+7)(3x+1) = 0$.

1-3-2 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 = 121$; b) $x^2 = 11$;

c) $x^2 = -9$; d) $x^2 + 5 = 30$;

e) $(x+5)^2 = 49$; f) $(x-4)^2 + 1 = 2$.

1.4. Équations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont des fractions rationnelles

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1) $(E_1) : \frac{4-x}{x-3} = 0$; 2) $(E_2) : \frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$; 3) $(E_3) : \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$.

Synthèse

Pour résoudre une équation dont les membres sont des fractions rationnelles, il faut commencer par déterminer l'ensemble de validité. À la fin, il faut vérifier si les solutions trouvées appartiennent à cet ensemble.

Exercices de fixation

1-4-1 Résous les équations suivantes : a) $(E_1) : x \in \mathbb{R}, \dfrac{3x-3}{x+1} = 0$; b) $(E_2) : x \in \mathbb{R}, \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x+2}{x-3}$.

1-4-2 Résous les équations suivantes :
a) $(E_1) : x \in \mathbb{R}, \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{1}{x}$; b) $(E_2) : x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-1} = 0$.

1.5. Équations avec valeur absolue

Résous les équations ci-dessous :
1. $(E_1) : x \in \mathbb{R}, |x-3| = 1$; 2. $(E_2) : x \in \mathbb{R}, |4x-2| = 5$; 3. $(E_3) : x \in \mathbb{R}, |2x+3| = |3x-7|$.

Synthèse

Pour résoudre une équation avec valeur absolue, on peut utiliser l'une des propriétés suivantes :
- $|x| = a, (a > 0), \Leftrightarrow x = -a$ ou $x = a$.
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = -y$ ou $x = y$.

Exercices de fixation

1-5-1 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $(E_1) : x \in \mathbb{R}, |x-1| = 4$;
2. $(E_2) : x \in \mathbb{R}, |x-5| = -2$;
3. $(E_3) : x \in \mathbb{R}, |2x+8| = 3$.

1-5-2 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :
1. $(E_1) : x \in \mathbb{R}, |x-1| = |x-5|$.
2. $(E_2) : x \in \mathbb{R}, |x+5| = |x|$.

Activités 2 Inéquations dans $\mathbb{R}$

2.1. Définition d'une inéquation dans $\mathbb{R}$

On considère l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}, \dfrac{2(x-3)}{3x} \geq \dfrac{1-2x}{6}$.

Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x) = \dfrac{2(x-3)}{3x}$ et $g(x) = \dfrac{1-2x}{6}$.

1. Réécris l'inéquation (I) en utilisant les fonctions f et g.
2. a) Détermine les ensembles de définition D_f et D_g respectifs des fonctions f et g.
   b) Détermine $D_f \cap D_g$.
   c) Détermine les conditions portant sur x pour que l'inéquation (I) ait un sens.
3. Calcule $f(-2)$ et $g(-2)$ puis compare les résultats obtenus.
4. Calcule $f(-5)$ et $g(-5)$ puis compare les résultats obtenus.

Synthèse

Une inéquation à une inconnue est une inégalité de la forme $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) > g(x)$, ou $f(x) \leq g(x)$, ou $f(x) \geq g(x)$) où f et g sont des fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}$.

Exercices de fixation

2-1-1 Réponds par vrai ou par faux.
x et y sont deux nombres réels distincts.
1. L'inéquation $2x + y \leq 4$ est une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
2. L'inéquation $(x+1)^2 \geq x + 4$ est une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
3. L'inéquation $x^2 + y^2 \leq 1$ est une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

2-1-2 Pour chaque ligne, choisis la bonne réponse.

		A	B	C
1	Le nombre -3 est solution de l'inéquation	$-x + 1 \leq -5$	$-3x+7 > 1 - 5x$	$-2x < 9$
2	Le nombre 0 est solution de l'inéquation	$(x-1)(x+2) < 0$	$(x-1)(x-2) < 0$	$(x+1)(x+2) < 0$

2.2. Inéquations équivalentes

Dans chacun des cas suivants, résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations (I_1) et (I_2) proposées puis compare leurs ensembles de solutions.

a) $(I_1) : \frac{x}{2} - 1 \geq x - 4$ et $(I_2) : 2x - 5 \leq 7$; b) $(I_1) : \frac{x+2}{x} < 1$ et $(I_2) : 2x < 0$.

Synthèse

Lorsque deux inéquations ont le même ensemble de solutions, on dit qu'elles sont équivalentes.

Exercices de fixation

2-2-1 Recopie les inéquations équivalentes parmi les inéquations ci-dessous :

$(I_1) : x^2 < 1$; $(I_2) : |x| < 1$;

$(I_3) : x - 1 < 0$; $(I_4) : \frac{1}{x} < x$.

2-2-2 Réponds par vrai ou par faux :

1. Les inéquations $-2x(x-4) \leq 0$ et $\frac{x-4}{2x} \geq 0$ sont équivalentes.
2. Les inéquations $-4x - 8 > 0$ et $x + 2 < 0$ sont équivalentes.

2.3. Inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux fonctions polynômes

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1. $(I_1) : (x-1)(2x+4) < 0$; 2. $(I_2) : (x-3)^2 < (1-x)^2$; 3. $(I_3) : 2x(x-3) + x^2 \geq 9$.

Synthèse

Pour résoudre une inéquation dont les membres sont des fonctions polynômes, on peut la ramener à une inéquation de la forme $p(x) < 0$ (ou $p(x) > 0$, ou $p(x) \leq 0$, ou $p(x) \geq 0$).

Exercices de fixation

2-3-1 Résous, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a) $(I_1) : x \in \mathbb{R}, (x-3)(x-1) \leq 0$;

b) $(I_2) : x \in \mathbb{R}, (x-9)(x-5) < 0$.

2-3-2 Résous, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a) $(I_1) : x \in \mathbb{R}, (2-x)(6x+3) \geq 0$;

b) $(I_2) : x \in \mathbb{R}, x(7-x) + (x-1)(2x-14) \leq 0$.

2.4. Inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux fractions rationnelles

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1. $(I_1) : \frac{1}{x+1} < 2$; 2. $(I_2) : \frac{x}{x-2} \geq \frac{x+5}{x+1}$

Synthèse

Pour résoudre une inéquation dont les membres sont des fractions rationnelles, il faut commencer par déterminer l'ensemble de validité. À la fin, il ne faut considérer que les solutions qui appartiennent à cet ensemble.

Exercices de fixation

2-4-1 Résous, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a) $(I_1) : x \in \mathbb{R}, \frac{x-3}{x+1} \leq 0$;

b) $(I_2) : x \in \mathbb{R}, \frac{x+4}{x-6} > 0$.

2-4-2 Résous, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a) $(I_1) : x \in \mathbb{R}, \frac{2x+8}{x-1} > 1$;

b) $(I_2) : x \in \mathbb{R}, \frac{x+1}{3-x} \geq \frac{-2}{x-3}$.

2.5. Inéquations dans $\mathbb{R}$ avec valeur absolue

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations ci-dessous :

1. (I_1) : $|x-3| \leq 5$; 2. (I_2) : $|x-1| \leq |x+3|$.

Synthèse

Pour résoudre une inéquation avec valeur absolue, on peut utiliser l'une des propriétés suivantes :

- $|x-a| \leq r$, $(r>0)$, $\Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$.
- $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 \leq [g(x)]^2$.

Exercices de fixation

2-5-1 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(I_1) : $|x-0,5| \leq 3$; (I_2) : $|2-3x| < 7$

2-5-2 Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
(I) : $x \in \mathbb{R}$, $|5-2x| > |2x+3|$

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Résoudre une équation dont les membres sont des polynômes

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(x-1)(6x-5)+(x-1)(x+2)=0$.

Corrigé

$(x-1)(6x-5)+(x-1)(x+2)=0$
$(x-1)[(6x-5)+(x+2)]=0$
$(x-1)(7x-3)=0$
$x=1$ ou $x=\frac{3}{7}$
$S_{\mathbb{R}}=\left\{1;\frac{3}{7}\right\}$

Méthode

- On transforme l'équation sous la forme $P(x).Q(x)=0$.
- On utilise $a \times b = 0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ pour résoudre l'équation.

Exercice 2 Résoudre une inéquation dont les membres sont des fractions rationnelles

Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{2x-1}{x+3} > \frac{2x}{x-4}$.

Corrigé

$\frac{2x-1}{x+3}$ est défini si $x \neq -3$.

$\frac{2x}{x-4}$ est défini si $x \neq 4$.

L'ensemble de validité est $V = \mathbb{R}\backslash\{-3\,;\,4\}$

$\forall x \in V, \frac{2x-1}{x+3} > \frac{2x}{x-4}$

$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} - \frac{2x}{x-4} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x-4)-2x(x+3)}{(x+3)(x-4)} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{-15x+4}{(x+3)(x-4)} > 0$

Méthode

- On détermine l'ensemble de validité de l'inéquation.
- On résout l'inéquation en l'exprimant sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$.
- On étudie le signe de $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		-3		$\frac{4}{15}$		4		$+\infty$
$-15x+4$	$+$		$+$		0	$-$		$-$	
$x+3$	$-$		0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$	$-$			$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-15x+4}{(x+3)(x-4)}$	$+$		$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty;-3[\cup]\frac{4}{15};4[$.

Exercice 3 Résoudre une équation avec valeur absolue

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $|-3x+4|+|-5+x|=10$.

Corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$, $|-3x+4|+|-5+x|=10$.

- $-3x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ et $-5+x=0 \Leftrightarrow x=5$.
- Utilisons un tableau.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert -3x+4\rvert$	$-3x+4$	0	$3x-4$	11	$3x-4$		
$\lvert -5+x\rvert$	$5-x$	$\frac{11}{3}$	$5-x$	0	$-5+x$		
(E_1)	$-4x+9=10$ $x=-\frac{1}{4}$		$2x+1=10$ $x=\frac{9}{2}$		$4x-9=10$ $x=\frac{19}{4}$		

Méthode

- On détermine les valeurs qui annulent les expressions en valeur absolue.
- On utilise un tableau pour écrire les différentes expressions sans valeur absolue.
- On trouve les solutions de chacune des équations.

$-\frac{1}{4} \in]-\infty;-\frac{4}{3}]$; $\frac{9}{2} \in [\frac{4}{3};5]$; $\frac{19}{4} \notin [5;-\infty[$

L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{1}{4};\frac{9}{2}\right\}$.

Exercice 4 Résoudre une inéquation avec valeur absolue

Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes.

1. $|2x-1| \leq |x+2|$; 2. $|x-1|<|x-3|$.

Corrigé

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$, $|2x-1| \leq |x+2|$.

- $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ et $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.
- Utilisons un tableau.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$		
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$		
(I_2)	$-2x+1 \leq -x-2$ $x \geq 3$		$-2x+1 \leq x+2$ $x \geq -\frac{1}{3}$		$2x-1 \leq x+2$ $x \leq 3$		

Méthode

- On détermine les valeurs qui annulent les expressions en valeur absolue.
- On utilise un tableau pour écrire les différentes expressions sans valeur absolue.
- On trouve les solutions de chacune des inéquations.

$[3;+\infty[\cap]-\infty;2]=\varnothing$; $\left[-2;\frac{1}{2}\right]\cap\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]=$

$\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$; $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\cap]-\infty;3]=\left[\frac{1}{2};3\right]$

$S=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]\cup\left]\frac{1}{2};3\right]=\left[-\frac{1}{3};3\right]$.

2. On a :

$|x-1|<|x-3| \Leftrightarrow |x-1|^2<|x-3|^2$

$(x-1)^2<(x-3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1<x^2-6x+9$

$-2x+6x<9-1 \Leftrightarrow 4x<8$

$\Leftrightarrow x<2$

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty;2[$.

Méthode

Utiliser $|a|<|b| \Leftrightarrow |a|^2<|b|^2$

$\Leftrightarrow a^2-b^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) \leq 0$.

Résumé de cours

1 Équation dans $\mathbb{R}$

1.1. Définition d'une équation dans $\mathbb{R}$

Définitions

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- (E) : $x \in A, f(x) = g(x)$ est appelé équation à une inconnue dans A.

(E) est le nom de l'équation et A est le référentiel de l'équation.
Lorsqu'il n'est pas mentionné, le référentiel est $\mathbb{R}$.

- L'ensemble de validité de l'équation (E) est : $Df \cap Dg$.
- Un élément α de A est une solution de (E) lorsque $f(\alpha) = g(\alpha)$.
- Résoudre une équation revient à trouver l'ensemble de tous les éléments de A solution de (E).

On le note S_A (E) ou S s'il n'y a pas de confusion.

- Lorsqu'une équation n'a pas de solution, on dit que l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. On note : $S_A = \varnothing$.

1.2. Équations équivalentes

Définition

Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

1.3. Équations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont des polynômes

Point Méthode

Pour résoudre une équation (E) : $f(x) = g(x)$ où f et g sont des polynômes, on peut procéder comme suit :

- se ramener au cas d'une équation de la forme $p(x) = 0$, où p est un polynôme ;
- factoriser $p(x)$ (si possible) ou développer $p(x)$ selon le cas ;
- déterminer les solutions (si elles existent) de l'équation $p(x) = 0$.

1.4. Équations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont des fractions rationnelles

Point Méthode

Pour résoudre une équation dont les membres sont des fractions rationnelles, on peut précéder comme suit :

- déterminer l'ensemble de validité de l'équation ;
- transformer à l'aide des règles de calcul dans $\mathbb{R}$ notamment celles relatives aux quotients, l'équation en une équation de la forme $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$;
- résoudre l'équation $A(x) = 0$;
- contrôler si les solutions ainsi trouvées appartiennent ou non à l'ensemble de validité.

1.5. Équations avec valeur absolue

Méthode

Pour résoudre une équation comportant une valeur absolue, on peut utiliser les propriétés suivantes :

- Si a est un nombre réel positif, $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$.
- Pour tous nombres réels x et y, on a : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

2 Inéquations dans $\mathbb{R}$

2.1. Définition d'une inéquation dans $\mathbb{R}$

Définition Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. L'énoncé (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$ est appelé inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
(I) est le nom de l'inéquation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'inéquation.
Si le référentiel n'est pas mentionné alors le référentiel est l'ensemble $\mathbb{R}$.

Ensemble de validité d'une inéquation, solution d'une inéquation

Définition f et g sont des fonctions d'ensembles de définition D_f et D_g.
On considère l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$.

- On dit que α est une solution de l'inéquation (I) lorsque : $f(\alpha) < g(\alpha)$.
- On appelle ensemble de validité de l'inéquation (I) l'ensemble $D_f \cap D_g$.

2.2. Inéquations équivalentes

Définition Deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Résolution d'inéquation

- Résoudre une inéquation (I) dans $\mathbb{R}$ consiste à déterminer l'ensemble des nombres réels qui vérifient l'inégalité. Cet ensemble est appelé ensemble des solutions de l'inéquation.
On le note $S_{\mathbb{R}}(E)$ ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.
- Lorsqu'une inéquation n'a pas de solution, on dit que l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. On note : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

Méthode

La résolution d'une inéquation peut se faire en transformant l'inéquation en une inéquation équivalente au moyen des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

2.3. Inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux fonctions polynômes

Point Méthode

Pour résoudre une inéquation (E) : $f(x) < g(x)$ où f et g sont des fonctions polynômes, on peut procéder comme suit :

- se ramener au cas d'une inéquation de la forme $p(x) < 0$ (ou $p(x) > 0$; $p(x) \leq 0$; $p(x) \geq 0$) où p est un polynôme ;
- factoriser $p(x)$ (si possible) ;
- utiliser un tableau de signes pour déterminer les solutions (si elles existent) de l'inéquation.

2.4. Inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux fractions rationnelles

Point Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$ dont les membres sont des fractions rationnelles, on peut procéder comme suit :

- déterminer l'ensemble de validité V de l'inéquation ;
- transformer à l'aide des règles de calcul dans $\mathbb{R}$, notamment celles relatives aux quotients, l'inéquation en une inéquation de la forme : $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$;
- utiliser un tableau de signes pour déterminer l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation ;
- l'ensemble solution est $S_1 \cap V$.

2.5. Inéquations dans $\mathbb{R}$ avec valeur absolue

Point Méthode

Pour résoudre une inéquation comportant une valeur absolue, on peut utiliser les méthodes suivantes :

Méthode 1

Utiliser la propriété suivante :

- Si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif, alors :

$|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$.

Méthode 2

Pour résoudre des équations du type $|f(x)| > |g(x)|$, où f et g sont des fonctions polynômes, on peut procéder comme suit :

- se ramener à des équations équivalentes suivantes :

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f(x)^2 > g(x)^2$$
$$\Leftrightarrow f(x)^2 - g(x)^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$$

- factoriser si possible $f(x) - g(x)$ ou $f(x) + g(x)$;
- utiliser un tableau de signe pour trouver l'ensemble des solutions de l'inéquation $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$.

Exercices de renforcement

1 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x+1)(3x-2)=0$;
2. $2(1-x)(2x-5)=0$;
3. $(x+1)^2(x-3)=0$;
4. $(4x-2)(7x+1)(12x-6)=0$.

2 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(2x-1)^2=(2x-1)(x+3)$;
2. $(3x+1)^2-(x+1)^2=0$.

3 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(4x^2-9)-2(2x-3)+x(2x-3)=0$.

4 Soit $P(x)=9-49x^2-(4x+11)(12-28x)-(3-7x)^2$.

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $P(x)=0$;
2. $P(x)+12=0$;
3. $P(x)=9-49x^2$;
4. $P(x)=13x^2+20x-13$.

5 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2-6x+9=0$;
2. $3x^2-6x+3=0$;
3. $x^3-4x^2+4x=0$.

6 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{2}{x+1}=3$; 2. $\dfrac{2x+1}{3x-2}=0$;
3. $\dfrac{7x+1}{2x-3}=2$; 4. $\dfrac{x^2-2x}{2+x}=0$.

7 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{x^2-9}{3x}=0$;
2. $\dfrac{\frac{x}{2}-1}{3-2x}=2$;
3. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}=0$.

8 Résoudre les équations-quotients suivantes :

a) $\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}=0$; b) $\dfrac{(3-x)(x-6)}{x-8}=0$

c) $\dfrac{(2x-4)(x-6)}{3x+1}=0$; d) $\dfrac{(-7x+7)(4x-6)}{8-x^2}=0$.

9 Résous les équations-quotients suivantes :

a) $\dfrac{x+1}{x+2}-2=0$; b) $\dfrac{2x-1}{x+6}+1=0$;

c) $\dfrac{x-1}{3x+2}=3$; d) $\dfrac{x-1}{2-2x}=-1$.

10 Résous les équations suivantes :

a) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x}=0$; b) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}=0$;

c) $\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{2}{x-4}$; d) $\dfrac{4}{3x+3}=\dfrac{2}{2-x}$.

11 Résous les équations suivantes.

1. $\dfrac{9}{x+1}=5-x$; 2. $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}=0$;
3. $\dfrac{x^2}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$; 4. $2x-7=\dfrac{4}{2x-7}$;
5. $\dfrac{x^2+4x-3}{x^2-1}=1$; 6. $\dfrac{9x^2-25}{(x+2)(3x+5)}=0$;
7. $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x}{x-2}=0$.

12 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x-3|=5$; 2. $|x+4|=1$;
3. $|2x-1|=7$; 4. $|5x+10|=6$.

13 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x-3|=|x+4|$; 2. $|2x-1|=2|x|$;
3. $|x+8|=|x-3|$.

14 Résous, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a) $(x-3)(x-1)\leq 0$; b) $(x-9)(x-5)<0$;
c) $(2x+4)(3x-3)\geq 0$; d) $(15-5x)(x+1)>0$.

15 Résous, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a) $(3x-4)(x+7)>0$; b) $(2x-8)(10x+5)<0$;
c) $(2-x)(6x+3)\geq 0$; d) $(7-x)(6x+18)\leq 0$.

16 Résous, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{2x+8}{x-9}>0$; b) $\dfrac{6x+1}{7-x}\geq 0$;
c) $\dfrac{x+5}{3x-5}\leq 0$; d) $\dfrac{-2x+10}{4-3x}\geq 0$.

17 Résous dans $\mathbb{R}$, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{2x+8}{x-1}-1>0$; b) $\dfrac{x+1}{3-x}+2\geq 0$;
c) $\dfrac{x+4}{x-5}\leq 2$; d) $\dfrac{-2x+10}{x-4}\geq 3$.

Exercices

18 Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $|x-2| < 4$; 2. $|x+2| \leq 1$;

3. $|2x-7| \leq 5$; 4. $|3x+6| < 12$.

19 Résous les inéquations suivantes :

1. $|x-2| < x$; 2. $|x+2| \leq |x-5|$;

3. $|2x-7| \leq |2x+1|$.

Exercices d'approfondissement

20* Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $(2x-1)(3x+1) \leq (4-x)(3x+1)$;

b) $(x-2)(x+1) > (2x+1)(2x+2)$;

c) $(x+1)^2(3x+1) \leq x^2-1$;

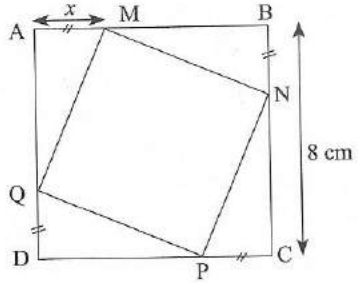
d) $(3-x)(2x+3) < (x-3)(2x+6)$.

21* Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $\begin{cases} 2x-3 < 5x-1 \\ x+4 \geq 3x-2 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x-3 > x+\frac{1}{2} \\ x+1 \leq 2x+1 \end{cases}$.

22 On considère un carré ABCD de côté 8 cm.
$AM = BN = CP = DQ = x$.

1. a) Calcule l'aire $A(x)$ du carré MNPQ.
   b) Démontre que : $A(x) = 2(x-4)^2 + 32$.
2. Détermine les valeurs de x pour lesquelles $A(x) = 50$



23 Lorsqu'on ajoute un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{3}{7}$, on obtient un résultat supérieur à $\frac{2}{3}$.
Détermine les valeurs possibles pour ce nombre.

24* On considère l'équation
(E) : $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

1. Justifie que 2 est une solution de l'équation de (E).
2. Résous l'équation (E).
3. Résous l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0$.

25 On considère l'équation :
(E) : $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

1. Justifie que 2 est une solution de l'équation de (E).
2. Résous l'équation (E).
3. Résous l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \geq 0$.

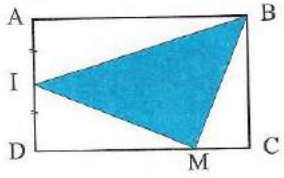
26 On considère l'équation :
(E) : $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$.

1. Justifie que 1 est une solution de l'équation de (E).
2. a) Détermine la forme canonique de $x^2 - 4x + 5$.
   b) Résous l'équation (E).
3. Résous l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \geq 0$.

Situations d'évaluation

27 Un élève raconte à ses camarades de classe, comment la fête de son village a été belle. Un défilé long de 250 m y a été organisé. Il a défilé en tête des scouts portant le drapeau du village et la fanfare à la queue. Juste après le départ, il se souvient avoir confié son foulard d'uniforme à son frère au dernier rang de la fanfare. Il est parti en courant à 10 km/h (sa vitesse au sprint) pour chercher son foulard et est revenu 3 min 18 s plus tard.
Ses camarades, émerveillés, décident de calculer la vitesse à laquelle avançait le défilé.
Détermine la vitesse à laquelle avançait le défilé.

28 Un homme possède un terrain rectangulaire ABCD tel que AB = 120 m et AD = 80 cm. Il place le point I milieu du côté [AD]. Il veut placer le point M sur le côté [CD] pour que l'aire du triangle BMI soit inférieure ou égale au tiers de l'aire du rectangle ABCD.
Ainsi, les terrains de formes triangulaires ABI, IDM et BCM seront à ses trois fils. Il te sollicite pour trouver la position du point M. On pose $DM = x$
Détermine x pour que l'aire du triangle IBM soit inférieure ou égale au tiers de l'aire du rectangle ABCD.



Coup de Pouce

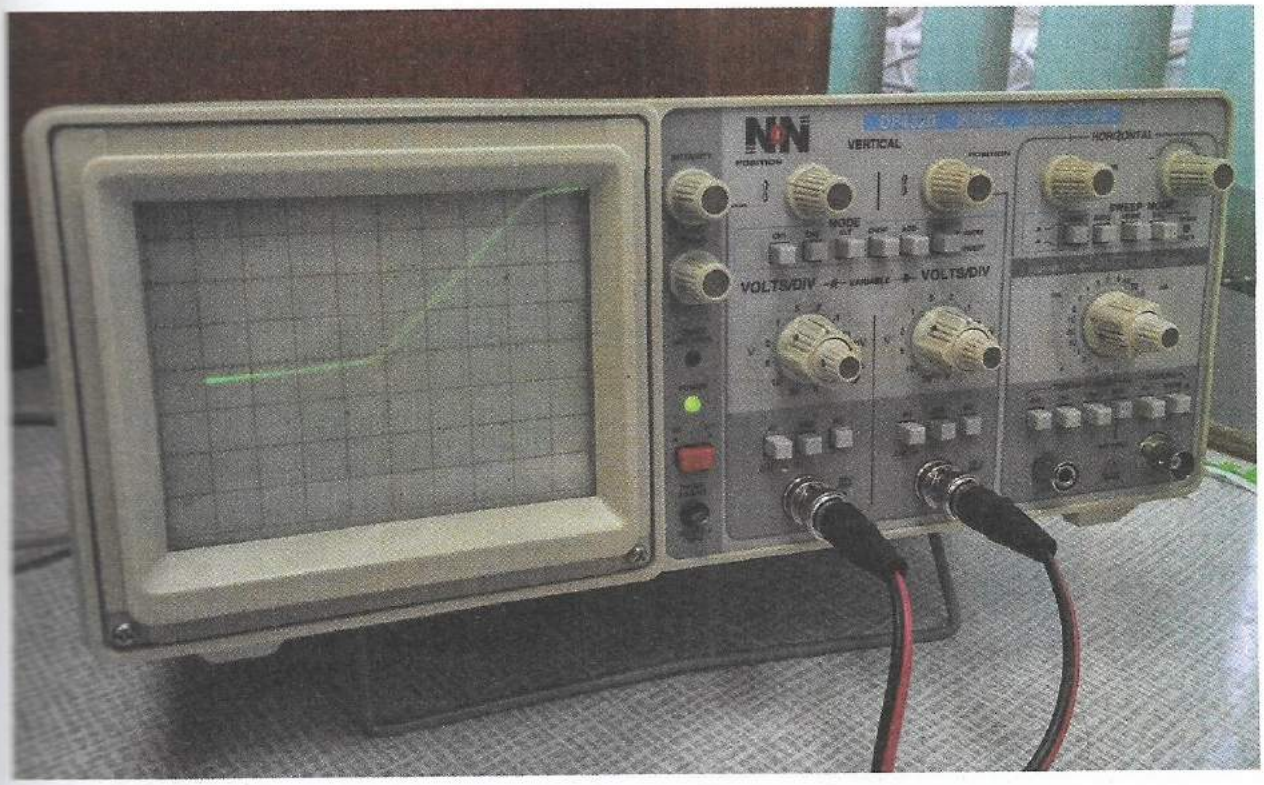
20 • Mettre chaque inéquation sous l'une des formes : $P(x)Q(x) \leq 0$ ou $P(x)Q(x) > 0$ ou $P(x)Q(x) < 0$.
• Utiliser ensuite un tableau de signe.

21 La solution d'un système est l'intersection des ensembles de solutions de chaque inéquation du système.

24 Utiliser la méthode de la division euclidienne ou l'identification des coefficients pour factoriser le polynôme.

Leçon 4

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$



Le signal à mesurer est visualisé sur un tube cathodique généralement vert. La trace de l'oscilloscope est déterminée par deux composantes : une horizontale et une verticale. La composante horizontale est en abscisse : c'est le temps, ou une tension (mode XY). Explique comment interpréter la position d'un point sur un écran.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

La bibliothèque d'un établissement scolaire a acheté pour une somme de 19 200 F CFA, 12 nouveaux exemplaires d'un roman africain très demandé par les élèves et 10 nouveaux exemplaires d'un roman célèbre de la littérature occidentale. La différence de prix entre un exemplaire du roman africain et celui du roman occidental est de 500 F CFA. Forts de ces informations, les élèvent décident de traduire chaque situation par une équation et de calculer le prix de chaque livre.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Système d'équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Identifier : le déterminant d'un système d'équations linaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Connaître : la propriété sur l'unicité éventuelle de la solution d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Traduire : en équations diverses situations concrètes

Calculer : le déterminant d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Utiliser : le déterminant pour prouver l'unicité éventuelle de la solution d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

2 Méthodes de résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Résoudre :

- un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
- graphiquement un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

3 Système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Connaître : le théorème fondamental relatif à l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Traduire : en inéquations diverses situations concrètes

Résoudre : graphiquement un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Interpréter : géométriquement les solutions des systèmes d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

4 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux équations et inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Équation linéaire à deux inconnues

1.1. Équation linéaire à deux inconnues

Deux nombres réels x et y sont tels que leur somme est égale à 13.
Le produit de ces deux nombres x et y est égal à 36.
Traduis chaque situation par une équation.

Synthèse

L'équation $x + y = 13$ s'appelle équation linéaire à deux inconnues.
Une équation linéaire à deux inconnues x et y est une équation de la forme $ax + by = c$.

Exercices de fixation

1.1.1 Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

a) $3x^2 + 2y = 18$ est une équation linaire à deux inconnues.
b) $2xy - 3y = 25$ est une équation linaire à deux inconnues.
c) $2x + 3y = 1$ est une équation linaire à deux inconnues.

1-1-2 La bibliothèque d'un établissement scolaire a acheté pour une somme de 19 200 F CFA, 12 nouveaux exemplaires d'un roman africain et 10 nouveaux exemplaires d'un roman de la littérature occidentale. La différence de prix entre un exemplaire du roman africain et celui du roman occidental est de 500 F CFA. En désignant par x le prix d'un exemplaire du roman africain et par y celui du roman occidental, traduis chacune des situations par une équation.

1-1-3 On donne l'équation suivante : $2x + 5y = 26$.
Parmi les couples ci-dessous, indique ceux qui sont solutions de cette équation.
(5 ; 3), (3 ; 4), (8 ; 2).

1.2. Système de deux équations linéaires à deux inconnues

À l'occasion des festivités de fin d'année scolaire, les enfants ont monté un spectacle. Pour assister à ce spectacle organisé par les enfants, la salle de spectacle affiche deux tarifs : un tarif-parent et un tarif-enfant. Monsieur Koffi paie 2 tickets au tarif-parent et 3 tickets au tarif-enfant à 2 500 F CFA. Monsieur Koné paie 3 tickets au tarif-parent et 5 tickets au tarif-enfant à 3 900 F CFA. Les enfants de Koffi et de Koné veulent connaître le prix du ticket de chaque type.
Traduis cette situation par des équations.

Synthese

La donnée simultanée de deux équations linéaires à deux inconnues est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Exercices de fixation

1-2-1 Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	(S) $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ x^2+3y=9 \end{cases}$ (S) est un système de deux équations linaires à deux inconnues	
2	(S) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ Le système (S) a pour solution le couple $(2 ; -1)$	

1-2-2 Un élève a alimenté son coffre-fort pendant les vacances pour permettre d'acheter ses fournitures scolaires à la prochaine rentrée scolaire.
À la fin des vacances, le coffre-fort a donné la somme de 15 300 F CFA en pièces de 500 F CFA et en pièces de 200 F CFA. Au total, il a récolté 45 pièces des deux sortes.
En désignant par x le nombre de pièces de 500 F CFA et par y le nombre de pièces de 200 F CFA, écris un système d'équations qui traduit cette situation.

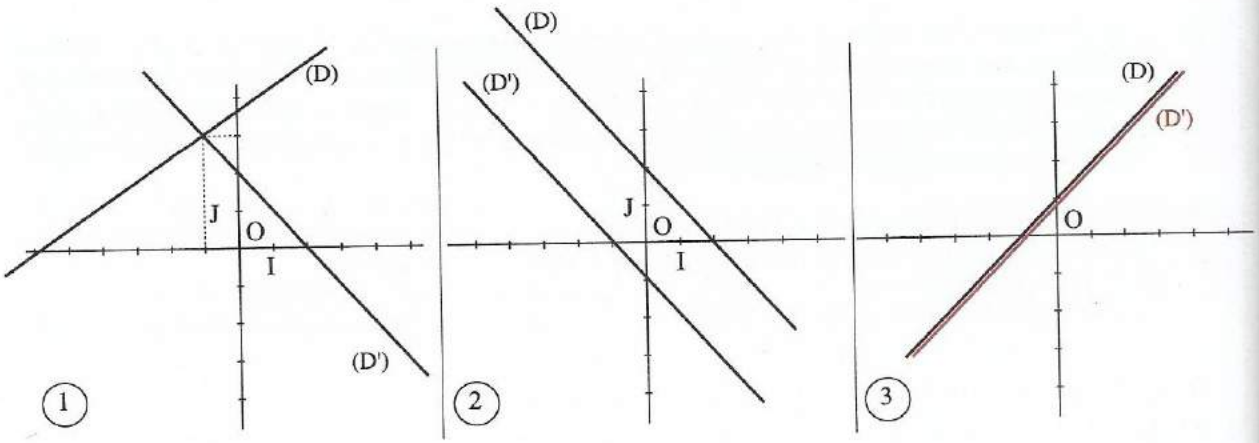
1-2-3 On donne le système suivant :
(S) $\begin{cases} 500x+200y=15300 \\ x+y=45 \end{cases}$
Parmi les couples ci-dessous, trouve ceux qui sont solutions du système.
(17 ; 28), (21 ; 24) et (11 ; 49).

1.3. Interprétation graphique du système (S) de deux équations linéaires à deux inconnues

On considère trois systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) suivants :

$(S_1)\begin{cases} 3x-4y+15=0 \\ x+y=2 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} x+y=2 \\ y=-x-1 \end{cases}$; $(S_3)\begin{cases} -x+y=1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$.

Donne, sans les résoudre, une interprétation graphique de chaque système en utilisant les graphiques suivants.



Synthèse

Soit le système (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

Le nombre de solutions de (S) peut s'obtenir à partir des positions relatives des droites (D) et (D') d'équations respectives $ax + by = c$ et $a'x + by = c'$.

Exercices de fixation

1-3-1 Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), résous graphiquement le système (S) suivant :

(S) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

1-3-2 Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), résous graphiquement le système (S) suivant :

(S) $\begin{cases} -2x + y = -3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

1-3-3 Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), résous graphiquement le système (S) suivant :

(S) $\begin{cases} -2x + y = -3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

1.4. Déterminant d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Soit le système (S) : $\begin{cases} -2x + 3y = -7 \\ 4x - 2y = 9 \end{cases}$.

Calcule le nombre $(-2) \times (-2) - 4 \times 3$.

Synthèse

Soit le système (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

Le nombre réel $a \times b' - a' \times b$ s'appelle le déterminant de (S).

Exercices de fixation

1-4-1 Calcule le déterminant du système (S) suivant :

(S) $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 4x + 9y = -11 \end{cases}$

1-4-2 Calcule le déterminant du système (S) suivant :

(S) $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 20 \end{cases}$

1-4-3 Calcule le déterminant du système (S) suivant :

(S) $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 6x - 9y = 36 \end{cases}$

1.5. Propriété sur l'unicité éventuelle de la solution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

1. Calcule le déterminant des systèmes (S_1), (S_2), (S_3) suivants.

$$(S_1)\begin{cases}2x-y=1\\3x+y=9\end{cases};\quad (S_2)\begin{cases}-2x+y=-3\\2x-y=2\end{cases};\quad (S_3)\begin{cases}-2x+y=-3\\4x-2y=6\end{cases}.$$

2. Détermine le nombre de solutions dans chaque cas, en utilisant les représentations graphiques des systèmes (S_1), (S_2), (S_3).

Synthèse

Soit (S) un système de deux équations linéaires à deux inconnues.
Lorsque le déterminant de (S) est non nul, (S) admet une unique solution.
Lorsque le déterminant de (S) est nul, soit (S) n'admet pas de solution, soit (S) admet une infinité de solutions.

Exercices de fixation

1-5-1 Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

1. Lorsque le déterminant d'un système de deux équations linaires à deux inconnues est non nul, ce système admet une solution unique.
2. Lorsque le déterminant d'un système de deux équations linaires à deux inconnues est nul, ce système n'admet aucune solution.
3. Lorsque le déterminant d'un système de deux équations linaires à deux inconnues est nul, ce système admet une infinité de solutions.

1-5-2 Indique si le système (S) suivant a une solution unique ou non :

$$\begin{cases}x+2y=4\\-x+2y=8\end{cases}.$$

1-5-3 Indique si le système (S) suivant a une solution unique ou non :

$$\begin{cases}2x+6y=12\\x+3y=6\end{cases}.$$

Activités 2 Méthodes de résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

2.1. Résolution par substitution

Résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système (S) suivant : $\begin{cases}12x+10y=19200\\x+2y=4\end{cases}$.

Synthèse

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut se résoudre par substitution.

Exercices de fixation

2-1-1 Résous par substitution le système (S) suivant :

$$\begin{cases}500x+200y=15300\\x+y=45\end{cases}$$

2-1-2 Résous par substitution le système (S) suivant :

$$\begin{cases}-x+3y=1\\2x+y=5\end{cases}$$

2-1-3 Résous par substitution le système (S) suivant :

$$\begin{cases}x+2y=4\\-x+y=8\end{cases}$$

2.2. Résolution par combinaison linéaire

Résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système (S) suivant : $\begin{cases}2x+3y=2500\\3x+5y=3900\end{cases}$.

Synthèse

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut se résoudre par combinaison.

Exercices de fixation

2-2-1 Résous par la combinaison linéaire le système (S)suivant : $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 4x+9y=-11 \end{cases}$.

2-2-2 Résous par la combinaison linéaire le système (S) suivant : $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ x+2y=7 \end{cases}$.

2-2-3 Résous par la combinaison linéaire le système (S) suivant : $\begin{cases} -2x+3y=-7 \\ 4x+5y=9 \end{cases}$.

2.3. Propriété relative au déterminant nul

1. Calcule le déterminant des systèmes (S_2) et (S_3) suivants : $(S_2)\begin{cases} x+y=2 \\ y=-x-1 \end{cases}$; $(S_3)\begin{cases} -x+y=1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$.
2. Donne une écriture équivalente des systèmes (S_2) et (S_3) en simplifiant les équations.
3. Donne graphiquement le nombre de solution de chaque système.

Synthèse

Lorsque le déterminant d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues est nul, on peut ramener ce système à un système dont les équations ont le même premier membre.

Exercices de fixation

2-3-1 Calcule le déterminant du système (S) suivant et donne une écriture équivalente du système en simplifiant les équations : $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x-6y=20 \end{cases}$.

2-3-2 Calcule le déterminant du système (S) suivant et donne une écriture équivalente du système en simplifiant les équations : $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 6x-9y=36 \end{cases}$.

2.4. Système n'admettant aucune solution

1. Résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système (S) suivant : $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 4x-6y=20 \end{cases}$.
2. Transforme chacune des équations pour avoir le même premier membre.

Synthèse

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues qui peut être ramené à un système dont les équations ont le même premier membre mais des seconds membres différents, n'admet pas de solution.

Exercices de fixation

2-4-1 Indique si le système (S) suivant admet une solution ou non : $\begin{cases} -3x+6y=21 \\ -x+2y=8 \end{cases}$

2-4-2 Indique si le système (S) suivant admet une solution ou non : $\begin{cases} 5x-10y=35 \\ x-2y=-5 \end{cases}$

2-4-3 Indique si le système (S) suivant admet une solution ou non : $\begin{cases} -6x+2y=10 \\ 9x-3y=3 \end{cases}$

2.5. Système admettant une infinité de solutions

1. Résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système (S) suivant : $\begin{cases} 2x-3y=12 \\ 6x-9y=36 \end{cases}$.

2. Transforme chacune des équations pour avoir le même premier membre.

Synthèse

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues qui peut être ramené à un système dont les équations ont le même premier membre et le même second membre, admet une infinité de solutions.

Exercices de fixation

2-5-1 Indique si le système (S) suivant admet une solution unique ou une infinité de solutions :

(S) $\begin{cases} 3x+6y=12 \\ x+2y=4 \end{cases}$

2-5-2 Indique si le système (S) suivant admet une solution unique ou une infinité de solutions :

(S) $\begin{cases} -8x+20y=-28 \\ -2x+5y=-7 \end{cases}$

2-5-3 Indique si le système (S) suivant admet une solution unique ou une infinité de solutions :

(S) $\begin{cases} -x+3y=5 \\ 2x-6y=-10 \end{cases}$

Activités 3 Système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

3.1. Inéquation linéaire à deux inconnues

Deux nombres réels x et y sont tels que leur somme est inférieure à 5. Le produit de ces deux nombres x et y est supérieure à 2. Traduis chaque situation par une inéquation.

Synthèse

L'inéquation $x+y<5$ s'appelle inéquation linéaire à deux inconnues.
Une inéquation linéaire à deux inconnues x et y est une inéquation de la forme $ax+by<c$.
Le symbole $<$ peut être remplacé par $>$; $\leq$ ou $\geq$.

Exercices de fixation

3-1-1 Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

a) $x^2+y<10$ est une équation linaire à deux inconnues.

b) $xy-3y>28$ est une équation linaire à deux inconnues.

c) $x+y>12$ est une équation linaire à deux inconnues.

3-1-2 Dans un plan muni d'un repère (O, I, J),
1. représente la droite (D) : $2x-y=1$;
2. hachure la partie du plan représentant l'ensemble des solutions de inéquation $2x-y<1$.

3.2. Interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Le plan est rapporté à un repère (O, I, J). On considère la droite (D) d'équation $2x-y+5=0$. Soit :
- (P_1) l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que : $2x-y+5>0$.
- (P_2) l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que : $2x-y+5<0$.

1. a) Parmi les points suivants, cite ceux qui appartiennent à (P_1) :
O ; I ; J ; A(2 ; 3) ; B(−6 ; 1) ; C(2 ; 4) ; D(0 ; 5) ; E(1 ; 10) et F(0 ; −5).
b) Cite ceux qui appartiennent à (P_2).
2. Démontre que tout point M du plan appartient à seulement l'un des ensembles (D), (P_1) et (P_2).
3. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts du plan.
a) Démontre que si A et B appartiennent à (P_1), alors le segment [AB] est inclus dans (P_1).
b) Démontre que si A appartient à (P_1) et B appartient à (P_2), alors la droite (AB) rencontre (D) en un seul point.

Synthèse

La droite (D) partage le plan en trois parties qui n'ont pas d'éléments communs entre eux.
(P_1) et (P_2) sont appelés demi-plans ouverts de frontière (D).
Si un point appartient à l'un des demi-plans, alors ce demi-plan est le demi-plan ouvert de frontière (D) contenant ce point.

Exercice de fixation

Le plan est rapporté à un repère (O, I, J).
Soit (Q) l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que : $x-2y+4>0$.
1. Parmi les points suivants, cite ceux qui appartiennent à (Q) : $A(0;2)$; $B(2;0)$; $C(8;0)$; $D(7;1)$.
2. Représente graphiquement (Q).

3.3. Système de deux inéquations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Pour l'organisation de la fête de fin d'année scolaire, les élèves voudraient s'offrir un repas mais il y a des contraintes liées aux finances. Le coût des 3 lapins et 4 poulets qu'ils voudraient acheter ne doit pas dépasser 10 000 F CFA. La différence entre le prix d'un lapin et celui d'un poulet ne doit pas dépasser 400 F CFA.
En désignant par x le prix d'un lapin et par y celui d'un poulet, traduis chacune des situations par une inéquation.

Synthèse

La donnée simultanée de deux inéquations linéaires à deux inconnues est un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues.

Exercice de fixation

Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

1. (S) $\begin{cases} x+y<6 \\ x^2+y<9 \end{cases}$ est un système de deux équations linaires à deux inconnues.

2. (S) $\begin{cases} 3x-y<7 \\ 2x+y<6 \end{cases}$. Le couple (2 ; 1) est solution du système (S).

3.4. Résolution graphique d'un système de deux inéquations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Résous graphiquement le système (S) : $\begin{cases} 2x-y<12 \\ 3x+y<5 \end{cases}$.

Synthèse

La résolution d'un système deux inéquations linéaires à deux inconnues se fait graphiquement en utilisant les deux droites dont les équations s'obtiennent à partir des deux inéquations.

Exercices de fixation

3-4-1 Résous graphiquement le système (S) suivant :
(S) $\begin{cases} 3x-y>-2 \\ x+4y>5 \end{cases}$

3-4-2 Résous graphiquement le système (S) suivant :
(S) $\begin{cases} 3x+y<5 \\ -x+2y<4 \end{cases}$

3-4-3 Résous graphiquement le système (S) suivant :
(S) $\begin{cases} -3x+2y>0 \\ -x+2y<4 \end{cases}$

Exercice Résoudre un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues

Résous le système suivant (S) $\begin{cases} 2x+3y-1<0 \\ 4x-3y-2>0 \end{cases}$.

Méthode

1. On résout graphiquement l'inéquation : $2x + 3y - 1 < 0$.
2. On résout graphiquement l'inéquation $4x - 3y - 2 > 0$.

La solution du système est la partie hachurée deux fois.

Corrigé

- Soit la droite (D) d'équation : $2x + 3y - 1 = 0$.

Construisons la droite (D).

Vérifions si le point O(0 ; 0) est dans le demi-plan vérifiant $2x + 3y - 1 < 0$.

En effet $2 \times 0 + 3 \times 0 - 1 = -1$ et -1 est inférieur à 0, donc O appartient au demi-plan, ouvert de bord (D).

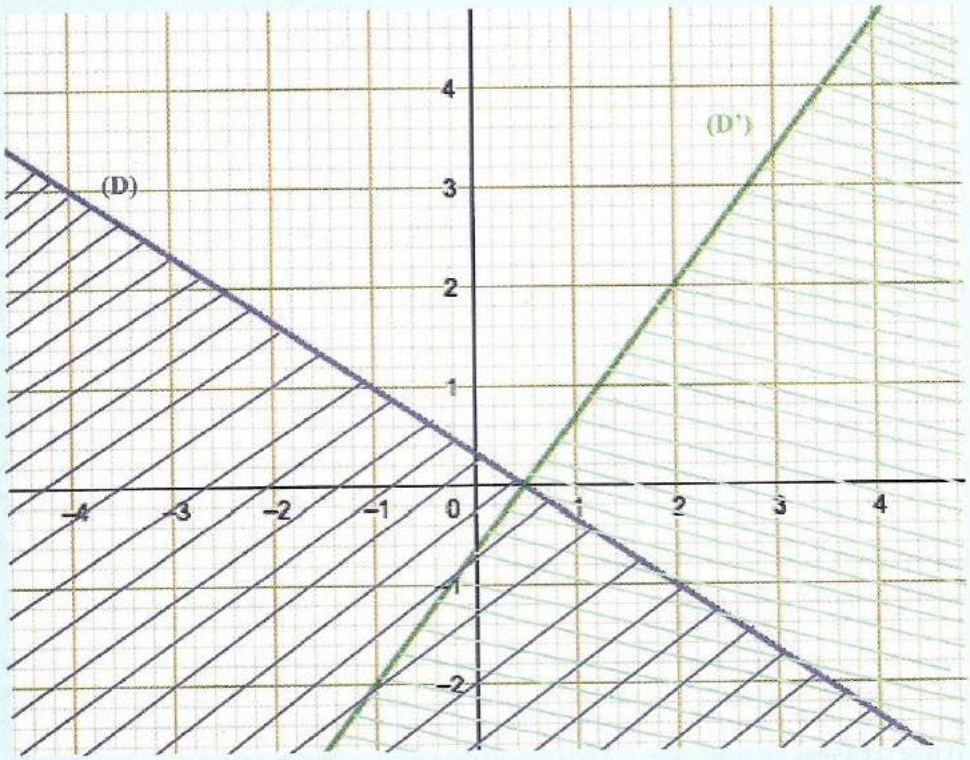
- Soit la droite (D') d'équation : $4x - 3y - 2 = 0$.

Construisons la droite (D').

Vérifions si le point O(0 ; 0) est dans le demi-plan vérifiant $4x - 3y - 2 > 0$.

En effet $4 \times 0 - 3 \times 0 - 2 = -2$ et -2 n'est pas supérieur à 0, donc O n'appartient pas au demi-plan vérifiant $4x - 3y - 2 > 0$.

- L'ensemble solution du système est la partie hachurée des deux couleurs.



Résumé de cours

1 Système d'équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1.1. Équation linéaire à deux inconnues

Définition Soient a, b et c trois nombres réels donnés.
Toute équation de la forme $ax + by = c$ est une équation linéaire à deux inconnues x et y.

Exemple

L'équation $x + y = 13$ est une équation linéaire à deux inconnues x et y.

Remarque

Le couple $(x_0 ; y_0)$ est solution de l'équation $ax + by = c$ si et seulement si $ax_0 + by_0 = c$.
Dans l'exemple précédent, le couple (7 ; 6) est solution de l'équation $x + y = 13$.

1.2. Système de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition Un système d'équations est la donnée de deux ou plusieurs équations liant les mêmes inconnues.
Soient a, b, c, a', b' et c' des nombres réels donnés.
Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :

$$(S)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}.$$

Exemple

$$(S)\begin{cases} 2x + 3y = 2500 \\ 3x + 5y = 3900 \end{cases}$$

(S) est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Remarque

Le couple $(x_0 ; y_0)$ est solution du système (S) si et seulement si $(x_0 ; y_0)$ est solution de chacune des deux équations du système (S).

1.3. Interprétation du système (S) de deux équations linéaires à deux inconnues

Interprétation graphique du système (S)

Soient (D) la droite d'équation $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, (D') la droite d'équation $a'x + b'y = c'$ $(a', b') \neq (0, 0)$ et $M(u ; v)$ un point du plan.
$(u ; v)$ est solution du système (S) équivaut à M appartient à la fois à (D) et (D').
Par conséquent, on distingue trois cas :

- Si (D) et (D') sont parallèles distinctes alors le système (S) n'admet aucune solution.
- Si (D) et (D') sont sécantes alors le système (S) admet une solution unique.
- Si (D) et (D') sont confondues alors le système (S) admet une infinité de solutions.

1.4. Déterminant d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Définition

Soit le système $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Le nombre réel $(ab'-a'b)$ est appelé le déterminant du système (S).

Notation

Le déterminant du système (S) se note : dét (S). Le déterminant du système (S) s'écrit $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Exemple : $(S)\begin{cases} -x+3y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Le déterminant du système (S) est : dét $(S)=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$=(-1)\times(1)-2\times 3=-7.$

1.5. Propriété sur l'unicité éventuelle de la solution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Propriété

Soit le système $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

(S) admet un unique couple solution si et seulement si dét (S) $\neq 0$.

Remarque

Lorsque le déterminant du système (S) est nul, il n'y a que deux possibilités :
- soit le système (S) n'admet aucune solution ;
- soit le système (S) admet une infinité de solutions.

2 Méthodes de résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

2.1. Résolution par substitution

On distingue trois étapes :
1ère étape : on exprime y en fonction de x, dans une des équations.
2ème étape : on substitue y par l'expression trouvée à la 1ère étape, dans l'autre équation.
3ème étape : on remplace x par sa valeur, dans l'expression trouvée à la 1ère étape.

2.2. Résolution par combinaison linéaire

On distingue deux étapes :
1ère étape : on élimine le terme en x. Il suffit de multiplier chaque équation par un coefficient approprié pour que la sommation élimine le terme en x et permette de trouver le terme en y.
2ème étape : on élimine le terme en y. Il suffit de multiplier chaque équation par un coefficient approprié pour que la sommation élimine le terme en y et permette de trouver le terme en x.

2.3. Propriété relative au déterminant nul

Propriété Lorsque le déterminant d'un système est nul, on peut ramener ce système à un système dont les deux équations ont le même premier membre.

2.4. Le système n'admet aucune solution

Méthode

Un système n'admettant aucune solution est un système que l'on peut transformer pour obtenir un système dont les deux équations ont le même premier membre mais les seconds membres différents.

2.5. Le système admet une infinité de solutions

Méthode

Un système admettant une infinité de solutions est un système que l'on peut transformer pour obtenir un système dont les deux équations ont le même premier membre et le même second membre.

Remarque

Graphiquement, tous les couples solutions de ce système sont les coordonnées des points situés sur la droite d'équation $2x - 3y = 12$.

3 Système d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

3.1. Inéquation linéaire à deux inconnues

Définition Soient a, b et c trois nombres réels donnés.
Toute inéquation de la forme $ax + by < c$ ou $ax + by > c$ est une inéquation linéaire à deux inconnues x et y.

Exemple

L'inéquation $2x - y < 1$ est une inéquation linéaire à deux inconnues.

3.2. Interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Théorème fondamental

Soient (O, I, J) un repère du plan et (D) la droite d'équation : $ax + by + c = 0$.
Soient $(\mathscr{P}_1)$ l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant : $ax + by + c > 0$ et $(\mathscr{P}_2)$ l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant : $ax + by + c < 0$.
$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont les deux demi-plans ouverts de frontière ou de bord (D).

Remarque

Dans un plan muni d'un repère (O, I, J), l'ensemble des solutions de cette inéquation est un demi-plan P de bord la droite (D) d'équation $2x - y = 1$. On cherche ce demi-plan. Pour cela, il faut savoir si le point O appartient ou pas au demi-plan P. $2 \times 0 - 0 < 1$ est vraie, donc O appartient au demi-plan P (On hachure l'autre demi-plan qui ne convient pas).

3.3. Système de deux inéquations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Définition Un système d'inéquations est la donnée de deux ou plusieurs inéquations.
Soient a, b, c, a', b' et c' des nombres réels donnés.
Un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :

$$(S)\begin{cases} ax + by < c \\ a'x + b'y > c' \end{cases}.$$

Les inégalités peuvent également être de même sens.

Exemple

Soit le système $(S)\begin{cases}2x-y<1\\3x+y<5\end{cases}$.

(S) est un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues.

Remarque

Résoudre un système d'inéquations, c'est trouver toutes les solutions communes aux inéquations de ce système.

3.4. Résolution graphique d'un système de deux inéquations linéaires dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Soit le système $(S)\begin{cases}2x-y<1\\3x+y<5\end{cases}$.

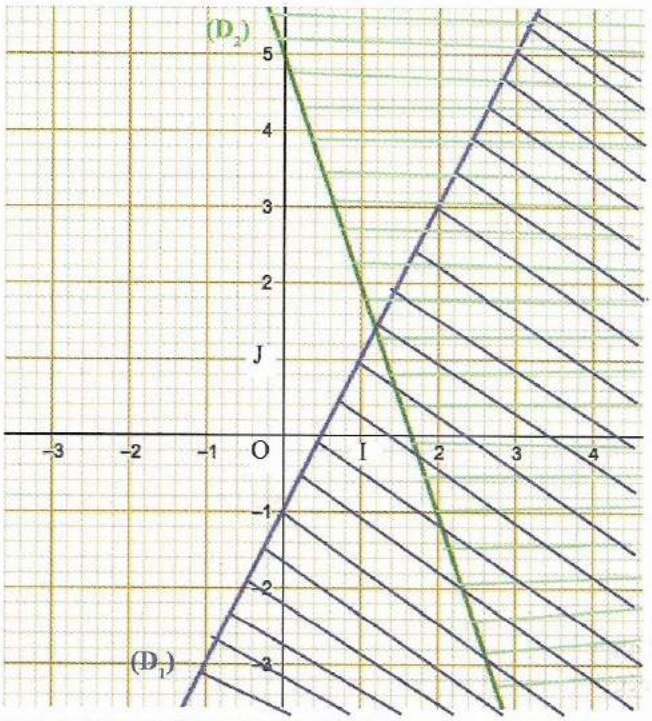
Méthode

Pour résoudre graphiquement le système (S) précédent, dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on représente les demi-plans (P_1) et (P_2) vérifiant respectivement $2x-y<1$ et $3x+y<5$.

Première étape : On trace les droites (D_1) d'équation $2x-y=1$ et (D_2) d'équation $3x+y=5$.
Deuxième étape : On cherche si le point O appartient ou pas au demi-plan (P).
On a : $2\times 0-0<1$ est vraie, donc O appartient à (P_1) (On hachure l'autre demi-plan qui ne convient pas).
Troisième étape : On cherche si le point O appartient ou pas au demi-plan (P_2).
On a : $3\times 0+0<5$ est vraie, donc O appartient à (P_2) (On hachure l'autre demi-plan qui ne convient pas).

La solution graphique du système (S) est l'ensemble des points communs aux deux demi-plans (zone non hachurée).

Remarque : Si le point O appartient au bord d'un demi-plan alors on choisit un autre point.



Exercices de renforcement

1 Calcule le déterminant de chacun des systèmes suivants. Puis résous les.

a) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 8x + 5y = -4 \\ 4x + 15y = -2 \end{cases}$;

b) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ -3x - 4y = -2 \end{cases}$;

c) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 0,1x + 0,2y = -1 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$.

2 On considère les systèmes suivants :

a) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 6x + 7y = 5 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases}$;

b) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 3x - 5y = \frac{3}{4} \\ x - 2y = \frac{2}{3} \end{cases}$;

c) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = -16 \end{cases}$.

1. Vérifie que chacun des systèmes a une seule solution.
2. Utilise une méthode qui semble la meilleure pour résoudre chacun d'eux. Justifie le choix.

3 Calcule le déterminant de chacun des systèmes, puis résous chaque système par la méthode qui semble la plus appropriée.

a) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 6x - y = 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 8x - 4y = 16 \\ 30x - 15y = 30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2,46x + 7,5y = -15 \\ -0,82x - 2,5y = 4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 12x - 15y = 7 \\ 3x - 5y = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 16y = 18 \\ x - \frac{5}{2}y = -12 \end{cases}$.

4 Résous graphiquement chacun des systèmes suivants :

a) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$;

b) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ -6x - 10y = 22 \end{cases}$;

c) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$.

5 Résous dans chacun des cas les systèmes suivants :

a) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 3\sqrt{2}\,x + 2y = 3\sqrt{2} \\ x + 2\sqrt{3}\,y = 1 \end{cases}$;

b) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} 3x + \frac{7y - x}{2} = 3 \\ 7x - (3x + 7y) = 2 \end{cases}$.

6 Détermine a et b pour que le système suivant admette une infinité de solutions.

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} ax + by = 12 \\ 3x - 7y = 14 \end{cases}$.

7 L'équation d'une courbe de forme parabolique est $y = ax^2 + bx - 1$.
Détermine les valeurs des coefficients a et b pour que la courbe passe par les points de coordonnées $(1\ ,-2\ )$ et $(-1\ ,\ 4)$.

8 On considère le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (S) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

1. Résous le système $(S') \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
2. Vérifie que la solution de (S') est solution de l'équation $x + 3y = 4$.
3. Déduis-en la solution de (S).

9 On considère le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (S) \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$.

1. Résous le système $(S') \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$.
2. Vérifie si la solution de (S') est solution de l'équation $x - 3y = -1$.
3. Déduis-en la solution de (S).

10 On considère le système (S) suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$

1. Sachant que $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, calcule $x - y$.
2. Déduis-en les solutions du système (S).

Exercices

11 Résous le système (S) suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - y^2 = 357 \end{cases}$.

12 Détermine deux nombres connaissant leur somme 1715 et leur quotient $\frac{2}{3}$.

13 Détermine deux nombres entiers tels que :

- La différence des deux nombres est 24.
- Si l'on ajoute 8 à chacun de ces deux entiers, on obtient deux nouveaux entiers dont le plus grand est le triple du plus petit.

14 1. Résous le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{cases} x + y = 350 \\ 8x + 7y = 2600 \end{cases}$

2. Si x désigne le prix d'un article, exprime en fonction de x le prix de cet article après une baisse de 20 %.

3. Pour l'achat d'un livret et d'un stylo, la dépense est de 350 F. Après une réduction de 20 % sur le prix du livret et de 30 % sur le prix du stylo, la dépense n'est plus que de 260 F.

Calcule le prix d'un livret et celui d'un stylo avant la réduction.

15 1. Résous le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} 8x + 3y = 3950 \\ 7x + 9y = 5050 \end{cases}$.

2. Une société lagunaire propose une balade d'une heure sur la lagune à deux groupes de touristes. Le premier groupe, composé de 8 adultes et de 3 enfants, paie 3 950 F. Le second, composé de 7 adultes et de 9 enfants, paie 5 050 F. Détermine le prix d'un ticket pour un adulte et de celui d'un enfant.

16 Résous graphiquement le système suivant :

$x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} x + y > 32 \\ 2x - 3y > 9 \end{cases}$.

Vérifie si le couple de point $(1 ; -2)$ est solution du système, justifie ta réponse.

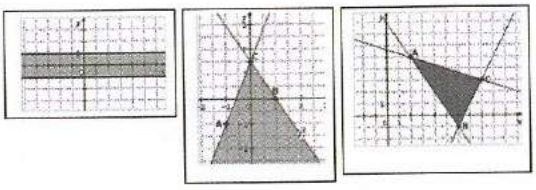
17 Résous graphiquement chacun des systèmes suivants :

a) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ 3x + y - 2 > 0 \end{cases}$

b) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} x + y > 2 \\ 2x - 3y > 9 \end{cases}$

c) $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} -2x + 2y > 2 \\ 6x + 3y < 12 \end{cases}$

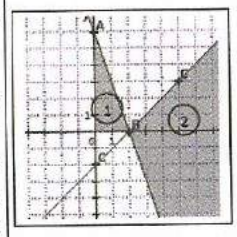
18 Détermine pour chacun des graphiques suivants un système d'inéquations correspondant à la partie grisée.



19

1. Détermine un système d'inéquations dont les solutions sont représentées par les points de la partie grisée (1). Les bords sont compris.

2. Détermine un système d'inéquations dont les solutions sont représentées par les points de la partie grisée (2). Les bords ne sont pas compris.



20 Résous graphiquement le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ x - 2y + 1 > 0 \end{cases}$

21 Résous graphiquement le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} x + 2y - 2 \leq 0 \\ 5x - 4y - 24 > 0 \\ 3x + y + 4 > 0 \end{cases}$

22 Résous graphiquement le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} x < 0 \\ 3x - 2y > 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$

23 Résous graphiquement le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} y \geq -2x + 2 \\ y \leq 2x + 2 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$

24 Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivant :

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \leq y \\ 2x + y \geq 0 \\ x - 2y \leq 6 \end{cases}$

Exercices d'approfondissement

25 Détermine deux nombres tels que :
- le triple du plus grand, diminué du double du plus petit, donne 10 ;
- et le double du plus grand augmenté du triple du plus petit donne 37.

26 Détermine les dimensions d'un terrain rectangulaire qui a 220 m de périmètre. En diminuant sa longueur de 2 m et en augmentant sa largeur de 2 m, son aire augmente de 16 m².

27 On considère le système (S) suivant :
$(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \begin{cases} 3x+2y=7 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$

1. Détermine les valeurs possibles de $x+y$.
2. Déduis-en les solutions du système (S).

28 Résous dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{3}{y-4}=2 \\ \frac{8}{x}-\frac{2}{y-4}=3 \end{cases}$

29 Résous le système d'équations suivant :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ -\frac{7}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{12} \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \begin{cases} \frac{3}{x}+2y^2=11 \\ \frac{2}{x}+y^2=6 \end{cases}$

30 Résous les systèmes d'équations suivant :

$(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \begin{cases} 3x+2y=1 \\ 2x-y=-4 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

31 Résous le système d'inéquations suivant :

$(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \begin{cases} x+y<1 \\ x-y<1 \\ 2x-y>-1 \end{cases}$

32 1. Résous graphiquement le système d'inéquations suivant :

$(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \begin{cases} y\le -2x+2 \\ y\le 2x+2 \\ y\ge -3 \end{cases}$

2. Calcule l'aire de la région du plan correspondant à l'ensemble des solutions de ce système. Utilise un repère orthonormé, d'unité graphique : 1 cm.

33 1. Résous graphiquement le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \begin{cases} y\ge -2x+2 \\ y\le 2x+2 \\ 2x+y\le 10 \\ 2x-y\le 6 \end{cases}$

2. Calcule l'aire de la région du plan correspondant à l'ensemble des solutions de ce système.
Utilise un repère orthonormé, d'unité graphique : 1 cm.

Situations d'évaluation

34 Les élèves d'une classe de Seconde ont participé à un concours d'entrée dans une école spécialisée. Le concours comporte deux épreuves notées sur 20 : une épreuve pratique et une épreuve théorique.
Les conditions d'admission sont les suivantes :
- la note à l'épreuve pratique et la moyenne des deux notes doivent être supérieures ou égales à 10 ;
- l'écart entre les deux notes doit être inférieur ou égal à 5.

Certains élèves veulent connaître les notes qu'il faut pour être admis.
Représente graphiquement les couples de notes permettant d'être admis à ce concours.

35 Le bureau de la coopérative scolaire d'un lycée désire acheter pour la bibliothèque des romans à 6 000 F l'un et des encyclopédies à 12 000 F l'une.
Après une enquête, les élèves ont exigé les trois conditions suivantes :
a) Au moins deux romans ;
b) Plus d'encyclopédies que de romans ;
c) La dépense doit être inférieure ou égale à 90 000 F.
1. Si on désigne par x le nombre de romans (nombre entier) et y le nombre d'encyclopédies (nombre entier), justifie que les contraintes exigées vérifient le système suivant :

$(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \begin{cases} x\ge 2 \\ y>x \\ 6000x+1200y\le 90000 \end{cases}$

2. Représente graphiquement toutes les solutions possibles.
3. Détermine les diverses possibilités d'achats qu'a le bureau de la coopérative.

Coup de Pouce

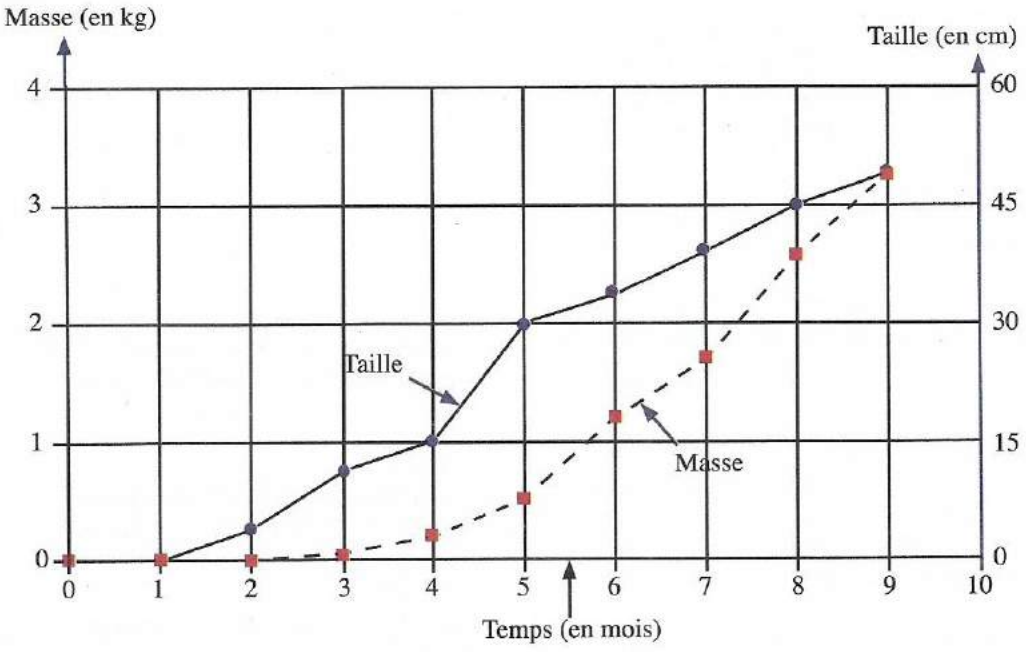
27 Cet exercice se transforme en deux systèmes dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+y=3 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x+y=-3 \end{cases}$

28 Il suffit de poser $X=\frac{1}{x}$ et $Y=\frac{1}{x-4}$.

Leçon 5

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS



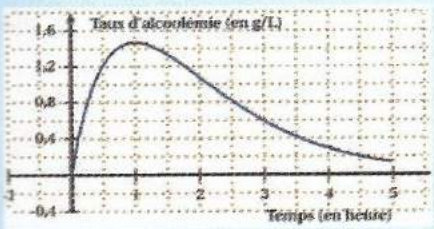
La courbe ci dessus représente l'évolution de l'embryon d'un futur bébé normal au cours des 9 mois de grossesse.

1. Quelle est la taille de l'embryon en 5 mois ?

2. À quel mois la taille du futur bébé a atteint 45 cm ?

3. Comment évolue aussi le poids du fœtus ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Pour vérifier l'influence de l'alcool dans l'organisme d'un individu, un professeur de S.V.T décide de faire étudier dans sa classe de Seconde, la leçon sur l'alcool dans le sang appelé "alcoolémie". L'alcoolémie est la mesure, en grammes par litre, du taux d'alcool dans le sang. Une personne de 80 kg a bu du whisky et du vin.

On lui a fait des prélèvements réguliers pour analyse.

La courbe ci-contre est l'évolution de son taux d'alcool en fonction du temps écoulé depuis son absorption.

Les élèves de la classe, en voyant le temps rapide de réaction de l'alcool dans le sang, s'inquiètent, et décident d'étudier, l'évolution du taux d'alcool à des périodes précises, et le temps nécessaire pour sa disparition dans le sang.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Notion de fonction

Connaître :
- la définition d'une fonction
- les diverses déterminations d'une fonction
- la définition de l'ensemble de définition d'une fonction
- la définition de deux fractions égales

Reconnaître : une fonction

Déterminer : l'ensemble de définition d'une fonction

Démontrer : que deux fonctions sont égales sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Calculer : algébriquement l'image ainsi que les antécédents d'un nombre réel par une fonction

2 Étude graphique d'une fonction

Connaître :
- la définition de la représentation graphique d'une fonction
- la définition de l'image directe d'un ensemble
- la définition de l'image réciproque d'un ensemble
- la définition du maximum d'une fonction
- la définition du minimum d'une fonction

Reconnaître :
- qu'une courbe est la représentation graphique d'une fonction
- graphiquement sur un intervalle qu'une fonction admet un maximum, un minimum

Déterminer : graphiquement l'image directe puis l'image réciproque d'un intervalle par une fonction

Lire :
- graphiquement l'image d'un nombre par une fonction
- graphiquement le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) d'un nombre par une fonction

3 Variations d'une fonction

Connaître : la définition du sens de variation d'une fonction

Reconnaître :
- graphiquement qu'une fonction est croissante sur un intervalle
- graphiquement qu'une fonction est décroissante sur un intervalle
- graphiquement qu'une fonction est constante sur un intervalle

Démontrer :
- algébriquement qu'un nombre donné est maximum ou minimum d'une fonction
- qu'une fonction est croissante sur un intervalle
- qu'une fonction est décroissante sur un intervalle
- qu'une fonction est constante sur un intervalle d'une fonction

4 Traitement de situation

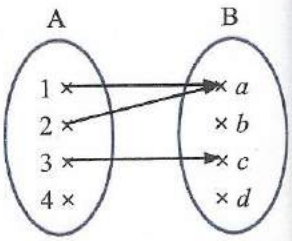
Traiter une situation faisant appel aux fonctions

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Notion de fonction

1.1. Définition d'une fonction

Observe la correspondance ci-contre de l'ensemble A vers l'ensemble B.



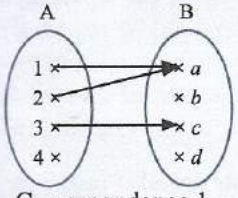
1. Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes.
   a) Chaque élément de l'ensemble A a un correspondant dans l'ensemble B.
   b) Parmi les éléments de l'ensemble A qui ont un correspondant dans l'ensemble B, certains ont deux correspondants.
   c) Lorsqu'un élément de A à un correspondant dans B, ce correspondant est unique.
2. a) Cite les éléments de A qui correspondent à a dans B.
   b) Cite les éléments de A qui correspondent à b dans B.
   c) Cite les éléments de A qui correspondent à c dans B.

Synthèse

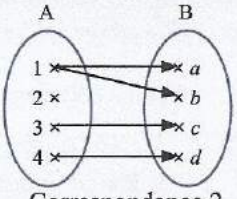
Toute correspondance qui à chaque élément d'un ensemble A associe zéro ou un élément dans un ensemble B s'appelle fonction de A vers B.

Exercices de fixation

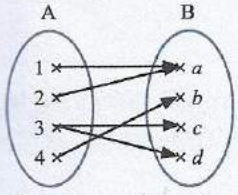
1-1-1 Observe les correspondances ci-dessous et écris les numéros de celles qui représentent une fonction.



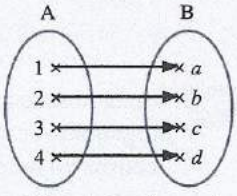
Correspondance 1



Correspondance 2



Correspondance 3



Correspondance 4

1-1-2 Soit f une fonction qui est telle que : $f(3) = \sqrt{7}$.
1. Traduis cette relation par une phrase utilisant le mot *"image"*.
2. Traduis cette relation par une phrase utilisant le mot *"antécédent"*.

1-1-3 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est telle que : $f(b) = a$, où a et b sont de nombres réels.
Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. b est l'image de a par f.
2. b est un antécédent de a par f.
3. a est l'image de b par f.

1-1-4 Voici des renseignements sur une fonction f.
Recopie puis complète le tableau.

En français	En mathématique
L'image de 6 est 2	$f(....) = ...$.
-4 est l'image de 3	$f(....) = ...$.
9 est l'antécédent de 5	$f(....) = ...$.
-6 est l'antécédent de 1	$f(....) = ...$.

1.2. Fonction définie par une formule explicite

Une promotrice vend dans la ville d'Abidjan à travers l'internet, des rouges à lèvres à 1 500 F l'unité.
Les frais de livraison du colis s'élèvent à 1 000 F.
1. Établis une expression liant le prix à payer au nombre de rouges à lèvres livrés.
2. Justifie que la relation ainsi établie est une fonction.

Synthèse

Une fonction peut être définie par une formule explicite.

Exercices de fixation

1-2-1 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 1$.
Pour chacune des affirmations suivantes, une seule réponse est correcte.
Recopie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre de la bonne réponse.

	Affirmations	*a*	*b*	*c*
1	L'image de 0 par f est :	1	0	-1
2	L'image de -1 par f est :	2	0	-2
3	L'antécédent de -1 par f est :	1	0	-1
4	L'ensemble des antécédents de 8 par f est :	{3}	{−3 ; 3}	{−3}

1-2-2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
1. Détermine l'image par f de -2 ; -1 ; 0 et de $\sqrt{2}$.
2. Détermine les antécédents éventuels par f de -1 ; 0 et 9.

1-2-3 On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = x^2 + 3x + 1$;
$g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+4}$.
Détermine les antécédents du nombre 1 par chacune des fonctions f et g.

1.3. Fonction définie par un schéma de calcul ou un algorithme de calcul

Exécute les tâches suivantes dans l'ordre :
- choisis un nombre ;
- ajoute -3 à ce nombre ;
- mets le résultat au carré ;
- multiplie le résultat par 4.

1. Détermine le résultat si le nombre choisi est : -5 ; $\frac{3}{2}$.
2. Détermine l'expression algébrique définie par ce schéma de calcul quel que soit le nombre réel choisi.

Synthèse

Une fonction peut être définie par un schéma de calcul.

Exercices de fixation

1-3-1 On donne le programme de calcul suivant :
- choisis un nombre ;
- élève ce nombre au carré ;
- soustrais du résultat précédent le double du nombre choisi ;
- ajoute 2 au dernier résultat.

Dans chaque cas, recopie la bonne réponse parmi les réponses a, b et c.

1. Une expression algébrique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par ce programme de calcul est :

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; b) $f(x) = (x-1)^2 + x + 1$; c) $f(x) = x^2 + 2$.

2. Par ce programme de calcul, l'image de 2 est :

a) 0 ; b) 2 ; c) 10.

3. Par ce programme de calcul, l'image de -1 est :

a) -1 ; b) -3 ; c) 5.

1-3-2 Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par le programme de calcul suivant :
- choisis un nombre ;
- multiplie le par -4 ;
- ajoute 3 au résultat ;
- divise le dernier résultat par 8.

Calcule $h(3)$ et $h(-2)$.

1.4. Fonction définie par un tableau de valeurs

Un magasin fait une promotion de vente d'articles par paquetage.
Les quantités et leurs différents prix sont contenus dans le tableau ci-dessous.

Quantités	1	2	3	5	10	12	18	20
Prix de vente en F CFA	5 000	9 000	14 000	17 000	38 000	50 000	70 000	77 000

1. Justifie à partir de la définition, que le tableau est celui d'une fonction. On le notera : f.
2. Détermine les images éventuelles de : 2 ; 4 ; 10 et 20 articles par f.
3. Détermine les antécédents éventuels de : 5 000 ; 38 000 ; 40 000 et 77 000 par f.

Synthèse

Une fonction peut être définie par un tableau de valeurs.

Exercices de fixation

1-4-1 Soit la fonction f définie par le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-3	-1	1	2	4
$f(x)$	9	-2	1	2	0	-2

Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.
1. L'image de -1 par f est 2.
2. L'image de 4 par f est -2.
3. Les antécédents de -2 par f sont -3 et 4.
4. L'antécédent de 0 par f est 1.

1-4-2 On définit la fonction f par le tableau suivant :

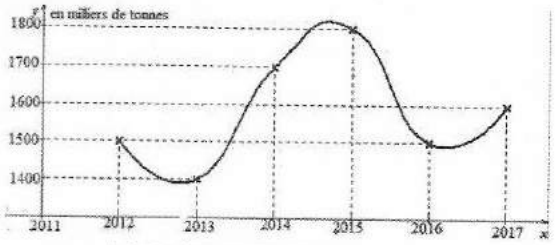
x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	-2	1	2	$0,5$	-1	4

1. Donne l'image par f de : $-1,5$; 0 ; 1 et 2.
2. Détermine les antécédents éventuels de : -1 ; $-1,5$ et 2 par f.

1.5. Fonction définie par une représentation graphique

Le graphique ci-contre donne le niveau de production de cacao en Côte d'Ivoire.

1. Justifie que le graphique est celui d'une fonction.
2. Détermine le tonnage de cacao produit en 2013 et en 2015.
3. Détermine les années où la production a atteint 1 500 000 tonnes.



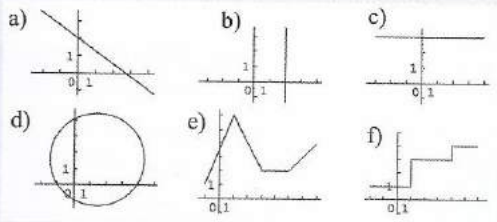
Production de cacao en Côte d'Ivoire

Synthèse

Une fonction peut être définie par sa représentation graphique.

Exercices de fixation

1-5-1 Pour chacune des courbes ci-dessous, en appliquant la définition, entoure les lettres de courbes représentants celle d'une fonction.



1-5-2 On considère la fonction f définie sur $[-3 ; 4]$ par : $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$, et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Vérifie si les points suivants appartiennent à (C_f).

$A(0 ; 3)$; $B\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$; $C\left(1;\frac{3}{4}\right)$; $D\left(-2;-\frac{6}{5}\right)$; $E\left(3;\frac{9}{10}\right)$ et $F\left(2;-\frac{6}{7}\right)$.

1.6. Ensemble de définition d'une fonction

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

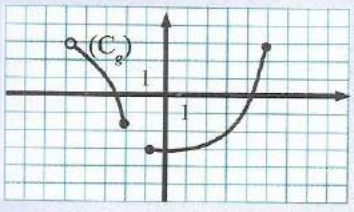
1. Donne la condition d'existence de la fraction rationnelle $\frac{x+2}{x-1}$.
2. Détermine l'ensemble des réels x qui ont une image par f.

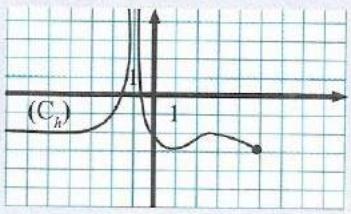
Synthèse

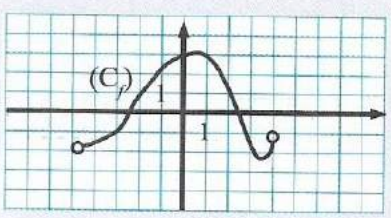
Soit f une fonction de A vers B. L'ensemble des éléments de A qui ont une image dans B s'appelle l'ensemble de définition de f.

Exercices de fixation

1-6-1 Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h définies par leurs représentations graphiques ci-dessous.







1-6-2 f, g, h, k, l et m sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Recopie et associe chaque fonction à son ensemble de définition :

$f : x \mapsto \frac{1}{x+5}$	•
$g : x \mapsto (x-5)^2$	•
$h : x \mapsto \frac{1}{x-5}$	•
$k : x \mapsto \sqrt{x-5}$	•
$l : x \mapsto \frac{1}{x^2-5}$	•
$m : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-5}}$	•

•	$[5 ; +\infty[$
•	$]-\infty;-5[\cup]-5; +\infty[$
•	$]-\infty;+\infty[$
•	$]5;+\infty[$
•	$]-\infty;5[\cup]5 ; +\infty[$
•	$]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5} ; \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5} ; +\infty[$

1-6-3 On considère la fonction définie par le tableau ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	0	-1	1	3	4	3	2	2,5

Détermine l'ensemble de définition de f.

1-6-4 Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous.
$f(x) = x - 2$; $g(x) = 3 + \sqrt{x}$; $h(x) = \sqrt{x+1}$;
$i(x) = \frac{1}{x}$; $j(x) = \frac{x-1}{2x+3}$; $k(x) = \frac{5}{x^2-4}$;
$l(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

1.7. Fonctions égales sur un ensemble

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{x^2}{x}$.

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f et de g.
   b) Compare les deux ensembles de définition.
2. Pour $x \neq 0$, justifie, $f(x) = g(x)$.
3. Détermine le plus grand ensemble sur lequel $f(x) = g(x)$.

Synthèse

Deux fonctions sont égales lorsqu'elles ont le même ensemble de définition et leurs expressions sont égales.

Exercices de fixation

1-7-1 On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = x - 2$ et $g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$.
1. Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.
2. Détermine un ensemble sur lequel f et g sont égales.

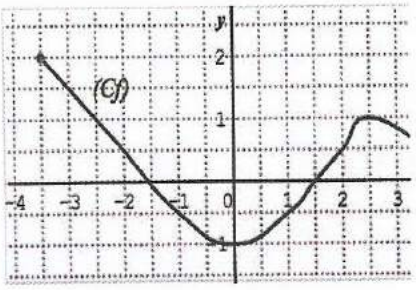
1-7-2 On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = |x - 1|$ et $g(x) = -x + 1$.
Détermine le plus grand ensemble sur lequel f et g sont égales.

1-7-3 On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ et $g(x) = \sqrt{x} + 1$.
Justifie que f et g sont égales sur $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Activités 2 Étude graphique d'une fonction

2.1. Lecture d'image et d'antécédent(s) d'un nombre

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.



1. a) Place sur l'axe des abscisses le nombre -3.
   b) Trace la droite (D) d'équation : $x = -3$.
   Cette droite coupe la courbe en un point A.
   c) Lis l'ordonnée du point A.
2. a) Place sur l'axe des ordonnées le nombre réel $\frac{1}{2}$.
   b) Trace la droite (D') d'équation : $y = \frac{1}{2}$.
   Cette droite coupe la courbe éventuellement en des points.
   c) Lis toutes les abscisses des points dont l'ordonnée est $\frac{1}{2}$.

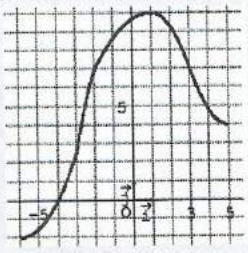
Synthèse

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative.
- Pour déterminer graphiquement l'image d'un nombre réel a par f, on trace la droite d'équation $x = a$ puis on lit l'ordonnée du point d'intersection de cette droite et (C). Ce nombre est $f(a)$.
- Pour déterminer graphiquement un antécédent éventuel d'un nombre réel b par f, on trace la droite (D) d'équation $y = b$.

Si (D) et (C) ne se coupent pas, alors b n'a pas d'antécédent.
Si (D) et (C) se coupent, alors b a pour antécédent(s) l'(les)abscisse(s) du (des) point(s) d'intersection de (D) et (C).

Exercices de fixation

2-1-1 Soit f la fonction représentée ci-contre.
Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.



1. L'image par f de 3 est 6.
2. L'image par f de 1 est 10.
3. L'image par f de -2 est 7.
4. Les antécédents de 7 par f sont : -2 et 3.
5. L'antécédent de 0 par f est -5.

2-1-2 On donne ci-contre, la représentation graphique d'une fonction f.
Par lecture graphique, recopie et complète les tableaux suivants :

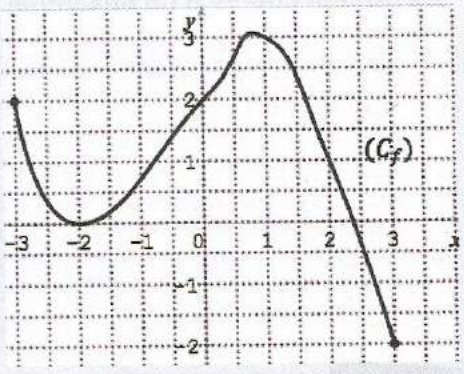


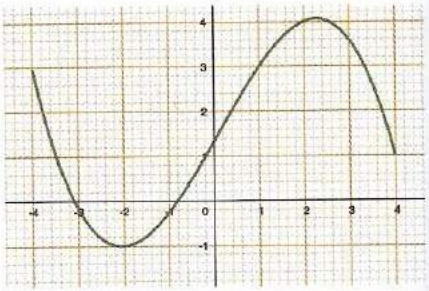
Tableau 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Image de x							

Tableau 2

y	-1	0	1	2	3
Antécédent(s) de y					

2.2. Extremum d'une fonction



La courbe (C) ci-contre est celle d'une fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

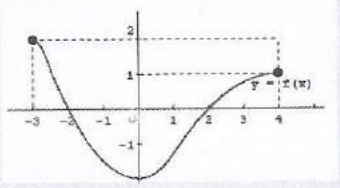
1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a) Place sur la courbe le point le plus haut.
   Détermine l'ordonnée M de ce point.
   b) Détermine la valeur de x pour laquelle il est atteint.
3. a) Place sur la courbe le point le plus bas.
   b) Détermine l'ordonnée m de ce point.
   c) Détermine la valeur de x pour laquelle ce point est atteint.

Synthèse

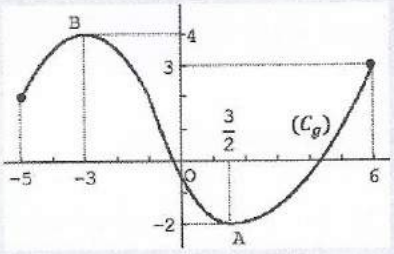
Le minimum (resp. maximum) d'une fonction f sur un intervalle I est le nombre réel m (resp. M) tel $f(x) \geq m$ (resp. $f(x) \leq M$) pour tout nombre réel x de I.

Exercices de fixation

2-2-1 La courbe ci-contre représente une fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
Complète les pointillés par maximum, minimum, 2 ; 0.
2 est le ..... de f sur $[-3 ; 4]$, il est atteint en $x =$ .....
-2 est le ..... de f sur $[-3 ; 4]$, il est atteint en $x =$.....

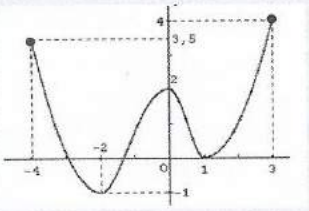


2-2-2 La courbe ci-dessous est celle d'une fonction g sur l'intervalle $[-5 ; 6]$.
Détermine le minimum et le maximum de g sur l'intervalle $[-5 ; 6]$.

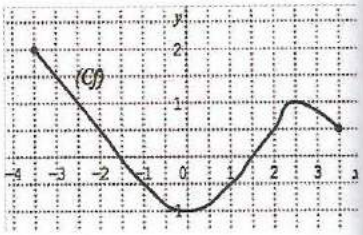


2-2-3 La courbe ci-contre représente une fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 3]$.

1. a) Détermine le maximum de f sur $[-4 ; 0]$.
   b) Détermine le minimum de f sur $[-4 ; 0]$.
2. a) Détermine le maximum de f sur $[0 ; 3]$.
   b) Détermine le minimum de f sur $[0 ; 3]$.
3. Détermine le maximum et le minimum de f sur $[-4 ; 3]$.



2.3. Image directe d'un ensemble



La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.
On considère l'intervalle $[-1 ; 2]$.

1. a) Reproduis la figure.
   b) Construis sur la figure les droites (D_1) et (D_2).
d'équations respectives : $x = -1$ et $x = 2$.
2. Colorie en rouge la partie de la courbe comprise entre les droites (D_1) et (D_2).
3. Détermine le maximum M et le minimum m de la partie colorée de la courbe.
4. a) Vérifie que l'image de tout élément de $[-1 ; 2]$ appartient à l'intervalle $[m ; M]$.
   b) Vérifie que tout élément de $[m ; M]$ a un antécédent par f dans l'intervalle $[-1 ; 2]$.
   c) De ce qui précède, donne une conclusion.

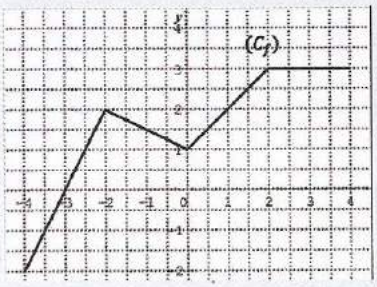
Synthèse

L'intervalle $[m ; M]$ s'appelle l'image directe de l'intervalle $[-1 ; 2]$ par f. C'est l'ensemble des images par f de tous les éléments de $[-1 ; 2]$.

Exercices de fixation

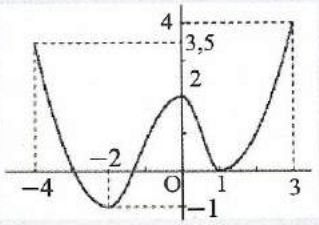
2-3-1 La courbe ci-contre est la représentative d'une fonction f.
Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation suivante :

1. L'image directe de $[-4 ; -2]$ par f est $[-2 ; 2]$.
2. L'image directe de $[-2 ; 0]$ par f est $[0 ; 2]$.
3. L'image directe de $]-2 ; 2[$ par f est $[1 ; 2[$.
4. L'image directe de $[2 ; 4]$ par f est $\{3\}$.
5. L'image directe de $[-3 ; 2]$ par f est $[0 ; 3]$.



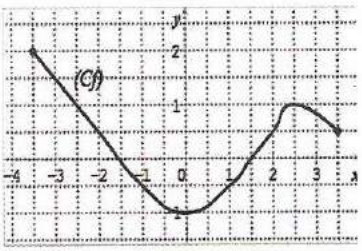
2-3-2 Soit la fonction f définie par la représentation graphique ci-contre.

1. Reproduis la figure.
2. Détermine l'image directe par f de chacun des intervalles suivants :
   a) $[-4 ; -2]$; b) $[-2 ; 1]$; c) $]0 ; 3[$.



2.4. Image réciproque d'un ensemble

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.
On considère l'intervalle $\left[\frac{1}{2};2\right]$.



1. a) Reproduis la figure.
   b) Construis sur la figure les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $y = \frac{1}{2}$ et $y = 2$.
2. Colorie en rouge la partie de la courbe comprise entre les droites (D_1) et (D_2).
3. Détermine les intervalles constitués des abscisses des points d'extrémités des parties de courbe colorées.
4. a) Vérifie que les antécédents des éléments de l'intervalle $\left[\frac{1}{2};2\right]$ sont éléments des intervalles trouvés au 3.
   b) Vérifie que l'image par f d'un élément des intervalles trouvés au 3, appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};2\right]$.
   c) Conclus.

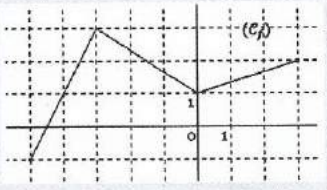
Synthèse

L'intervalle (ou la réunion des intervalles) obtenu(e) à partir des abscisses des points d'extrémité de la (ou des) partie(s) de la courbe coloriée(s) s'appelle l'image réciproque de l'intervalle $\left[\frac{1}{2};2\right]$ par f. C'est l'ensemble des antécédents par f des éléments de $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Exercice de fixation

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.
Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation :

1. L'image réciproque de $[-1 ; 1]$ par f est $[-5 ; -4]$.
2. L'image réciproque de $]0 ; 2[$ par f est $[-4{,}5 ; -3{,}5] \cup [-1{,}5 ; 3]$.
3. L'image réciproque de $]1 ; 2[$ par f est $[-3 ; 0[$.



Activité 3 Variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a) Soient a et b deux éléments de $]-\infty ; 0]$ tels que : $a \leq b$, compare $f(a)$ et $f(b)$.
   b) Soient a et b deux éléments de $[0 ; +\infty[$ tels que : $a \leq b$, compare $f(a)$ et $f(b)$.

Synthèse

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f.
Lorsque pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$, on dit que f est croissante sur I.
Lorsque pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$, on dit que f est décroissante sur I.

Exercices de fixation

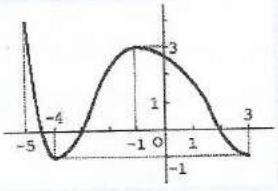
3-1 f est une fonction croissante sur $[-3 ; 4]$. Compare $f(-1)$ et $f(-2)$.
f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$. Compare $f(-5)$ et $f(3)$.
f est une fonction constante sur $]-\infty ; 10]$. Compare $f(-17)$ et $f(5)$.

3-2 À l'aide du tableau des variations ci-contre, réponds par vrai ou par faux à chacune des égalités ou inégalités proposées.

x	-5		-2		0		2
$f(x)$	-1	↗	1	↘	0	↗	2

1. $f(-5) = -1$; 2. $f(-1) < f(-0{,}5)$; 3. $f(1) > f(2)$.
4. $f(1) = -2$; 5. $f(-4) < f(-3)$.
6. Pour $x \in [-5 ; 2]$, $f(x) \geq -1$.

3-3 La fonction f est donnée par sa courbe ci-contre.
1. Détermine les intervalles sur lesquels la fonction f est croissante et les intervalles sur lesquels la fonction f est décroissante.
2. Dresse son tableau de variation de f.



3-4 Détermine sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, le sens de variation de la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sqrt{x}$ et dresse son tableau de variation sur $[0 ; +\infty[$.

3-5 Détermine sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ puis sur $[0 ; +\infty[$ le sens de variation de la fonction numérique g définie par : $g(x) = x^2$ et dresse son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

3-6 Détermine sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ puis sur $]-\infty ; 0[$, le sens de variation de la fonction numérique h définie par : $h(x) = \frac{1}{x}$ et dresse son tableau de variation sur $\mathbb{R}^*$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-après :
a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$; b) $g(x) = \frac{3x-4}{x-1}$; c) $h(x) = \sqrt{4-x}$.

Corrigé

Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction

a) Déterminons l'ensemble de définition de f.
f est une fonction polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$, donc $D_f = \mathbb{R}$.

b) Déterminons l'ensemble de définition D_g de g.
$x \in D_g \Leftrightarrow x - 1 \neq 0$; $x \in D_g \Leftrightarrow x \neq 1$.
Donc : $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$.

c) Déterminons l'ensemble de définition D_h de h.
$x \in D_h \Leftrightarrow 4 - x \geq 0$; $x \in D_h \Leftrightarrow x \leq 4$.
Donc : $D_h =]-\infty ; 4]$.

Méthode

- 1er cas : f est de la forme $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, N et D sont des fonctions polynôme, f est définie si $D(x) \neq 0$.
- 2e cas : si $f(x) = \sqrt{R(x)}$, R étant une fonction polynôme, f est définie si $R(x) \geq 0$.
- 3e cas : si $f(x) = \frac{N(x)}{\sqrt{R(x)}}$, N et R sont des fonctions polynômes, f est définie si $R(x) > 0$.

Exercice 2 Image et antécédent(s) de nombres réels par une fonction

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
a) Détermine les images par f de 2 et de -1.
b) Détermine les antécédents par f de -3.

Corrigé

a) L'image de 2 par f est : $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$.
L'image de -1 par f est :
$f(-1) = (-1)^2 + 2\times(-1) - 3 = -4$.
b) Déterminons les antécédents par f de -3.
Il s'agit de déterminer les nombres réels x tels que :
$f(x) = -3$

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -3$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2.$$

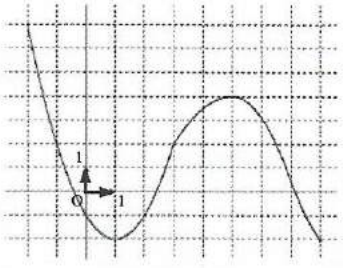
Les antécédents par f de -3 sont : 0 et -2.

Méthode

- Pour déterminer l'image d'un nombre réel a par une fonction, on remplace x par a dans l'expression $f(x)$.
- Pour déterminer l'antécédent (ou les antécédents) de b par la fonction f, on résout l'équation $f(x) = b$. La (ou les) solution(s) de cette équation est l'antécédent (ou les antécédents) de b par f.

Exercice 3 Image directe et image réciproque

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.
1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. a) Détermine graphiquement les images de -1 et 5 par f.
   b) Détermine graphiquement les antécédents de : -1 et de 2 par f.
3. a) Détermine l'image directe de [1 ; 3] et de [3 ; 7] par f.
   b) Détermine l'image réciproque de [0 ; 2] par f.



Corrigé

1. Déterminons l'ensemble de définition de f
$D_f = [-2 ; 8]$.
2. a) Déterminons graphiquement les images de -1 et 5.
$f(-1) = 2$ et $f(5) = 4$.
   b) Déterminons graphiquement les antécédents de -1.
Les antécédents de -1 sont 0 et 2.
Les antécédents de 2 sont : -1 ; 3 et 6,5.
3. a) Déterminons l'image directe [1 ; 3].
L'image directe de [1 ; 3] est [-2 ; 2].
L'image directe de [3 ; 7] est [0 ; 4].
   b) L'image réciproque de [0 ; 2] est :
$[-1 ; -0{,}5] \cup [2{,}5 ; 3] \cup [6{,}5 ; 7]$.

Méthode

- Pour déterminer graphiquement l'image d'un nombre réel :
  - on place sur l'axe des abscisses le nombre réel ;
  - on trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce nombre ;
  - on lit l'image sur l'axe des ordonnées.
- Pour déterminer graphiquement le ou les antécédents d'un nombre réel :
  - on place sur l'axe des ordonnées le nombre ;
  - on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par ce point ;
  - le ou les abscisses des points d'intersection avec la courbe (s'ils existent) sont les antécédents cherchés.
- Pour déterminer graphiquement l'ensemble de définition d'une fonction :
  - on identifie les extrémités de la courbe ;
  - on détermine l'abscisse de chacun de ces points ;
  - on lit l'ensemble de définition sur l'axe des abscisses.

Exercice 4 Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$.
Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

Corrigé

- Soient a et b deux éléments de $]-\infty ; 2]$ tels que : $a < b \leq 2$.

On a : $a - 2 < b - 2 \leq 0$, alors $(a-2)^2 \geq (b-2)^2$.

D'où : $2(a-2)^2 \geq (b-2)^2$ et $(a-2)^2 - 3 \geq 2(b-2)^2 - 3$.

Pour $a < b$, on a : $f(a) \geq f(b)$. Donc f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$.

- Soient a et b deux éléments de $[2 ; +\infty[$ tels que : $2 \leq a < b$. On a : $0 \leq a - 2 < b - 2$.

D'où $(a-2)^2 \leq (b-2)^2$ et $2(a-2)^2 - 3 \leq 2(b-2)^2 - 3$.

Ainsi pour $a < b$, on a : $f(a) \leq f(b)$.

Donc f est croissante sur $[2 ; +\infty[$.

Méthode

- On détermine les intervalles selon la valeur qui annule $(x-2)^2$.
- On considère deux nombres réels sur chaque intervalle, puis on compare ces réels et leurs images respectives par la fonction f.

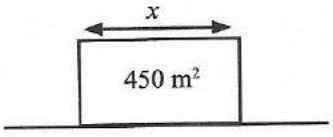
Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-3	↗	

Exercice 5 Minimisation de fonction

On désire clôturer un terrain rectangulaire de 450 m², dont un côté s'appuie sur le bord rectiligne d'une rivière, de sorte que la longueur de la clôture soit minimale.

1. Démontre que la longueur de cette clôture est $x + \frac{900}{x}$.
2. Détermine les dimensions du rectangle et la longueur de la clôture correspondante.



Corrigé

1. Si y est la largeur du rectangle alors l'aire du rectangle est : $xy = 450$ m².

x étant non nul, on a : $y = \frac{450}{x}$.

La longueur de la clôture est :

$x + 2y = x + 2 \times \frac{450}{x} = x + \frac{900}{x}$.

2. Soit $P(x) = x + \frac{900}{x}$, la longueur de la clôture.

Minimiser $P(x)$ revient à minimiser $(P(x))^2$.

$(P(x))^2 = \left(x + \frac{900}{x}\right)^2$.

Rappelons que $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$.

On a : $\left(x + \frac{900}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{900}{x}\right)^2 + 3600$.

Minimisons : $\left(x + \frac{900}{x}\right)^2 \geq 3600$.

Il y'a égalité si $\left(x - \frac{900}{x}\right)^2 = 0$.

Méthode

- Ne pas oublier que la clôture a trois côtés ;
- on calcule l'aire du rectangle puis on en déduit la longueur $P(x)$;
- minimiser $P(x)$ revient à minimiser $P^2(x)$ en appliquant $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$, on détermine la valeur minimale $P(x)$.

Donc : $(P(x))^2 \geq 3600$.

On a : $P(x) \geq 60$ et $P(x) = 60$ si $x = \frac{900}{x}$. Donc $x = 30$.

Il existe un rectangle, d'aire 450 m², de périmètre minimum, ses dimensions sont : 30 m et 15 m.

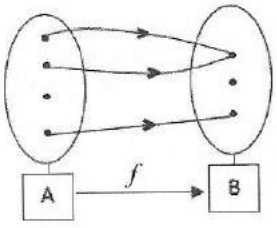
La longueur de la clôture est : 60 m.

Résumé de cours

1 Notion de fonction

1.1. Définition d'une fonction

Définition A et B sont deux ensembles non vides.
On appelle fonction de A vers B toute correspondance qui, à chaque élément de A, associe un ou zéro élément de B.



Vocabulaire et notation

Soit x un élément de A et on désigne par $f(x)$ sa correspondance par f. On dit que f est la fonction de A vers B qui, à x associe $f(x)$;
A est l'ensemble de départ de f, B son ensemble d'arrivée. x est la variable, $f(x)$ est l'image de x par f.
On note : $f : A \to B$
$x \mapsto f(x)$

- Lorsque b est l'image de a par f, on dit que a est un antécédent de b par f. On écrit : $f(a) = b$.
- Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique.
- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction d'une variable réelle.

1.2. Fonction définie par une formule explicite

Une fonction numérique d'une variable réelle peut être définie par une formule explicite.

Exemple

On considère les fonctions : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 + 2x - 3$.

Méthode

- Pour calculer l'image d'un nombre réel par une fonction f, on remplace x par ce nombre dans la formule.
- Pour trouver un antécédent d'un nombre réel b par f, on résout l'équation $f(x) = b$.

1.3. Fonction définie par un schéma de calcul ou un algorithme de calcul

Une fonction numérique d'une variable réelle peut être définie par un schéma de calcul ou un algorithme de calcul.

Exemple

Exécute le programme suivant :
- choisis un nombre ;
- multiplie-le par 2 ;
- soustrais 3 du résultat ;
- élève le résultat par 2 ;
- ajoute -5.

1.4. Fonction définie par un tableau de valeurs

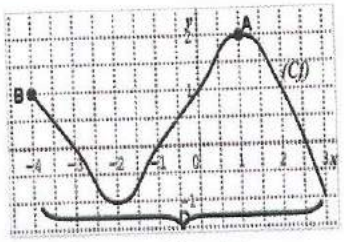
Une fonction peut être définie par un tableau de valeurs.
Dans ce cas, on ne connaît que les images des nombres donnés dans le tableau.

Exemple

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0

1.5. Fonction définie par une représentation graphique

Définition Le plan est muni d'un repère.
f est une fonction définie sur D.
On appelle représentation graphique de f, ou courbe représentative de f, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ où x est élément de D.



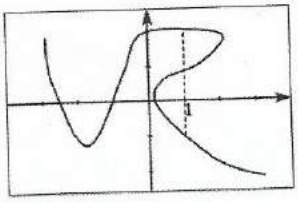
$B\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in (C_f)$; $A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in (C_f)$

Notation et vocabulaire

On note habituellement (C_f) la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère.
On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C_f) \Leftrightarrow x \in D$ et $y = f(x)$.
Quand f est une fonction déterminée par une formule explicite, on dit que : $y = f(x)$ est l'équation de la courbe (C_f).

Rémarque

Un élément de l'ensemble de départ ayant un ou zéro image dans l'ensemble d'arrivée, la courbe ci-contre ne peut pas être la représentation graphique d'une fonction. En effet, le nombre réel 1, par exemple, a trois images par f.



1.6. Ensemble de définition d'une fonction

Définition

- f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.
L'ensemble des éléments de A possédant une image par f est appelé ensemble de définition de f.
- Si f est une fonction à variable réelle, l'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe ou a un sens.
On le note souvent D_f.

Point méthode

Pour déterminer l'ensemble de définition D_f d'une fonction f, on peut procéder comme suit :
- On écrit toutes les conditions ou contraintes d'exécution du programme de calcul de $f(x)$.
- On précise les ensembles des contraintes que vérifie $f(x)$.
- On écrit D_f à l'aide d'intervalles.

1.7. Fonctions égales sur un ensemble

Définition

f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E. On dit que les fonctions f et g sont égales sur E (où qu'elles coïncident sur E) lorsque, pour tout élément x de E, $f(x) = g(x)$.

Remarque : Les représentations graphiques de fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble.

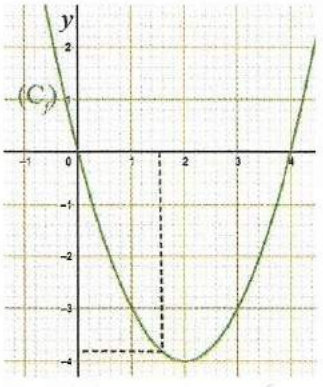
2 Étude graphique d'une fonction

2.1. Lecture d'image et d'antécédent(s) d'un nombre

Méthode

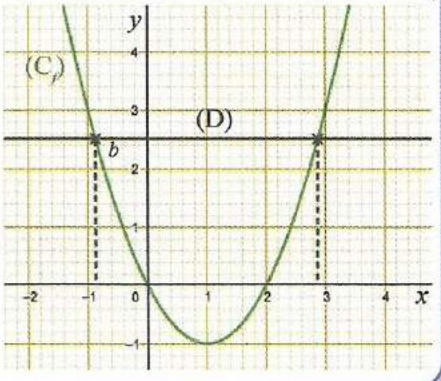
- Lire graphiquement l'image de a par une fonction f c'est déterminer $f(a)$ à partir de sa courbe (C_f).

Méthode de détermination graphique de l'image d'un point a.
- On trace la droite (D) d'équation $x = a$.
- Cette droite coupe la courbe (C_f) en un point.
- L'ordonnée du point d'intersection de (C_f) et (D) est l'image de a par f.



- Pour lire graphiquement le(s) antécédent(s) d'un nombre b par une fonction f, on procède comme suit :

Méthode de détermination graphique de l'antécédent d'un point b.
- On trace la droite (D) d'équation : $y = b$.
- Cette droite (D) coupe la courbe en un ou plusieurs points.
- Les antécédents de b sont les abscisses des points d'intersection de la droite (D) d'équation $y = b$ et de (C_f).



2.2. Extremum d'une fonction

Définition f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble I ; a est un élément de I.
- Lorsque, quel que soit x élément de I, $f(x) \leq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I.
- Lorsque, quel que soit x élément de I, $f(x) \geq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I.

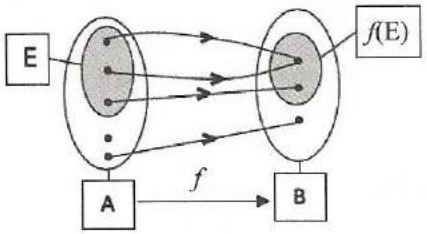
Remarque

Une fonction f admet un extremum sur un intervalle I, si f admet un minimum ou un maximum sur I.

2.3. Image directe d'un ensemble

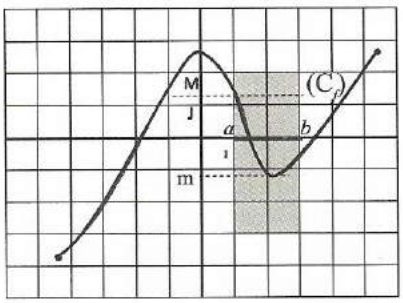
2.3.1. Définition

Définition f est une fonction de A vers B et E une partie de l'ensemble de définition de f. On appelle image directe de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E. On le note $f(E)$.



2.3.2. Lecture graphique de l'image directe d'un ensemble

Sur la figure ci-contre, (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f.



Méthode

Pour déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[a\ ;\ b]$, tel que : $a < b$.
- On construit sur la figure les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.
- On colorie la partie de la courbe comprise entre les droites (D_1) et (D_2).
- On détermine le maximum M et le minimum m de la partie colorée de la courbe.

$f([a\ ;\ b]) = [m\ ;\ M]$.

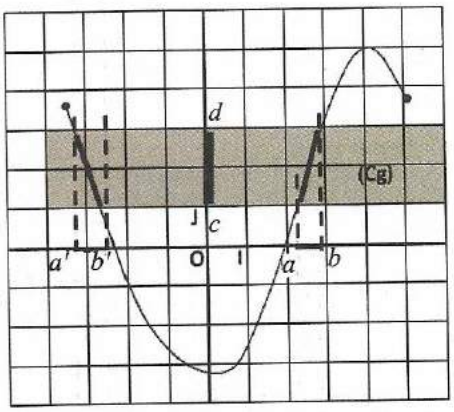
2.4. Image réciproque d'un ensemble

2.4.1. Définition

Définition f est une fonction de A vers B et G une partie de B. On appelle image réciproque de G par f, l'ensemble G' des antécédents par f de tous les éléments de G.

2.4.2. Lecture graphique de l'image réciproque d'un ensemble

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g.



Méthode

Pour déterminer l'image réciproque par g de l'intervalle $[c\ ;\ d]$, tel que : $c < d$, on procède comme suit :

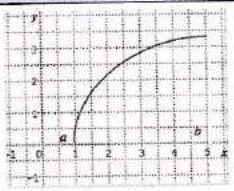
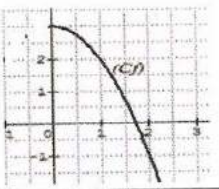
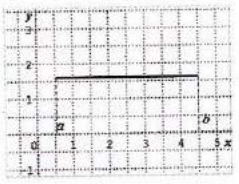
- On construit sur la figure les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = c$ et $y = d$.
- On colorie la partie de la courbe comprise entre les droites (D_1) et (D_2).
- On détermine les intervalles constitués des abscisses des points d'extrémités des parties de courbe colorées.

L'image réciproque de $[c\ ;\ d]$ par g est $[a'\ ;\ b'] \cup [a\ ;\ b]$.

3 Variation d'une fonction

Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Notons $I = [a\ ;\ b]$.

Sens de variation	Tableau de variation	Représentation graphique
f est croissante sur I signifie que pour tous réels u et v de I : si $u < v$, alors $f(u) \leq f(u)$.	x : a … b ; $f(x)$: $f(a)$ ↗ $f(b)$	
f est décroissante sur I signifie que pour tous réels u et v de I : si $u < v$, alors $f(u) \geq f(u)$.	x : a … b ; $f(x)$: $f(a)$ ↘ $f(b)$	
f est constante sur I signifie que pour tous réels u et v de I : si $u < v$, alors $f(u) = f(u)$.	x : a … b ; $f(x)$: $f(a)$ → $f(b)$	

Exercices de renforcement

1 Parmi les courbes ci-dessous, écris le numéro de celles qui sont des représentations graphiques de fonctions. Dans ce cas, précise l'ensemble de définition de cette fonction.

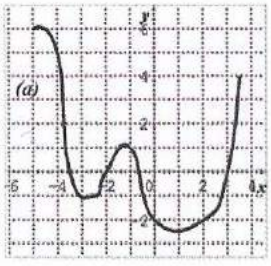


Figure 1

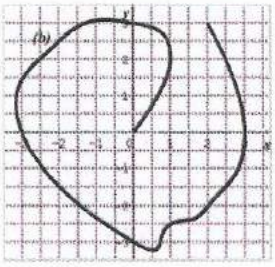


Figure 2

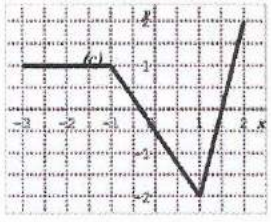


Figure 3

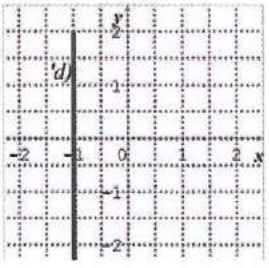


Figure 4

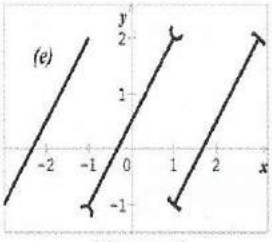


Figure 5

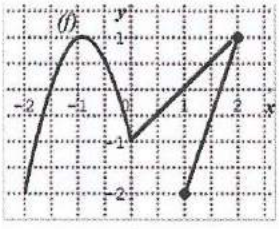


Figure 6

2 Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-après :

1) $f(x) = x^2 + 5x - 7$; 2) $g(x) = \dfrac{3x+4}{2x-8}$;

3) $h(x) = \sqrt{2x-6}$; 4) $i(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$;

5) $j(x) = \dfrac{x}{(x-3)(x+2)}$; 6) $k(x) = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{1}{x+2}$;

7) $l(x) \dfrac{5}{3x^2+5}$; 8) $m(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

3 Détermine l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie dans chacun des cas suivants.

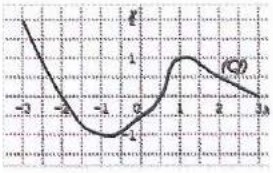
1) $f(x)\sqrt{2-x}.\sqrt{2+x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^2-9}$;

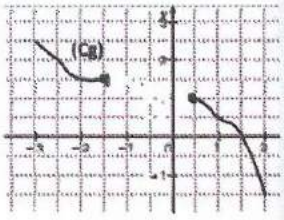
3) $f(x) = \dfrac{5\sqrt{x+1}}{x+1}$; 4) $f(x) = \sqrt{5+x} + \dfrac{1}{x-4}$;

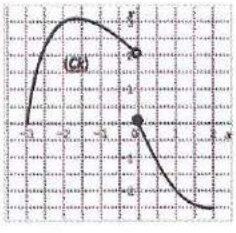
5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}$; 6) $f(x) = \dfrac{5x-3}{\sqrt{2x-12}}$

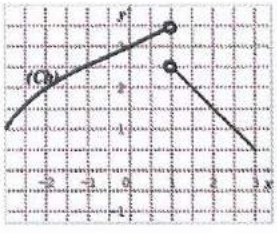
7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{x+5}$; 8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+9}}{x-3}$

4 Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de fonctions numériques.
Détermine l'ensemble de définition de chacune d'elles.









5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x - 12$.
1. Détermine l'image de 0, -3 et de $\sqrt{2}$ par f.
2. Vérifie si les points A(2 ; -6) et B(-1 ; -12) appartiennent à la courbe représentative (C_f) de la fonction f.
3. Détermine les antécédents par f de -12.
4. En vérifiant que : $f(x) = (x-3)(x+4)$, déduis-en les antécédents éventuels de 0 par f.

6 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{4}{x}$.
1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Détermine l'image par f de chacun des nombres : 7 ; $\sqrt{5}$ et $\dfrac{2}{3}$.
3. Justifie que $\dfrac{39}{40}$ a pour antécédent $\dfrac{5}{2}$ par f.

7 Soit la fonction f définie par le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-2	0	1	6	10	12
$f(x)$	20	-1	-5	-4	31	95	-5

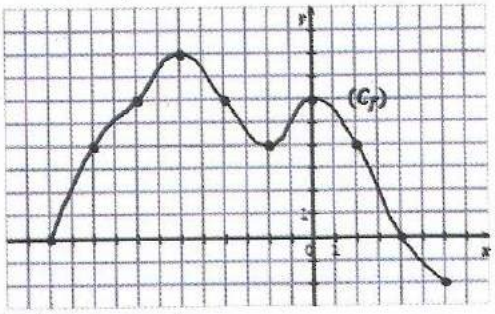
1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Détermine l'image par f de -5 ; de 0 ; et de 10.
3. Détermine les antécédents par f de -5.

8 On donne les programmes de calcul suivants :

A	B
- choisis un nombre ; - ajoute 3 à ce nombre ; - élève le résultat au carré ; - retranche 2 au résultat ; - affiche le résultat.	- choisis un nombre ; - retranche 2 au résultat ; - prends l'inverse de ce nombre s'il est non nul ; - soustrais 3 du résultat.

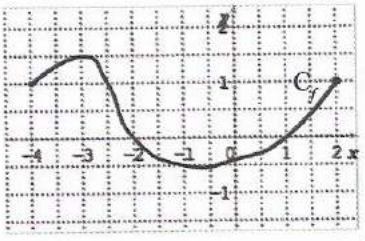
1. Pour chaque programme, lorsque c'est possible, détermine les images de -2 ; 2 ; 0 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{4}{5}$.
2. Pour chaque programme donne l'expression algébrique de la fonction.
3. Détermine les antécédents éventuels de 0 et de 3 par chacune des fonctions.

9 La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f :



Par lecture graphique :
a) Donne l'ensemble de définition D de la fonction f.
b) Donne les images de -6 et 4 par f.
c) Donne les antécédents, s'ils existent de -4 et 4 par f.
d) Donne le maximum et le minimum de la fonction f. Précise en quelles valeurs ils sont atteints.
e) Détermine l'image directe par f de l'intervalle $[0 ; 6]$.
f) Détermine l'image réciproque par f de l'intervalle $]0 ; 4[$.
g) Dresse le tableau de variation de f.

10 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.



1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Recopie et complète le tableau suivant :

x	-3	-2	$-0,5$	1	2
$f(x)$					

3. Détermine les antécédents éventuels de : $-0,5$; 0 ; 1 par f.
4. Résous graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 1$.

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2$.
1. a) Calcule les images de 2, 0 et -3 par la fonction f.
b) Calcule $f\left(-\frac{1}{3}\right)$; $f(\sqrt{2})$; $f(1-\sqrt{2})$.
2. Détermine le (ou les) nombre(s) dont l'image par f est 2.

12 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-4}$.
1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Détermine l'image du nombre 3 par la fonction f.
3. Détermine l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction f.

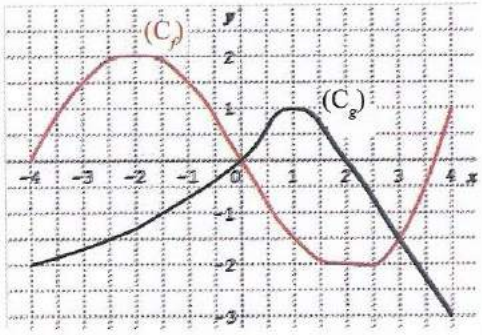
13 On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{3x-5}{x+4}$.
1. a) Détermine l'ensemble de définition de la fonction g.
b) Calcule les images de -2 et de $-\frac{1}{3}$ par g.
2. Détermine l'(es) antécédent(s) de 1 et 5 par la fonction g.

14 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |2x-2| + |1-x|$ et $g(x) = 3x - 3$.
1. Détermine l'ensemble de définition de f et de g.
2. Détermine le plus grand ensemble D sur lequel $f = g$.

15 Démontre que dans chacun des cas suivants, les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'expressions données sont égales.
1) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}$ et $g(x) = |x| - 1$;
2) $f(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$ et $g(x) = \sqrt{x^2+3}$;
3) $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ et $g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

16 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \frac{x-2}{|x-2|}$ et $g(x) = -1$.
1. Détermine l'ensemble de définition de f et de g.
2. Détermine le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident.

17 Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-4 ; 4]$.



1. Dresse les tableaux de variations des fonctions f et g.
2. Précise les extremums éventuels des fonctions f et g.
3. Détermine graphiquement les solutions de l'équation : $x \in [-4 ; 4]$, $f(x) = g(x)$.
4. Résous graphiquement : $x \in [-4 ; 4]$, $f(x) \geq 0$ et $x \in [-4 ; 4]$, $g(x) \geq 0$.
5. Résous graphiquement : $x \in [-4 ; 4]$, $f(x) \geq g(x)$.

18 Soit la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2}{x-3}.$$

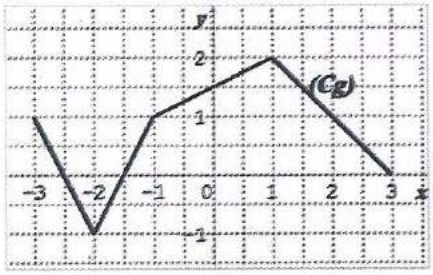
1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Détermine les images directes de chacun des intervalles suivants : $]3 ; 7]$; $[0 ; 2]$ et $[1 ; 5]$.

19 Soit la fonction f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x|$$

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Détermine les images directes de chacun des ensembles suivants : $\{-3 ; 2\}$; $[-3 ; -2]$ et $[-1 ; 3]$.
3. Détermine les images réciproques de chacun des ensembles suivants : $\{4\}$; $]-\infty ; 4]$.

20 Soit la fonction g définie par la représentation graphique ci-dessous.

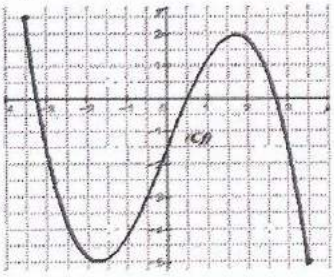


1. Détermine l'ensemble de définition D_g de g.
2. Détermine l'image directe par g des intervalles suivants :

a) $[-3 ; -1]$; b) $]-1 ; 3[$; c) $[-3 ; 3]$.

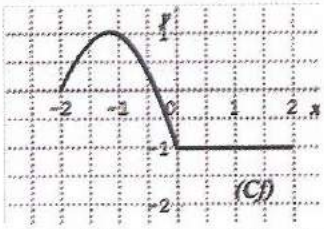
3. Détermine l'image réciproque par g des intervalles suivants : a) $]-1 ; 1[$; b) $[1 ; 2]$.

21 Soit la fonction f définie par la représentation graphique ci-dessous.



1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
2. Détermine l'image directe par f des intervalles suivants : a) $[-1 ; 1]$; b) $]1 ; 2[$; c)$[-3 ; 3]$.
3. Détermine l'image réciproque par f des intervalles suivants : a) $]-1 ; 1[$; b) $[1 ; 2{,}5]$; c) $[-3 ; 0]$.

22 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2 ; 2]$.



1. Dresse le tableau de variation de f.
2. a) Détermine le maximum de f sur $[-2 ; 2]$.
   b) Détermine la valeur de x en lequel ce maximum est atteint.

23 Le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction h.

x	-2		0		3		4
$h(x)$	-1	↘	-5	↗	2	↘	-2

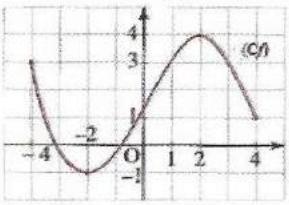
1. Compare les nombres suivants lorsque cela est possible.

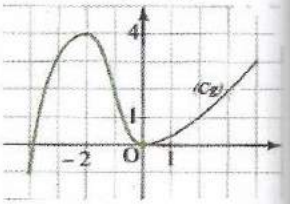
a) $h(-2)$ et $h(-1)$; b) $h(-1{,}5)$ et $h(0{,}5)$

c) $h(3{,}6)$ et $h(3{,}7)$; d) $h(0{,}1)$ et $h(1{,}9)$.

2. Détermine le maximum et le minimum de h sur son ensemble de définition.

24 Les courbes (C_f) et (C_g) ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions f et g.





Exercices

25 1. Dresse le tableau de variation de chacune des fonctions.
2. Détermine le maximum et le minimum de chacune des fonctions sur son ensemble de définition.

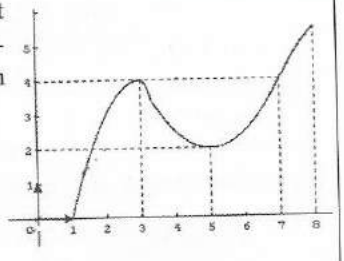
26 Étudie le sens de variation puis dresse le tableau de variations de chacune des fonctions définies ci-dessous sur l'intervalle considéré.
$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$;
$g(x) = (x+2)^2$ sur $\mathbb{R}$;
$h(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$ sur $]1;+\infty[$.

27 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = -(x-3)^2 + 4$.
1. a) Démontre que f est décroissante sur $[3 ; +\infty[$.
b) Démontre que f est croissante sur $]-\infty ; 3]$.
2. a) Dresse le tableau de variation de f.
b) Déduis-en que f n'est ni croissante ni décroissante sur $[1 ; 5]$.
3. Démontre que 4 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

28 Dans chaque cas, ci-dessous f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Étudie son sens de variation.
1. $f(x) = 3 - \frac{4}{x-1}$ sur $]1 ; +\infty[$, puis sur $]-\infty ; 1[$.
2. $f(x) = (x+2)^2 - 5$ sur $]-\infty ; -2]$ puis sur $[-2 ; +\infty[$.

29 On donne la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$h(x) = \frac{3}{x^2+2}$.
1. Détermine l'ensemble de définition D_h de la fonction h.
2. Démontre que $\frac{3}{2}$ est le maximum de h.

30 La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction numérique g.



1. Détermine l'ensemble de définition D_g de la fonction g.
2. Détermine s'ils existent le maximum et le minimum de g sur D_g.
3. Étudie les variations de la fonction g sur D_g.
4. Dresse le tableau de variation de g sur D_g.

Exercices d'approfondissement

31 Soit f la fonction définie sur $[-3;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$.
1. Justifie que : $\forall x \in [-3;+\infty[; f(x) = 2 - \frac{7}{x+5}$.
2. Démontre que f est croissante sur $[-3 ; +\infty[$.
3. a) Démontre que f admet un minimum, précise-le.
b) Démontre que f admet un majorant.
c) Déduis-en que f est bornée et donne un encadrement de f.

32 Soit la fonction f définie sur $[-3 ; 6]$ par :
$f(x) = -x^2 + 4x + 5$.
1. Démontre que : $f(x) = 9 - (x-2)^2$.
2. Résous l'équation : $f(x) = 9$.
3. Prouve que 9 est le maximum de f sur $[-3 ; 6]$.

33* Étudie les variations de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{(x-1)^2+2}}$.

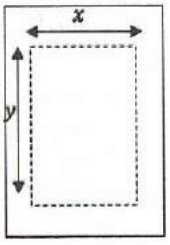
34 Soit la fonction f définie par : $f(x) = -3x^2 - 6x + 45$.
1. Détermine α et β tels que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = -3(x-\alpha)^2 + \beta$.
2. Étudie les variations de f.

35* Une unité étant choisie, on considère un carré ABCD de côté 4. On note P, Q, R et S les points des segments [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que :
AP = BQ = CR = DS.
On se propose d'étudier les variations de l'aire du quadrilatère PQRS lorsque le point P décrit le segment [AB].
On pose : AP = x.
1. Dans quel intervalle varie le nombre réel x ?
2. a) Calcule l'aire du triangle APS en fonction de x.
b) Déduis-en l'aire du quadrilatère PQRS en fonction de x. On la notera $f(x)$.
3. Démontre que pour tout $x \in [0 ; 4]$,
$f(x) = 2(x-2)^2 + 8$.
4. a) Démontre que pour tout $x \in [0 ; 4]$, $f(x) \geq 8$.
b) Détermine la position de P sur [AB] telle que l'aire de PQRS soit minimal.
c) Détermine les positions de P sur [AB] telles que l'aire de PQRS soit égale à 10.

36* Dans un repère orthonormé, on considère les points A(0 ; 4), B(−3 ; 0) et C(7,5 ; 0).
M(x ; 0) est un point du segment [BC]. Soit f la fonction qui à x associe la distance AM.

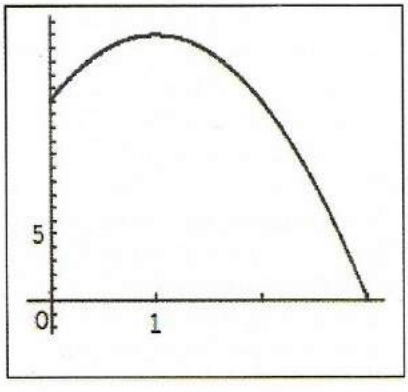
1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a) Établis le tableau des variations de la fonction f.
   b) Déduis-en le nombre de solutions de chacune des équations suivantes $f(x) = 3$; $f(x) = 4$; $f(x) = 5$ et $f(x) = 9$.
3. Résous les équations $f(x) = 4{,}1$ et $f(x) = 5{,}8$.

37 Une page en forme de rectangle doit recevoir 432 cm² de texte imprimé. Les marges doivent être de 4 cm sur les côtés et 3 cm en haut et en bas. On cherche à déterminer les dimensions du texte pour que le coût total du papier soit minimal.



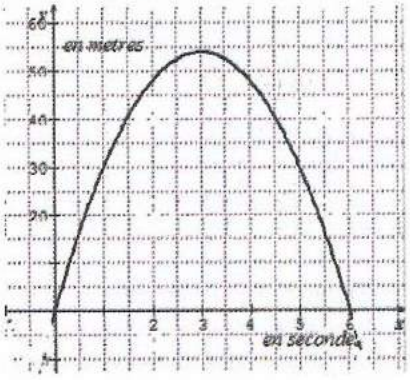
1. a) Exprime y en fonction de x.
   b) Exprime l'aire totale de la feuille en fonction de x.
2. Démontre que cela revient à chercher le minimum de $f(x) = 6x + \dfrac{3456}{x}$ sur]0 ; +∞[.
3. Résous le problème.

38 Lors d'un cours de physique-chimie, la trajectoire d'une balle de jeu est donnée par :
$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.
x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air, exprimé en secondes, avec $x \in [0 ; 3]$, et $f(x)$ est la hauteur de la balle au-dessus du sol, exprimée en mètres.



Situations d'évaluation

39 Au cours d'un match de football opposant deux classes de Seconde, au coup d'envoi, un joueur tire le ballon.
Le graphique ci-dessous représente la trajectoire de la balle prise par une caméra d'un téléphone portable.



Le professeur de physique au vu du cliché, après analyse et calculs a révélé que cette courbe est une parabole P telle que $p(t) = -6t^2 + 36t$, $t \in [0 ; 6]$.
Le joueur très content de son tir, veut étudier avec l'aide de ses camarades les variations de cette trajectoire.

1. Détermine la hauteur à laquelle se situe le ballon au bout de 5 s.
2. Détermine l'instant auquel le ballon a atteint 40 m.
3. Détermine le moment auquel la balle a atteint sa hauteur maximale.
4. Détermine par calcul le maximum de la trajectoire.
5. En utilisant l'expression de P(x) étudie puis dresse le tableau de variation de la trajectoire.

Coup de Pouce

33 Étudier les variations de f sur $[-\infty ; -1]$ et sur $[-1 ; +\infty[$.

35 Sachant que $x \in [0 ; 4]$;
utiliser $\mathcal{A}_{APS} = \dfrac{x(4-x)}{2}$
$\mathcal{A}_{PQRS}$ = Aire de ABCD − Aire de APS.

36 $x \in [-3 ; 7{,}5]$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$.

Leçon 6

ÉTUDES DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

SOCIETE DE DISTRIBUTION D'EAU DE LA CÔTE D'IVOIRE
Société Anonyme au capital de 4.600.000.000 de Francs C.F.A- R.C.C.M d'Abidjan-Plateau n° CI-ABJ-1962-B 984
SIEGE SOCIAL: TREICHVILLE - Av. Christiani - Tel : 21.23.30.00, 01 B.P. 1843 ABIDJAN 01
COMPTE CONTRIBUABLE N° 01.00.984 A Compte SGBCI CI008 01111 0111.301.146.71 65
CENTRE DES IMPÔTS : DGI/DGE-REGIME D'IMPOSITION : REEL NORMAL
www.sodeci.ci

SODECI S.A.

Réf. Contrat : 139074142
(Pour le règlement de votre facture via les Banques ou Mobile Money utiliser la réf. contrat ci-dessus)

Référence client : 002002655
Point de fourniture : 13904648901
Adresse technique : 139074140763
GF : 2
Statut Assainissement : 4

FACTURE N° 002002650108201901

POINT D'ACCUEIL
Secteur Cocody
22 44 04 40
DR Abidjan Nord Est
21 23 32 58

DATE LIMITE DE PAIEMENT : 05/11/2019
Passé la date limite de paiement, il sera perçu la somme de 8 069 CFA au titre de frais de retard, **et il sera procédé sans préavis, à la suspension de la fourniture d'eau.**

Période de consommation : **juin, juillet et août**

Période		Diam	N°	Index		Volume consommé (m3)	Libellé	Volume facturé (m3)	Prix du m3	Dont			Montant du volume facturé
Mois	Année		compt	Ancien	Nouvel					FNE	FDE	Assainis	
08	2019	DN 015 mm	13980113_08 1823 Soc410C3 SOCAM 015 mm	584	745	161	Forfait	9	250,3	0,0	7,0	15,3	2 253
							Social	9	250,3	0,0	7,0	15,3	2 253
							Domestique	72	403,3	21,0	77,3	36,0	29 038
							Normal	71	664,0	46,5	271,3	77,2	47 144
												Net à payer	**80 688**

Dont TVA sur eau : 5 863
Dont TVA sur assainissement : 613

Total de la facture : 80 688 FCFA
Pour tout règlement en espèces, prévoir la somme de 100 CFA pour frais de timbre — Total de la facture + frais de timbre : 80 788 FCFA
Quatre-vingts Mille Sept Cent Quatre-vingt-Huit Francs CFA
Pour les règlements par chèque à l'ordre de la SODECI, les frais de timbre n'étant pas perçus, prévoir la somme de : 80 688 FCFA

Comment calcule-t-on le montant d'une facture ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une facture d'eau potable se compose d'une taxe fixe (entretien du compteur) à laquelle s'ajoute le prix de la quantité de mètre cube d'eau consommée. Une compagnie a facturé 13 440 F pour une consommation de 123 m^3 et 24 240 F pour une consommation de 258 m^3.
Les élèves de 2nde C qui habitent une maison ont consommé 100 m^3 d'eau. Ils décident de déterminer le montant de leur facture prochaine en utilisant ces informations.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Fonctions de référence

Reconnaître : les fonctions de référence

Représenter : les fonctions de référence $(x \mapsto ax + b\ ;\ x \mapsto x^2\ ;\ x \mapsto x^3\ ;\ x \mapsto \frac{1}{x}\ ;\ x \mapsto \sqrt{x}\ ;\ x \mapsto |x|$

Étudier : le sens de variation de chaque fonction de référence

Dresser : le tableau de variation d'une fonction de référence

2 Fonction affine par intervalles

Identifier : une fonction affine par intervalles

Représenter :
- la fonction : $x \mapsto |ax + b|$
- la fonction : $x \mapsto E(x)$

Calculer : la partie entière d'un nombre réel

3 Fonctions du type $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto \frac{a}{x}$

Utiliser : les fonctions de référence pour étudier les fonctions des types : $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$

4 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel à l'étude des fonctions de référence

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Fonctions de référence

1.1. Fonction affine

a et b sont deux nombres réels. On considère la fonction affine f définies par : $f(x) = ax + b$.
Étudie suivant le signe de a, le sens de variation de f.

Synthèse

Toute fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels donnés, est appelée fonction affine.
Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercices de fixation

1-1-1 Soit la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}0012x + 0{,}5$.
Donne son coefficient, l'ordonnée à l'origine et son sens de variation.

1-1-2 Trace dans un repère orthonormé la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x + 1$.

1-1-3 Les fonctions définies ci-dessous sont-elles des fonctions affines ? Si oui, indique le coefficient et le sens de variation.

a) $f(x) = 2 - 4x$; b) $g(x) = \frac{3-x}{2}$; c) $h(x) = 5x^2 - 1$; d) $u(x) = 3(6x - 1)$; e) $v(x) = \frac{-x}{7}$.

1.2. Fonction carré

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$.

1. Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifie que f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
3. Étudie le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
4. Dresse le tableau de variation de f.
5. Complète le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4
$f(x)$											

6. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Synthèse

La fonction qui à tout nombre réel associe son carré ($x \longmapsto x^2$) est appelée fonction carré.
Elle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Exercices de fixation

1-2-1 Donne le sens de variation de la fonction carré et dresse son tableau de variation.

1-2-2 Représente graphiquement la fonction carré sur $[-4 ; 4]$.

1-2-3 Soit f la fonction carré.
Compare : a) $f(-\pi)$ et $f(-3)$; b) $f(1)$ et $f(5)$; c) $f(0)$ et $f(10)$.

1.3. Fonction cube

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3$.

1. Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. On considère deux nombres réels a et b.
   a) Justifie que : $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.
   b) On admet que : $a^2 + ab + b^2 > 0$.

Étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Complète le tableau suivant :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$									

5. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Synthèse

La fonction qui à tout nombre réel associe son cube ($x \longmapsto x^3$) est appelée fonction cube.
Elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices de fixation

1-3-1 Donne le sens de variation de la fonction cube et dresse son tableau de variation.

1-3-2 Représente graphiquement la fonction cube sur $[-3 ; 3]$.

1-3-3 Soit f la fonction cube.
Compare : a) $f(-\pi)$ et $f(-3)$;
b) $f(-10)$ et $f(2)$;
c) $f(\sqrt{7})$ et $f\left(\frac{1}{7}\right)$.

1.4. Fonction inverse

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
2. Justifie que f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.
3. Étudie le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
4. Dresse le tableau de variation de f.
5. Recopie et complète le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4
$f(x)$											

6. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Synthèse

La fonction qui à tout nombre réel non nul associe son inverse $\left(x \longmapsto \frac{1}{x}\right)$ est appelée fonction inverse.
Elle est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

Exercices de fixation

1-4-1 Donne le sens de variation de la fonction inverse et dresse son tableau de variation.

1-4-2 Représente graphiquement la fonction inverse sur $]-4 ; 0[$ et $]0 ; 3]$.

1-4-3 Soit f la fonction inverse.
Compare : a) $f(-\pi)$ et $f(-1)$;
b) $f(2)$ et $f(4)$;
c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

1.5. Fonction racine carrée

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Justifie que f est définie sur $[0 ; +\infty[$.
2. Étudie le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Complète le tableau suivant :

x	0	$0,5$	1	2	3	4
$f(x)$						

5. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Synthèse

La fonction qui à tout nombre réel positif associe sa racine carrée $(x \longmapsto \sqrt{x})$ est appelée fonction racine carrée.
Elle est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction racine carrée.
Compare : a) $f(2)$ et $f(5)$; b) $f(\sqrt{11})$ et $f(\sqrt{21})$; c) $f\left(\frac{7}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{7}\right)$.

1.6. Fonction valeur absolue

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.

1. Justifie que f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
2. Étudie le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Complète le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4
$f(x)$											

5. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Synthèse

La fonction qui à tout nombre réel associe sa valeur absolue ($x \longmapsto |x|$) est appelée fonction valeur absolue.
Elle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Exercices de fixation

1-6-1 Donne le sens de variation de la fonction valeur absolue.

1-6-2 Représente graphiquement la fonction valeur absolue sur $[-3 ; 3]$.

1-6-3 Soit f la fonction valeur absolue. Compare : a) $f(-1)$ et $f(-3)$;
b) $f(2)$ et $f(3)$;
c) $f(0)$ et $f(4)$.

Activités 2 Fonctions affines par intervalles

2.1. Définition

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |3x - 5|$.

1. Écris l'expression de $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
2. Représente la courbe de f dans un repère orthonormé.

Synthèse

Sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{5}{3}\right]$, $f(x)$ est de la forme $ax + b$, de même que sur $\left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[$.
On dit que f est une fonction affine par intervalles.

Exercices de fixation

2-1-1 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x - 1|$.
Trace la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2-1-2 Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |3 - 2x|$.
Trace la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2.2. Fonction partie entière

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = E(x)$, où $E(x)$ est la partie entière x.

1. Détermine $f(x)$ sur chacun des intervalles suivants : $[-4 ; -3[$; $[-3 ; -2[$; $[-2 ; -1[$; $[-1 ; 0[$; $[0 ; 1[$; $[1 ; 2[$; $[2 ; 3[$ et $[3 ; 4[$.
2. Trace, dans le plan rapporté à un repère (O, I, J), la courbe représentative de la fonction f sur $[-4 ; 4[$.

Synthèse

La fonction qui à tout nombre réel associe sa partie entière $(x \mapsto E(x))$ est appelée fonction partie entière.
Elle est une fonction affine par intervalles.

Exercices de fixation

2-2-1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x)$. Calcule $f(-2,3)$, $f(0)$, $f(-0,25)$, $f(0,35)$.

2-2-2 Trace dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la courbe représentative de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

Activité 3 Fonctions du type : $x \mapsto ax^2$ $(a \in \mathbb{R})$

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = -2x^2$.

1. Étudie le sens de variation de chacune des fonctions f et g sur $]-\infty ; 0]$.
2. Justifie que sur $[0 ; +\infty[$, f est croissante et g est décroissante.
3. Complète les tableaux suivants :

x	6	4	2	-1	0	1	2	3
$f(x)$								

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

4. Construis la courbe représentative de f et celle de g dans un repère orthonormé.

Synthèse

Toute fonction du type $x \mapsto ax^2$, $(a \in \mathbb{R})$, est :
- décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$ si $a > 0$;
- croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$ si $a < 0$.
- constante (nulle) si $a = 0$.

Exercices de fixation

3-1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^2$.
Compare : a) $f(-2)$ et $f(-4)$;
b) $f(0)$ et $f(1)$; c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

3-2 Étudie et construis la fonction : $x \mapsto 4x^2$ sur $[-2 ; 2]$.

3-3 Étudie et construis la fonction : $x \mapsto -x^2$ sur $[-4 ; 4]$.

Activité 4 Fonctions du type : $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$

Soient les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{-3}{x}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$.

1. Étudie le sens de variation de chacune des fonctions f et g sur $]-\infty ; 0[$.
2. Justifie que sur $]0 ; +\infty[$, f est croissante et g est décroissante.
3. Complète les tableaux suivants :

x	3	2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

4. Construis la courbe de f et celle de g dans un repère orthonormé.

Synthèse

Toute fonction du type $x \mapsto \frac{a}{x}$, $(a \in \mathbb{R})$, est :
- décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ si $a > 0$;
- croissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ si $a < 0$.
- constante (nulle) si $a = 0$.

Exercices de fixation

4-1 Donne le sens de variation de la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $h(x) = \frac{-1}{x}$.

4-2 Donne le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $f(x) = \frac{3}{x}$.

4-3 On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = -\frac{2}{x}$.
Compare : a) $g(-2)$ et $g(-3)$; b) $g(0)$ et $g(4)$;
c) $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ et $g\left(-\frac{2}{5}\right)$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Résoudre graphiquement une équation

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = |2x - 4|$.
1. Dresse le tableau de variation de chacune des fonctions f et g.
2. Représente dans un repère orthonormé (O, I, J) les courbes représentatives de chacune des fonctions f et g.
3. Résous graphiquement l'équation : $2x^2 - |2x - 4| = 0$.

Corrigé

1) f est sous la forme $x \mapsto ax^2$ avec $a > 0$.
f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

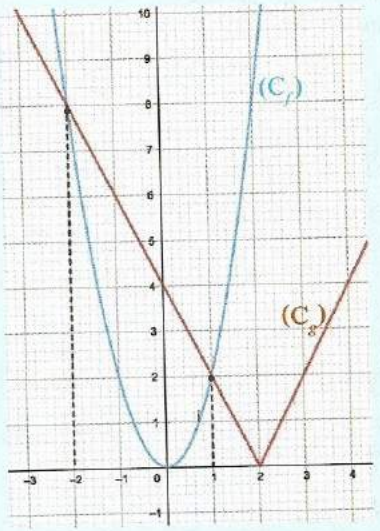
$2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
On en déduit que :
Pour $x \in]-\infty ; 2]$, $2x - 4 \leq 0$ d'où $g(x) = -2x + 4$.
Pour $x \in [2 ; +\infty[$, $2x - 4 \geq 0$ d'où $g(x) = 2x - 4$.
g est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$.
Tableau de variation de g.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		↘	0	↗	

Méthode

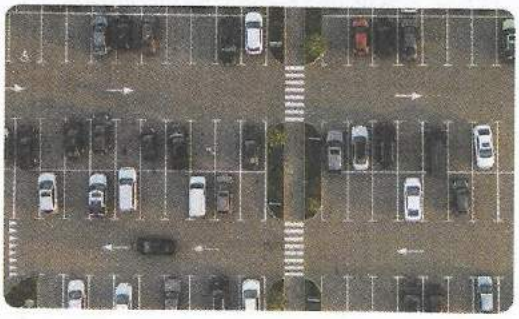
- Utiliser le sens de variation des fonctions du type $x \mapsto ax^2$ où $a \in \mathbb{R}$.
- Vérifier que les nombres trouvés sont solutions de l'équation.

2)



3) $2x^2 - |2x - 4| = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = |2x - 4|$
$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
Il s'agit de déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes des fonctions f et g.
On trouve : -2 et 1.

Exercice 2 Utiliser une fonction pour résoudre un problème



Pour faire les magasins, une dame a garé sa voiture dans un parking où le tarif est de 300 F pour les 60 premières minutes et 200 F pour chaque tranche supplémentaire de 30 minutes, partielle ou complète.
Sans avoir prêté attention au temps précis durant lequel sa voiture est restée dans le parking, elle croit cependant que la somme de 1 900 F qu'on lui a demandée de payer est erronée. Elle se souvient d'avoir quitté la maison à 9 h 36 min, en direction du parking.

Elle y a laissé sa voiture, puis est retournée la chercher après son dernier achat. La facture du dernier achat indique l'heure où elle a été réglée, soit 13 h 35 min et elle estime qu'il s'est écoulé 10 minutes entre ce moment et celui où elle a quitté le parking.
Détermine s'il y a une erreur dans la facture. Explique ta réponse.
Pour la représentation graphique, on prendra 1 cm pour 200 F sur l'axe des ordonnées et 1 cm pour 30 minutes sur l'axe des abscisses.

Corrigé

Oui il y a erreur dans la facture. La dame aurait dû payer au maximum 1700 F pour une durée de stationnement plafonnée à 250 minutes en raisonnant graphiquement.
La courbe ci-dessous traduit le coût du stationnement en fonction du temps écoulé.
Soit f la fonction représentant le coût du stationnement.

Pour $x \in]0 ; 60]$, $f(x) = 300$

Pour $x \in]60 ; 90]$, $f(x) = 500$

Pour $x \in]90 ; 120]$, $f(x) = 700$

.

.

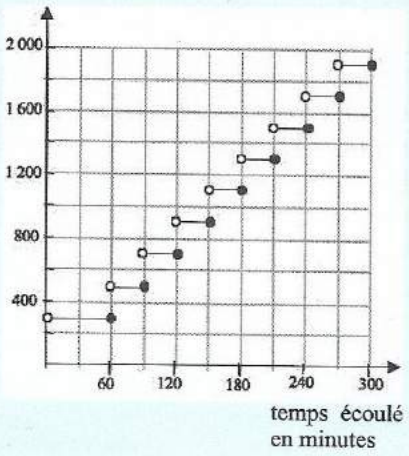
.

Pour $x \in]240 ; 270]$, $f(x) = 1700$

Pour $x \in]270 ; 300]$, $f(x) = 1900$

Méthode

Déterminer le coût du stationnement sur chaque intervalle d'amplitude 30.



1 Fonctions de référence

1.1. Fonction affine

Définition Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = ax + b$. Le nombre réel a est appelé coefficient directeur de la droite, le nombre réel b est appelé ordonnée à l'origine (où image de 0).

Cas particuliers :

Si $b = 0$, on dit que la fonction affine est linéaire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

Si $a = 0$, on dit que la fonction affine est constante : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = b$.

Sens de variation

Le sens de variation de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

1.2. Fonction carrée

Définition La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Sens de variation

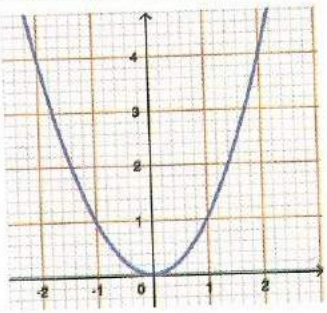
La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0\ ]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

Représentation graphique



Remarque

La courbe représentative de la fonction carrée dans un repère orthogonal (O, I, J) est une parabole de sommet O et d'axe (OJ).

1.3. Fonction cube

Définition On appelle fonction cube la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

Sens de variation

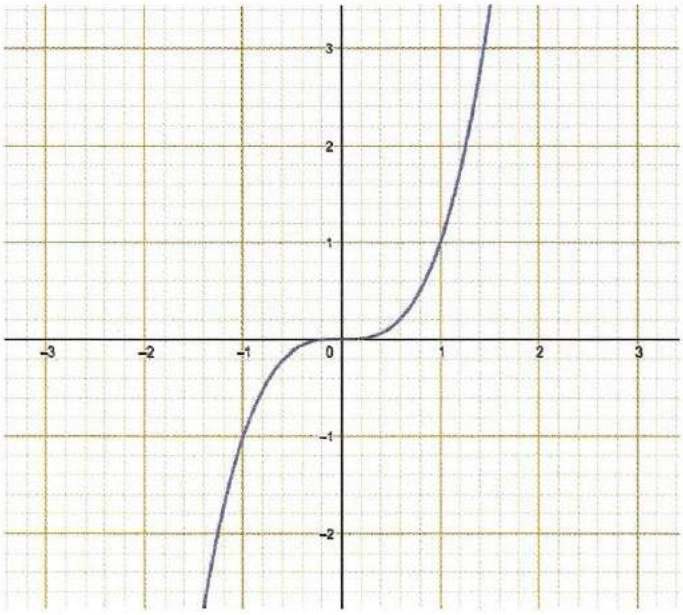
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résumé de cours

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

Représentation graphique



1.4. Fonction inverse

Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

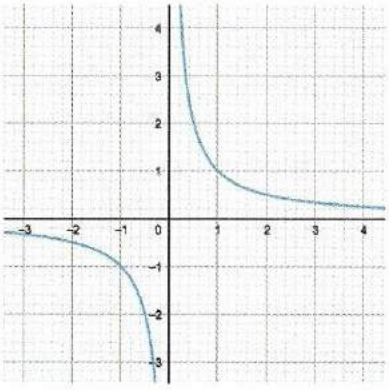
Sens de variation

La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	||	↘

Représentation graphique



Remarque

- La courbe représentative de la fonction inverse dans un repère (O, I, J) est une hyperbole de centre O.
- Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1.5. Fonction racine carré

Définition La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

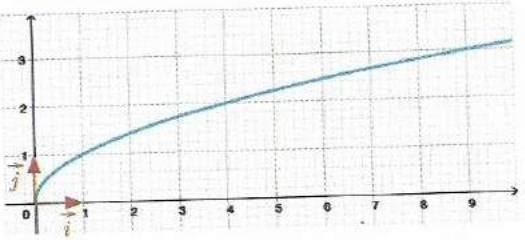
Sens de variation

La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$\sqrt{(x)}$		↗

Représentation graphique



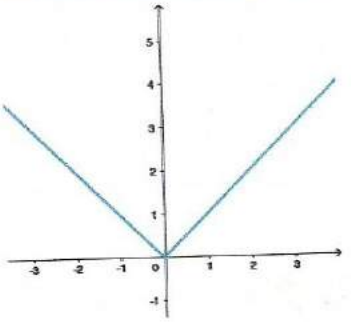
1.6. Fonction valeur absolue

Définition La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x|$.
Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$; si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$.

Sens de variation

La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Représentation graphique



2 Fonction affine par intervalles

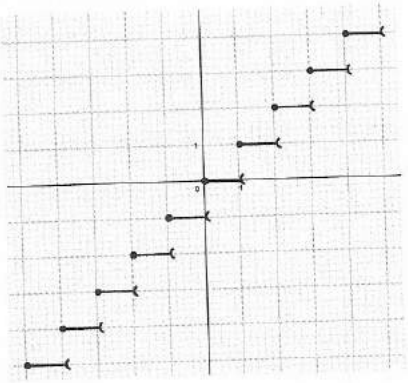
2.1. Définition

Définition Une fonction est dite affine par intervalles si elle est définie sur une réunion d'intervalles sur lesquels elle coïncide avec une fonction affine.

2.2. Fonction partie entière

Définition La fonction partie entière est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{E}(x)$.

Représentation graphique



La courbe représentative est une courbe en escalier.

3 Fonction du type : $x \mapsto ax^2$ ($a \in \mathbb{R}$)

Tableau de variation de $f : x \mapsto ax^2$ ($a \in \mathbb{R}$)

$a > 0$

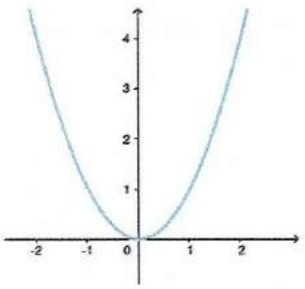
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

$a < 0$

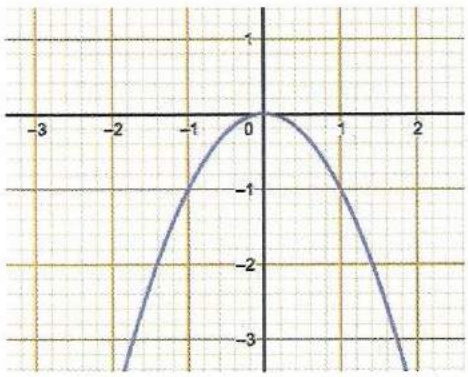
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

Représentation graphique de $f : x \mapsto ax^2$ ($a \in \mathbb{R}$)

a > 0



a < 0



4 Fonction du type : $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$)

Tableau de variation de $f : x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$)

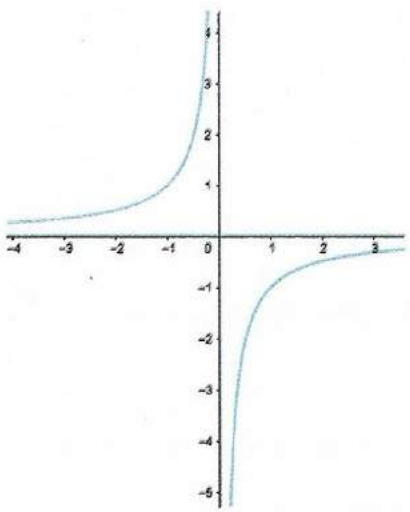
a < 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

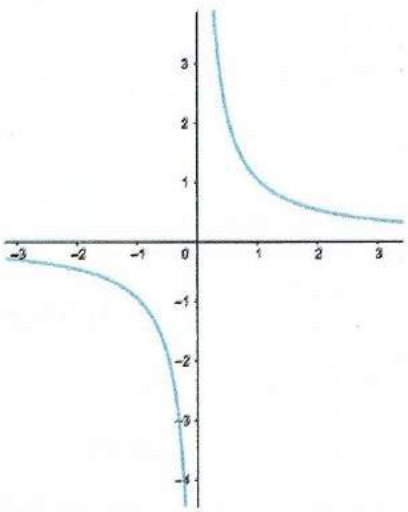
a > 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Courbe représentative



Courbe représentative



Exercices de renforcement

1 Soit un rectangle de côtés de longueurs x et 2.
1. a) Écris en fonction de x, l'expression d'une fonction donnant le périmètre de ce rectangle.
b) Dis si cette fonction est affine. Justifie.
2. a) Écris en fonction de x, l'expression d'une fonction donnant l'aire de ce rectangle.
b) Dis si cette fonction est affine. Justifie.

2 Soit un carré de côté de longueur x.
Des expressions de l'aire et du périmètre du carré en fonction de x, laquelle est l'expression d'une fonction affine ? Justifie.

3 On considère la fonction affine f et g définie par : $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -x + 3$.
2. Trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.

4 Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine f passe par les points A(–1 ; 4) et B(0 ; 2).
1. Place les points A et B dans un repère orthonormé.
2. Détermine par le calcul les valeurs des nombres réels a et b telles que pour tout x réel, $f(x) = ax + b$.
3. Vérifie graphiquement les résultats obtenus.

5 Dans un repère on donne deux points A(–3 ; 5) et B(2 ; –15). Détermine l'expression de la fonction affine dont la courbe représentative est la droite (AB).

6 Dans un repère, trace la représentation graphique de la fonction f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x \text{ pour } x \leq 2 \\ x - 2 \text{ pour } x \geq 2 \end{cases}$$

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x + 2 \text{ pour } x \leq -1 \\ -2x - 1 \text{ pour } x \geq -1 \end{cases}$$

Trace la représentation graphique de f.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x + 1 \text{ pour } x \leq 3 \\ 2x - 6 \text{ pour } x \geq 3 \end{cases}$$

Trace la représentation graphique de f.

9 Un marchand de cycle propose à un client une réduction de 15% sur un VTT affiché à 250 000 F. Détermine le prix payé par un client qui dispose d'une carte de fidélité qui lui accorde en plus une réduction de 5 %.



10 Détermine dans chacun des cas le coefficient multiplicateur qui passe d'un prix initial à un prix final. Déduis-en la variation exprimée en pourcentage.

Prix initial en F CFA	Prix final en F CFA
80 000	56 000
24 000	30 000
45 000	22500
19 000	38 000

11 Parmi les fonctions suivantes, identifie la fonction carré.
$f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x \times x$, $h(x) = 3\sqrt{x}$.

12 Prouve que les fonctions suivantes sont chacune égale à la fonction carré.
$f(x) = x(x + 1) - x$; $g(x) = -x^2 + 5x^2 - 3x^2$; $h(x) = (x - 1)^2 + 2x - 1$.

13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
1. Complète le tableau de valeurs suivant :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	9						

2. a) Justifie que le point de coordonnées (–3 ; 9) appartient à la courbe représentative de f.
b) Dans un repère, place les points de la courbe représentative de f correspondant aux valeurs du tableau et déduis-en le tracé de la courbe.

14 On considère la fonction f définie par : $f(x) = -0{,}5x^2$.
Complète le tableau de valeurs puis trace la représentation graphique de f.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2}$.
Complète le tableau de valeurs puis trace la représentation graphique de f.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

16 Parmi les expressions suivantes, identifie la fonction inverse.

$f(x) = \frac{x}{2}$; $g(x) = \frac{1}{x}$; $h(x) = \frac{2x+1}{x} - 2$;
$k(x) = \frac{x+1}{x} - 2$.

17 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$.
1. Complète le tableau de valeurs suivant :

x	0,1	0,2	0,5	1	2	4	5
$f(x)$	10						

2. a) Justifie que le point de coordonnées (0,1 ; 10) appartient à la courbe représentative de f.

b) Dans un repère, place les points de la courbe représentative de f correspondant aux valeurs du tableau et déduis-en le tracé de la courbe sur l'intervalle [0,1 ; 5].

18 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2}{x}$.
1. Complète le tableau de valeurs puis trace la représentation graphique de f sur l'intervalle [0,1 ; 5].

x	0,1	0,2	0,4	0,5	0,8	1	2	4	5
$f(x)$									

2. a) Construis les symétriques des points de la question précédente par rapport à l'origine du repère.

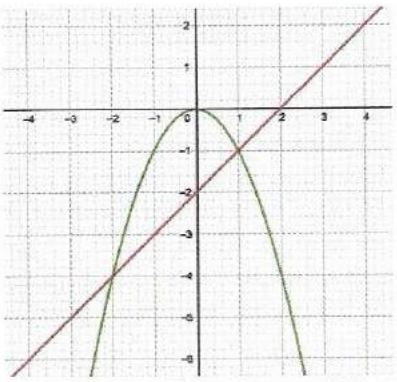
b) Déduis-en le tracé de la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-5 ; -0,1]$.

19 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-3}{2x}$.
1. Dresse le tableau de variation de f.
2. Complète le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$f(x)$									

3. Représente graphiquement la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

20



On a tracé dans un repère orthonormé (O, I, J) les courbes représentatives des deux fonctions :
• f définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = -x^2$
• g définie pour tout nombre réel x par : $g(x) = x - 2$
En utilisant les courbes représentatives de f et de g, résous l'équation : $x^2 + x - 2 = 0$.

21 On considère les fonctions f et g définies par :
$f(x) = |x|$ et $g(x) = 4$.
1. Représente graphiquement les courbes des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J)
2. En utilisant les représentations graphiques des courbes de f et de g, résous l'équation : $|x| = 4$.

22 On considère les fonctions f et g définies par :
$f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 8$.
1. Représente graphiquement les courbes des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J)
2. En utilisant les représentations graphiques des courbes de f et de g, résous l'équation $x^2 - 2x + 8 = 0$.

23 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto |x - 3|$

24 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto |2 - 5x|$

25 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto \left|1 - \frac{x}{2}\right|$

26 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2E(x)$

27 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{E(x)}{4}$

Exercices d'approfondissement

28 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ pour } x \leq 2 \\ -2x + 5 \text{ pour } 2 < x \leq 3 \\ x - 3 \text{ pour } x > 3 \end{cases}$$

Représente la courbe de f dans un repère orthonormé.

29 Dans un repère, trace la représentation graphique de la fonction g donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} -x - 6 \text{ pour } x \leq -1 \\ 2x - 3 \text{ pour } -1 \leq x \leq 2 \\ x - 1 \text{ pour } x \geq 2 \end{cases}$$

30 Soit à résoudre l'équation : $x^2 - |x - 2| = 0$.
1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = |x-2|$.
2. Résous graphiquement l'équation : $x^2 - |x-2| = 0$.

31 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto E(x + 2)$

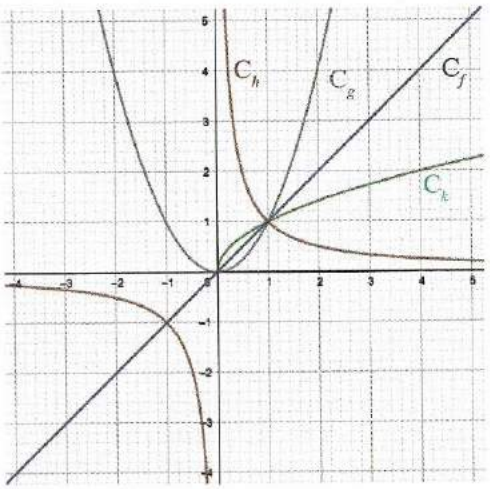
32 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto E(x) + 2$

33 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la courbe de la fonction suivante.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto E(2x)$

34 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |3x - 1| + 2$

35 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement la fonction suivante.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x - 1| + |2x|$

36 On a tracé dans un repère orthonormé (O, I, J) les courbes représentatives des quatre fonctions :
f définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = x$,
g définie pour tout nombre réel x par : $g(x) = x^2$,
h définie pour tout nombre réel x par : $h(x) = \dfrac{1}{x}$,
k définie pour tout nombre réel x par : $k(x) = \sqrt{x}$.



Réponds aux questions suivantes en utilisant les représentations graphiques données

1. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes. Justifie tes réponses.

a) x étant un nombre réel, si $x > 2$, alors $x^2 > 4$.
b) x étant un nombre réel, si $x^2 > 4$, alors $x > 2$.
c) x étant un nombre réel, si $0 < x < 1$, alors $\sqrt{x} < \dfrac{1}{x}$.
d) x étant un nombre réel, si $x < -1$, alors $x < \dfrac{1}{x}$.
e) x étant un nombre réel, si $-1 < x < 2$, alors $\sqrt{x} < \dfrac{1}{x}$.
f) x étant un nombre réel, si $0 < x < \dfrac{1}{2}$, alors $\sqrt{x} < \dfrac{1}{x}$.

2. a) Détermine l'ensemble des nombres réels x dont l'inverse est strictement inférieur au carré.

b) Détermine l'ensemble des nombres réels x inférieurs ou égaux à leurs carrés.

c) Lorsque x est un nombre strictement supérieur à 1, range dans l'ordre croissant : le nombre réel x, son inverse, son carré et sa racine carrée.

d) Lorsque x est un nombre réel tel que $0 < x < 1$, range dans l'ordre croissant : le nombre réel x, son inverse, son carré et sa racine carrée.

Situations d'évaluation

37 L'alcoolémie est le taux d'alcool dans le sang en grammes par litre.

Il varie en fonction du sexe, de l'âge, du poids, de la taille, de l'état général, de l'absorption au cours d'un repas ou non, du degré alcoolique de la boisson, de la quantité absorbée, du temps écoulé depuis la prise. Les conséquences sont les accidents de la circulation, le manque de maîtrise,...

Dans un pays, à partir de 0,2 g/L, il est interdit de conduire des véhicules transportant des passagers. À partir de 0,5 g/L, il est interdit de conduire.

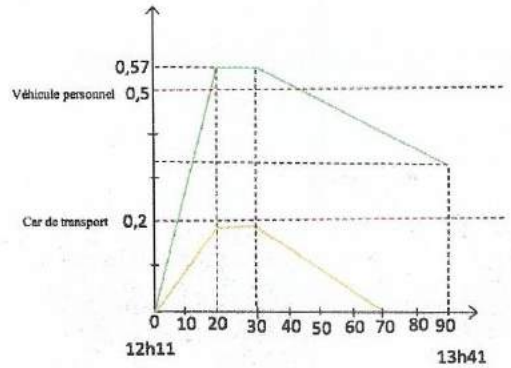
La courbe en orange suivante représente le taux d'alcool en fonction du temps (en minutes) d'un homme de 30 ans, 65 kg et 1,70 m, qui boit à 12 h, sans manger, un whisky de 3 cl à 40°.

La courbe en vert suivante représente le taux d'alcool d'un homme de 30 ans, 65 kg et 1,70 m, qui boit à 12 h, sans manger, un whisky de 6 cl à 40°.

- Choisir un homme de 30 ans, 65 kg et 1,70 m, qui boit à 12 h, sans manger, un whisky de 3 cl à 40°.
- Afficher la courbe du taux d'alcool en fonction du temps.
- Modifier la quantité de whisky (en cliquant sur le verre en bas à gauche) : 6 cl, afficher la courbe.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	Antécédent
Taux situation 1							Image par f
Taux situation 2							Image par f

- Pour comparer les taux, on note $f(t)$ (on lit « f de t ») le taux d'alcool à l'instant t écoulé depuis l'absorption dans la première situation. Comment notera-t-on le taux au même instant dans la 2ème situation ? Dans la 3ème situation ?
- Complète : $f(0,5) = \ldots$; $g(0,5) = \ldots$; $h(0,5) = \ldots$
- Que signifient $f(1) = 0,16$; $f(1,5) = 0,09$; $g(1,5) = 0,28$?
- $f(t) = -0,15t + 0,31$.



38* En ayant recours à un procédé de distillation, une compagnie produit de l'huile de rose qu'elle vend en bouteille de 5 ml. Il faut 0,8 kg de pétales de rose pour fabriquer 1 mL d'huile essentielle.



Les gestionnaires de la compagnie aimeraient connaître le nombre de bouteilles pouvant être produites selon la quantité de pétales de rose disponibles. Aide les gestionnaires à représenter graphiquement cette fonction et donne son équation.

39 Lors d'une visite dans une mine, les élèves d'une classe de 2nde C ont eu les informations suivantes.



« La mine produit x kg d'un minerai par jour, $x \in [0 ; 100]$ (x varie selon les jours).

Le coût total, en milliers de francs, d'extraction de ces x kg est donné par : $C(x) = x^3$.

Chaque kg est vendu 81 000 francs, soit pour x kg vendus, une recette de $R(x) = 81\,0000x$ francs.

Le bénéfice associé à la fabrication et à la vente de x kg est donné par : $B(x) = R(x) - C(x)$.»

Une des élèves affirme que la mine dégage toujours des bénéfices quelle que soit la quantité fabriquée et vendue.

1. Justifie que : $B(x) = x(90 - x)(90 + x)$.
2. Justifie si l'affirmation de cette élève est vraie ou fausse.

Coup de Pouce

38 Justifier que c'est une fonction affine qui donne le nombre de bouteilles selon la qualité de pétales.

Leçon 7

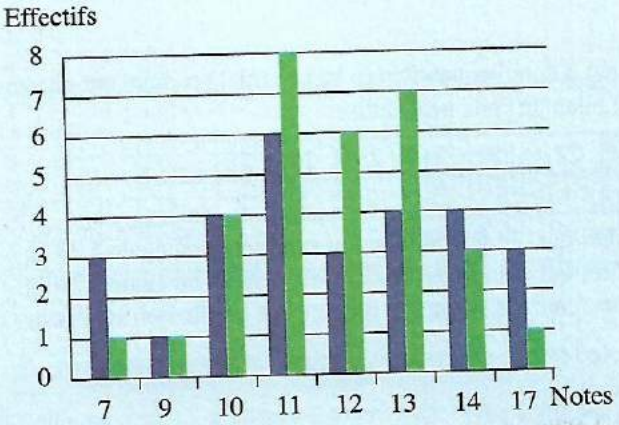
STATISTIQUE



Avec la population mondiale sans cesse croissante, comment faire des prévisions pour faire face aux défis d'alimentation, de santé, d'éducation, de logement, ...?

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant leur heure de pause, des élèves d'une classe de 2nde C ont vu ce qui suit dans une revue à la bibliothèque.
« Deux nouveaux bacheliers ont présenté leur dossier pour entrer dans une école d'ingénieur.
Voici, ci-dessous, le diagramme en bâtons de leurs notes en sciences pendant l'année scolaire.
Pour être admis, il faut avoir une bonne moyenne et des résultats réguliers. »



Ayant amené cette revue en classe, ces élèves font des calculs et des représentations graphiques pour savoir quel est l'élève le plus régulier.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Effectif cumulé décroissant - Fréquence cumulée décroissante

Identifier :
- un effectif cumulé décroissant
- une fréquence cumulée décroissante

Dresser :
- un tableau des effectifs cumulés décroissants
- un tableau des fréquences cumulées décroissantes

2 Courbe cumulative des effectifs - Courbe cumulative des fréquences

Construire :
- un polygone des effectifs cumulés décroissants
- un polygone des fréquences cumulées décroissantes

3 Paramètres de position

Identifier :
- la médiane d'une série statistique à caractère continu (classes de même amplitude)
- un paramètre de position

Déterminer : la médiane d'une série statistique par lecture graphique

Calculer : la médiane d'une série statistique à caractère continu (classes de même amplitude)

Interpréter : les différents paramètres de position

4 Paramètres de dispersion

Connaître :
- la formule de l'écart moyen
- la formule de la variance
- la formule de l'écart type
- un paramètre de dispersion

Calculer :
- l'écart moyen
- la variance
- l'écart type

Interpréter : les différents paramètres de dispersion

5 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel à la statistique

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Effectif cumulé décroissant - Fréquence cumulée décroissante

1.1. Définitions

Pendant une année, un apiculteur a noté la quantité (en kg) de miel produite par chacune de ses ruches.
Le tableau ci-dessus résume le bilan de cette production.

Production de miel (en kg)	22	23	24	25	26	28	30
Nombre de ruches	4	5	3	2	3	1	4

1. Détermine le nombre de ruches qui ont une production supérieure ou égale à 23 kg.
2. Détermine le nombre de ruches qui ont une production supérieure ou égale à 25 kg.
3. Détermine la fréquence en pourcentage de ruches qui ont une production supérieure ou égale à 25 kg.

Synthèse

Le nombre de ruches qui ont une production supérieure ou égale à 23 kg s'appelle l'effectif cumulé décroissant de la modalité 23.
La fréquence de ruches qui ont une production supérieure ou égale à 25 kg s'appelle la fréquence cumulée décroissante de la modalité 25.

Exercices de fixation

1-1-1 Une enquête réalisée dans un quartier porte sur le nombre d'enfants à charge par famille.
Les résultats sont donnés par le tableau suivant :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de familles	18	32	66	41	32	9	2

1. Détermine l'effectif cumulé décroissant de 3.
2. Détermine l'effectif cumulé décroissant de 6.

1-1-2 On considère la série statistique suivante :

Modalités	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;10[	[10;12[
Effectifs	3	7	5	6	4

1. Détermine l'effectif cumulé décroissant de la classe [6 ; 10[.
2. Détermine l'effectif cumulé décroissant de la classe [0 ; 2[.

1-1-3 1. En reprenant les données de l'exercice 1, calcule la fréquence cumulée décroissante de 4 et celle de 6.
2. En reprenant les données de l'exercice 2, calcule la fréquence cumulée décroissante de la classe [4 ; 6[et celle de [0 ; 2[.

1.2. Tableau des effectifs cumulés décroissants - Tableau des fréquences cumulées décroissantes

Le tableau suivant donne les tailles des élèves des classes de 2nde C d'un lycée.

Tailles (en cm)	155	160	162	165	168	170
Effectifs	18	9	9	27	18	9

1. Complète le tableau suivant en remplissant la dernière ligne.

Tailles (en cm)	155	160	162	165	168	170
Effectifs	18	9	9	27	18	9
Effectifs cumulés décroissants						

2. Complète le tableau suivant en remplissant la dernière ligne.

Tailles (en cm)	155	160	162	165	168	170
Fréquences	0,2	0,1	0,1	0,3	0,2	0,1
Fréquences cumulées décroissantes						

Synthèse

Le tableau obtenu après emplissage à la question 1) s'appelle le tableau des effectifs cumulés décroissants de la série statistique.
Le tableau obtenu après emplissage à la question 2) s'appelle le tableau des fréquences cumulées décroissantes de la série statistique.

Exercices de fixation

1-2-1 Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de la série statistique suivante :

Modalités	− 15	− 7	0	3	8	13
Effectifs	10	15	29	18	9	7

1-2-2 Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de la série statistique suivante :

Modalités	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[
Effectifs	3	7	5	6

1-2-3 Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes de la série statistique suivante :

Modalités	[0,5 ; 1[	[1 ; 1,5[	[1,5 ; 2[	[2 ; 2,5[	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[
Effectifs	7	21	11	45	39	50	13

Activités 2 Diagrammes cumulatifs - Polygones cumulatifs

2.1. Diagramme des effectifs cumulés décroissants - Polygone des effectifs cumulés décroissants

1. On donne le tableau des effectifs cumulés décroissants suivant :

Masses (en kg)	20	25	30	35	40	45	50
Effectifs	4	7	5	6	3	2	3
Effectifs cumulés décroissants	30	26	19	14	8	5	3

Le plan est muni d'un repère orthogonal. (On prendra 1 cm pour 2 kg sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 4 élèves sur l'axe des ordonnées).

a) Place chacun des points ayant pour abscisse chaque note et pour ordonnée l'effectif cumulé décroissant correspondant.

b) Trace le segment $[A_0, B_0[$, B_0 exclu, avec A_0 (15 ; 30) et B_0 (20 ; 30).
Trace le segment $[A_1, B_1[$, B_1 exclu, avec A_1 (20 ; 26) et B_1 (25 ; 26). Ainsi de suite. Enfin :
Trace le segment $[A_6, B_6[$, B_6 exclu, avec A_6 (45 ; 3) et B_6 (50 ; 3).
Trace le segment $[A_7, B_7[$, B_7 exclu, avec A_7 (50 ; 0) et B_6 (55 ; 0).

2. Le tableau suivant donne les poids en kilogrammes des 40 élèves d'une classe de seconde :

Poids	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65[	[65 ; 70]
Effectifs	4	7	8	12	9
Effectifs cumulés décroissants	40	36	29	21	9

Le plan muni d'un repère orthogonal. (On prendra 1 cm pour 5 kg sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 4 élèves sur l'axe des ordonnées).

a) Place chacun des points ayant pour abscisse la borne inférieure chaque classe et pour ordonnée l'effectif cumulé décroissant de la classe correspondante.

b) Place le point d'abscisse 70 et d'ordonnée 0.

c) Trace les segments qui relient chaque point au suivant.

Synthèse

Les figures obtenues dans chacune des questions s'appellent le diagramme des effectifs cumulés décroissants de la série statistique pour la première figure et polygone des effectifs cumulés décroissant pour la seconde.

Exercices de fixation

2-1-1 Construis le diagramme des effectifs cumulés décroissants de la série suivante :

Modalités	10	12,5	13	15,5	20	23,5
Effectifs	8	15	20	18	7	2

2-1-2 Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants de la série suivante :

Modalités	[0;4[	[4;8[	[8;12[	[12;16[	[16;20]
Effectifs	10	15	23	37	40

2-1-3 Construis, sur le même graphique, le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants de la série suivante :

Modalités	[0 ; 1[	[1; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[
Effectifs	3	8	11	17	13	7	9	12

2.2. Diagramme des fréquences cumulées décroissantes - Polygone des fréquences cumulées décroissantes

Reprends les deux activités du 2.1, en utilisant les fréquences à la place des effectifs.

ynthèse

Les figures obtenues dans chacune des questions s'appellent le diagramme des fréquences cumulées décroissantes de la série statistique pour la première et le polygone des fréquences cumulés décroissantes pour la seconde.

xercices de fixation

2-1 Construis le diagramme des fréquences cumulées décroissantes de la série de l'exercice 2.1.1.

2-2 Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes de la série de l'exercice 2.1.2.

2-2-3 Construis, sur le même graphique, le polygone des fréquences cumulées croissantes et le polygone des fréquences cumulées décroissantes de la série l'exercice 2.1.3.

ctivité 3 Paramètre de position (médiane)

e tableau suivant donne le nombre d'années passées dans un quartier par 60 familles.

ncienneté	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30]
ffectif	4	14	20	12	4	6

Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
On muni le plan d'un repère orthogonal.
a) Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.
b) Détermine l'abscisse du point de ce polygone dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total.
On suppose que la répartition est homogène à l'intérieur de chaque intervalle.
n note M_e la médiane.
oit A(10 ; 18) et B(15 ; 38) les extrémités du segment contenant le point P(M_e ; 30).
ace les points A, B et P sur la figure de la question précédente.
étermine M_e en utilisant le fait que les droites (AB) et (AP) ont le même coefficient directeur.

ynthèse

Détermination graphique :
La médiane est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés croissant ayant pour ordonnée la moitié de l'effectif total.

Détermination algébrique :
Avec les notations de la question 3), la médiane est le nombre Me tel que : $\frac{Me-10}{15-10}=\frac{30-18}{38-18}$.

xercices de fixation

1 Détermine la médiane de la série statistique suivante :

Classes	Effectifs
[0 ; 50 000[	30
[50 000 ; 75 000[	45
[75 000 ; 100 000[	110
[100 000 ; 125 000[	250
[125 000 ; 150 000[	150
[150 000 ; 175 000[	60
[175 000 ; 200 000[	35
[200 000 ; 250 000[	20

2 Détermine graphiquement la médiane de la série statistique suivante :

Modalités	]0;5[	[5;10[	[10;20[	[20;30[	[30;50[
Effectifs	10	20	30	25	15

3-3 Détermine la médiane de la série statistique suivante :

Âges	Fréquences
[6 ; 10[	0,092
[10 ; 14[	0,085
[14 ; 18[	0,11
[18 ; 22[	0,102
[22 ; 26[	0,176
[26 ; 30[	0,225
[30 ; 34[	0,107
[34 ; 38[	0,103

Activités 4 Paramètres de dispersion

4.1. Écart moyen

Le tableau ci-contre donne la répartition des 42 élèves d'une classe de seconde selon leurs âges.

Âges (x)	14	15	16	17	18
Nombre d'élèves	5	10	15	8	4

1. Calcule la moyenne $\overline{x}$ de cette série statistique.

2. Complète le tableau ci-contre :

3. On note N l'effectif total et S le total obtenu pour la dernière ligne du tableau précédent.
Calcule le quotient $\frac{S}{N}$.

x	14	15	16	17	18	Total
Effectifs (n)	5	10	15	8	4	
$\lvert x - \overline{x} \rvert$						
$n \times \lvert x - \overline{x} \rvert$						

Synthèse

Le nombre obtenu à la dernière question s'appelle l'écart moyen de la série statistique.

Exercices de fixation

4-1-1 Le tableau suivant donne la taille en centimètre d'un groupe d'enseignant. Calcule l'écart moyen de la sériestatistique suivante :

Tailles (en cm)	160	165	170	175	180
Effectifs	4	10	6	3	2

4-1-2 Calcule l'écart moyen de la série statistique suivante :

Âges	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75]
Fréquences	2,6	19	21,6	35,8	18,4	2,6

4.2. Variance et écart type

On reprend la série statistique de l'activité 4.1.

1. Complète le tableau ci-contre :

2. On note N l'effectif total et S le total obtenu pour la dernière ligne.
Calcule le quotient $\frac{S}{N}$.

3. Calcule la racine carrée du résultat du calcul précédent.

x	14	15	16	17	18	Total
Effectifs (n)	5	10	15	8	4	
$x - \overline{x}$						
$(x - \overline{x})$						
$n \times (x - \overline{x})^2$						

Synthèse

Le nombre obtenu à la question 2, s'appelle la variance de la série statistique.
La racine carrée de la variance s'appelle l'écart type de la série statistique.

Exercices de fixation

4-2-1 Huit élèves ont obtenu les moyennes suivantes en Mathématiques au cours du 1er trimestre de l'année scolaire : 8 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10 ; 11 ; 12 ; 12.
Calcule la variance et l'écart type de la série statistique ainsi définie.

4-2-2 Calcule la variance et l'écart type de la série statistique suivante :

Tailles (en cm)	160	165	170	175	180
Effectifs	4	10	6	3	2

4-2-3 Calcule la variance et l'écart type de la série statistique suivante :

Classes	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75]
Fréquences (en %)	2,6	19	21,6	35,8	18,4	2,6

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

ercice 1 Déterminer la médiane d'une série statistique à caractère continu

n a effectué une étude sur la durée des communications au standard téléphonique d'une grande entreprise.
es durées données en seconde sont regroupées en classes de même amplitude.

urées	[30 ; 50[	[50 ; 70[	[70 ; 90[	[90 ; 110[	[110 ; 130[	[130 ; 150[	[150 ; 170[
ffectifs	5	10	20	55	25	15	5

Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série.
Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants en prenant 1cm pour 10 secondes et 1 cm pour 10 mmunications.
Détermine graphiquement la médiane.
Détermine, par interpolation linéaire, la valeur arrondie aux dixièmes de la médiane.

igé

Tableau des effectifs cumulés décroissants

urées	[30;50[	[50;70[	[70;90[	[90;110[	[110;130[
ffectifs	5	10	20	55	25
CD(*)	135	130	120	100	45

[130;150[	[150;170[
15	5
20	5

: Effectif cumulé décroissant

Polygone des effectifs cumulés décroissants.
oir figure ci-dessous)
Détermination graphique de la médiane.
médiane est l'abscisse du point du polygone des ectifs cumulés décroissants dont l'ordonnée est : 5 ÷ 2, c'est-à-dire 67,5.
après la figure, la médiane est 102.

Méthode

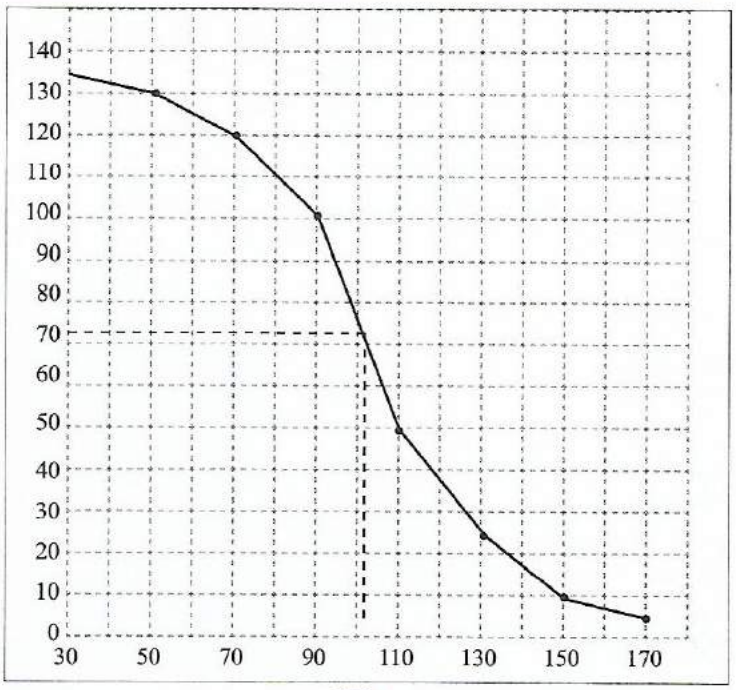
- Déterminer la moitié de l'effectif total noté N_1.
- Identifier l'intervalle auquel appartient N_1.
- Utiliser une disposition pratique comme suit :

90	Me	110
100	N_1	45

$$\frac{Me-90}{N_1-100}=\frac{110-90}{45-100}$$

On calcule Me.

4. Détermination de la médiane par interpolation linéaire.
L'effectif total est 135 et 135 ÷ 2 = 67,5. Par conséquent la médiane est dans l'intervalle [90 ; 110[.
C'est le nombre M_e tel que :
$\frac{M_e-90}{110-90}=\frac{67,5-100}{45-100}$, soit $\frac{M_e-90}{20}=\frac{32,5}{55}$.
Par suite, $M_e = 90 + 20 \times \frac{32,5}{55} \approx 101,81$.



APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 2 Déterminer des paramètres de position et des paramètres de dispersion

Des bergers présentent leurs plus beaux moutons à un concours, au cours duquel les animaux reçoivent une note sur 20. Le tableau suivant présente les notes obtenues :

Notes	0	5	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectifs	6	8	50	56	70	74	72	62	10	4	2

1. Détermine le mode, la médiane et la moyenne de cette série statistique.
Interprète chacun des résultats précédents.
2. Détermine l'étendue, l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique.
Interprète l'étendue et l'écart moyen.
3. Pour le second tour du concours, on décide de ne retenir que les moutons qui ont une note supérieure ou égale à 8 et on regroupe les notes en classes d'amplitude 2, sauf la dernière qui sera d'amplitude 4.
a) Recopie et complète le tableau suivant.

Notes	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 20]
Centres des classes					
Effectifs					
Fréquences					
Fréquences cumulées croissantes					
Fréquences cumulées décroissantes					

b) Détermine la médiane et la moyenne de cette série statistique.
c) Détermine l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique

Corrigé

1. ▪ Le mode est 12 (car 12 a le plus grand effectif)
▪ La médiane

Durées	0	5	9	10	11	12	13	14	15
Effectifs	6	8	50	56	70	74	72	62	10
ECC	6	14	64	120	190	264	336	398	408

16	18
4	2
412	414

L'effectif total est 414 et $414 \div 2 = 207$. Par conséquent la médiane est la demi-somme de la 207ème valeur et de la 208ème valeur qui sont toutes deux égales à 12.
La médiane est donc 12.

▪ La moyenne : $\frac{1}{414}(6 \times 0 + 8 \times 5 + 50 \times 9 + 56 \times 10 + 70 \times 11 + 74 \times 12 + 72 \times 13 + 62 \times 14 + 10 \times 15 + 4 \times 16 + 2 \times 18. \approx 11,5$

Interprétations :
- Le mode est 12 : cela veut dire que la note la plus fréquente attribuée est 12 sur 20.
- La médiane est 12 : cela veut dire qu'au moins 50% des notes est inférieur ou égal à 12 sur 20 et qu'au moins 50 % des notes est supérieur ou égal à 12 sur 20.

Méthode

- Pour déterminer la médiane, on prend la moitié de l'effectif total et chercher la modalité correspondante à cet effet.
- Pour les autres paramètres, utiliser les formules relatives à chaque paramètre.

- La moyenne est 11,5 : cela veut dire que chaque mouton aurait eu la note de 11,5 sur 20 si tous les moutons avaient les mêmes caractéristiques.

2. ▪ L'étendue est : $18 - 0 = 18$.
▪ L'écart moyen est :
$\frac{1}{414}(6 \times |0 - 11,5| + 8 \times |5 - 11,5| + 50 \times |9 - 11,5| + 56 \times |10 - 11,5| + 70 \times |11 - 11,5| + 74 \times |12 - 11,5| + 72 \times |13 - 11,5| + 62 \times |14 - 11,5| + 10 \times |15 - 11,5| + 4 \times |16 - 11,5| + 2 \times |18 - 11,5|) = \frac{731}{414} \approx 1,7657$
▪ La variance est :
$V = \frac{1}{414}(6 \times 0^2 + 8 \times 5^2 + 50 \times 9^2 + 56 \times 10^2 + 70 \times 11^2 + 74 \times 12^2 + 72 \times 13^2 + 62 \times 14^2 + 10 \times 15^2 + 4 \times 16^2 + 2 \times 18^2) - 11,5^2 = \frac{57218}{414} - 132,25$
$V \approx 5,9577$.
▪ L'écart type est : $\sigma = \sqrt{V} \approx 2,44$.

Interprétations :
- L'écart moyen est 1,77 : cela veut dire que les notes s'écartent en moyenne de 1,17 de la moyenne qui est de 11,5.
- L'étendue est 18 : cela veut dire que l'écart maximum entre deux notes est de 18.

3. a)

Notes	[8 ;10[	[10;12[	[12;14[	[14;16[	[16;20]
Centres des classes	9	11	13	15	18
Effectifs	50	126	146	72	6
Fréquences	0,125	0,315	0,365	0,180	0,015
Fréquences cumulées croissantes	0,125	0,44	0,805	0,985	1
Fréquences cumulées décroissantes	1	0,875	0,56	0,195	0,015

b) ▪ La médiane est la valeur qui a pour fréquence cumulée croissante 0,5.
Par conséquent la médiane est dans l'intervalle [12 ; 14[. C'est le nombre M_e tel que :
$\frac{M_e-12}{14-12}=\frac{0,5-0,44}{0,809-0,44}$, soit $\frac{M_e-12}{2}=\frac{0,06}{0,365}$. Par suite, $Me = 12+2\times\frac{60}{365}\approx 12,33$.

▪ La moyen.. de cette série statistique est :
$0,125\times 9+0,315\times 11+0,365\times 13+0,18\times 15+0,015\times 18=12,305$.

c) ▪ L'écart moyen est : $0,125\times|9-12,305|+0,315\times|11-12,305|+0,365\times|13-12,305|+0,18\times|15-12,305|+0,015\times|18-12,305|=1,6484$.

▪ La variance est :
$V=0,125\times 9^2+0,315\times 11^2+0,365\times 13^2+0,18\times 15^2+0,015\times 18^2-12,305^2=3,871975$.

▪ L'écart type est : $\sigma=\sqrt{V}\approx 1,96$.

Remarque : On perd de l'information (précision) dans le regroupement en classe.

Exercice 3 Comparer deux séries statistiques

Le tableau suivant résume des paramètres statistiques relatifs à deux séries de notes de deux élèves aux mêmes compositions de mathématiques.

	Moyennes	Écarts moyens	Écart-types
Élève A	11,82	2,10	2,67
Élève B	11,82	1,37	1,8

Détermine l'élève le plus régulier à ces compositions. Justifie ta réponse.

Corrigé

Les moyennes des deux séries sont égales. On ne peut pas conclure à ce niveau. Utilisons l'écart moyen ou l'écart type pour comparer les dispersions des deux séries statistiques.
L'écart moyen de la série B est faible par rapport à celui de la série A.
La série B est donc plus régulière que la série A.
L'écart-type de la série B est plus faible que celui de la série A. On a les mêmes conclusions.

Remarque : Sans l'égalité des moyennes, l'écart type ne peut être utilisé pour répondre à cette consigne.

Méthode

Étant donné plusieurs séries statistiques, pour savoir celle qui est la plus régulière ou homogène, on compare leurs paramètres de dispersion. Plus les paramètres de dispersion sont petits, plus la série est régulière.

Dans toute cette leçon :
- les séries statistiques considérées sont des séries statistiques à caractère quantitatif, sauf indication contraire ;
- $x_1, x_2, \ldots, x_p$ désignent les valeurs de la série statistique considérée ou les centres des classes si ces valeurs sont regroupées en classes ;
- $n_1, n_2, \ldots, n_p$ désignent les effectifs respectifs de ces modalités et $N = n_1 + n_2, + \ldots + n_p$ l'effectif total ;
- $f_1, f_2, \ldots, f_p$ désignent les fréquences respectives de ces modalités.

1 Effectif cumulé décroissant - Fréquence cumulée décroissante

Définitions
- L'effectif cumulé décroissant (resp. croissant) d'une modalité x est la somme des effectifs de toutes les modalités supérieures (resp. inférieures) ou égales à x.
- La fréquence cumulée décroissante (resp. croissante) d'une modalité x est la somme des fréquences de toutes les modalités supérieures (resp. inférieures) ou égales à x.

Remarque

La fréquence cumulée décroissante (resp. croissante) d'une modalité est égale au quotient de son effectif cumulé décroissant (resp. croissant) par l'effectif total.

2 Diagrammes cumulatifs - Polygones cumulatifs

2.1. Cas d'un caractère discret : diagramme cumulatif

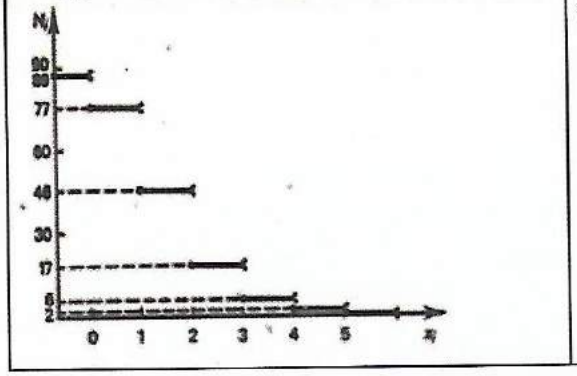
Méthode

Pour tracer le diagramme des effectifs cumulés décroissants d'une série statistique à variable discrète, on peut procéder comme suit :
- dresser le tableau des effectifs cumulés décroissants ;
- placer dans un repère chacun des points dont l'abscisse est la modalité et l'ordonnée l'effectif cumulé décroissant qui lui correspond ;
- tracer les segments horizontaux qui partent de chaque point jusqu'au niveau du point suivant.

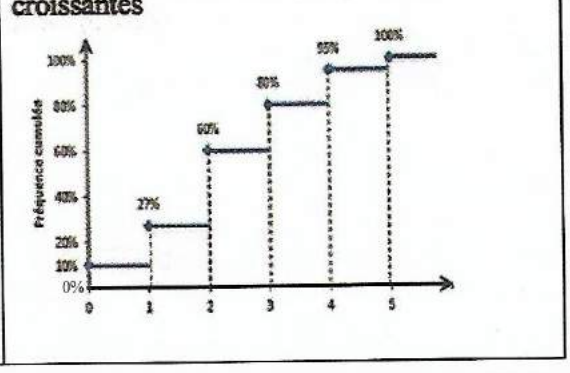
Le polygone des effectifs cumulés ou fréquences cumulées présente des sauts et a l'allure de marche en escalier.

Exemple :

Polygone des effectifs cumulés décroissants



Polygone des fréquences cumulées croissantes



2.2. Cas d'un caractère continu : polygone cumulatif

Méthode

Pour tracer le polygone des effectifs cumulés décroissants d'une série organisée en classes, on peut procéder comme suit :
- compléter le tableau des effectifs en calculant les effectifs cumulés croissants ;
- placer dans un repère chacun des points dont l'abscisse est la valeur inférieure de la classe et l'ordonnée l'effectif cumulé décroissant qui lui correspond ;
- placer le point d'ordonnée 0 et d'abscisse la valeur supérieure de la dernière classe ;
- tracer les segments qui relient chaque point au suivant.

3 Paramètres de position

Les paramètres de position d'une série statistique sont les paramètres qui précisent vers quelles valeurs se situe la série. Ils caractérisent l'ordre de grandeur des observations.
Les principaux paramètres de position sont : le mode, la moyenne et la médiane.

Rappels

Mode

Définition On appelle mode d'une série statistique toute modalité qui a le plus grand effectif. Lorsque la série statistique est à caractère continu, on parle de classe modale.

Remarques
- Le mode s'applique à tout type de caractère, qu'il soit quantitatif ou qualitatif.
- Un caractère peut avoir plusieurs modes. Il est alors multimodal.

Moyenne

Définition La moyenne de la série statistique, notée $\overline{x}$, est donnée par :
$\overline{x} = \frac{1}{N}(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p)$.

Remarques
- Dans le cas où la série est définie par sa distribution de fréquence, on a : $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_p$.
- Si les modalités sont des intervalles, alors les x_k sont les centres des classes.
- La moyenne est donnée dans la même unité que les valeurs observées.

Médiane

Définition On appelle médiane d'une série dont les valeurs sont rangées par ordre croissant tout nombre qui partage cette série ordonnée en deux groupes de même effectif.

Remarque : Le mode, la moyenne et la médiane s'expriment dans la même unité que les valeurs observées.

Vocabulaire

Lorsque la série statistique étudiée est à caractère continu, la classe à laquelle appartient la médiane s'appelle « la classe médiane ».

Détermination

Cas d'une série statistique à variable discrète

- Dans le cas d'une série statistique ordonnée comptant un nombre impair de valeurs, la médiane est égale à la valeur centrale de cette série.
- Dans le cas d'une série statistique ordonnée comptant un nombre pair de valeurs, la médiane est égale à la moyenne des deux valeurs centrales de cette série ou toute autre valeur comprise entre ces deux valeurs "centrales".

Cas d'une série statistique à variable continue

- **Détermination graphique :**

La médiane est l'abscisse du point :

- du polygone des effectifs cumulés croissants dont l'ordonnée est $\frac{N}{2}$;
- du polygone des effectifs cumulés décroissants dont l'ordonnée est $\frac{N}{2}$;
- du polygone des fréquences cumulées croissantes dont l'ordonnée est 0,5 ;
- du polygone des fréquences cumulées décroissantes dont l'ordonnée est 0,5 ;
- d'intersection du polygone des effectifs cumulés croissants et du polygone des effectifs cumulés décroissants ;
- d'intersection du polygone des fréquences cumulées croissantes et du polygone des fréquences cumulées décroissantes.

- **Détermination algébrique (par interpolation linéaire) :**

Si $[a\ ;\ b[$ est la classe dont l'effectif cumulé croissant (resp. fréquence cumulée croissante) est $\frac{N}{2}$ (resp. 0,5), alors la médiane est le nombre M_e tel que : $\frac{d-c}{b-a} = \frac{\frac{N}{2}-c}{M_e-a}\left(\text{resp. } \frac{d-c}{b-a} = \frac{0,5-c}{M_e-a}\right)$

où d est l'effectif cumulé croissant (resp. fréquence cumulée croissante) de $[a\ ;\ b[$ et c celui (resp. celle) de l'intervalle qui précède $[a\ ;\ b[$.

Remarque

- $\frac{d-c}{b-a} = \frac{\frac{N}{2}-c}{M_e-a}$ équivaut a $\frac{M_e-a}{b-a} = \frac{\frac{N}{2}-c}{d-c}$ et $\frac{d-c}{b-a} = \frac{0,5-c}{M_e-a}$ équivaut a $\frac{M_e-a}{b-a} = \frac{0,5-c}{d-c}$.

On utilise souvent la disposition pratique ci-contre pour écrire : $\frac{M_e-a}{b-a} = \frac{\frac{N}{2}-c}{d-c}\left(\text{resp. } \frac{M_e-a}{b-a} = \frac{0,5-c}{d-c}\right)$.

a	M_e	b
c	$\frac{N}{2}$ (resp. 0,5)	d

- Déterminer ainsi la médiane, c'est la déterminer par interpolation linéaire.

4 Paramètres de dispersion

La dispersion statistique est la tendance qu'ont les valeurs de la distribution d'un caractère :

- à s'étaler de part et d'autre d'une valeur centrale, généralement la moyenne ;
- et/ou à s'éloigner les unes des autres.

Parmi les paramètres de dispersion figurent l'étendue, l'écart moyen, la variance et l'écart type.

Rappel

Étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur maximum et la valeur minimum du caractère étudié.

4.1. Écart moyen

L'écart moyen est le nombre réel : e_m : $\frac{1}{N}(n_1|x_1-\overline{x}|+n_2|x_2-\overline{x}|+...+n_p|x_p-\overline{x}|)$.

Interprétation

Ce paramètre nous indique que les observations se situent en moyenne, à e_m unités de $\overline{x}$.

Remarque

Dans le cas où la série est définie par sa distribution de fréquence, l'écart moyen est :
$f_1|x_1-\overline{x}|+f_2|x_2-\overline{x}|+...+f_p|x_p-\overline{x}|$.

4.2. Variance et écart type

4.2.1. Variance

La variance, notée V, est donnée par la formule :

$$V=\frac{1}{N}[n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+...+n_p(x_p-\overline{x})^2].$$

Vocabulaire

On dit que la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Propriété $V=\frac{1}{N}(n_1x_1^2+n_2x_2^2+...+n_px_p^2)-(\overline{x})^2$.

Remarque

- La propriété ci-dessus est appelée propriété de König-Huygens.
- Dans le cas où la série est définie par sa distribution de fréquence, on a :

$V=f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+...+f_p(x_p-\overline{x})^2$

ou $V=f_1x_1^2+f_2x_2^2+...+f_px_p^2-(\overline{x})^2$.

4.2.2. Écart type

L'écart-type, noté σ, est la racine carrée de la variance : $\sigma=\sqrt{V}$.

Remarques

- L'étendue, l'écart moyen et l'écart type s'expriment dans la même unité que les valeurs observées.
- La variance s'exprime dans l'unité au carré des valeurs observées.

Exercices de renforcement

1 Un établissement de transfusion sanguine a dressé le bilan de sa collecte de sang pendant un an.
Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Âge du donneur	[18;20[	[20;30[	[30;40[	[40;0[	[50;60]
Effectifs	200	700	1 200	1 600	1 300

Recopie et complète le tableau suivant :

Âge du donneur	[18;20[	[20;30[	[30;40[	[40;0[	[50;60]
Effectifs	200	700	1 200	1 600	1 300
Effectifs cumulés croissants					
Effectifs cumulés décroissants					
Fréquences					
Fréquences cumulées croissantes					
Fréquences cumulées décroissantes					

2 Dans un quartier, on a relevé le nombre de pièces par maison et on a obtenu les résultats suivants :

Nombre de pièces	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'appartements	48	72	96	64	39	25	3

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants.
2. Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.

3 Voici le tableau des effectifs des notes de Mathématiques des élèves des classes de troisième d'un collège lors du brevet.

Notes	[0;4[	[4;8[	[8;10[	[10;12[	[12;16[	[16;20]
Effectifs	8	22	30	45	80	15

1. Détermine la classe modale de cette série statistique.
2. Calcule la moyenne de Mathématiques de l'établissement lors de cet examen.
(On donnera le résultat au centième près).

3. a) Recopie et complète le tableau suivant :

Notes	[0;4[	[4;8[	[8;10[	[10;12[	[12;16[	[16;20]
Effectifs	8	22	30	45	80	15
Effectifs cumulés décroissants						
Fréq. cumulées décroissantes (en %)						

b) Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.
c) À l'aide de ce polygone, détermine l'antécédent de 50 % et interprète ce résultat.

4 On donne la série statistique suivante, correspondant à la répartition des entreprises du secteur automobile en fonction de leur chiffre d'affaires en millions de dollars.

Chiffres d'affaires	]0 ; 0,25[	[0,25 ; 0,5[	[0,5 ; 1[	[1 ; 2,5[	[2,5 ; 5[	[5 ; 10[
Effectifs	137	106	112	154	100	33

1. Calcule le chiffre d'affaires moyen et l'écart-type de la série statistique.
2. Construis les deux polygones des fréquences cumulées.
3. Détermine la médiane de la série statistique graphiquement et algébriquement.
4. Détermine la proportion d'entreprises dont le chiffre d'affaires est supérieur à 3 millions de dollars.

5 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les modalités d'une série statistique et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ les effectifs respectifs de ces modalités.
On note : $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$
Soit $\overline{x}$ la moyenne de cette série.
Relie chaque notion à la (ou aux) formule(s) qui lui correspond(ent).

- $\frac{1}{N}(n_1|x_1+\overline{x}|+n_2|x_2+\overline{x}|+...+n_p|x_p+\overline{x}|)$

Écart moyen •

- $\frac{1}{N}(n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+...+n_p(x_p-\overline{x})^2)$
- V^2, V étant la variance
- $\frac{1}{N}(n_1|x_1-\overline{x}|-n_2|x_2+\overline{x}|-...-n_p|x_p-\overline{x}|)$

Variance •

- $\frac{1}{N}(n_1(x_1+\overline{x})^2+n_2(x_2+\overline{x})^2+...+n_p(x_p+\overline{x})^2)$
- $\frac{1}{N}(n_1|x_1-\overline{x}|+n_2|x_2+\overline{x}|+...+n_p|x_p-\overline{x}|)$
- $\sqrt{V}$, V étant la variance
- $\frac{1}{N}(n_1x_1^2+n_2x_2^2+...+n_px_p^2)+(\overline{x})^2$

Écart-type •

- |V|, V étant la variance
- $\frac{1}{N}(n_1x_1^2+n_2x_2^2+...+n_px_p^2)-(\overline{x})^2$

6 Mets une croix dans la case qui convient.

	Moyenne	Étendue	Médiane	Écart moyen	Écart type	Mode
Paramètre de position						
Paramètre de dispersion						

7 On donne la distribution des notes obtenues lors d'un devoir de mathématiques dans une classe de 2nde C.

Note	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectif	2	1	3	5	4	2	3	4	3	4	1

14	16	18	20
2	2	1	1

1. Calcule la moyenne de cette série statistique.
2. Calcule la variance et l'écart type de cette série statistique.

8 Le tableau suivant donne la durée de gestation, en semaines, des 100 derniers nouveau-nés dans une maternité.

Durée (x) de gestation	38	38,5	39	39,5	40	40,5	41	41,5
Nombre de nouveau-nés	3	5	8	10	16	43	10	5

1. Calcule la durée moyenne de gestation de ces nouveau-nés.
2. Calcule la moyenne, l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique.

9 La distribution, en pourcentage, des 50 employés d'une entreprise selon leurs salaires annuels, en dizaine de milliers de francs CFA, est donnée par le tableau suivant :

Salaires annuels	]0;30[	[30;60[	[60;90[	[90;120[
Fréquences (en %)	20	28	36	16

1. Calcule le salaire médian. Interprète le résultat.
2. Calcule le salaire annuel moyen.
3. Calcule la variance et l'écart type de ces salaires.

10 Le tableau suivant donne les revenus annuels en millions de francs CFA d'un ensemble de familles d'une entreprise.

Revenus annuels	[18 ; 30[	[30 ; 36[	[36 ; 42[	[42 ; 54[
Effectifs	12	90	70	46

[54 ; 60[	[60 ; 66[
50	82

1. Détermine la médiane, la moyenne et l'étendue de cette série statistique.
Interprète chaque résultat trouvé.
2. Calcule la variance et l'écart-type, fréquences cumulées décroissantes, médiane graphiquement et algébriquement

11 D'un lot de poissons, on a mesuré la masse des adultes mâles :

Poids arrondi [kg]	0,5 – 0,6	0,7 – 0,8	0,9 – 1,0
Effectifs	4	17	32

1,1 – 1,2	1,3 – 1,4
33	14

1. Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes.
2. Détermine la classe modale et la médiane.
3. Calcule la moyenne, la variance et l'écart-type.

12 On lance 7 fois une pièce de monnaie. La fréquence d'apparition de « pile » est résumée comme suit :

Nombre de « pile »	0	1	2	3	4	5	6	7
Fréquences	$\frac{1}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{1}{128}$

1. Détermine le mode et la médiane de cette série statistique.
2. Calcule la moyenne, l'écart moyen,la variance et l'écart-type de cette série statistique.

13 D'un échantillon d'étudiants de sexe masculin, on a mesuré la masse de chacun. Les masses ont été arrondies à l'entier. Les données ont été groupées en 7 classes.

Masses (en kg)	45−54	55−59	60−64	65−69	70−74	75−79	80−84
Nombre d'étudiants	5	14	33	47	26	13	2

1. Détermine la classe modale, la médiane, la moyenne et l'étendue de cette série statistique. Interprète chaque résultat trouvé.
2. Calcule la variance et l'écart-type de cette série statistique.

14 On considère la série statistique suivante :

Classes	[15;25[	[25;35[	[35;45[	[45;55[	[55;65[	[65;75[
Fréquences (en %)	2,6	19	21,6	35,8	18,4	2,6

Pour chacune des questions suivantes, recopie le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		A	B	C
1	La classe modale est	[15 ; 25[	[45 ; 55[	[65 ; 75[
2	L'étendue est	60	45	90
3	La médiane est	46,9	30	70
4	La moyenne est	35	45	46
4	L'écart type est	− 5	11	45

Exercices d'approfondissement

15 Dans une ferme, à une date déterminée, on a pesé les œufs qui ont été produits (les masses des œufs sont exprimées en grammes) :

Masse de l'œuf	[28;37[	[37;48[	[48;52[	[52;57[	[57;62[	[62;72[	[72;82]
Effectifs	3	51	74	112	92	62	6

1. Construis l'histogramme des effectifs.
2. Détermine dans un même tableau, les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants.
3. Construis sur la même figure les deux polygones des effectifs cumulés.
4. Détermine la médiane graphiquement et par le calcul.
5. Calcule la moyenne, l'étendue, la variance et l'écart type.

16 Le tableau suivant donne les salaires, en milliers de francs CFA, des employés d'une PME.

Classes	[x;50[	[50;100[	[100;200[	[200;300]
Effectifs	30	40	20	10

1. Retrouve la borne inférieure de la première classe sachant que le salaire moyen est de 94 000 F CFA
2. Calcule la médiane la série statistique et donne l'interprétation du résultat.
3. Calcule la variance et l'écart type de ces salaires.

17 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les valeurs d'une série statistique (ou les centres des classes si ces valeurs sont regroupées en classes) et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ les effectifs respectifs de ces valeurs.
Soit $\overline{x}$ la moyenne de cette série.
Démontre que la variance V est donnée par la formule :

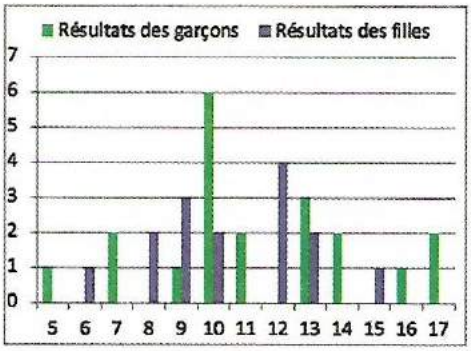
$$V = \frac{1}{N}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \ldots + n_px_p^2) - (\overline{x})^2.$$

18 On a mesuré la taille d'un groupe d'élèves en arrondissant les résultats à 5 cm :

Tailles arrondies (cm)	155	160	165	170	175
Nombre d'élèves	6	9	5	3	1

1. Calcule la moyenne, la médiane, l'étendue, l'écart moyen, la variance, et l'écart-type de cette série statistique.
2. On compare la distribution précédente avec celle d'un autre groupe dont la moyenne et l'écart-type sont respectivement 165 et 5,6.
Identifie le plus homogène. Justifie ta réponse.

19 Un professeur de physique communique à une classe de 2nde C les résultats d'un devoir en distribuant les deux diagrammes en bâtons ci-dessous.



1. Dresse le tableau des effectifs des notes des filles et celui des garçons.
2. Calcule la moyenne m_1 et l'écart type σ_1 des filles.
3. Calcule la moyenne m_2 et l'écart type σ_2 des garçons.
4. Calcule la moyenne m de la classe et l'écart type σ de l'ensemble des notes de classe.

20* Cette série statistique porte sur la taille (en mètre) d'un échantillon de population. Pour simplifier la lecture du tableau, on a effectué un regroupement en classes :

Tailles	[1,65;1,70[	[1,70;1,75[	[1,75;1,80[
Fréquences	0,107	0,253	0,393

[1,80;1,85[	[1,85;1,90[	[1,90;1,95]
0,167	0,047	0,033

1. Construis l'histogramme des fréquences.
2. Détermine dans un même tableau, les fréquences cumulées croissantes et les fréquences cumulées décroissantes.
3. Construis sur la même figure les deux polygones des fréquences cumulées.
4. Détermine la médiane graphiquement et par le calcul.
5. Calcule la moyenne, l'étendue, la variance et l'écart-type.

21* Les salaires annuels (en milliers de francs CFA) des employés d'une entreprise composée de deux filiales A et B sont repartis selon le tableau suivant :

Salaires compris entre	100 et 200	200 et 300
Nombre d'employés de la filiale A	5	10
Nombre d'employés de la filiale B	4	12

300 et 400	400 et 500
13	4
14	6

1. Calcule le salaire moyen de la filiale A et celui de la filiale B.
2. Calcule la variance et l'écart type des salaires de chacune des filiales A et B.
3. Compare la dispersion des salaires des deux filiales.

22* La distribution des salaires horaires, en francs CFA, des N employés d'une petite entreprise est donnée par le tableau suivant :

Classes	[500 ; 1000[	[1000 ; 1500[	[1500 ; 2 000[
Effectifs	10	14	16

[2 000 ; 2500[
n

Ces données sont incomplètes car, à la suite d'un incident, l'effectif de la dernière classe est illisible ; alors, on a décidé de le noter provisoirement par n. Mais, on sait que la médiane de cette série statistique est 1531,25.

1. Exprime la moyenne de cette série statistique en fonction de n.
2. Exprime la médiane de cette série statistique en fonction de n sachant que la valeur $\frac{N}{2}$ n'a pas été trouvée exactement parmi les effectifs cumulés croissants.
3. Détermine n puis la moyenne de cette série.

23* La distribution des demandeurs d'emploi selon le sexe et la classe d'âge dans une localité est la suivante :

Âge	[16;26[	[26;40[	[40;50[	[50;60[	[60;65]
Hommes	280	310	240	420	70
Femmes	160	360	120	530	50

1. Trace les deux courbes de fréquences cumulées décroissantes.
2. Détermine l'âge médian des demandeurs d'emploi de sexe masculin et celui des demandeurs d'emploi de sexe féminin.
3. Détermine l'âge moyen des demandeurs d'emploi de sexe masculin et celui des demandeurs d'emploi de sexe féminin.
4. Calcule l'âge médian et l'âge moyen de ces demandeurs d'emploi.

24 Voici les notes obtenues par les élèves d'une classe de 2nde A lors d'une interrogation écrite :

7,5 - 11 - 17 - 12 - 10 - 12 - 5 - 13 - 2,5 - 9 - 8 - 2 - 9,5 - 7 - 6 - 10 - 17,5 - 18,5 - 7 - 14 - 13,5 - 6 - 7,5 - 5,5 - 8 - 15,5 - 2,5

1. Détermine la médiane de cette série statistique.

2. Calcule la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.
3. Recopie et complète le tableau des effectifs ci-dessous :

Notes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[22;16[	[16 ; 20]
Effectifs					
Effectifs cumulés croissants					

a) Calcule la médiane de la série statistique ainsi obtenue.
b) Calcule la moyenne et l'écart-type de la série statistique ainsi obtenue.

Situation d'évaluation

25 Le tableau suivant résume les notes obtenues par les élèves des deux classes de seconde d'un lycée lors d'un concours de Mathématiques.

Notes	[0 ; 2[	[2 ; 6[	[6 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 25[
Élèves de la $2^{nde}C_1$ (en %)	5,7	12	6,3	8,1	11
Élèves de la $2^{nde}C_2$ (en %)	3,1	7,7	6,8	4,6	6,8

[25 ; 50[	[50 ; 60]
11,2	7,8
5,4	3,5

Le chef de classe de la $2^{nde}C_2$ affirme que la moyenne de sa classe à ce concours est plus élevée et que les notes de sa classe sont plus homogènes.
Les élèves de la $2^{nde}C_1$ cherchent à le contredire.
1. Calcule la moyenne de chaque classe à ce concours.
2. Calcule l'écart moyen, la variance et l'écart type des notes obtenues par les élèves de chaque classe.
3. Dis des deux groupes d'élèves qui a raison. Justifie ta position.

Coup de Pouce

20 L'abscisse du point d'intersection des deux polygones cumulatifs est la médiane.

21 $A = 300$ $S_A = 90{,}1388$ $m_A = 307{,}692$.
$B = 311{,}1$ $m_B = 314{,}28$ $S_B = 89{,}66$.

22 1. $\dfrac{53000 + 2250n}{40 + n}$.

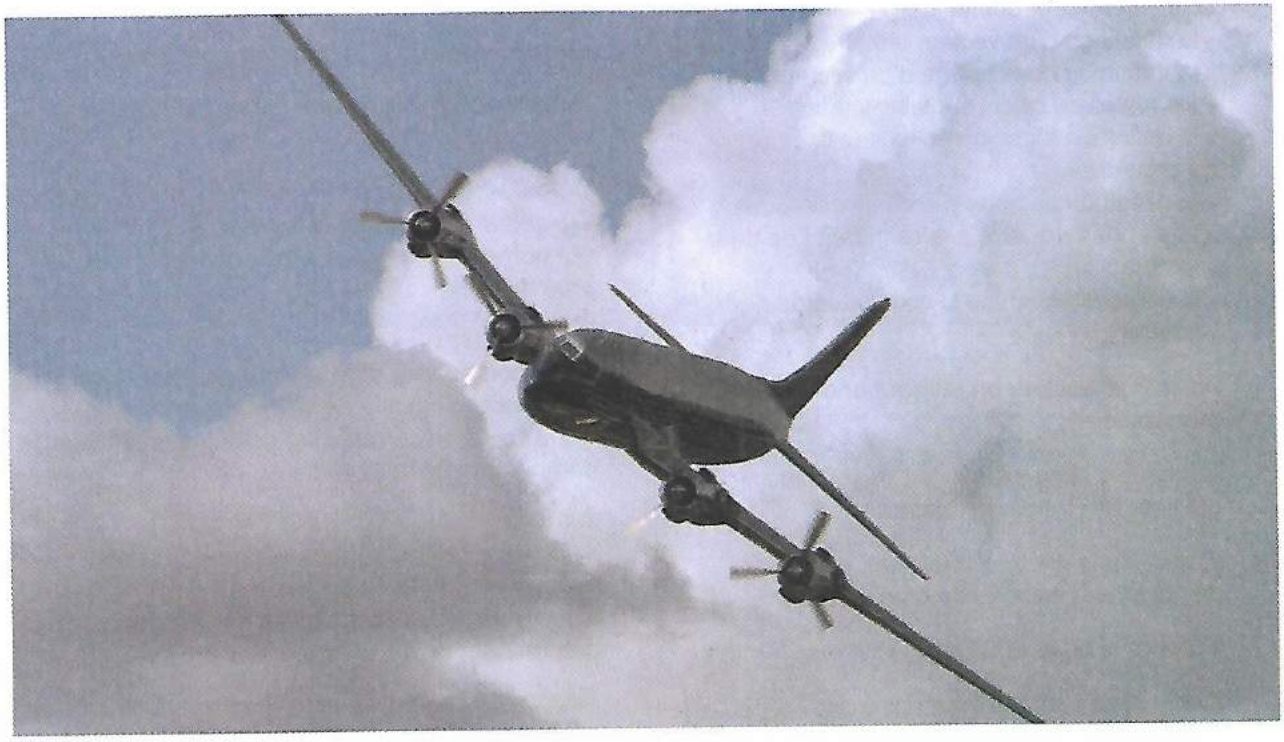
2. $Me = 1500 + 15{,}625(-8 + n)$.

3. $n = 10$.

23 L'âge médian masculin : 42,9.
- L'âge moyen des demandeurs de sexe masculin 41,2008.
- L'âge moyen des demandeurs de sexe féminin 43,37.
L'âge médian féminin : 47,5.
4. Âge moyen de ceux qui cherchent de l'emploi : 42,2441.
L'âge médian de ceux qui cherchent de l'emploi : 44,44.

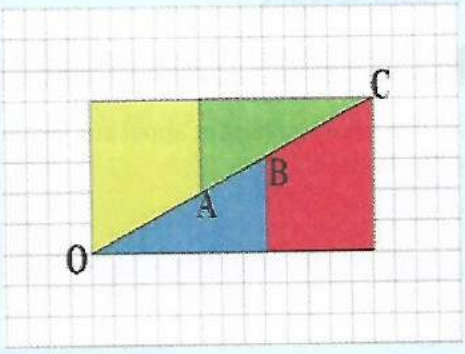
Leçon 8

VECTEURS ET POINTS DU PLAN



Quel déplacement décrit le vol des avions ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE



En lisant une revue scientifique, Paul, élève en classe de 2nde C, découvre la figure ci-contre qu'il présente à son père géomètre. Celui-ci affirme à son fils que malgré les apparences, OBCA est un parallélogramme et qu'en étudiant les positions des points dans le quadrillage, il peut affirmer que d'une part les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires et que d'autre part le vecteur $\overrightarrow{CO}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Paul émerveillé, arrivé en classe, en parle à ses camarades. Ayant vu le schéma, ceux-ci, pour vérifier ces affirmations, décident d'étudier les combinaisons linéaires de vecteurs, les bases, l'alignement de points et le parallélisme de deux droites.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Vecteurs

Connaître :
- la propriété relative à l'existence et à l'unicité du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, où O est un point et $\vec{u}$ un vecteur donné
- la définition d'un vecteur unitaire
- la définition de la norme d'un vecteur
- les règles de calcul sur les vecteurs
- la définition d'une combinaison linéaire de vecteurs
- la définition de deux vecteurs colinéaires
- la propriété relative à la colinéarité de deux vecteurs
- la caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs

Noter : un vecteur en utilisant une lettre minuscule

Simplifier : une expression vectorielle en utilisant la relation de Chasles

Tracer : une droite connaissant un de ses points et un de ses vecteurs directeurs

Placer : le point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Construire : un représentant d'une combinaison linéaire de vecteurs

Décomposer : un vecteur en combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires graphiquement ou algébriquement

Démontrer :
- l'alignement de trois points en utilisant la colinéarité de deux vecteurs
- le parallélisme de deux droites en utilisant la colinéarité de deux vecteurs

2 Base et repère

Connaître :
- la définition d'une base orthonormée
- la définition d'un repère du plan
- la propriété fondamentale relative aux coordonnées d'un vecteur
- la définition du déterminant d'un couple de vecteurs
- l'expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Écrire : un vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base, connaissant les coordonnées de ce vecteur dans cette base

Représenter : un vecteur connaissant ses coordonnées

Calculer :
- le déterminant de deux vecteurs
- la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Déterminer :
- les coordonnées d'un vecteur ou d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base
- une équation cartésienne de droite en utilisant le déterminant de deux vecteurs

Justifier :
- que deux droites sont parallèles en utilisant le déterminant de deux vecteurs
- que trois points sont alignés en utilisant le déterminant de deux vecteurs

Démontrer : qu'un couple de vecteurs est une base du plan vectoriel $\mathscr{V}$

3 Mesure algébrique

Connaître : la définition de la mesure algébrique d'un couple de points

Déterminer : la mesure algébrique d'un couple de points

4 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux vecteurs et points du plan

Activités 1 Vecteurs

1.1. Présentation et notations

Soient A et B deux points distincts du plan.

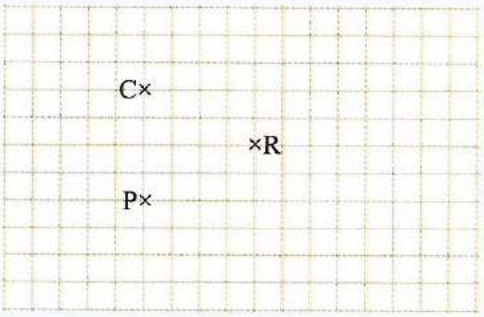
1. On note t la translation qui transforme A en B.
2. Place A et B puis trois autres points E, F et G.
3. Construis les images respectives E', F' et G' de E, F et G par t.

Synthèse

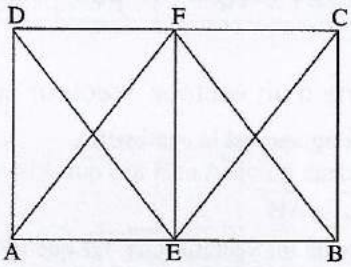
- L'ensemble des couples (E, E') tels que t(E) = E' est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- (E, E'), (F, F'), (G, G') sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut se noter $\vec{u}$, $\vec{v}$ ...
- L'ensemble des vecteurs du plan est le plan vectoriel noté $\mathcal{V}$.

Exercices de fixation

1-1-1 Sur la grille ci-dessous place les points H, B, K, L tels que :
$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{RH}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PR}$; $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{CR}$; $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{LH}$



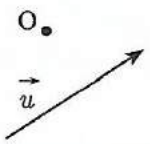
1-1-2 On considère le rectangle ABCD et les milieux E et F respectifs des côtés [AB] et [CD].



Recopie puis complète les égalités suivantes :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B...}$; $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{E...}$; $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{E...}$; $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{F...}$

1.2. Propriété fondamentale

1. Reproduis la figure ci-contre.
2. Construis l'image M du point O par la translation de vecteur $\vec{u}$.
3. Justifie que M est unique.



Synthèse

O est un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur.
Il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Exercice de fixation

1. Place trois points distincts A, B et C.
2. Construis le point D tel que :
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

1.3. Somme de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et P un point du plan.

1. Justifie qu'il existe un unique point R et un unique point S tels que $\overrightarrow{PR} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{RS} = \vec{v}$.
2. Soit P' un autre point. Justifie qu'il existe un unique point R' et un unique point S' tels que $\overrightarrow{P'R'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{R'S'} = \vec{v}$.
3. a) Exprime $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{P'R'}$ et $\overrightarrow{RS}$ en fonction de $\overrightarrow{R'S'}$.
   b) Justifie que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{RR'}$ et que $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{SS'}$.
   c) Déduis-en que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{P'S'}$.

Synthèse

Le vecteur $\overrightarrow{PS}$ est indépendant des représentants choisis et $\overrightarrow{PS}$ est appelé somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note : $\vec{u} + \vec{v}$. On a : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$.

Exercices de fixation

1-3-1 Recopie la bonne réponse.

		a	b	c
1	$\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR} =$	$\overrightarrow{SR}$	$\overrightarrow{RS}$	$\vec{0}$
2	$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} =$	$\overrightarrow{MN}$	$\vec{0}$	$\overrightarrow{NM}$
3	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} =$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AK}$	$\overrightarrow{BK}$
4	$\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{VQ} =$	$\overrightarrow{PV}$	$\overrightarrow{AQ}$	$\overrightarrow{QP}$

1-3-2 Écris le plus simplement possible :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DB}$.

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AB}$.

1.4. Norme d'un vecteur - Vecteur unitaire

L'unité de longueur est le centimètre.

1. a) Place deux points A et B tels que AB = 5.

On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

b) Construis un vecteur $\overrightarrow{CD}$ tel que (C, D) soit un représentant de $\vec{u}$.

c) Justifie que : AB = CD.

2. a) Construis le vecteur $\vec{i}$ tel que : $\vec{i} = \frac{1}{5}\vec{u}$.

b) Construis un vecteur $\overrightarrow{EF}$ tel que (E, F) soit un représentant de $\vec{i}$.

c) Justifie que : EF = 1.

Synthèse

- (A, B) est un représentant du vecteur $\vec{u}$.

AB est appelé norme de $\vec{u}$.

On note : $\|\vec{u}\| = AB$.

- (E, F) est un représentant du vecteur $\vec{i}$.

Donc $\|\vec{i}\| = EF = 1$.

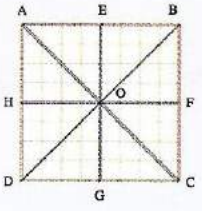
La norme de $\vec{i}$ est égale à 1, on dit que $\vec{i}$ est un vecteur unitaire.

Exercice de fixation

L'unité de longueur est le côté du petit carreau.

Soit un carré ABCD et O le point d'intersection des deux diagonales.

Détermine la norme de chacun des vecteurs suivants à l'aide de quadrillage : $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{GO}$; $\overrightarrow{OA}$.



1.5. Quelques propriétés de la norme

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, (A, B) un représentant de $\vec{u}$ et (B, C) un représentant de $\vec{v}$.

a) Compare AC et AB + BC.

b) Déduis-en la comparaison de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.

2. Soit $\vec{w}$ un vecteur tel que : $\|\vec{w}\|=3$.

Détermine : $\|5\vec{w}\|, \|-8\vec{w}\|$ et $\left\|\frac{1}{5}\vec{w}\right\|$.

Synthèse

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et R un nombre réel.
On a : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$; $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Exercices de fixation

1-5-1 Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs.

1. Compare : $\|\vec{v}+\vec{w}\|$ et $\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$.
2. On donne : $\|\vec{u}\|=5$.

Détermine : $\|-\vec{u}\|$; $\|2\vec{u}\|$; $\|-3\vec{w}\|$.

1-5-2 Soit un triangle ABC. Compare :

1. AC et AB + BC.
2. AB et AC + BC.
3. BC et BA + AC.

1.6. Vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Justifie qu'il existe un nombre réel k tel que :
$k\vec{u} - 1\vec{v} = \vec{0}$ ou $1\vec{u} - k\vec{v} = \vec{0}$.
2. Supposons qu'il existe un couple de nombres réels $(\alpha ; \beta) \neq (0,0)$ tel que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

a) On suppose que $\alpha \neq 0$. Exprime $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$.

b) On suppose que $\beta \neq 0$. Exprime $\vec{v}$ en fonction de $\vec{u}$.

3. Conclus.

Synthèse

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $(\alpha ; \beta) \neq (0 ; 0)$ tel que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

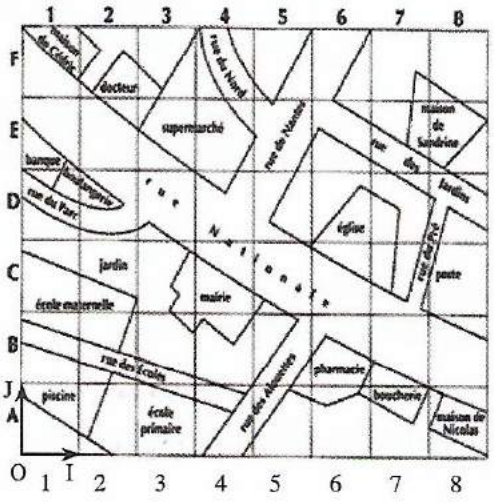
Exercice de fixation

Soient Q et S, deux points distincts et N le point tel que : $\overrightarrow{NQ} - 5\overrightarrow{NS} = \vec{0}$.
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{NQ}$ et $\overrightarrow{NS}$ sont colinéaires.

Activités 2 Bases et repères

2.1. Définitions

1. Sur la carte, on se déplace selon une direction horizontale ou verticale d'une case dans un sens choisi puis d'une case sur la direction perpendiculaire. Ainsi sur la carte la pharmacie est codée par la case 6B et le jardin par 2C.
Donne le nombre de cases horizontales et verticales pour aller de la piscine à la pharmacie.
2. On peut modifier le codage en assimilant les cases sur la carte aux points de coordonnées entières d'un repère (O, I, J). Par exemple la case 6B est associée au point de coordonnées (6 ; 2).
Donne les coordonnées de la poste, de l'école primaire et de la boucherie.

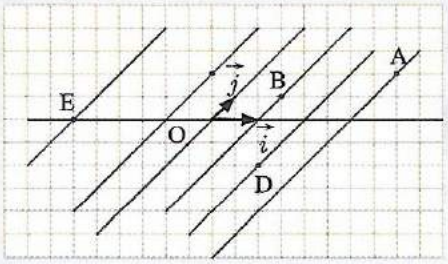


Synthèse

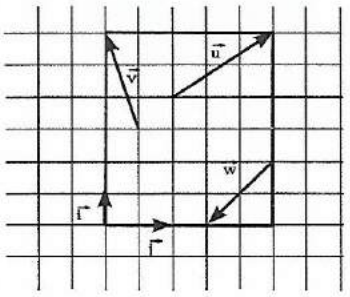
Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont non colinéaires.
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan.

Exercice de fixation

1. Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Détermine les coordonnées des points A , B , E , et D.
2. Justifie que :
a) $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathcal{V}$.
b) $(\overrightarrow{EA} ; \overrightarrow{ED})$ est une base de $\mathcal{V}$.



2.2. Coordonnées d'un vecteur



1. Observe la figure ci-contre attentivement.
a) Complète avec colinéaires ou non colinéaires.
Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont .....
b) Complète les égalités suivantes :
$\vec{u} = ... \vec{i} + ... \vec{j}$; $\vec{v} = ... \vec{i} + ... \vec{j}$; $\vec{w} = ... \vec{i} + ... \vec{j}$.
2. $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base de $\mathcal{V}$.
$\vec{u}$ est un vecteur $\mathcal{V}$.
On suppose qu'il existe des nombres réels α, β, α' et β' tels que : $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ et $\vec{u} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$.
Démontre que : $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

Synthèse

L'écriture d'un vecteur dans une base est unique.
Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a : $\vec{u} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$.
On dit que $\left(2 ; \frac{3}{2}\right)$ est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercices de fixation

2-2-1 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par : $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3(\vec{i} - \vec{j})$;
$\vec{v} = 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - 3(\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2-2-2 Soient les points $A(1 ; \sqrt{2})$ et $B(-1 ; 0)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Détermine les coordonnées du point P tels que :
$\overrightarrow{AP} = -\sqrt{2} . \overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2.3. Coordonnées d'une combinaison linéaires de vecteurs

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
Soient les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = -\frac{4}{3}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}$.
1. Exprime à l'aide de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs suivants : $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{3}{7}\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{11}{3}\vec{u} - \frac{4}{7}\vec{v}$.
2. Déduis-en les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\frac{3}{7}\vec{u} - \vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Synthèse

Le plan vectoriel noté $\mathcal{V}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, α et β deux nombres réels.

On a : $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Soient les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = -\frac{4}{3}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}$.
Détermine les coordonnés des vecteurs suivants :

$\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{3}{7}\vec{u} + \vec{v}$; $\frac{11}{3}\vec{u} - \frac{4}{5}\vec{v}$.

2.4. Déterminant de deux vecteurs dans une base

x, y, x' et y' sont quatre nombres réels non nuls.

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs.

1. On suppose que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   a) Exprime x en fonction de x' et y en fonction de y'.
   b) Justifie que $xy' - yx' = 0$.
2. On suppose que : $xy' - yx' = 0$.
   Justifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
3. Examine le cas où les nombres réels x, y, x' et y' ne sont pas tous non nuls.

Synthèse

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Le nombre $xy' - yx'$, noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exercices de fixation

2-4-1 Dans le plan vectoriel $\mathcal{V}$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v})$, $\det(\vec{u}, \vec{w})$, $\det(\vec{v}, \vec{u})$, $\det(2\vec{w}, \vec{u})$ et, $\det(-\vec{v}, \vec{w})$.

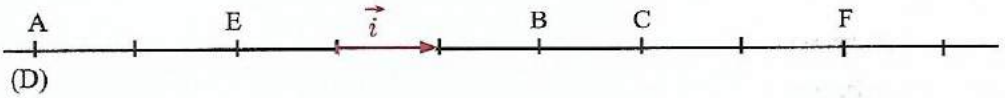
2-4-2 Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Justifie si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans chaque cas.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}$;
c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

2-4-3 Le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Détermine le nombre réel m pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Activité 3 Mesure algébrique

On considère la droite (D) de vecteur directeur $\vec{i}$ tel que : $\|\vec{i}\| = 1$.



Les graduations de (D) sont régulières.

1. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FB}$ s'écrivent sous la forme : $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{i}$ et $\overrightarrow{FB} = \beta\vec{i}$.
En fonction du sens des vecteurs, donne le signe des nombres α et β.

2. Complète : $\overrightarrow{AB} = \ldots\vec{i}$ | $\overrightarrow{BC} = \ldots\vec{i}$
$\overrightarrow{FB} = \ldots\vec{i}$ | $\overrightarrow{EF} = \ldots\vec{i}$
$\overrightarrow{CE} = \ldots\vec{i}$

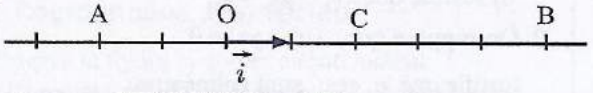
Synthèse

$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i}$. On dit que la mesure algébrique du couple (A, B) relativement à $\vec{i}$ est 5.
On note $\overline{AB} = 5$.
$\overrightarrow{FB} = -3\vec{i}$ donc $\overline{FB} = -3$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de même sens donc $\overline{AB} > 0$.
$\overrightarrow{FB}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraire donc $\overline{FB} < 0$.

Exercices de fixation

3-1 On considère la figure ci-dessous.



Donne : $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ et $\overline{OA}$.

3-2 Trace une droite et muni-la d'un repère $(O ; \vec{i})$. Place sur cette droite les points E, F et G tels que : $\overline{EF} = 5$, $\overline{OE} - 3$ et $\overline{FG} = \frac{3}{2}$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Démontrer que trois points sont alignés

Soit ABC un triangle, les points N et P sont tels que : $\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

1. Prouve que $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Prouve que : $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
3. Donne les coordonnées des points N et P dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
4. Démontre que les points A, N et P sont alignés.

Corrigé

1. Les points A , B et C ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2. $\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
$= +\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, donc $N\left(\frac{1}{4} ; -1\right)$ dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $P\left(-\frac{1}{2} ; 2\right)$ dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

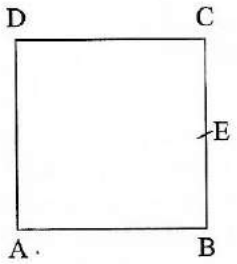
4. On a : $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AN}\left(\frac{1}{4} ; -1\right)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,

Méthode

Pour démontrer que A, N et P sont alignés, on démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires.

et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ donc
$\overrightarrow{AP}\left(-\frac{1}{2} ; 2\right)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
On peut remarquer que $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AN}$
Où $\det(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
Donc vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires.

Exercice 2 Déterminer une équation d'une droite - Construire une droite



Soit ABCD le carré ci-contre de côté 4 cm et E le milieu de [BC].
Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$,

1. Prouve que les coordonnées de C et E sont respectivement (1;1) et $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.
2. a) Détermine une équation de la droite (Δ) passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{DB}$.
   b) Construis la droite (Δ).

Corrigé

1. ABCD est un carré donc un parallélogramme d'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ainsi C(1 ; 1) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
B(1 ; 0) et C(1 ; 1) de plus E est le milieu de [BC] donc $E\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$ d'où $E\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

2. a) Soit M(x ; y) on a :

$$\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires

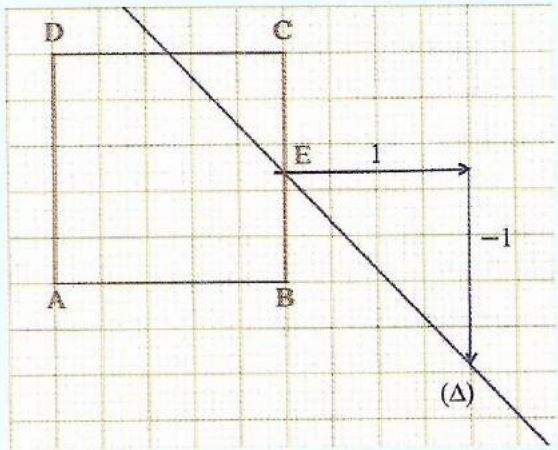
$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{EM}; \overrightarrow{BD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -1(x-1) - \left(y-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x+1-y+\frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x-y+\frac{3}{2} = 0$$



Une équation de la droite (Δ) est donc : $x + y - \frac{3}{2} = 0$.

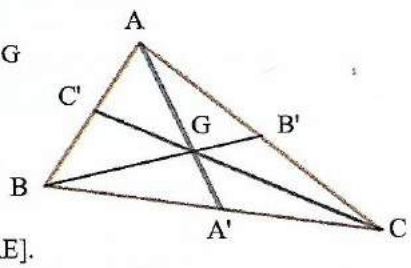
Méthode

Soit $(O, \vec{I}, \vec{J})$ un repère.
Construire la droite (Δ) passant par le point A(1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Pour construire la droite (Δ) :

- on place le point A dans le repère ;
- on construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$;
- la droite (Δ) est la droite (AB).

Exercice 3 Démontrer que deux droites sont parallèles - Démontrer l'unicité d'un point

Soient ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB].
On sait que les médianes (AA') ; (BB') ; (CC') sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle.



1. Soit E le symétrique de A par rapport à G.
   a) Démontre que (C'C) est parallèle à (BE).
   b) Démontre que (B'B) est parallèle à (EC).
   c) Déduis-en que A' est le milieu de [GE].
2. En utilisant le fait que A' soit le milieu de [GE] et que G soit le milieu de [AE].
   a) Démontre que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
   b) Déduis-en que : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ puis : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
3. Soit M un point tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
   a) En faisant apparaître le point G à l'aide de la relation de Chasles, démontre que : $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$.
   b) Déduis-en que le point G est unique.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Corrigé

1. a) Dans le triangle ABE, C'est le milieu [AB], G milieu [AE], donc (BE) // (C'G). D'où (C'C) // (BE).

b) Dans le triangle AEC, B' est milieu de [AC], G milieu [AE], donc (B'G) // (EC). D'où (B'B) // (EC).
Le quadrilatère CEBG est un parallélogramme d'après (a) et (b) par suite [GE] et [BC] ont le même milieu d'ou A' est le milieu de [GE].

2. a) G est milieu de [AE], donc : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$ (1).
A' est milieu de [GE], donc : $\overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{A'E} = \vec{0}$ (2).

De (1) on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'E} = \vec{0}$, or : $\overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{AA'}$ et de (2) on a : $\overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{GA'}$.
D'où : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} = \vec{0}$.
Par suite : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$.
Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

b) $3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GA'}$, donc : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$.
$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

3. a) $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
D'où : $3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Donc : $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$.

b) $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$, donc M = G le point G est donc unique.

Méthode

Pour montrer qu'un point A est unique, on peut supposer qu'il existe un deuxième point B et démontrer : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

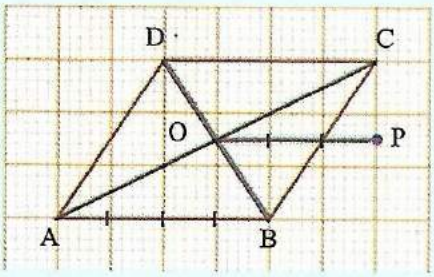
Exercice 4 Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1. Démontre que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
2. M est un point quelconque du plan. On pose : $\vec{V} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
   a) Démontre que les vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.
   b) Construis le point P du plan tel que : $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = -3\overrightarrow{AB}$.

Corrigé

1. O est le centre parallélogramme ABCD d'où
O est le milieu du segment [AC] donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$
O est le milieu du segment [BD] donc $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$



Ainsi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

2. a) $\vec{V} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})$
$\vec{V} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
$\vec{V} = -4\overrightarrow{OM}$
$\vec{V} = -4\overrightarrow{OM}$, donc les vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{OP} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Méthode

- Introduire le point O : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$
- Trouver une relation entre $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Exercice 5 Démontrer que deux droites sont parallèles

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

1. Justifie que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Détermine dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ les couples de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$.
3. Le plan est muni du repère (A, B, C).
   a) Détermine les couples des coordonnées des points A, B, C et I.
   b) Construis le point D tel que : $\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
   c) Détermine le couple de coordonnées du point D.
   d) Démontre que les droites (AI) et (BD) sont parallèles.

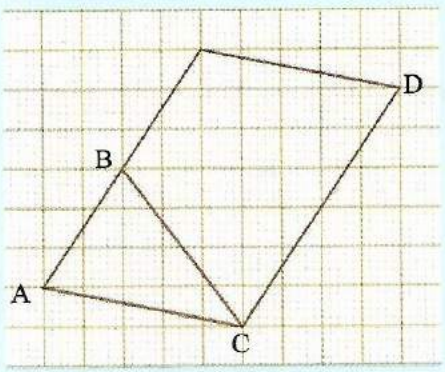
Corrigé

1. A, B et C ne sont pas alignés d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB}(1 ; 0)$;
I le milieu de [BC],
d'où $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Donc : $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

3. a) Dans le repère, $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,
on a donc A(0, 0) ; B(1, 0) ; C(0, 1) et $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

b) Voir figure.



Méthode

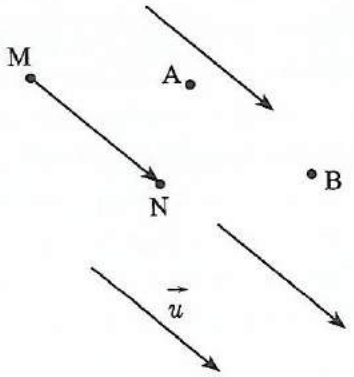
Pour démontrer que les droites (AI) et (BD) sont parallèles, on démontre que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont parallèles.

c) $\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$;
par suite : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$,
donc : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ainsi D(2, 1).

d) On a : $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BD}(1 ; 1)$ de plus :
$\det(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BD}) = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires par suite, les droites (AI) et (BD) sont parallèles.

1 Vecteurs

1.1. Présentation et notations



- Soient A et B deux points distincts du plan.

On note t la translation qui transforme A en B.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'ensemble des couples (M, N) tels que N est l'image de M par t.

- On appelle plan vectoriel l'ensemble de tous les vecteurs du plan et on le note $\mathcal{V}$.

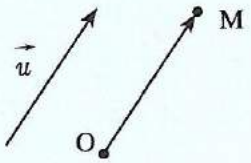
Les éléments de $\mathcal{V}$ sont en général notés $\vec{a}; \vec{u}; \vec{v}$ ...

- Sur la figure ci-contre, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$. On dit que (A, B) et (M, N) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

Tout vecteur a une infinité de représentants.

1.2. Propriété fondamentale

Propriété Pour tout point O du plan et pour tout vecteur $\vec{u}$ donnés, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$



1.3. Somme de vecteurs

1.3.1. Définition

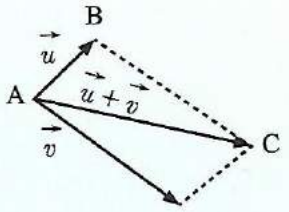
Propriété - définition Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs.

A, B et C sont des points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est indépendant des représentants (A, B) et (B, C) choisis.

$\overrightarrow{AC}$ est appelé somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On a : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



1.3.2. Relation de Chasles

Propriété Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

1.4. Norme d'un vecteur - Vecteur unitaire

1.4.1. Définition

Définition Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle norme de $\vec{u}$ la distance AB où A et B sont deux points tels que (A, B) est un représentant de $\vec{u}$.

Notation

La norme du vecteur est notée $\|\vec{u}\|$.

Remarque

- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.
- Deux vecteurs égaux ont la même norme.
- Deux vecteurs qui ont la même norme ne sont pas forcément égaux.

1.4.2. Vecteur unitaire

Définition Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.

1.5. Quelques propriétés de la norme

1.5.1. Propriétés

Propriété Il existe un et un seul vecteur ayant une direction, un sens et une norme donnés.

Propriété Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre réel α, $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$.

1.5.2. Inégalité triangulaire

Propriété (Inégalité triangulaire)
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

1.6. Vecteurs colinéaires

1.6.1. Combinaison linéaire

Définition $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls, on appelle combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tout vecteur de la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où α et β sont des nombres réels.
α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1.6.2. Vecteurs colinéaires

Définition

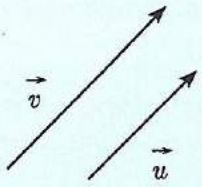
Définition Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction ou lorsque l'un des deux vecteurs est nul.

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

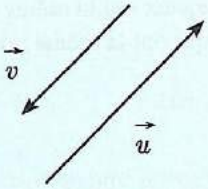
1.6.3. Propriétés

Propriété Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s il existe un nombre réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$.



$k > 0$

Pour $k > 0$, les deux vecteurs sont colinéaires de même sens.



$k > 0$

Pour $k < 0$, les deux vecteurs sont colinéaires de sens contraires.

1.6.4. Règles de calculs dans V

Propriété Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tous nombres réels α et β, on a :

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha \times \beta)\vec{u}$

$1\vec{u} = \vec{u}$

$\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

$\alpha\vec{u} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

Propriété Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un couple de nombres réels $(\alpha ; \beta) \neq (0,0)$ tel que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

Propriété Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si pour tous nombres réels α et β tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

On a : $\alpha = \beta = 0$.

1.6.5. Propriétés

Propriété Trois points A, B, et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2 Bases et repères

2.1. Définitions

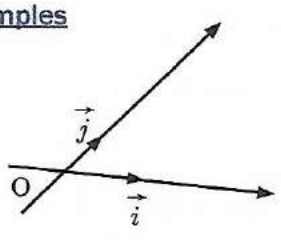
2.1.1. Définition d'une base

Définition On appelle base de $\mathcal{V}$, tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.

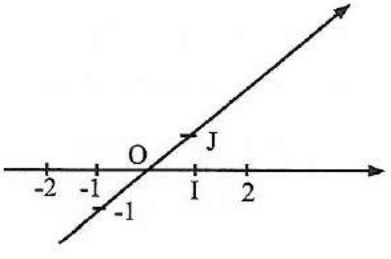
2.1.2. Définition d'un repère

Définition
- On appelle repère du plan, tout triplet $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
O est appelé origine du repère.
- Tout triplet de points non alignés est aussi appelé un repère du plan.

Exemples



$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère cartésien



(O, I, J) est un repère affine

Remarque

1. ABC est un triangle, le triplet (A, B, C) constitue un repère du plan, la droite (AB) est l'axe des abscisses et la droite (AC) est l'axe des ordonnées de ce repère.
2. Le repère affine (A, B, C) est associé au repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
On a de plus A(0 ; 0), B(1; 0), C(0 ; 1).

2.2. Coordonnées d'un vecteur

Propriété

Propriété Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$, il existe un unique couple $(x\,;y)$ de nombres réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le couple (x, y) est appelé couple de coordonnées de vecteur $\vec{u}$.

2.3. Coordonnées d'une combinaison linéaires de vecteurs

2.3.1. Propriété

Propriété Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
λ est un nombre réel et $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et $(\lambda\vec{u})\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Base orthogonale, base orthonormée de $\mathcal{V}$

Définition Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthogonale si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux.
Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthogonale et si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires.

2.3.2. Propriété

Propriété Soient $A(x_A\,;y_A)$; $B(x_B\,;y_B)$ et $C(x_C\,;y_C)$ dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
Si M est le milieu de [AB], alors $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
Si G est le centre de gravité de ABC, alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et de plus $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\,;\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$ dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Remarque

1. ABC est un triangle et I le milieu de [BC] on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.
2. I est le milieu du segment [AB] si et seulement si
   1) $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IB}$; 4) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

2.3.3. Expression de la norme

Propriété Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2.4. Déterminant de deux vecteurs dans une base

2.4.1. Définition

Définition Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ le nombre réel $xy' - yx'$.

On le note $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

On a : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

2.4.2. Propriété

Propriétés
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- Deux vecteurs forment une base si et seulement si leur déterminant est non nul.

3 Mesure algébrique

3.1. Définition

Définition Soit (D) une droite orientée de vecteur directeur unitaire $\vec{i}$.
Soient A et B, deux points de (D).
On appelle mesure algébrique de (A, B), relativement à $\vec{i}$, l'unique nombre réel x tel que $\overrightarrow{AB} = x\vec{i}$.

Notation

La mesure algébrique de (A, B) relativement à $\vec{i}$ se note $\overline{AB}$.

3.2. Propriété

Propriétés Soit (D) une droite orientée de vecteur directeur unitaire $\vec{i}$.
Soient M, N et P des points de (D), λ un nombre réel.

1) $|\overline{MN}| = MN$.
2) $\overline{NM} = -\overline{MN}$.
3) • $\overline{MN} = MN$ si et seulement si $\overrightarrow{MN}$ et $\vec{i}$ sont de même sens.
   • $\overline{MN} = -MN$ si et seulement si $\overrightarrow{MN}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraires.
4) $\overline{MN} = 0 \Leftrightarrow M = N$.
5) $\overrightarrow{MP} = \lambda\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overline{MP} = \lambda\overline{MN}$.
6) $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}$. (relation de Chasles)

Exercices de renforcement

1 Réponds par vrai ou par faux dans chaque cas.

1. Une droite a un seul vecteur directeur.
2. L'axe des abscisses d'un repère à pour équation : $y = 0$.
3. A, B, C et D sont quatre points non alignés. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que ABCD est un parallélogramme.
4. Dans un repère orthonormé (O, I, J) la droite (IJ) à pour équation $y = x - 1$.
5. Une droite peut avoir deux coefficients directeurs.
6. Si $\vec{v} = k\vec{u}$ alors la norme du vecteur $\vec{v} = k\|\vec{u}\|$
7. La mesure algébrique d'un couple de points est nombre réel.
8. L'axe des ordonnées d'un repère a pour équation : $y = x$.
9. Deux vecteurs colinéaires ont le même sens.
10. si (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) est un repère alors les points A , B et C sont non alignés.
11. Si A(a ; b) et B(α ; β) alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{a-\alpha}{b-\beta}$ ($b \neq \beta$).
12. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ signifie que M est le milieu de [AB].

2 Soient A, B, C, et D quatre points non alignés du plan tels que : $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. Démontre ABCD est un parallélogramme.
2. Soit le point E, tel que : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$.

Démontre que : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE}$.

3 ABCD est un parallélogramme de centre K.

1. Construis les points E et F tels que :
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{CB}$
2. Démontre que le point C est le milieu de [EF].

4 ABC est un triangle, I le milieu de [AB].

1. Démontre que pour tout point M du plan,
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{IM}$.
2. Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation donnée.
   a) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$.
   b) $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$.
   c) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\| = 8$.

5 Soient les points C($\sqrt{2}$; -1) ; D($2\sqrt{2}$; 1) et E(1 ; $\sqrt{2} - 3$) dans le repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Démontre que les points C, D et E sont alignés.

6 O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1. a) Construis le point D tel que : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
   b) Détermine la nature du quadrilatère OBDC.
2. a) Construis H tel que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$.
   b) Détermine la nature du quadrilatère OAHD.

7 Justifie que : $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$.

Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$), une base orthonormée de $\mathcal{V}$, les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont tels que :

$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\vec{j}$

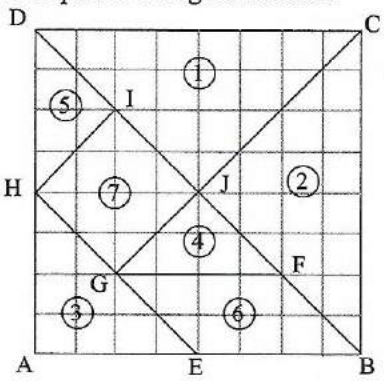
$\vec{T} = 2(\sqrt{2}-1)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\vec{j}$

a) Justifie que les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires.

b) Calcule la norme du vecteur $\vec{T}$.

8 Construis la droite passant par le point A (−2 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$.

9 Observe ce puzzle d'origine chinoise.



Complète par le point qui convient :

1. $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{H.....}$; 2. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{G.....}$;
3. $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{A.....}$ 4. $\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{I.....} = \overrightarrow{DH}$;
5. $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{G.....}$; 6. $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{.....H}$.

10 On considère la figure ci-dessous.

Écris les vecteurs suivants en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$:

$\overrightarrow{BP}$ =..... ; $\overrightarrow{OC}$ =..... ; $\overrightarrow{EP}$ = ... ;

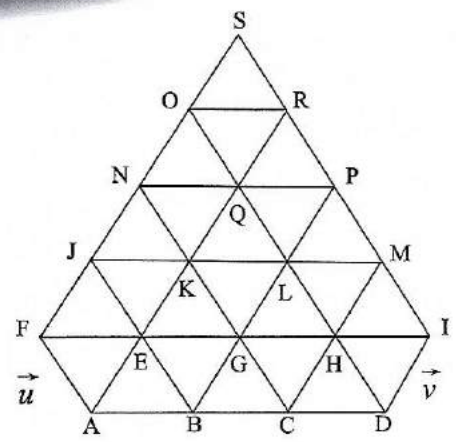
$\overrightarrow{MA}$ = ... ; $\overrightarrow{CQ}$ = ... ;

$\overrightarrow{SL} + \overrightarrow{FK}$ = ... ; $\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{PK}$ = ...

$\overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EN}$ = ... ; $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{RO}$ = ...

$\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{RJ}$ = ...

Exercices



11 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non colinéaires donnés.

Détermine et construis un représentant du vecteur $\vec{x}$ sachant que : $2(\vec{x}+3\vec{u})-2\vec{v}=\frac{1}{2}(4\vec{v}-2\vec{x})$

12 Soient les points E (1 ; 2) ; F(3 ; −1) et G(−2 ; 5) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Détermine les coordonnées du point M tels que $\overrightarrow{EM}=-2\overrightarrow{EF}-3\overrightarrow{GF}$.

13 Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix}$.

Réponds par vrai ou par faux.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{i}+\vec{j}$.
3. Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{i}+\vec{j}$.

14 On considère un triangle ABC.

1. a) Construis le point E tel que : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}$.

   b) Construis le point F tel que : $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

   c) Construis le point G, tel que : $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

2. a) Démontre que $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{FC}$.

   b) Déduis-en que les droites (CF) et (EB) sont parallèles.

3. a) Complète les égalités suivantes par les nombres qui conviennent : $\overrightarrow{BF}=\ldots\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG}=\ldots\overrightarrow{AC}$.

   b) Exprime $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4. a) Soit I le milieu de [AC].

   Complète l'égalité suivante : $\overrightarrow{AI}=\ldots.\overrightarrow{AC}$.

   b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{BI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   c) Exprime le vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   d) Déduis de ce qui précède que les points B, G et I sont alignés.

15 1. Représente dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les points A(2 ; −3) ; B(5 ; 4) ; C(0 ; −1) et D$\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

2. Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3. Justifie que les droites (AC) et (BD) sont sécantes.

16 Détermine les valeurs de x pour lesquelles les points A, B, et C sont alignés.

a) A (x ; 2), B(1 ; −4) et C (−2 ; 5).

b) A ($\frac{3}{2}$; x) ; B (1 ; $x+2$) et C (−2 ; 5).

c) A (x ; 2) ; B (1 ; x) et C (1 ; −2).

17 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A (2 ; 7) ; B (4 ; 1) et C (−5 ; 2).

1. a) Fais une figure et détermine par le calcul les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b) Déduis-en les longueurs AB, AC et BC.

2. a) Construis le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Donne les coordonnées du point M.

   b) Détermine par le calcul les coordonnées du point M.

18 Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sens direct. C'est le milieu de [AB] et I est le milieu de [CC'].

Dans tout l'exercice, on considère le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

1. Fais une figure.
2. Prouve que les couples de coordonnées de C' et I sont respectivement : $(\frac{1}{2};0)$ et $(\frac{1}{4};\frac{1}{2})$.
3. a) Place le point E de coordonnées (1 ; 1).

   b) Détermine une équation de la droite (Δ) passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

19 (Δ) et (Δ') sont deux droites sécantes en A. soit I un point de (Δ) distinct de A et J un point de (Δ') distinct de A.

1. Démontre que $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. a) Construis les points B et C tels que : $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+4\overrightarrow{AJ}$.

   b) Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$.

3. Détermine dans le repère (A, I, J).

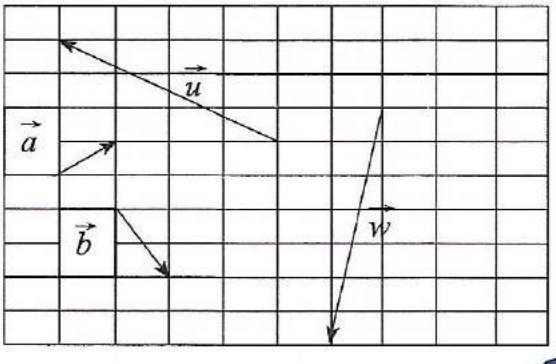
a) Les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
b) Les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
4. Démontre que les points B, D et G sont alignés.

20 Soit ABC un triangle.
1. Construis les points E, D, F, tels que :
$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. a) Justifie que : $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;
et $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
b) Démontre que les points E, D et F sont alignés.
3. a) Construis le point K milieu de [AB].
b) Justifie que : $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
c) Déduis de ce qui précède que les droites (DE) et (CK) sont parallèles.

21 Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
Soit deux réels x et y et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ définis par : $\vec{u} = (2x-1)\vec{i} + 5\vec{j}$,
$\vec{v} = x\vec{i} + (3y+2)\vec{j}$ et $\vec{w} = 5\vec{i} + (y+1)\vec{j}$.
a) Détermine les valeurs de x et y pour que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.
b) Déduis-en dans ce cas, les coordonnées de chacun des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$.

22 L'unité de longueur est le centimètre, ABC est un triangle rectangle en B tel que : mes $\widehat{A} = 30°$ et BC = 2.
1. Calcule AC et AB.
2. E est le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F.
a) Fais la figure.
b) Calcule les distances AE et EF.

23 Décompose les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



24 Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Construis la droite (Δ) passant par le point A(−1 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.
2. Construis la droite (*D*) passant par le point B(0 ; 4) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
3. Construis la droite (*L*) passant par le point C(−5; −2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.
4. Construis la droite (*H*) passant par le point D(2 ; −3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

25 On donne trois points A, B, et C du plan. M est un point quelconque du plan. On pose :
$\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.
1. Démontre que $\vec{u}$ ne dépend pas du point M.
2. Construis le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$.
3. Démontre qu'il existe un unique point N tel que : $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.
4. Construis N.

26 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.
On donne les vecteurs $\vec{u}$ (2 ; 3) ; $\vec{v}$ (2 ; −4) et $\vec{w}$ (α ; −2) où α est un nombre réel.
1. Calcule $\det(\vec{u} ; \vec{v})$; $\det(\vec{u} - 3\vec{v} ; \vec{v} + \vec{u})$ et $\det(\vec{v} ; -\vec{u})$.
2. Détermine α pour que :
a) $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
b) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.

27 ABC est un triangle.
1. Construis les points M, N, et P tels que :
$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Démontre que (MN) et (AC) sont parallèles.
3. E et F sont deux points tels que :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$.
Démontre que C est le milieu de [EF].

28 Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J) ; A et B sont des points distincts du plan.
1. Démontre qu'il existe un unique point G du plan tel que : $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
2. Démontre que $\overrightarrow{OG}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OB}$.
3. On donne : $A\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ et B(−2 ; −1).

a) Démontre que $\overrightarrow{AO}$ est un vecteur unitaire.

b) Détermine les coordonnées du point G dans le repère (O, I, J).

29 Le plan est muni d'un repère quelconque $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A(3 ; 3) ; B(−3 ; 3) et C(3 ; −3).

- Soit M un point du plan de coordonnées $(a ; 0)$.
- Soit N un point du plan de coordonnées $(0 ; b)$ où a et b sont des nombres réels.

1. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ ainsi que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BN}$.
2. Calcule $\det(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AN})$ et $\det(\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BN})$ et en déduis que $\det(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AN}) = \det(\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BN})$.
3. Démontre que si les points A ; N et M sont alignés alors (CM) // (BN).
4. Démontre que si (CM) et (BN) sont parallèles, alors les points A, M et N sont alignés.

Exercices d'approfondissement

30 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

ABC est un triangle et G le point du plan vérifiant $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

1. Démontre que G est le centre de gravité du triangle ABC.
2. On donne A(−1 ; 3) ; B(1 ; −2) et C(4 ; 2). Détermine les coordonnées de G dans le repère (O, I, J).
3. a) Justifie que (A, B, C) est un repère.
   b) Détermine les coordonnées de G dans le repère (A, B, C).

31 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points M(−1 ; 4) ; N(−3 ; 3) et P(2 ; 2).

1. a) Détermine les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$.
   b) Déduis-en les coordonnées $(x_D ; y_D)$ du point D tel que $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$.
2. Soit E le point tel que $\overrightarrow{NE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}$. Détermine les coordonnées du point E.
3. Démontre que les points M, E et D sont alignés.

32 ABCD est un carré de côté 4 de centre O et I milieu du segment [BC].

1. a) Démontre que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
   b) Déduis-en que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.
2. Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tel que :

$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \| = \| -\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$.

33* Soit ABC un triangle et I le milieu du segment [BC].

1. Construis le point N tels que : $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. Soit P le point tel que : $3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.
   a) Démontre que : $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.
   b) Construis le point P.
3. Démontre que : $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
   a) Démontre que : $5\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AN}$.
   b) Déduis-en que les points A, N et P sont alignés.
4. a) Justifie que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.
   b) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   c) Déduis-en le résultat de la question 3. b).
5. Détermine les coordonnées des points N et P dans le repère $(I, \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$.

34 A, B et C sont trois points non alignés.

1. Construis les points M, N, P, Q définis par :
$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
2. a) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
   b) Déduis-en que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
   c) D et E sont les milieux respectifs des segments [BC]et [MN].
   Démontre que les points A, D et E sont alignés.

35 ABC est un triangle. I est le milieu de [AB].

Les points J et K sont définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$.

1. Exprime $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontre que les points I, J et K sont alignés.

Situation d'évaluation

36* Yao, élève en classe de Seconde C, découvre sur le Net la figure ci-dessous avec les hypothèses suivantes :

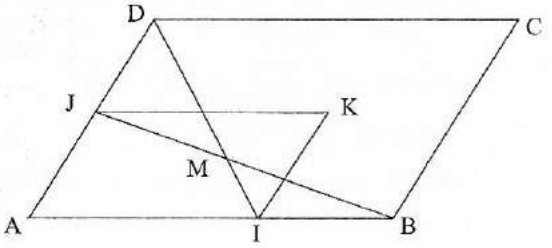
ABCD et AIJK sont deux parallélogrammes ;

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Le point M est l'intersection des droites (DI) et (BJ).

L'une de ses camarades de classe, Mariam, affirme que les points M, K et C sont alignés.

Pour les aider, leur professeur de mathématiques donne les instructions suivantes :



On considère le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. Détermine les coordonnées des points : I ; C ; D et K dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   a) Démontre qu'une équation cartésienne de la droite (DI) est : $3x + 2y - 2 = 0$.
   b) Détermine une équation cartésienne de la droite (BJ).
2. Dis si Mariam a raison et justifie ta réponse.

37* Pour désenclaver les villes A, B, C, D, E, F et O, le gouverneur de la région du Nayala souhaite la construction de plusieurs routes bitumées. L'état du terrain et la minimisation des coûts de constructions exigent des routes droites qui relient les villes O et F ; C et E ; F et D.

Le gouverneur souhaite savoir si la construction d'un échangeur est nécessaire. Ali, élève en Seconde C découvre la figure et les informations suivantes :

OABC et ADEF sont des carrés tels que OA = 3 et AD = 1.

Il la montre à ses camarades de classe.

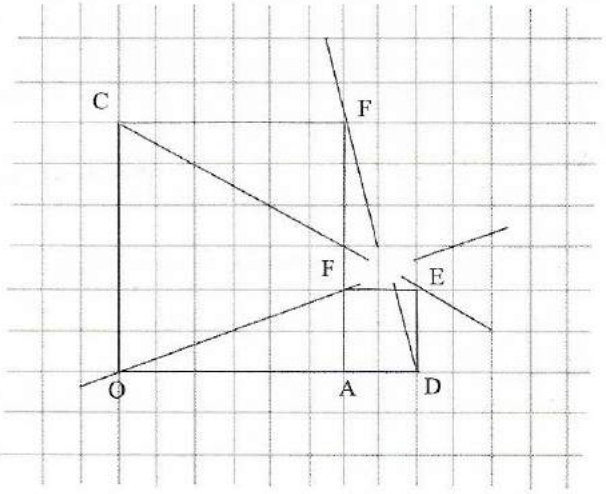
Ceux-ci sollicitent leur professeur de mathématiques afin de les aider à vérifier si les routes (OF) ; (BD) et (CE) sont concourantes.

Le professeur leur donne les indications suivantes :

Considère le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Détermine les coordonnées des villes A, B, C, D, E et F dans ce repère.
2. Dis si la construction d'un échangeur est nécessaire. Justifie ta réponse.





Coup de Pouce

33 2. Considère le repère $(I, \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$.

36 Vérifie que les coordonnées du point M vérifient l'équation de la droite.

37 Détermine des équations de deux droites. Détermine les coordonnées de leur point d'intersection et vérifie si ce point appartient à la troisième droite.

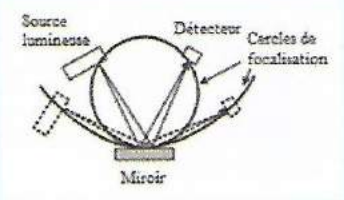
Leçon 9

ANGLES INSCRITS



Un metteur en scène dispose de spots qui peuvent éclairer sous un angle de 60°. Chaque spot éclaire la scène sur toute sa largeur. Où doit-il les placer s'il veut éclairer une scène de 10 mètres de large ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Dans ses recherches sur internet le jeune Pedou, élève en Seconde C, a découvert le dispositif optique ci-contre qui est composé d'une source lumineuse, d'un miroir et d'un détecteur. Les trois éléments cités sont situés sur un cercle imaginaire appelé cercle de focalisation de Rowland.

Pédou est intrigué par le fait que, bien qu'ayant des trajectoires différentes, les rayons lumineux issus de la source et réfléchissants sur le miroir aboutissent tous sur le détecteur.

Pour comprendre ce phénomène, il décide avec ses camarades de classe d'étudier les angles inscrits.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Angles inscrits

Connaître :
- la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre associé
- la propriété relative aux mesures d'un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente et de l'angle au centre associé
- la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc
- la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant deux arcs de même longueur
- la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités
- la propriété relative à la bissectrice d'un angle inscrit et l'arc que cet angle intercepte

Déterminer : la mesure d'un angle en utilisant les propriétés des angles inscrits

Justifier : une égalité d'angles en utilisant les propriétés des angles inscrits

2 Arcs capables

Identifier : deux arcs capables d'un angle donné

Construire : un arc capable de mesure donnée

3 Relations métriques dans un triangle

Connaître :
- la propriété relative à l'aire d'un triangle ;
- le théorème des sinus

Calculer : des aires, des longueurs et des mesures d'angle en utilisant les formules d'aire ou le théorème des sinus.

4 Polygones réguliers

Connaître :
- la définition d'un polygone régulier
- les propriétés relatives aux polygones réguliers

Construire : un polygone régulier

5 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux angles inscrits

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Angles inscrits

1.1. Relation entre mesure d'un angle inscrit et celle de l'angle au centre associé

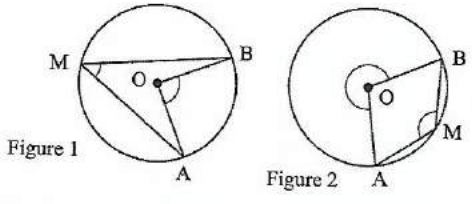


Figure 1

Figure 2

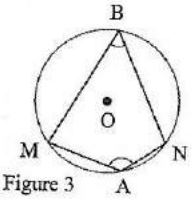


Figure 3

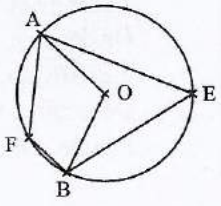
1. Recopie et complète la phrase suivante en utilisant les expressions « au centre » et « inscrit ».
Dans chacune des figures 1 et 2, l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle ..... et l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle .....
2. Dans chacune des figures 1 et 2,
   a) Identifie l'arc intercepté par chacun des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$.
   b) Mesure, à l'aide d'un rapporteur, les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$.
   c) Trouve une relation entre la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ et celle de $\widehat{AOB}$.
3. Sur la figure 3,
   a) Mesure, à l'aide d'un rapporteur, les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.
   b) Calcule la somme des mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.

Synthèse

La mesure d'un angle aigu inscrit dans un cercle est la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.
La mesure d'un angle obtus inscrit dans un cercle est la moitié de la mesure de l'angle au centre associé ôtée de la mesure de l'angle plat.

Exercices de fixation

Pour les exercices 1, 2 et 3, on considère la figure ci-contre.



1-1-1 On donne : mes $\widehat{AOB} = 100°$.
Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$.

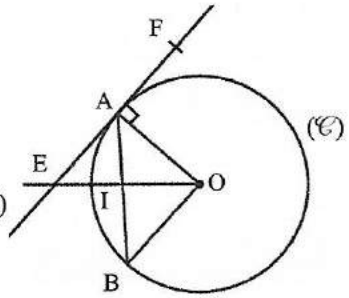
1-1-2 On donne mes $\widehat{AOB} = 100°$.
Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{AFB}$.

1-1-3 On donne mes $\widehat{AEB} = 60°$.
Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{AFB}$.

1.2. Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente

Dans la figure ci-contre :
- A et B sont deux points du cercle (𝒞) de centre O non diamétralement opposées ;
- I est le milieu de [AB] ;
- la droite (AF) est la tangente à (𝒞) en A.

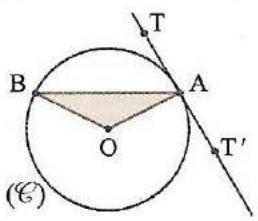
1. Démontre que les droites (OI) et (AF) sont sécantes.
On note E leur point d'intersection.
2. Démontre que : mes $\widehat{EAB}$ = mes $\widehat{AOI}$. (Tu pourras utiliser les triangles AOE et AIE)
3. Déduis-en que : mes $\widehat{EAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
4. Exprime alors la mesure de l'angle $\widehat{FBA}$ en fonction de celle de $\widehat{AOB}$.



Synthèse

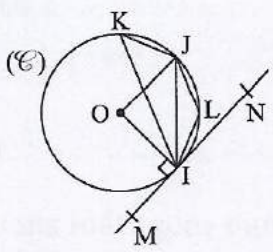
(𝒞) est un cercle de centre O et (TT') la tangente à (𝒞) en A.

$\text{mes}\widehat{BAT} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$ et $\text{mes}\widehat{BAT'} = 180° - \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$.



Exercices de fixation

Pour les exercices 1 et 2, on considère la figure ci-contre.



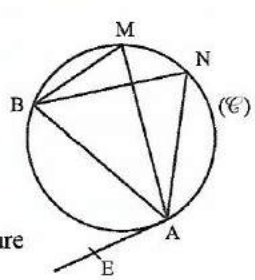
1-2-1 On donne mes $\widehat{IKJ} = 23°$.
Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{NIJ}$.

1-2-2 On donne : mes $\widehat{JIM} = 150°$.
Détermine, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{JLI}$.

1.3. Angles inscrits interceptant le même arc

Dans la figure ci-contre :
- A, B, M et N sont des points du cercle (𝒞) ;
- la droite (AE) est la tangente à (𝒞) en A.

1. Justifie que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ ont la même mesure.
2. En utilisant le résultat de l'activité 1.2, justifie que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{BAE}$ ont la même mesure

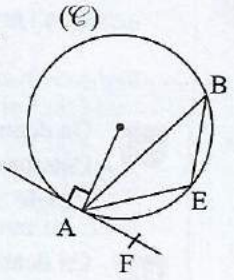


Synthèse

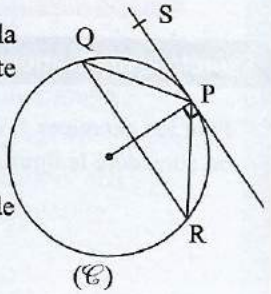
Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Exercices de fixation

1-3-1 Sur la figure ci-contre, la droite (FA) est la tangente au cercle (𝒞) en A.
On donne : mes $\widehat{ABE} = 37°$.
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{FAE}$.



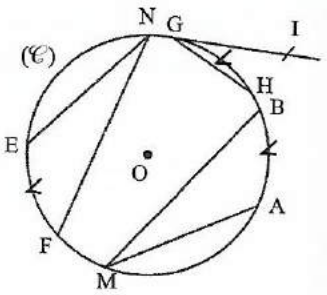
1-3-2 Sur la figure ci-contre, la droite (PS) est la tangente au cercle (𝒞) en P.
On donne :
mes $\widehat{SPQ} = 29°$.
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{PRQ}$.



1.4. Angles interceptant des arcs de même longueur

Dans la figure ci-contre :
- A, B, E, F, M et N sont des points du cercle (𝒞) de centre O ;
- la droite (IG) est la tangente à (𝒞) en G ;
- les arcs $\widehat{EF}$, $\widehat{AB}$ et $\widehat{GH}$ ont la même longueur.

1. Justifie que les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{EOF}$ et $\widehat{GOH}$ ont la même mesure.
2. Déduis-en que les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{ENF}$ et $\widehat{IGH}$ ont la même mesure.

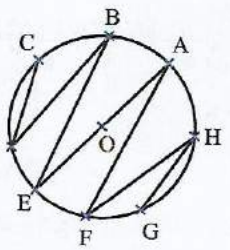


Synthèse

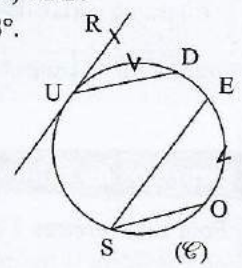
Des angles inscrits qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.

Exercices de fixation

1-4-1 Détermine les mesures de tous les angles présents sur la figure ci-contre, sachant que mes $\widehat{FAE} = 22{,}5°$ et que les points A, B, C, D, E, F, G et H sont régulièrement repartis sur le cercle (ils sont tels que le cercle est subdivisé en 8 arcs de même longueur).



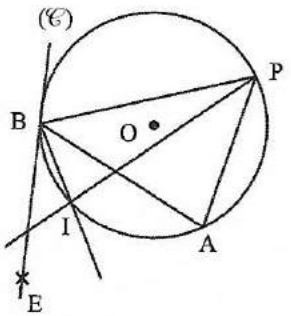
1-4-2 Sur la figure codée ci-dessous, la droite (RU) est la tangente au cercle (𝒞) en U.
On donne : mes $\widehat{OSE} = 43°$.
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{DUR}$.



1.5. Angle inscrit et bissectrice

Sur la figure ci-contre :
- A, B et P sont des points du cercle (𝒞) de centre O ;
- la droite (BE) est la tangente à (𝒞) en B ;
- la demi-droite [PI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$;
- la demi-droite [BI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABE}$.

1. a) Justifie que les angles $\widehat{API}$ et $\widehat{BPI}$ ont la même mesure.
   b) Déduis-en que les arcs $\widehat{AI}$ et $\widehat{BI}$ ont la même longueur.
2. a) Justifie que les angles $\widehat{ABI}$ et $\widehat{EBI}$ ont la même mesure.
   b) Déduis-en que les arcs $\widehat{AI}$ et $\widehat{BI}$ ont la même longueur.



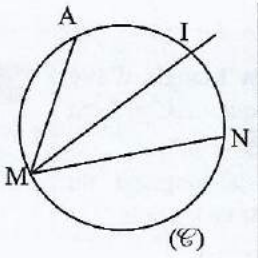
Synthèse

La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.

Exercices de fixation

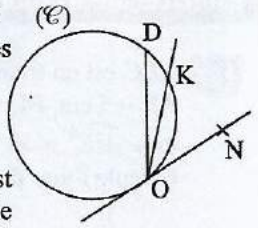
1-5-1 Dans la figure ci-contre :
- M, A, I et N sont des points du cercle $(\mathscr{C})$;
- la demi-droite [MI] est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMN}$.

Compare les longueurs des arcs $\overset{\frown}{AI}$ et $\overset{\frown}{NI}$.
Justifie ta réponse.



1-5-2 Dans la figure ci-contre :
- O, K et D sont des points du cercle $(\mathscr{C})$;
- la droite (NO) est la tangente à $(\mathscr{C})$ en O ;
- la demi-droite [OK] est la bissectrice de l'angle $\widehat{DON}$.

Compare les longueurs des acrs $\overset{\frown}{KO}$ et $\overset{\frown}{KD}$.
Justifie ta réponse.



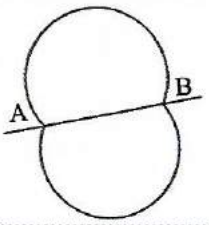
Activité 2 Arcs capables

Objectif de l'activité : deux points distincts A et B étant donnés, construire un point P tel que : mes $\widehat{APB} = 30°$.
Pour ce faire, nous allons utiliser le résultat de l'activité 1.2.

1. Trace un segment [AB] puis une demi-droite [AT) tel que mes $\widehat{BAT} = 30°$.
2. Trace la perpendiculaire à (AT) en A et la médiatrice de [AB]. Note O le point d'intersection de ces deux droites.
3. Trace le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O passant par A.
4. Démontre que la droite (AT) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A et que $(\mathscr{C})$ passe par B.
5. Soit P un point du demi-plan de bord (AB) contenant O tel que mes $\widehat{APB} = 30°$.
Démontre que P appartient à $(\mathscr{C})$.
6. Réciproquement, soit R un point appartenant au cercle $(\mathscr{C})$ et au demi-plan de bord (AB) contenant P.
Démontre que mes $\widehat{ARB} = 30°$.
7. Construis le symétrique $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (AB).
8. Place, dans le demi-plan de bord (AB) ne contenant pas le point P, un point Q sur $(\mathscr{C}')$ et mesure l'angle $\widehat{AQB}$.

Synthèse

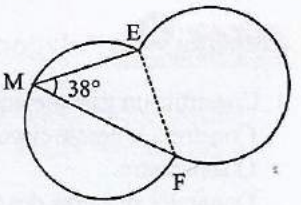
Les deux arcs de cercles ci-contre obtenus à partir de la figure de l'activité s'appellent arcs capables.



Exercices de fixation

2-1 Place deux points A et B tels que AB = 8 cm.
Construis l'ensemble des points M tels que : mes $\widehat{AMB} = 60°$.

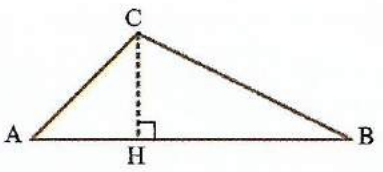
2-2 Détermine l'ensemble décrit par le point M sur la figure ci-contre.



Activités 3 Relations métriques dans un triangle

3.1. Aire d'un triangle

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle et H est le pied de la hauteur issue de C. On note $\mathscr{A}$ l'aire de ABC.



1. Donne l'expression de $\mathscr{A}$.
2. Exprime HC en fonction de sin $\widehat{BAC}$.
3. Déduis-en l'expression de $\mathscr{A}$ en fonction de sin $\widehat{BAC}$.
4. Donne l'expression similaire de $\mathscr{A}$ en fonction de sin $\widehat{ABC}$ et celle en fonction de sin $\widehat{ACB}$.

Synthèse

ABC est un triangle et $\mathcal{A}$ son aire.

On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}$ AB × AC × sin $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ BA × BC × sin $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$ CA × CB × sin $\widehat{ACB}$.

Exercices de fixation

3-1-1 ABC est un triangle tel que : AB = 5 cm, BC = 3 cm et mes $\widehat{ABC} = 30°$.
Calcule l'aire de ce triangle.

3-1-2 ABC est un triangle d'aire 12 cm² tel que : AC = 7 cm et mes $\widehat{ACB} = 60°$.
Détermine la longueur du côté [BC] de ce triangle.

3-1-3 ABC est un triangle d'aire 24 cm² tel que : AC = 6 cm, AB = 9 cm.
Détermine la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

3.2. Théorème des sinus

1. a) Trace un triangle ABC et le cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit à ce triangle (On prendra l'angle en A aigu).

On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC. Sachant que : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}$ AB × AC × sin $\widehat{A}$, exprime $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}$ en fonction de $\mathcal{A}$.

b) Construis le centre O du cercle ($\mathscr{C}$).

2. Soit D le point diamétralement opposé au point C et r le rayon du cercle ($\mathscr{C}$).

a) Justifie que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CDB}$ ont la même mesure.

b) Trouve une relation entre $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}$ et le rayon r du cercle ($\mathscr{C}$).

Synthèse

ABC est un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, ($\mathscr{C}$) son cercle circonscrit et r le rayon de ($\mathscr{C}$).

On a : $\frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AB \times AC \times BC}{2\mathcal{A}} = 2r$.

Exercices de fixation

3-2-1 Soit ABC un triangle tel que AC = 7 cm, BC = 5 cm et mes $\widehat{ACB} = 30°$.
Calcule l'aire du triangle ABC.

3-2-2 Soit ABC un triangle tel que BC = 5 cm et mes $\widehat{BAC} = 60°$.
Calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

3-2-3 Soit ABC un triangle tel que mes $\widehat{ABC} = 45°$.
Le rayon du cercle circonscrit à ABC est 1,5 cm.
Calcule AC.

Activité 4 Polygones réguliers

1. Construis un triangle équilatéral ABC.
Construis le cercle circonscrit au triangle ABC et note O son centre.
Donne les mesures des trois angles du triangle.
Trouve les mesures des angles $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOA}$ et $\widehat{BOC}$.
2. Construis un carré EFGH.
Construis le cercle circonscrit au carré EFGH et note I son centre.
Donne les mesures des quatre angles du carré.
Trouve les mesures des angles $\widehat{FIE}$, $\widehat{FIG}$, $\widehat{HIE}$ et $\widehat{HIG}$.

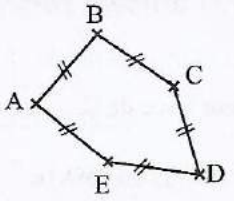
Synthèse

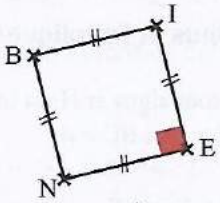
Dans un triangle équilatéral comme dans un carré, les côtés ont la même longueur et les angles ont la même mesure : ce sont des polygones réguliers.

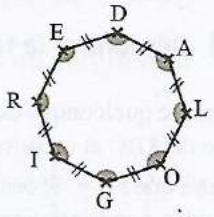
Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un polygone régulier, alors mes $\widehat{AOB} = \frac{360}{n}$, où O est le centre du cercle circonscrit au polygone et n le nombre de côtés du polygone.

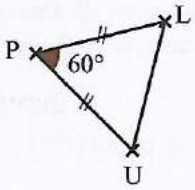
Exercices de fixation

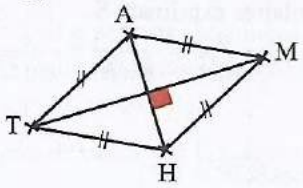
4-1 Pour chacune des figures ci-dessous, précise s'il s'agit ou non d'un polygone régulier. Justifie ta réponse.

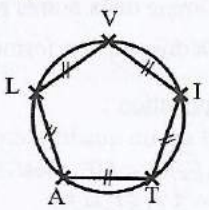
a) 

b) 

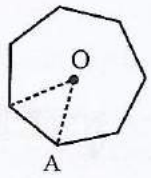
c) 

e) 

f) 



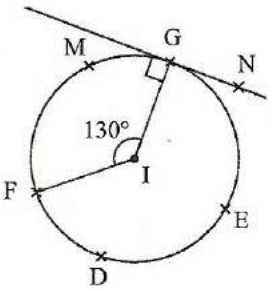
4-2 Le polygone ci-contre est un polygone régulier de centre O.
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.



4-3 Trace un cercle de centre O.
Place deux points E et F sur ce cercle tels que mes $\widehat{EOF} = 60°$.
Construis dans ce cercle le polygone régulier dont E et F sont deux sommets consécutifs.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Déterminer des mesures d'angles



On considère la figure ci-contre dans laquelle :
- les points E, D, F, N, M et G appartiennent au cercle de centre I ;
- le segment [GD] est un diamètre du cercle.

1. a) Justifie que la mesure de l'angle $\widehat{GEF}$ est égale à celle de l'angle $\widehat{GDF}$.
   b) Quelle est cette mesure ? Justifie ta réponse.
2. a) Justifie que la mesure de l'angle $\widehat{GMF}$ est égale à celle de l'angle $\widehat{NGF}$.
   b) Calcule la mesure de $\widehat{NGF}$.

Corrigé

1. a) Dans le cercle, $\widehat{GEF}$ et $\widehat{GDF}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{GF}$.
Or, dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

Méthode

Pour calculer que deux angles ont la même mesure, on peut justifier que ces deux angles sont inscrits et interceptent le même arc.

Donc : mes $\widehat{GEF}$ = mes $\widehat{GDF}$.

b) Dans le cercle, $\widehat{GIF}$ est l'angle au centre associé aux angles inscrits $\widehat{GEF}$ et $\widehat{GDF}$. De plus mes $\widehat{GIF} = 130°$.
Or, dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.
Donc : mes $\widehat{GEF}$ = mes $\widehat{GDF} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{GIF} = 130° \div 2 = 65°$.

2. a) Dans le cercle, $\widehat{GMF}$ et $\widehat{NGF}$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{GF}$.
Or, dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.
Donc : mes $\widehat{GMF}$ = mes $\widehat{NGF}$.

b) Dans le cercle, $\widehat{GIF}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{NGF}$. De plus N et I sont de part et d'autre de la droite (FG). Donc : mes $\widehat{NGF} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{GIF} = 180° - 130° \div 2 = 115°$.

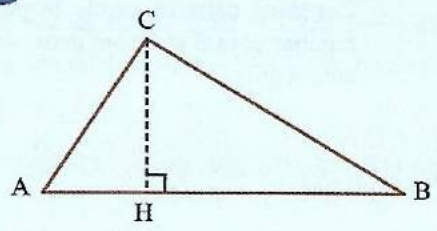
Exercice 2 Démontrer la formule du sinus et l'appliquer

ABC est un triangle quelconque dont les angles sont aigus et H est le pied de la hauteur issue de C.
On note S l'aire de ABC et on pose : AB = c, AC = b et BC = a.

1. a) Démontre que : $S = \frac{1}{2} bc\sin\widehat{A}$.
   b) Donne deux autres relations similaires exprimant S.
   c) Déduis-en la « formule du sinus » : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$.

2. Application :
EFGH est un quadrilatère tel que :
- mes$\widehat{EHG} = 60°$, mes$\widehat{GEH} = 25°$, mes$\widehat{EGF} = 30°$;
- HG = 8 et FE = 5.
   a) Calcule la longueur EG à 0,1 près.
   b) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$.

Corrigé



1. a) On a : $S = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} c \times CH$.
Or dans le triangle CHA rectangle en H, on a :
$\sin\widehat{A} = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{b}$, soit $CH = b\sin\widehat{A}$.
Donc : $S = \frac{1}{2} c \times CH = \frac{1}{2} c \times b\sin\widehat{A}$.
Conclusion : $S = \frac{1}{2} bc\sin\widehat{A}$.

b) Les deux autres relations sont :
$S = \frac{1}{2} ab\sin\widehat{C}$ et $S = \frac{1}{2} ac\sin\widehat{B}$.

c) On a : $S = \frac{1}{2} bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2} ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2} ab\sin\widehat{C}$.
Par suite : $bc\sin\widehat{A} = ac\sin\widehat{B} = ab\sin\widehat{C}$

$$\frac{1}{bc\sin\widehat{A}} = \frac{1}{ac\sin\widehat{B}} = \frac{1}{ab\sin\widehat{C}}$$

$$\frac{abc}{bc\sin\widehat{A}} = \frac{abc}{ac\sin\widehat{B}} = \frac{abc}{ab\sin\widehat{C}}$$

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

2. a) Appliquons le théorème du sinus dans le triangle EGH.
On a : $\frac{HG}{\sin\widehat{GEH}} = \frac{EG}{\sin\widehat{EHG}} = \frac{EH}{\sin\widehat{EGH}}$, soit
$\frac{8}{\sin 25°} = \frac{EG}{\sin 60°} = \frac{EH}{\sin\widehat{EGH}}$.

Par conséquent : $EG = \frac{8 \times \sin 60°}{\sin 25°}$

$EG \cong 16{,}4$

Méthode

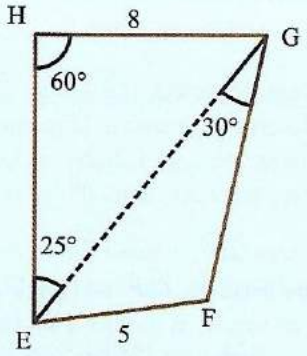
- Pour calculer la longueur d'un côté dans un quadrilatère, on peut utiliser le théorème des sinus.
- Pour déterminer la mesure d'un angle dans un triangle, on peut utiliser le théorème des sinus.

b) Appliquons le théorème du sinus dans le triangle EGF.
On a : $\frac{EG}{\sin\widehat{EFG}} = \frac{EF}{\sin\widehat{EGF}} = \frac{GF}{\sin\widehat{FEG}}$, soit

$\frac{16{,}4}{\sin\widehat{EFG}} = \frac{5}{\sin 30°} = \frac{GF}{\sin\widehat{FEG}}$.

Par conséquent : $\sin\widehat{EFG} = \frac{5}{16{,}4 \times \sin 30°} \cong 0{,}609$.

Donc mes$\widehat{EFG} \cong 37{,}5°$.



1 Angles inscrits

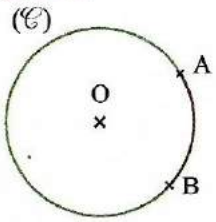
1.1. Relation entre mesure d'un angle inscrit et celle de l'angle au centre associé

1.1.1. Rappels

a) Arcs de cercle

Deux points distincts A et B d'un cercle définissent deux arcs de cercles.

- Le petit arc (en rouge) est noté $\overset{\frown}{AB}$.
- Le grand arc (en vert) est noté $\overset{\frown}{AB}$.

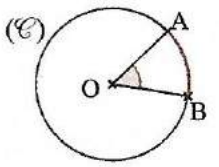


Remarque

Lorsque [AB] est un diamètre, les deux arcs de cercle ont la même longueur.

b) Angles au centre

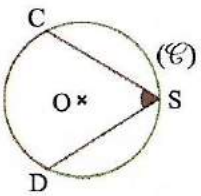
Définition Dans un cercle, un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle.



L'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

c) Angle inscrit

Définition Dans un cercle, un angle inscrit est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent ce cercle en deux points distincts.



L'angle $\widehat{CSD}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{CD}$.

Remarque

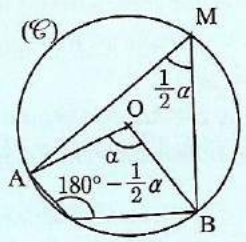
- L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$ lorsqu'il est aigu et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ lorsqu'il est obtus.
- L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte dans tous les cas de figure l'arc $\overset{\frown}{AB}$ car la mesure d'un angle géométrique n'excède pas 180°.

1.1.2. Relation entre mesure d'un angle inscrit et celle de l'angle au centre associé

Propriété Soit A et B deux points distincts d'un cercle (𝒞) de centre O.

Soit M un point de (𝒞) distinct de A et B.

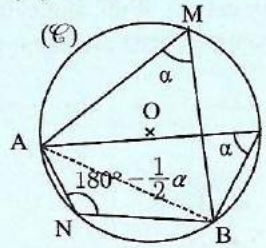
- Si M et O sont du même côté de la droite (AB), alors mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
- Si M et O sont de part et d'autre de la droite (AB), alors mes $\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.



Propriété Soit A et B deux points distincts d'un cercle (𝒞) de centre O.

Soit M en N deux points de (𝒞) distincts de A et B.

- Si M et N sont du même côté de la droite (AB), alors mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$.
- Si M et N sont de part et d'autre de la droite (AB), alors mes $\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{ANB}$.



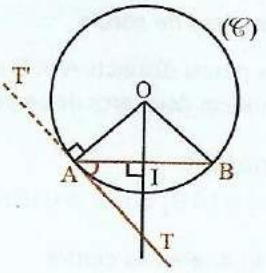
Remarque

La mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit associé.

1.2. Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente

Propriété Soit [AB] une corde d'un cercle $(\mathscr{C})$, qui n'est pas un diamètre, [AT] la demi-tangente en A à $(\mathscr{C})$ contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point O, [AT') l'autre demi-tangente en A.

On a : $\text{mes}\widehat{TAB} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$ et $\text{mes}\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{AOB}$.



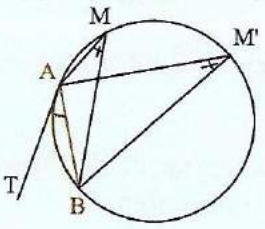
Remarque

- Les angles $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont des angles inscrits qui interceptent respectivement les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AB}$.
- Si [AB] est un diamètre et si [AT) et [AT') sont les demi-tangentes en A au cercle $(\mathscr{C})$, alors on a : $\text{mes}\widehat{AOB} = 180°$ et $\text{mes}\widehat{TAB} = \text{mes}\widehat{T'AB} = 90°$.

1.3. Angles inscrits interceptant le même arc

Propriété Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc ont la même mesure.

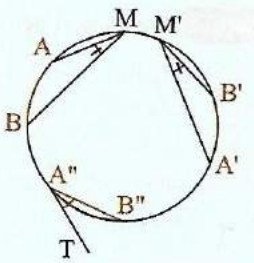
Les angles $\widehat{TAB}$, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AM'B}$ interceptent tous l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Donc mes $\widehat{TAB} = \text{mes}\widehat{AMB} = \text{mes}\widehat{AM'B}$.



1.4. Angles interceptant des arcs de même longueur

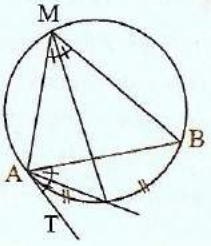
Propriété Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.

Les angles $\widehat{TA''B''}$, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{A'M'B'}$ interceptent respectivement les arcs $\overset{\frown}{A''B''}$, $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$.
De plus les arcs $\overset{\frown}{A''B''}$, $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$ ont la même longueur donc mes $\widehat{TA''B''} = \text{mes}\widehat{AMB} = \text{mes}\widehat{A'M'B'}$.



1.5. Angle inscrit et bissectrice

Propriété La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.

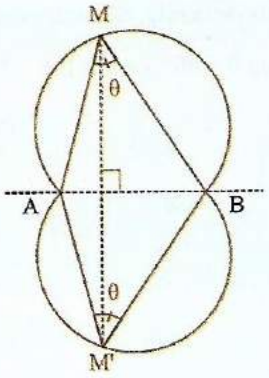


2 Arcs capables

2.1. Détermination de l'ensemble des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \alpha°$

Propriété Soit A et B deux points distincts, α un angle de mesure $\alpha°$ tel que : $0 < \alpha < 180°$.

L'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{AMB} = \alpha°$ est la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB).



Vocabulaire

- Ces deux arcs de cercles sont appelés arcs capables d'un angle $\alpha°$.
- L'arc capable (en réalité le double arc capable) relatif à un segment [AB] et à un angle α est le lieu géométrique des points d'où l'on "voit" le segment [AB] sous l'angle α.

Remarque

Soit M un point du plan distinct de A et B.

- L'ensemble des points M tels que mes $\widehat{AMB} = 0°$ est la droite (AB) privée du segment [AB].
- L'ensemble des points M tels que mes $\widehat{AMB} = 180°$ est le segment [AB] privée des points A et B.

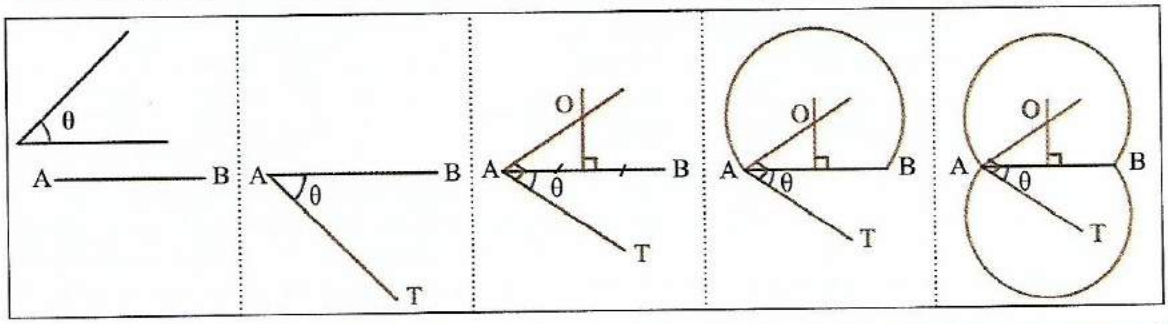
2.2. Construction de l'ensemble des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$

Soit A et B deux points distincts, θ un angle de mesure $\theta°$ tel que : $0 < \theta° < 180°$.

Programme de construction

Méthode 1

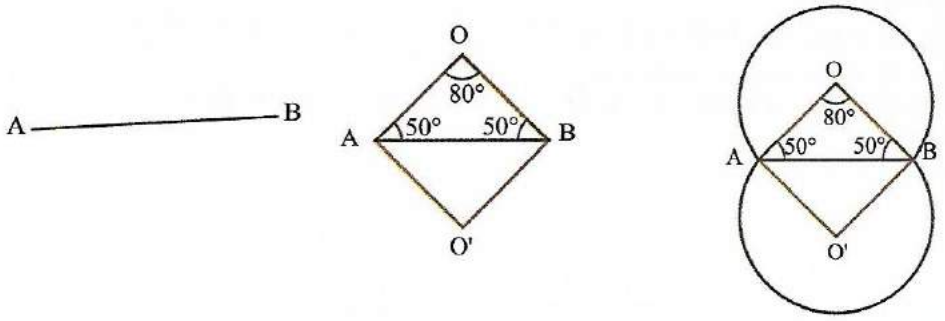
- Tracer le segment [AB] ;
- Placer un point T tel que : mes $\widehat{TAB} = \theta°$;
- Construire le point O, intersection de la perpendiculaire à (AT) en A et de la médiatrice de [AB] ;
- Construire l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de bord (AB) ne contenant
- pas le point T ;
- Construire le symétrique par rapport à (AB) de cet arc de cercle ;
- L'ensemble cherché est la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB).



Méthode 2

- Tracer le segment [AB] ;
- Construire deux triangles OAB et O'AB isocèles respectivement en O et O' tels que les angles de bases mesurent chacun $(180 - 2\,\theta) \div 2$.
- Tracer deux arcs de cercle, de centre O et O', passant par A et B.

Exemple : Pour $\theta = 40°$, on a : $(180 - 2 \times 40) \div 2 = 50°$. On obtient la séquence suivante :



On remarque que dans la construction ci-dessus, on utilise la relation qui dit que la mesure d'un angle inscrit dans un cercle est la moitié de ma mesure de l'angle au centre associé.

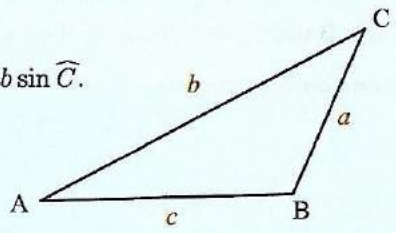
Remarque

L'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{AMB} = 90°$ est un cercle de diamètre [AB], privé des points A et B.

3 Relations métriques dans un triangle

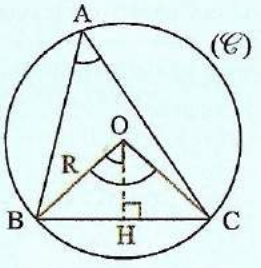
3.1. Aire d'un triangle

Propriété Soit ABC un triangle et $\mathcal{A}$ son aire.
On pose : BC = a ; AC = b et AB = c.
On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.



3.2. Théorème des sinus

Propriété Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit et r le rayon de $(\mathscr{C})$.
On pose : BC = a ; AC = b et AB = c.
On a : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2r$.



Remarque

On peut appliquer le théorème des sinus pour :

- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle connaissant la mesure de deux angles et la longueur d'un côté.
- Calculer la mesure d'un angle d'un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure d'un angle non compris entre ces deux côtés.

4 Polygones réguliers

4.1. Définition

Définition Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.

Exemple : Un triangle équilatéral et un carré sont des polygones réguliers.

4.2. Propriétés

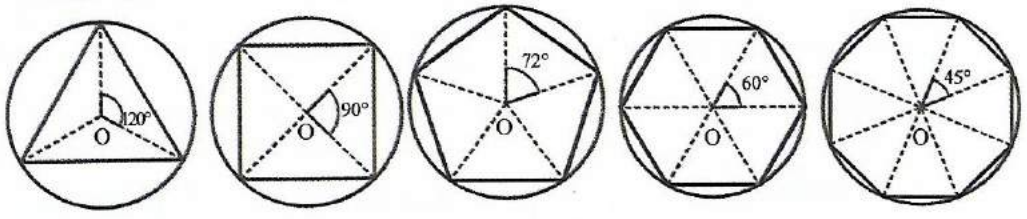
Propriétés

- Tous les sommets d'un polygone régulier appartiennent à un même cercle.
- Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un polygone régulier de centre O et à n côtés, alors la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ du polygone est égale à $\frac{360}{n}$.

Définition Le centre d'un polygone régulier est le centre du cercle circonscrit à ce polygone régulier.

4.3. Constructions

Triangle équilatéral | Carré | Pentagone régulier | Hexagone régulier | Octogone régulier



Le tableau suivant donne les noms de quelques polygones :

Nombre de côtés	Nom du polygone
3	Triangle
4	Quadrilatère
5	Pentagone
6	Hexagone
7	Heptagone
8	Octogone

Nombre de côtés	Nom du polygone
9	Ennéagone
10	Décagone
12	Dodécagone
15	Pentédécagone
20	Icosagone

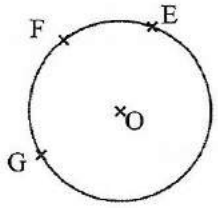
Un polygone régulier à 3 côtés est un triangle équilatéral.
Un polygone régulier à 4 côtés est un carré.
Pour les polygones réguliers à n côtés, $n > 4$, on ajoute régulier au nom figurant dans le tableau.

Exercices de renforcement

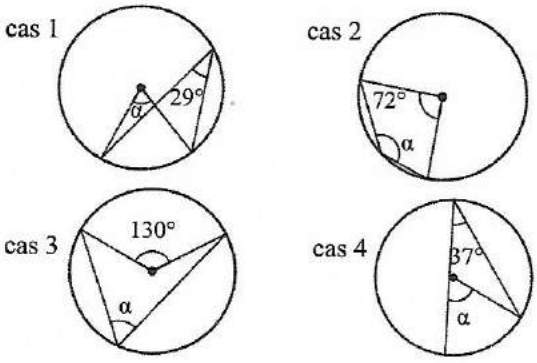
1 On considère la figure ci-dessous dans laquelle les points E, F et G sont sur le cercle de centre O.

1. Sachant que mes$\widehat{EOF} = 65°$, détermine la mesure de l'angle $\widehat{EGF}$.

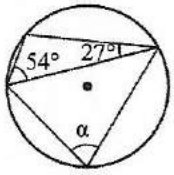
2. Sachant que mes $\widehat{EFG} = 155°$, détermine la mesure de l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{EFG}$.



2 Dans chacun ces cas suivants, α est la mesure d'un angle.
Détermine α en utilisant les données de la figure.

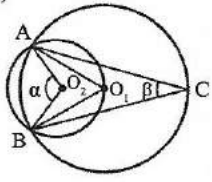


3 Détermine α

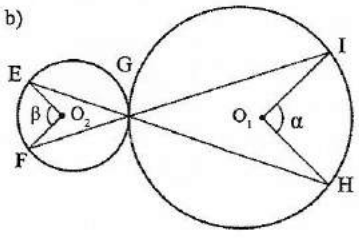


4 Dans chacun des cas suivants, détermine la relation entre α et β sachant que O_1 et O_2 sont les centres des cercles.

a)



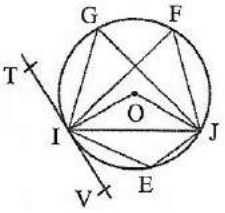
b)



5 Soit FOI un triangle isocèle en O et M un point de l'arc $\widehat{FI}$ du cercle circonscrit à FOI.
Démontre que (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMI}$.

6 TEL est un triangle équilatéral et H est le milieu de [LE].
(𝒞) est le cercle circonscrit au triangle THL et M est un point de l'arc $\widehat{TL}$.
Détermine la mesure de chacun des angles $\widehat{HML}$, $\widehat{TMH}$ et $\widehat{TML}$.

7 On donne la figure ci-contre où :
- I, J, E, F et G sont sur le cercle de centre O ;
- (TV) est la tangente au cercle en I ;
- les arcs $\widehat{EI}$ et $\widehat{JF}$ ont la même longueur.



On donne :
mes $\widehat{JFI} = 35°$ et mes$\widehat{EJI} = 27°$.
Pour chaque ligne du tableau suivant, une seule réponse a, b et c est juste.
Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre qui correspond à la réponse juste.

		a	b	c
1	La mesure de l'angle $\widehat{JOI}$ est	35°	17,5°	70°
2	La mesure de l'angle $\widehat{IGJ}$ est	35°	17,5°	70°
3	La mesure de l'angle $\widehat{FIJ}$ est	35°	27°	54°
4	La mesure de l'angle $\widehat{IEJ}$ est	35°	70°	145°
5	La mesure de l'angle $\widehat{VIJ}$ est	35°	17,5°	70°
6	La mesure de l'angle $\widehat{TIJ}$ est	145°	70°	17,5°

8 Soit ROI un triangle. Parmi les formules suivantes, recopie celles qui donnent l'aire de ROI.

$\frac{1}{2}\text{OR} \times \text{OI} \sin\widehat{\text{R}}$; $\frac{1}{2}\text{OR} \times \text{OI} \sin\widehat{\text{O}}$;

$\frac{1}{2}\text{RO} \times \text{RI} \sin\widehat{\text{R}}$; $\frac{1}{2}\text{RO} \times \text{RI} \sin\widehat{\text{I}}$;

$\frac{1}{2}\text{IR} \times \text{IO} \sin\widehat{\text{O}}$; $\frac{1}{2}\text{IR} \times \text{IO} \sin\widehat{\text{I}}$.

9 ABC est un triangle.
Le rayon du cercle circonscrit à ABC est $r = 2$.
On sait que AB = 5, AC= 4 et mes $\widehat{B} = 45°$.
Calcule la valeur exacte de BC.

10 Un triangle ABC a pour aire S = 5 cm².
De plus, AB = 13 cm et AC = 2 cm.
Calcule la (ou les) longueur(s) possible(s) du troisième côté BC.

Exercices

11 ABC est un triangle.
On sait que AB = 7, AC = 4, mes $\widehat{A} = 60°$ et mes $\widehat{C} = 45°$.
1. Calcule la valeur exacte de BC.
2. Calcule la valeur exacte de sin $\widehat{B}$.

12 ABC est un triangle tel que : BC = 9, mes $\widehat{B} = 65°$ et mes $\widehat{C} = 47°$.
1. Calcule la valeur arrondie au dixième de AB.
2. Calcule la valeur arrondie au dixième de AC.

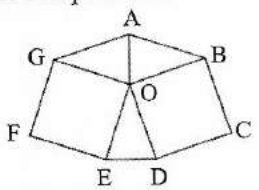
13 ABC est un triangle avec BC = 4, mes $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$ et mes $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$.
1. Démontre que : $\sin \widehat{A} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
2. Calcule les valeurs exactes de AB et AC.
3. Calcule la valeur exacte de l'aire de ABC.

14 Recopie et complète la phrase suivante en utilisant les mots : longueur, mesure, régulier, côtés, angles.
« Un polygone ..... est un polygone dont tous les ..... ont la même ..... et dont tous les ..... ont la même ..... ».

15 Les polygones suivants sont des polygones réguliers inscrits dans un cercle.
Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Polygone	Angle au centre en O	Angle au sommet associé en degré
Pentagone		
Hexagone		
Octogone		
Ennéagone		
Décagone		
Dodécagone		

16 ABCDEFG est un heptagone composé de deux carrés et de trois triangles équilatéraux comme l'indique la figure ci-contre.
Dis si ABCDEFG est un polygone régulier.
Justifie ta réponse.



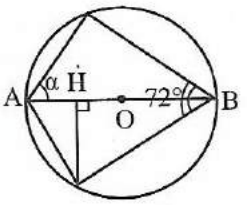
17 L'objet de l'exercice est de construire un pentagone régulier MARIE de centre O tel que MA = 5 cm.
1. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{MOA}$.
2. Construis le triangle MOA.
3. Construis le pentagone MARIE.

18 Trace un segment [AB] de longueur 5 cm et construis l'ensemble des points M tels que : mes $\widehat{AMB} = 50°$.

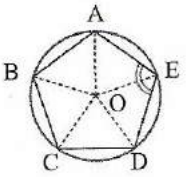
19 Trace un segment [AB] de longueur 7 cm et construis l'ensemble des points M tels que : mes $\widehat{AMB} = 130°$.

Exercices d'approfondissement

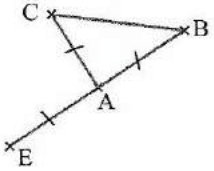
20 Détermine α sachant que HA = HO et que O est le centre du cercle.



21 Dans la figure ci-contre, ABCDE est un pentagone régulier de centre O.
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{DEA}$.



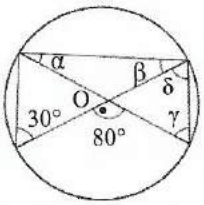
22 Dans cet exercice, on étudie la figure ci-contre où :
• ABC est un triangle isocèle tel que : AB = AC = 4 cm ;
• E est le symétrique de B par rapport à A.



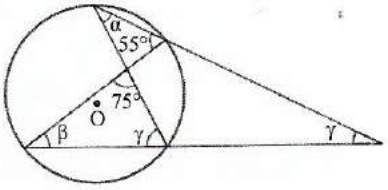
1. On se place dans le cas particulier où la mes $\widehat{ABC} = 42°$.
a) Construis la figure en vraie grandeur.
b) Quelle est la nature du triangle BCE ? Justifie ta réponse.
c) Prouve que l'angle $\widehat{EAC}$ mesure 84°.
2. On se place dans le cas général où la mesure de $\widehat{ABC}$ n'est pas donnée.
Justifie que pour n'importe quelle valeur de $\widehat{ABC}$, on a : mes $\widehat{EAC} = 2\text{mes}\widehat{ABC}$.

23 Dans chacun des cas suivants, détermine la valeur de chacun des angles α, β, γ et δ sachant que O le centre du cercle.

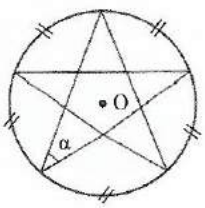
a)



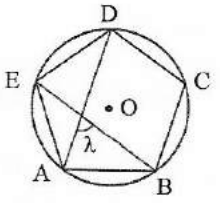
b)



24 Dans la figure ci-contre, O le centre du cercle.
Détermine α.



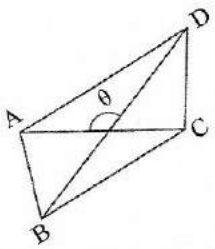
25* Dans la figure ci-contre, ABCDE est un pentagone régulier de centre O.
Détermine λ.



26 Démontre que si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, alors les angles opposés sont supplémentaires.

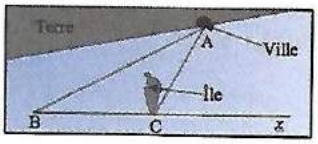
27 Démontre la propriété suivante :
ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$.

28 On admet que deux angles supplémentaires ont le même sinus.
Soit ABCD un quadrilatère tel que les segments [AC] et [BD] sont à l'intérieur du quadrilatère.

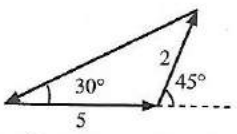


Démontre que l'aire S du quadrilatère ABCD est donnée par : $S = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\theta$, où θ désigne l'angle formé par les diagonales.

29* Un bateau avance à 24 km/h. Pour aller de B à la ville A, il devra passer par C car la profondeur est insuffisante entre la terre et l'île. À 8 heures, il passe en B et le capitaine trouve mes $\widehat{ABC} = 32°$. À 8 heures 20 min, le bateau arrive en C. Juste avant de virer vers A le capitaine mesure $\widehat{ACx}$ et trouve 57°.
À quelle heure le bateau arrivera-t-il en A ?

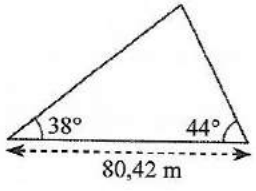


30 Un promeneur marche en lignes droites 5 km en direction de l'est, puis 2 km en direction du nord-est.
Surpris par le mauvais temps, il retourne directement vers son point de départ en courant.
(Voir figure ci-dessus)
Sur quelle distance a-t-il couru ?



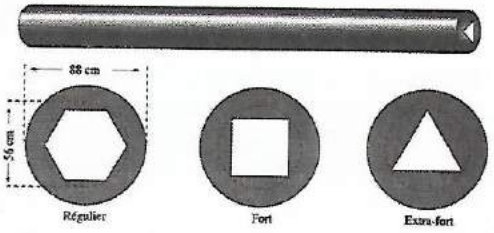
Situations d'évaluation

31* La coopérative d'un lycée a obtenu une parcelle, représentée par la figure ci-contre, pour la culture de tomate et de carotte.



Pour une meilleure exploitation de cette parcelle, les élèves du club veulent connaître son périmètre et son aire.
1. Calcule les longueurs des deux autres côtés de la parcelle.
2. Détermine le périmètre et l'aire de la parcelle.

32 Une entreprise de fabrication de colonnes en béton a distribué des prospectus sur lesquels figure le dessin ci-dessous.
Il est précisé sur le prospectus que ces colonnes sont creuses pour en diminuer la masse. Trois modèles sont offerts : régulier, fort et extra-fort. Ces piliers sont produits en longueurs de 10 m.



Des élèves d'une classe de 2nde C ont reçu quelques-uns de ces prospectus et le chef de classe prétend que le modèle « fort » utilise moins de béton que les deux autres. Certains élèves non convaincus décident de contredire le chef de classe.
1. Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans un cercle de rayon r.
Détermine le périmètre et l'aire du polygone régulier en fonction de n et de r.
2. Calcule le volume de béton pour couler une colonne de chaque modèle.
Justifie si le chef de classe a raison ou non.

Coup de Pouce

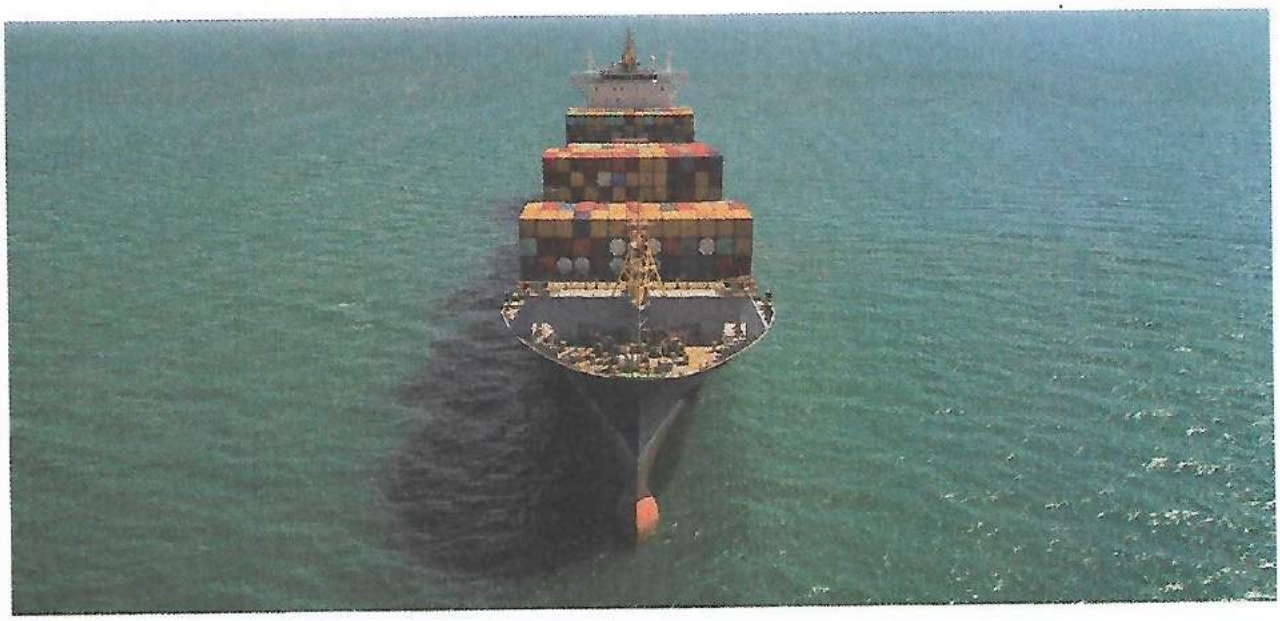
25 Déterminer mes $\widehat{ABE}$ sachant que le triangle ABE est isocèle en A.
En notant I le point d'intersection de (AD) et (BE), déterminer mes $\widehat{BAI}$.
Déduire A dans le triangle BAI.

29 • Calculer la distance BC en utilisant la vitesse et le temps mis.
• Calculer la distance CA en utilisant le théorème de sinus.
• Calculer alors le temps mis pour aller de C à A.

31 Utiliser la formule du sinus pour déterminer les longueurs des côtés et la formule de l'aire pour déterminer l'aire.

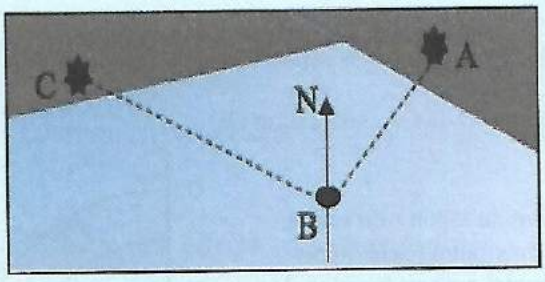
Leçon 10

ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE



Comment un navire repère-t-il sa position en pleine mer ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Des élèves d'une classe de 2nde C ont effectué une sortie au port. En visite dans un bateau, le capitaine dudit bateau leur explique l'image ci-contre accrochée dans une cabine en ces termes :

« En navigation côtière, un marin peut se repérer en visant des amers, c'est-à-dire des points fixes comme des phares, des balises, …, visibles et marqués sur la carte. Pour le bateau B, le relèvement de l'amer A est l'angle orienté de la demi-droite [BN), direction du nord, avec la demi-droite [BA) dans le sens des aiguilles d'une montre ».

Très intéressés alors par le métier de marin, les élèves reproduisent le schéma et décident de s'informer sur les angles orientés afin de savoir comment le relèvement de l'amer permet-il au marin de se repérer.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Le radian

Connaître : la définition de la mesure d'un angle en radian

Exprimer : *la mesure d'un angle en radian*

Convertir : des mesures d'angles de degré en radian et inversement

2 Le cercle trigonométrique

Connaître : la définition du cercle trigonométrique

3 Angle orienté de deux vecteurs

Connaître : la définition d'un angle orienté ; la définition de la mesure principale d'un angle orienté

Reconnaître : deux angles orientés opposés

Lire : la mesure principale d'un angle orienté sur le cercle trigonométrique

Mesurer : *un angle orienté*

Exprimer : la mesure d'un angle en radian

Déterminer : la mesure principale d'un angle orienté dans une configuration donnée

Construire : *un angle orienté connaissant la mesure principale*

Placer : le point image, sur le cercle trigonométrique, d'un angle orienté dont on connaît la mesure principale

4 Cosinus, sinus et tangente d'un angle

Connaître :

- *la définition du cosinus d'un angle orienté ;*
- *la définition du sinus d'un angle orienté ;*
- *la définition de la tangente d'un angle orienté ;*
- *les propriétés relatives au cosinus, au sinus et à la tangente d'un angle orienté*

Retrouver : les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle orienté dont on connaît la mesure principale en utilisant le cercle trigonométrique

5 Traitement de situation

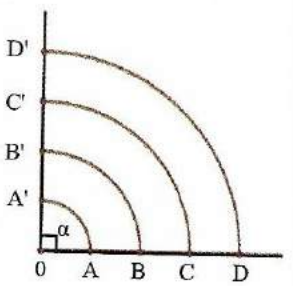
Traiter une situation faisant appel aux angles orientés et trigonométrie

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Le radian

1.1. Mesure d'un angle en radian

Soit quatre arcs de cercles $\overset{\frown}{AA'}, \overset{\frown}{BB'}, \overset{\frown}{CC'}$ et $\overset{\frown}{DD'}$ de rayons respectifs OA, OB, OC et OD.
L'angle α est droit. L'unité est le centimètre.
On donne : OA = 1 ; OB = 2 ; OC = 3 ; OD = 4.

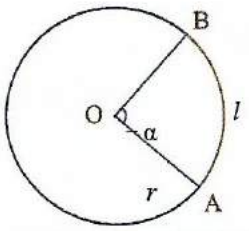


1. Donne l'expression du périmètre $\mathscr{P}$ d'un cercle en fonction du rayon r du cercle.
2. Recopie et complète le tableau suivant en simplifiant au maximum les écritures.
Exprime sur la deuxième ligne la longueur de chacun des quatre arcs en fonction de π.

Rayon r (en cm)	1	2	3	4
Longueur l de l'arc (en cm)				
$\frac{l}{r}$				

3. Quel constat fais-tu du rapport $\frac{l}{r}$?
4. Ce rapport $\frac{l}{r}$ représente la mesure en radian de l'angle α.
Écris α en degré (°) puis en radian (rad).
5. Généralisation

Soit un cercle de rayon r.
Exprime la mesure α en radians de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ en fonction de la longueur l de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et du rayon r du cercle.
Déduis-en la mesure en radians d'un angle au centre qui intercepte un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle.



Synthèse

Outre le degré, il existe une autre unité de mesure d'angle appelé le radian.

Exercice de fixation

1. Donne la longueur d'un demi-cercle de rayon 2 cm.
2. Donne la longueur d'un quart de cercle de rayon 4 cm.

1.2. Conversions degrés-radians

1. En utilisant le résultat de l'activité 1.1, donne la mesure de l'angle plat en radians.
2. On admet que les mesures en radians et en degrés sont proportionnelles.
Recopie et complète.

Mesure de l'angle en degrés	180	x
Mesure de l'angle en radians	...	α

D'où

$$\frac{x}{\ldots\ldots} = \frac{\alpha}{\ldots\ldots}$$

3. Déduis-en une expression de x en fonction de α, puis celle de α en fonction de x.

Synthèse

180 degrés correspondent à π radians.

Exercices de fixation

1-2-1 Recopie et complète le tableau suivant :

Mesures en degrés	30	...	60	...	135	...
Mesures en radians	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\frac{5\pi}{6}$

1-2-2 Convertis en degrés chacune des mesures d'angles suivantes : $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{100}$.

1-2-3 Convertis en radians chacune des mesures d'angles suivantes : 25°, 100°, 170°.

Activité 2 Le cercle trigonométrique

1. Trace un cercle ($\mathscr{C}$) et place trois points A, B et C sur ($\mathscr{C}$).
2. Détermine le nombre de sens de parcours du cercle ($\mathscr{C}$) pour aller de A à B.
3. Trace un cercle de centre O et de rayon 1 cm. Place sur ce cercle deux points I et J. Indique par une flèche le sens de parcours de I à J qui soit celui du sens contraire des aiguilles d'une montre.

Synthèse

Tout cercle de rayon 1 orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre s'appelle cercle trigonométrique.

Exercice de fixation

Parmi les figures ci-dessous, identifie celle qui représente le cercle trigonométrique.

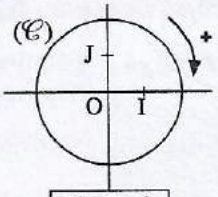


Figure 1

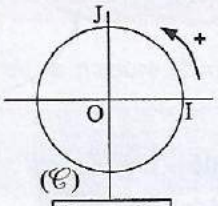


Figure 2

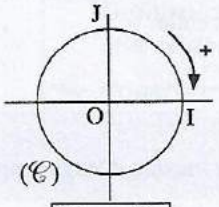


Figure 3

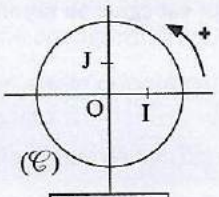


Figure 4

Activités 3 Angle orienté de deux vecteurs

3.1. Définition d'un angle orienté

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

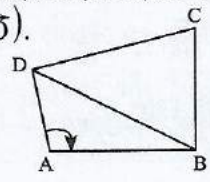
1. a) Place un point O.
   b) Construis deux points A et B tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
   c) Trace un cercle de centre O et sécant aux supports des deux vecteurs.
2. a) Place un point I, distinct de O.
   b) Construis deux points C et D tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{IC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ID}$.
   c) Trace le cercle de centre I ayant le même rayon que le cercle de la question 1.
3. a) Compare les longueurs des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ à l'aide d'un compas.
   b) Compare le sens de parcours de A vers B à celui de C vers D.

Synthèse

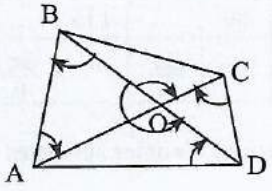
Tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ non nuls permet de définir un angle appelé angle orienté.

Exercices de fixation

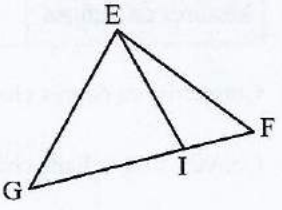
3-1-1 On considère la figure ci-dessous dans laquelle l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$, a été marqué. Reproduis la figure et marque de même les angles suivants : $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$, $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.



3-1-2 Nomme chacun des angles marqués dans la figure ci-dessous.



3-1-3 À l'aide de la figure ci-dessous, nomme :
- un angle plat ;
- des angles opposés.



3.2. Mesure principale d'un angle orienté

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

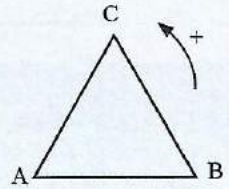
1. a) Place un point O.
   b) Construis deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
   c) Trace un cercle de centre O sécant aux supports des deux vecteurs.
2. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BOA}$ à l'aide d'un rapporteur. Convertis cette mesure en radian puis vérifie que cette dernière appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Synthèse

Tout angle orienté admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$: c'est sa mesure principale.

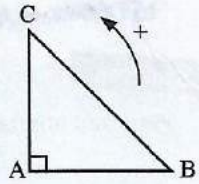
Exercices de fixation

3-2-1 On considère le triangle équilatéral ABC ci-contre.
Détermine la mesure principale en radians de chacun des angles suivants.
$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$.



3-2-2 Trace un segment [AB].
Construis un point C tel que
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{2\pi}{3}$.
Construis un point E tel que
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}}) = -\frac{\pi}{4}$.

3-2-3 On considère le triangle rectangle isocèle ABC ci-contre.
Détermine la mesure principale en radians de chacun des angles suivants.
$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})$.



3-2-4 Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan.
Place sur le cercle trigonométrique de centre O les points R, S et T tels que :
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OR}}) = \frac{\pi}{6}$, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OS}}) = \frac{3\pi}{4}$ et
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OT}}) = -\frac{\pi}{2}$.

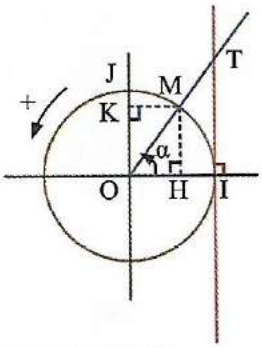
Activités 4 Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

4.1. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
$(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$ est un angle orienté de mesure principale α.

Soit M le point du cercle trigonométrique tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = \alpha$.
Soit H (resp. K) le pied de la hauteur du triangle MOI (resp. JMO) issue de M.
Le triangle OHM est rectangle en H.

1. En utilisant la définition du cosinus et du sinus d'un angle aigu, exprime, en fonction de α, l'abscisse x_M de M et l'ordonnée y_M de M.
2. En appliquant la propriété de Thalès dans le triangle OIT, exprime IT en fonction de x_M et y_M.



Synthèse

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan et (𝒞) le cercle trigonométrique de centre O.
Le cosinus d'un angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ est l'abscisse du point M de (𝒞) tel que $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$.
Le sinus d'un angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ est l'ordonnée du point M de (𝒞) tel que $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$.
La tangente d'un angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ est le quotient de l'ordonnée par l'abscisse du point M de (𝒞) tel que $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$.

Exercices de fixation

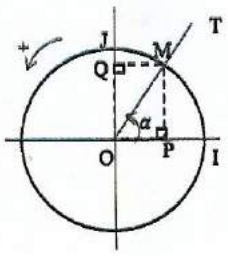
4-1-1 Détermine le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{3}$.

4-1-2 Détermine la tangente de $\frac{\pi}{4}$.

4.2. Propriétés du sinus et du cosinus

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
$(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$ est un angle orienté de mesure principale α.

Sur la figure ci-contre, M est le point image du nombre α.
Lorsque α varie, le point M parcourt le cercle.
1. a) Donne l'intervalle de ℝ décrit par l'abscisse x_M de M.



b) Donne l'intervalle de $\mathbb{R}$ décrit par l'ordonnée y_M de M.

2. a) Applique le théorème de Pythagore au triangle OPM rectangle en P.

b) Déduis-en que : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Synthèse

Pour tout nombre réel α, on a : $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ et $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Exercices de fixation

4-2-1 On donne un nombre réel x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin x = \frac{2}{7}$. Calcule $\cos x$.

4-2-2 On donne un nombre réel x de l'intervalle $]0;\pi]$ tel que : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Calcule $\sin x$.

4.3. Expression de tanα en fonction de cosα

En utilisant la relation $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, exprime $1 + \tan^2\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$.

Synthèse

Pour tout nombre réel α différent de $-\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{2}$, on a : $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Exercices de fixation

On donne un nombre réel x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ tel que : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Calcule $\tan x$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Utiliser les angles orientés pour démontrer que des points sont alignés

ABCD est un carré tel que : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
On construit les triangles équilatéraux AEB et BCF tels que : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
L'objet de l'exercice est de démontrer que les points D, E et F sont alignés.

1. Détermine la nature de chacun des triangles DEA et BEF.
2. Détermine la mesure de chacun des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right)$.
3. Justifie alors que les points D, E et F sont alignés.

Corrigé

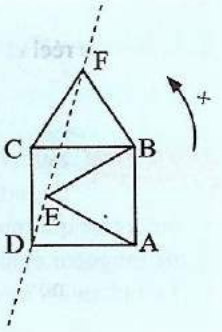
1. • Déterminons la nature du triangle DEA.
Le triangle BEA étant équilatéral, on a AE = AB.
Et comme ABCD est un carré, on a : AB = AD. Par conséquent AE = AD. On en déduit que le triangle DEA est isocèle en A.

• Déterminons la nature du triangle BEF.
D'une part, en raisonnant comme ci-dessus, on a : BE = BA et BA = BF ; d'où BE = BF.
Ainsi le triangle BEF est isocèle en B.

Méthode

Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut démontrer que :
mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \pi$ ou mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = 0$.

D'autre part, mes $\widehat{EBF}$ = mes$\widehat{EBC}$ = mes$\widehat{CBF}$, avec mes$\widehat{EBC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.
et mes$\widehat{EBC} = \frac{\pi}{3}$. Ainsi mes$\widehat{EBF} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Le triangle BEF est aussi rectangle en B.
En définitive, le triangle BEF est isocèle et rectangle en B.



2. • L'angle $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}})$
Le triangle DEA étant isocèle en B, on a : 2mes$\widehat{DEA}$ + mes$\widehat{DAE} = \pi$,
soit 2mes$\widehat{DEA} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \pi$.
D'où mes$\widehat{DEA} = \frac{5\pi}{12}$.
Comme on tourne dans le sens trigonométrique de $\overrightarrow{ED}$ vers $\overrightarrow{EA}$, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}})$ a pour mesure principale $\frac{5\pi}{12}$.

• L'angle $(\widehat{\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EF}})$
Le triangle BEF étant isocèle et rectangle en B, on a : mes$\widehat{EBF} = \frac{\pi}{4}$.
Comme on tourne dans le sens trigonométrique de $\overrightarrow{EB}$ vers $\overrightarrow{EF}$, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EF}})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{4}$.

3. Pour justifier que les points D, E et F sont alignés, démontrons que Mes$(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}}) = \pi$.
On a : mes$\widehat{DEF}$ = mes$\widehat{DEA}$ + mes$\widehat{AEB}$ + mes$\widehat{BEF} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{12\pi}{12} = \pi$.
Par conséquent Mes$(\widehat{\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}}) = \pi$. On conclut alors que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 2 Déterminer la mesure principale d'un angle orienté dans une configuration donnée

ABCD est un carré de centre O et de sens direct.
Détermine la mesure principale de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OC}})$.

Corrigé

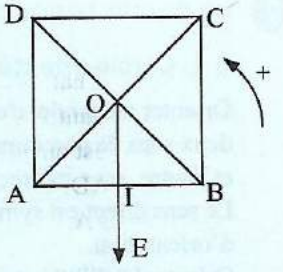
• L'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$:
Étant donné que mes $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$ et que l'on tourne de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AD}$ dans le sens trigonométrique,
on a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = +\frac{\pi}{2}$.

• L'angle $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}})$:
Étant donné que mes $\widehat{COB} = \frac{\pi}{2}$ et que l'on tourne de $\overrightarrow{OC}$ vers $\overrightarrow{OB}$ dans le sens contraire au sens trigonométrique, on a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{2}$.

Méthode

Pour déterminer la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, on procède comme suit :
- Déterminer la mesure α en radian de $\widehat{BAC}$.
- Si le sens de parcours de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$ est positif alors mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = +\alpha$.
- Si le sens de parcours de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$ est négatif alors Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -\alpha$.

• L'angle $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OC}})$:
Plaçons tout d'abord les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{OC}$ à même origine en choisissant le vecteur $\overrightarrow{OE}$ comme représentant d'origine O du vecteur $\overrightarrow{DA}$.



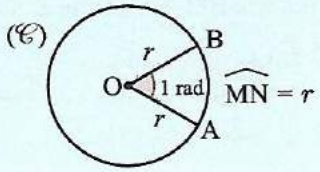
On a : $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$.
L'angle $\widehat{BOC}$ mesure $\frac{\pi}{2}$ et l'angle $\widehat{BOI}$ mesure $\frac{\pi}{4}$ (car (OI) est la bissectrice de $\widehat{BOA}$), donc l'angle $\widehat{COI}$ a pour mesure $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, c.-à-d. $\frac{3\pi}{4}$.
Comme on tourne dans le sens trigonométrique pour aller de $\overrightarrow{OE}$ vers $\overrightarrow{OC}$,
on a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OC}}) = \frac{3\pi}{4}$.

1 Le radian

1.1. Mesure d'un angle en radian

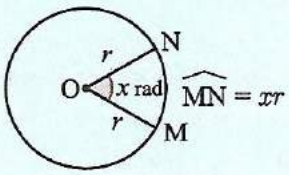
1.1.1. Définition

Définition Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O.
Le radian est la mesure de tout angle au centre qui intercepte sur le cercle $(\mathscr{C})$ un arc de longueur égale au rayon du cercle.
Le radian est noté rad.



1.1.2. Longueur d'un arc

Propriété Sur un cercle de rayon r, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure α rad est $r\alpha$.



1.2. Conversions degrés-radians

Formule Soit x la mesure en degré et α la mesure en radian d'un angle.
On a : $\frac{x}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$.

Il y a proportionnalité entre la mesure en radian d'un angle et sa mesure en degrés par la correspondance :

$$\frac{\text{mesure en dégrés}}{180} = \frac{\text{mesure en radian}}{\pi}$$

Exemples

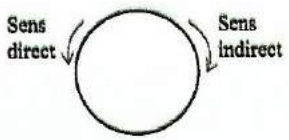
Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30	0	x
Mesure en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y

C'est un tableau de proportionnalité : $y = \frac{\pi}{180}x$.

2 Le cercle trigonométrique

2.1. Cercle orienté - Plan orienté

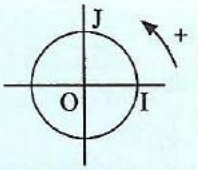
Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle. Il y a deux sens de parcours possibles : l'un est appelé sens direct(ou positif) et l'autre, sens indirect (ou négatif, ou rétrograde).
Le sens direct est symbolisé par une flèche et un « + » indiquant le sens d'orientation.
Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre appelé aussi sens trigonométrique.



2.2. Définition de cercle trigonométrique

Définition Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct.

Le repère (O, I, J) est dit orthonormé direct.



3 Angle orienté de deux vecteurs

3.1. Définition d'un angle orienté

3.1.1. Définition

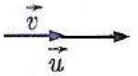
Définition $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan orienté.
Soit O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec un cercle de centre O.
L'ensemble des couples $(\vec{u},\vec{v})$ de deux vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc $\overset{\frown}{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé angle orienté et est noté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Remarque

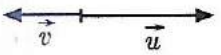
Le couple de vecteurs $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est un représentant de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Cas particuliers

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle orienté nul

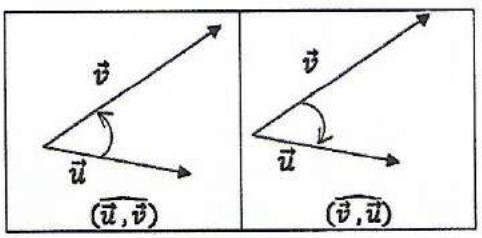


Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire, alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle orienté plat



3.1.2. Opposé d'un angle orienté

Définition Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan orienté.
L'opposé de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est l'angle $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$.



3.2. Mesure principale d'un angle orienté

Définition Soit $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ un angle orienté.

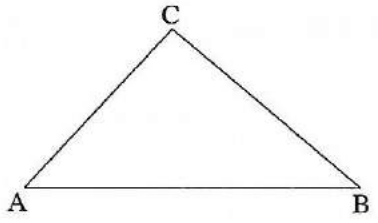
Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec un cercle de centre O.

La mesure principale en radian de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, notée $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, est définie par :

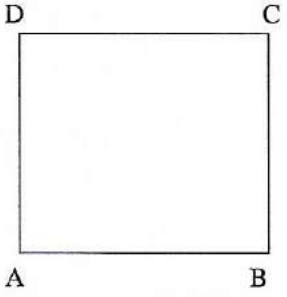
- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 0$ si $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ est l'angle nul ;
- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \pi$ si $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ est l'angle plat ;
- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \text{mes}\widehat{AOB}$ si $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ n'est ni l'angle nul ni l'angle plat et le sens du déplacement de M vers N sur le petit arc $\overset{\frown}{MN}$ est le sens direct ;
- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = -\text{mes}\widehat{AOB}$ si $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ n'est ni l'angle nul ni l'angle plat et le sens du déplacement de M vers N sur le petit arc $\overset{\frown}{MN}$ est le sens indirect.

Remarque

- La mesure de l'angle orienté plat est π et non $-\pi$. Ainsi, la mesure principale d'un angle orienté est un nombre réel qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
- Si un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est différent de l'angle plat, alors $\text{Mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -\text{Mes}(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$.
- Un triangle ABC est dit direct si le parcours de A à C en passant par B sur le cercle circonscrit à ce triangle se fait dans le sens direct.



- Un carré ABCD est dit direct si le parcours de A à D en passant par B et C sur le cercle circonscrit à ce carré se fait dans le sens direct.



Propriété Deux angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.

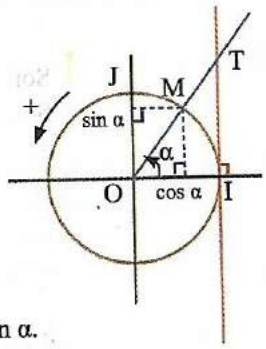
Remarque

Tout angle orienté est parfaitement déterminé par la donnée de sa mesure principale.

4 Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

$(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est un angle orienté de mesure principale α.



Le point M du cercle trigonométrique tel que Mes $(\widehat{\vec{OM};\vec{OI}}) = \alpha$ est appelé point image de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ ou bien de α.

M étant le point image de α, l'abscisse de M est le cosinus de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$, ou de α, et est noté $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$, ou $\cos\alpha$.

L'ordonnée de M est le sinus de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$, ou de α, et est notée : $\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$, ou $\sin\alpha$.

Ainsi $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \cos\alpha = x_M$ et $\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \sin\alpha = y_M$.

Si $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ n'est pas un angle droit, alors $\tan(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \tan\alpha = y_T$.

4.1. Définitions

Définitions

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale α.

- On appelle cosinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, le nombre réel noté $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tel que : $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \cos\alpha$.
- On appelle sinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, le nombre réel noté $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tel que : $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \sin\alpha$.
- On appelle tangente de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ le nombre réel noté $\tan(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ tel que $\tan(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha \neq -\dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$.

Cosinus et sinus d'angles remarquables

Mesure en degré	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

4.2. Propriétés du sinus et du cosinus

Propriété

Pour tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$,
on a : $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$; $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

4.3. Expression de tanα en fonction de cosα

Propriété

Pour tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ tel que $\alpha \neq -\dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$,
on a : $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Exercices

Exercices de renforcement

1 Donne la mesure en radians de chacune des mesures d'angles suivants : 18° ; − 45° ; 99° ; 155°.

2 Donne la mesure en degrés de chacune des mesures d'angles suivants : 2,5π ; $-\frac{2\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{18}$.

3 1. Convertis en radians la mesure suivante : $\alpha = 27{,}5°$.
2. Convertis en degré la mesure suivante : $\alpha = 0{,}56$ rad.

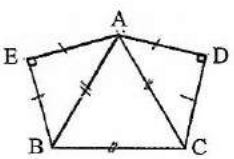
4 Recopie et complète le tableau suivant.

Mesure en radians	$-\frac{\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{3}$		
Mesure en degrés		45°		90°	
Cosinus					$-\frac{1}{2}$
Sinus					$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 Construis un cercle trigonométrique et place le point image de chacun des angles orientés dont les mesures principales sont les suivantes :
$\frac{\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; π ; $-\frac{5\pi}{6}$.

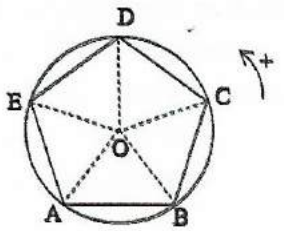
6 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.
1. La longueur d'un arc de cercle triple lorsque le rayon de ce cercle triple.
2. La mesure en radians s'obtient en multipliant sa mesure en degrés par $\frac{180}{\pi}$.
3. Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ alors $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ a pour mesure $\frac{2\pi}{3}$.
4. La mesure en degrés d'un angle de $\frac{\pi}{12}$ rad est égale à 15°.
5. La mesure principale en radians de l'angle plat est π.

7 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral, ADC et AEB sont des triangles rectangles isocèles.
Détermine la mesure en radians de chacun des angles orientés suivants :
$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}})$.

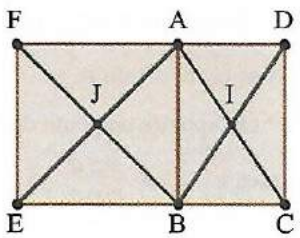


8 1. Exprime un degré en radian.
2. Exprime un radian en degré.

9 Dans la figure ci-dessous, ABCDE est un pentagone régulier de centre O.
Détermine la mesure en radians de chacun des angles suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE}})$, $(\widehat{\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD}})$.



10 Dans la figure ci-dessous :
- ABCD est un rectangle de centre I tel que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{6}$;
- ABEF est un carré de centre J tel que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}) = -\frac{\pi}{2}$.



Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, quatre réponses sont proposées et une seule est exacte. Recopie le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		A	B	C	D
1	$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}}) =$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$
2	$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{BJ}}) =$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
3	$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{EB}}) =$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$
4	$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{FA}}) =$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$
5	$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CI};\overrightarrow{EJ}}) =$	$-\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$

11 1. Trace un cercle trigonométrique de centre O. Place sur ce cercle les points A, B, C et D, images respectives des nombres 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
2. Donne la mesure en radians de chacun des angles suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}})$.

Exercices

12 Recopie et complète.

$\cos\frac{\pi}{3} =$	$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$	$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$	$\cos\frac{\pi}{2} =$
$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$	$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$	$\cos\frac{\pi}{4} =$

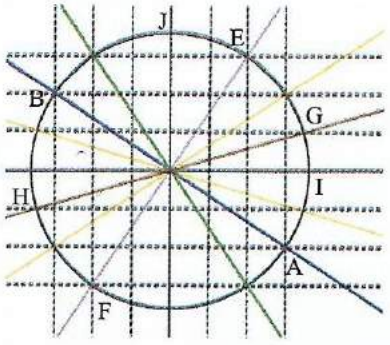
13 Donne la mesure en radians de l'angle formé par la petite aiguille et la grande aiguille d'une montre (l'origine de l'angle étant la petite aiguille) :
1. à 7 h ; 2. à 10 h ; 3. à 1 h ;
4. à 3 h ; 5. à 6 h



14 ACE est un triangle isocèle direct et de sommet principal A et tel que : AC = 5 et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right) = \frac{2\pi}{5}$.
1. Construis le triangle ACE puis le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC direct isocèle rectangle en A.
2. Détermine la mesure en radians de chacun des angles suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AC}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CE}}\right)$.

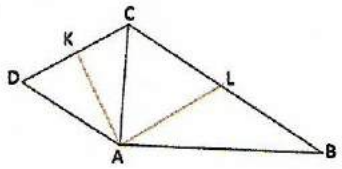
Exercices d'approfondissement

15 Sur la figure ci-dessous, on a tracé le cercle trigonométrique, ainsi que les droites d'équations :
$y = x$; $y = -x$; $y = x\sqrt{3}$; $y = -x\sqrt{3}$;
$y = x\sqrt{3}$; $y = -x\sqrt{3}$.
On a nommé A, B, E, F, G et H les points d'intersection entre le cercle et certaines de ces droites. On a aussi tracé les parallèles aux axes de coordonnées passant par ces points.



1. Détermine les coordonnées des points A, B, E, F, G et H.
2. Donne la mesure principale en radians de chacun des angles orientés : $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OF}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OG}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OH}}\right)$.

16 Dans le plan orienté, on a construit :
• Un triangle ABC tel que :
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\pi}{3}$;
• Un triangle ACD équilatéral tel que
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
Le point L est le milieu de [BC] et le point K est le milieu de [DC]



1. Donne la mesure principale en radians de chacun des angles orientés :
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)$.
2. Démontre que le triangle ALK est rectangle en A.
3. Le triangle ALK est-il isocèle ? Justifie ta réponse.

17 A et B sont deux points du plan tels que AB = 5 cm.
1. a) Construis le segment [AB].
b) Construis le point C tel que AB = AC et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
c) Construis le point D tel que ACD soit un triangle équilatéral et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right) = -\frac{\pi}{3}$.
d) Construis le point E tel que DE = 4 cm et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$.
e) Construis le point F tel que A, B et F soient alignés et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{CD}}\right) = -\frac{\pi}{3}$.
2. a) Démontre que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
b) Démontre que les droites (AB) et (DF) sont perpendiculaires.

18* On sait d'un réel $x \in [0 ; \pi]$ que $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
1. Détermine la valeur exacte de sin x.
2. On sait que le réel x cherché est élément de l'ensemble $\left\{\frac{-4\pi}{5} ; -\frac{\pi}{5} ; \frac{\pi}{5} ; \frac{4\pi}{5}\right\}$ Détermine x.

19* Démontre que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$, $(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2 = 5$.

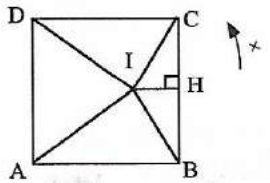
20 On donne : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
1. Détermine la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$.
2. Déduis-en que : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Exercices

21 ABCD est un carré de côté de longueur 1 et AID est le triangle équilatéral représenté ci-dessous.

1. Démontre que : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CH}}\right)=\frac{\pi}{12}$.
2. Calcule les longueurs HI et CI.
3. Déduis-en que :

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

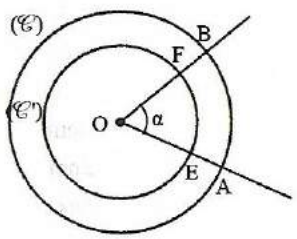


22* Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC. On pose : AB = a.

1. Construis le point D tel que : BD = a et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.
2. Justifie que ABDC est un est un losange.
3. Construis le point A', symétrique de A par rapport à B. Donne la nature du triangle A'BD. Justifie.
4. Soit I le milieu de [AB] et J celui de [AC]. Détermine la mesure en radian de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ}}\right)$.

Situation d'évaluation

23 Un jeu a pour support la figure ci-dessous, dans lequel $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles de centre O et de rayons respectifs r et r' ($r' < r$). A et B sont deux points de $(\mathscr{C})$, E et F deux points de $(\mathscr{C}')$.



Le jeu consiste à aller de A à B en empruntant deux trajets possibles.
Trajet 1 : de A à B sur le cercle $(\mathscr{C})$.
Trajet 2 : de A à E, puis de E à F sur le cercle $(\mathscr{C}')$, enfin de F à B.

Un élève prétend que les deux trajets peuvent avoir la même longueur. Ce que contestent ses camarades de classe .

1. On suppose que $r = 150$, $r' = 50$ et $\alpha = 1$ rad. Détermine alors le chemin le plus long.
2. On suppose que $r = 300$, $r' = 250$ et $\alpha = 3$ rad. Détermine alors le chemin le plus long.
3. Trouve une condition sur α pour que les trajets aient la même longueur.

Coup de Pouce

18 Utiliser $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et le signe de $\cos x$ sur $[\,O\,;\,\pi\,]$.

19
- Calculer $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI}}\right)$
- $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CH}}\right)=\frac{\pi}{2}-\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI}}\right)$

22
- Justifier que BDC est équilatéral.
- Justifier que ABDC est un parallélogramme ayant ses quatre côtés de même longueur.

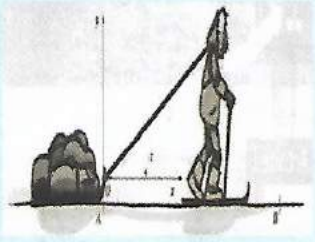
Leçon 11

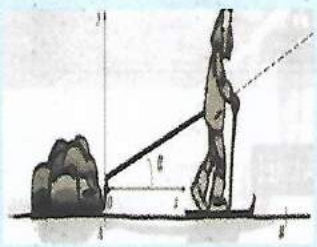
PRODUIT SCALAIRE



De quel angle le joueur doit-il tirer le ballon pour atteindre la barre transversale des buts ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE





Lors d'un voyage touristique dans une station de ski, un élève, pour le tracte d'un traîneau à l'aide d'un harnais, affirme que l'une des positions de la sangle lui a permis de se déplacer plus rapidement que l'autre et que le produit scalaire permet de justifier son affirmation.

Curieux, ses amis de classe ayant vu ces schémas décident d'étudier le produit scalaire, ses propriétés, de déterminer l'angle de l'harnais avec l'horizontale la plus avantageuse.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Définition du produit scalaire

Connaître :
- la définition du produit scalaire de deux vecteurs
- la définition du carré scalaire d'un vecteur
- les propriétés relatives au produit scalaire de deux vecteurs
- la propriété relative au carré scalaire d'un vecteur
- la propriété relative à l'interprétation géométrique du produit scalaire
- les propriétés relatives aux règles de calculs sur le produit scalaire
- les propriétés relatives aux vecteurs orthogonaux

Traduire :
- l'orthogonalité de deux droites à l'aide du produit scalaire
- la caractérisation d'un cercle de diamètre donné à l'aide du produit scalaire

Démontrer : une propriété en utilisant les règles de calculs du produit scalaire

2 Relations métriques dans un triangle

Connaître :
- les relations métriques caractérisant un triangle rectangle
- le théorème d'Al Kashi
- le théorème de la médiane

Calculer :
- la longueur d'un côté d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi
- la mesure d'un angle d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi

3 Forme analytique du produit scalaire

Connaître : l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Calculer : le produit scalaire de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées dans une base orthonormée

Déterminer : la mesure de l'angle de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées

Écrire :
- une équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné
- une équation cartésienne d'un cercle dont on connaît un diamètre

4 Traitement de situation

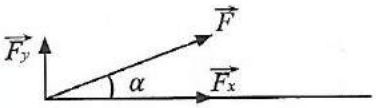
Traiter une situation faisant appel au produit scalaire

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Définition du produit scalaire

1.1. Définition et propriétés

On veut exprimer le travail mécanique W effectué en fonction de la valeur F de la force de traction, la longueur AB du déplacement en ligne droite et l'angle α que forme la sangle avec l'horizontal



1. Exprime F_x en fonction de F et α.
2. Exprime le travail W ($W = F_x \times AB$) en fonction de F, AB et α.

Synthèse

Étant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ s'appelle le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $\vec{u}.\vec{v}$.

Exercices de fixation

1-1-1 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.
Calcule dans chacun des cas $\vec{u}.\vec{v}$

1. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 5$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$.
2. $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$ $\|\vec{v}\| = 2$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$.

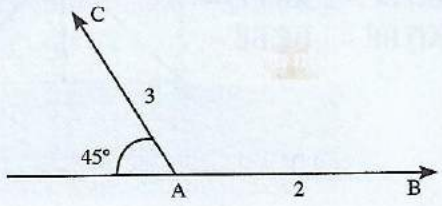
1-1-2 ABC est un triangle. Complète le tableau suivant :

AB	1	2	2	$\sqrt{2}$
AC	5	3		2
mes $\widehat{BAC}$	90°	150°	30°	
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$			$3\sqrt{3}$	2

1-1-3 ABC est un triangle. Complète le tableau suivant :

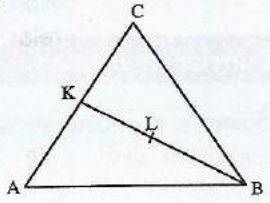
AB	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{2}$
AC	7	1	
Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$			2

1-1-4 Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



1-1-5 ABC est un triangle isocèle tel que :
$AB = AC = a$ et mes $\widehat{BAC} = 30°$.
Justifie que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

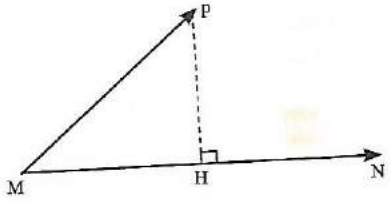
1-1-6 ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm, K est le milieu de [AC] et L le milieu de [KB].
Calcule les produits scalaires suivants :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BL}$; d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{KB}$



1.2. Interprétation géométrique

Soient M, N et P des points tels que $M \neq N$.
Le point H est le projeté orthogonal de P sur la droite (MN).

1. Dans le triangle MPH rectangle en H détermine $\cos(\widehat{HMP})$.
Justifie que : $MH = MP\cos(\widehat{HMP})$.
2. Déduis-en que : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \overline{MN} \times \overline{MH}$.

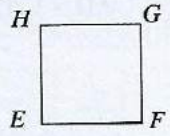


Synthèse

M, N, P sont trois points distincts du plan et H le projeté orthogonal de P sur la droite (MN).
Alors $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \overline{MN} \times \overline{MH}$.

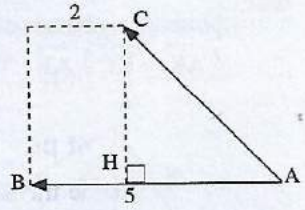
Exercices de fixation

1-2-1 EFGH est un carré de côté 2 cm.
Recopie la bonne réponse.

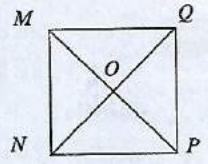


		a	b	c
1	$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}$ est égal à	$-4\sqrt{2}$	-4	4
2	$\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{GF}$ est égal à	-4	4	$2\sqrt{2}$
3	$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FH}$ est égal à	4	-4	16
4	$\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{EG}$ est égal à	0	$-2\sqrt{2}$	4

1-2-2 Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



1-2-3 MNPQ est un carré de centre O et $MN = 5$.
Calcule les produits scalaires suivants :
a) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP}$; b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN}$;
c) $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OP}$; d) $\overrightarrow{QO}.\overrightarrow{NO}$.



Exercices de fixation

1-1-1 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.
Calcule dans chacun des cas $\vec{u}.\vec{v}$

1. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 5$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$.
2. $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$ $\|\vec{v}\| = 2$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$.

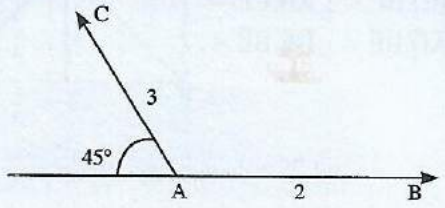
1-1-2 ABC est un triangle. Complète le tableau suivant :

AB	1	2	2	$\sqrt{2}$
AC	5	3		2
mes $\widehat{BAC}$	90°	150°	30°	
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$			$3\sqrt{3}$	2

1-1-3 ABC est un triangle. Complète le tableau suivant :

AB	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{2}$
AC	7	1	
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$			2

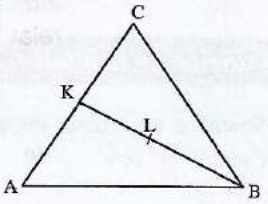
1-1-4 Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



1-1-5 ABC est un triangle isocèle tel que :
$AB = AC = a$ et mes $\widehat{BAC} = 30°$.
Justifie que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

1-1-6 ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm, K est le milieu de [AC] et L le milieu de [KB].
Calcule les produits scalaires suivants :

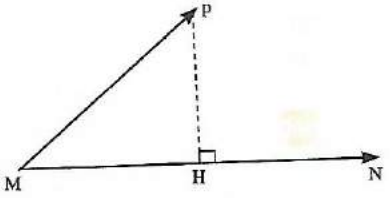
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BL}$; d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{KB}$



1.2. Interprétation géométrique

Soient M, N et P des points tels que $M \neq N$.
Le point H est le projeté orthogonal de P sur la droite (MN).

1. Dans le triangle MPH rectangle en H détermine $\cos(\widehat{HMP})$.
Justifie que : $MH = MP\cos(\widehat{HMP})$.
2. Déduis-en que : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \overline{MN} \times \overline{MH}$.

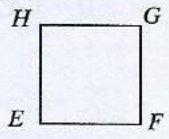


Synthèse

M, N, P sont trois points distincts du plan et H le projeté orthogonal de P sur la droite (MN).
Alors $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \overline{MN} \times \overline{MH}$.

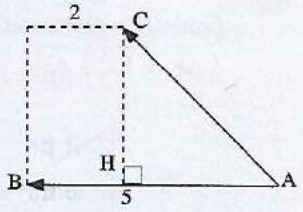
Exercices de fixation

1-2-1 EFGH est un carré de côté 2 cm.
Recopie la bonne réponse.



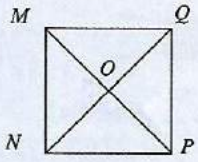
		a	b	c
1	$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}$ est égal à	$-4\sqrt{2}$	-4	4
2	$\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{GF}$ est égal à	-4	4	$2\sqrt{2}$
3	$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FH}$ est égal à	4	-4	16
4	$\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{EG}$ est égal à	0	$-2\sqrt{2}$	4

1-2-2 Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



1-2-3 MNPQ est un carré de centre O et $MN = 5$.
Calcule les produits scalaires suivants :

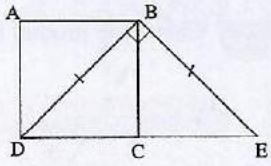
a) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP}$; b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN}$;
c) $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OP}$; d) $\overrightarrow{QO}.\overrightarrow{NO}$.



1-2-4 ABCD est un carré de côté 2 cm et DC = CE.
Calcule :

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} =$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} =$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BE} =$; $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BE} =$



1-2-5 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6 cm.
Soit I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
On admet que : AI = BJ = CK = $3\sqrt{3}$.
Calcule les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$;

3) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KI})$.

1.3. Carré scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
Démontre que : $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Synthèse

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et $\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le carré scalaire de $\vec{u}$.

Exercice de fixation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux avec $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$.
Calcule $\vec{u}^2$ et $\vec{v}^2$.

1.4. Règles de calcul

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et α un nombre réel.
Démontre que :

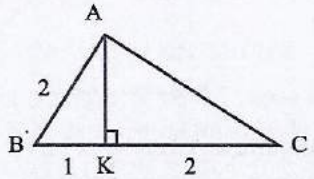
1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2) $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
3) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
4) $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
5) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
6) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u}.\vec{v})^2 + \vec{v}^2$
7) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2(\vec{u}.\vec{v})^2 + \vec{v}^2$
8) $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Synthèse

Les relations obtenues dans l'activité sont des « règles de calcul » du produit scalaire.

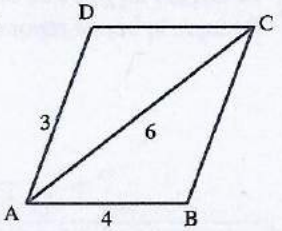
Exercices de fixation

1-4-1 À l'aide de la figure ci-dessous, calcule les produits scalaires suivants : $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AK}).\overrightarrow{AB}$; $(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}).\overrightarrow{AB}$; $(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}).(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC})$.



1-4-2 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :
$\vec{u}^2 = 3$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = -4$.
Calcule :
$\vec{u}.(2\vec{u}-7\vec{v})$; $(4\vec{u}-\vec{v}).(-\vec{u}+3\vec{v})$; $(\vec{u}-5\vec{v})^2$.

1-4-3 ABCD est un parallélogramme tel que : AB = 4 ; AD = 3 et AC = 6.



1. Justifie que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2)$.
2. Calcule : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
3. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.
4. a) Développe : $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})^2$.
   b) Déduis-en la distance BD.

1.5. Vecteurs orthogonaux

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = 2$ et Mes$(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$.
Calcule $\vec{u}.\vec{v}$.
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Démontre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2$.

Synthèse

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à 0.

Exercice de fixation

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \perp (\vec{v}-\vec{w})$ et $\vec{v} \perp (\vec{w}-\vec{u})$.
Justifie que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}-\vec{v}$.

Activités 2 Relations métriques caractérisant un triangle rectangle

2.1. Relations métriques caractérisant un triangle rectangle

ABC est un triangle et H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
1. Calcule $\overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH})$ et démontre que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = BA^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}$.
2. Déduis-en que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = BA^2$ si et seulement si ABC est rectangle en A.
En remarquant que $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BH} = \overline{BC} \times \overline{BH}$ déduis que $BA^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$.
3. a) Calcule $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC})^2$.
b) En remarquant que $BH^2 = AB^2 - AH^2$ et $CH^2 = AC^2 - AH^2$,
justifie que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AH^2 - \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC})$.
c) Déduis-en que $AH^2 = \overrightarrow{BH} \times \overrightarrow{HC}$ puis que $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

Synthèse

ABC est un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
- ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$.
- ABC est rectangle en A si et seulement si $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

Exercices de fixation

2-1-1 ABC est un triangle tel que BA = 3 ; AC = 4 et BC = 5 ; H est le projeté orthogonal de A sur [BC].
1. Justifie que ABC est un triangle rectangle.
2. Calcule BH et AH.

2-1-2 ABCD est un parallélogramme tel que AB = 7 ; AD = 3 ; et AC = 8.
1. Démontre que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 3$.
2. En calculant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ d'une autre façon, détermine $\cos\widehat{BAD}$ et déduis-en que $\sin\widehat{BAD} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

2.2. Théorème d'AL-KASHI

ABC est un triangle tel que AB = c, AC = b, et BC = a.
1. Sachant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, calcule $\overrightarrow{BC}^2$ en fonction de a, b c et $\cos\widehat{A}$.
2. Déduis-en a^2.

Synthèse

Étant donné un triangle ABC, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

Exercices de fixation

2-2-1 PQR est un triangle tel que PQ = $\sqrt{5}$; PR = $\sqrt{10}$ et mes $\widehat{QPR} = 45°$.
Calcule la distance QR.

ABC est un triangle tels que BA = 8 ; CA = 8 et mes $\widehat{BAC} = 60°$.
1. Calcule BC.
2. Détermine la mesure des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BAC}$.

2-2-2 Soit ABC un triangle I est le milieu de [BC].
1. Démontre que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.
2. Calcule AI sachant que AB = 5 ; AC = 7 et BC = 11.

2.3. Théorème de la médiane

Soit ABC est un triangle et I le milieu du segment [BC].

Démontre que : a) $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$.

Synthèse

Étant donné un triangle ABC et I le milieu de [BC], on a :
$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$.

Exercices de fixation

2-3-1 ABC est un triangle rectangle en A et I le milieu du segment [BC] tel que : AB = 4 ; AC = 7 et BC = 9.
Calcule la distance AI.

2-3-2 ABC est un triangle rectangle en A et I le milieu du segment [BC] tel que : AB = 5 ; AC = 4 et BC = 7. Calcule la distance $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Activités 3 Forme analytique du produit scalaire

3.1. Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
1. a) Écris $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
b) Calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Déduis-en une autre expression du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

Synthèse

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Exercices de fixation

3-1-1 Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
1. Soient $\vec{u}(2;-4)$ et $\vec{v}(5;1)$ deux vecteurs du plan. Calcule :

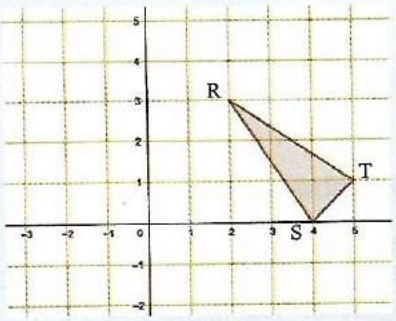
a) $\vec{u}.\vec{v}$ b) $\vec{v}.\vec{u}$ c) $\vec{u}^2$ d) $\vec{v}^2$ e) $\|\vec{v}\|$ f) $\|\vec{u}\|$
g) $(\vec{v} + 2\vec{u})^2$ h) $(3\vec{v} - \vec{u})^2$.

2. On donne : $\vec{u} = \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\vec{i} - \vec{j}$.
Calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

3-1-2 Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$.
1. Calcule $\vec{u}.\vec{v}$.
2. Justifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3-1-3 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, On donne A(−2 ; 5) ; B(4 ; 3) et C(1 ; −6).
1. Calcule $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
2. Déduis-en la nature du triangle ABC.

3-1-4 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne : R(2 ; 3) ; S(5 ; 1) ; T(4 ; 0).
Calcule les mesures des angles du triangle RST.



3.2. Équation cartésienne de la droite passant par un point et de vecteur normal $\vec{n}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
Détermine une équation de la droite (D) passant par le point A de vecteur directeur normal $\vec{u}$.

Synthèse

Étant donné un point $A(x_A ; y_A)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, pour déterminer une équation de la droite (D) passant par A et vecteur normal $\vec{u}$, on traduit légalité $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$, où M est un point de (D).

Exercices de fixation

3-2-1 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On donne $R\left(\frac{3}{5}-1\right)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
Détermine une équation de la droite (Δ) passant par R et de vecteur normal $\vec{u}$.

3-2-2 Soient B(2 ; 6) et C(−1 ;−5).
Détermine une équation de la médiatrice (D) de [BC].

3.3. Équation cartésienne de cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On donne $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$. Soit (𝒞) le cercle de diamètre [AB]. Soit M un point du plan.
1. Justifie que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient à (𝒞).
2. Détermine une équation cartésienne du cercle (𝒞).

Synthèse

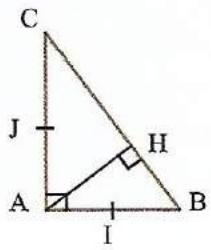
Étant donné deux points distincts $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, pour déterminer une équation du cercle (𝒞) de diamètre [AB], on traduit l'égalité $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0$, où M est un point de (𝒞).

Exercices de fixation

3-3-1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A(3 ; −1) et B(−1 ; −3).
Détermine une équation cartésienne du cercle (𝒞) de diamètre [AB].

3-3-2 Soit (Γ) le cercle d'équation :
$x^2 + y^2 + 4x - 3y - 15 = 0$.
Détermine les coordonnées du centre Ω de (Γ) et le rayon r de (Γ).

Exercice 1 Démontrer que deux droites sont perpendiculaires



ABC est un triangle rectangle en A.
I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Démontre que les droites (HJ) et (HI) sont perpendiculaires.

Corrigé

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB})$.

J est le milieu de [AC] donc $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC})$.

Par suite $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}).(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC})$

$= \overrightarrow{HA}^2 + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.

Or $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC} = 0$ car $(\overrightarrow{HA}) \perp (\overrightarrow{HC})$

et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} = 0$ car $(\overrightarrow{HB}) \perp (\overrightarrow{HA})$.

Méthode

P démontrer que (HJ) $\perp$ (HI), on montre que $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HJ} = 0$

Donc $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HA}^2 + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC}$

$= HA^2 - HB \times HC = 0$

car $HA^2 - HB \times HC$.

On en déduit que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

Exercice 2 Déterminer des distances et des mesures d'angles

Soit PQR un triangle tel que PQ = 8 ; PR = 3 et mes $\widehat{QPR} = 60°$.
Détermine a) QR ; b) mes $\widehat{Q}$ et mes $\widehat{R}$.

Corrigé

a) PQR est un triangle, d'après le théorème d'Al Kashi.

$QR^2 = PQ^2 + PR^2 - 2PQ \times PR \times \cos\widehat{P}$

$= 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 60°$

$= 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 60°$

$= 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 60°$

$= 73 - 48 \times \frac{1}{2}$

$= 49$.

Donc : QR = 7.

b) PQR est un triangle, d'après le théorème d'Al Kashi, on a : $PR^2 = QP^2 + QR^2 - 2QP \times QR \times \cos\widehat{Q}$.

D'où : $\cos\widehat{Q} = \frac{QP^2 + QR^2 - PR^2}{2 \times QP \times QR}$

Méthode

1. Utiliser $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ et appliquer Al kashi.
2. Utiliser Al kashi pour calculer $\cos\widehat{Q}$.

$\cos\widehat{Q} = \frac{8^2 + 7^2 - 3^2}{2 \times 8 \times 7}$

$\cos\widehat{Q} = \frac{8^2 + 7^2 - 3^2}{2 \times 8 \times 7}$

$\cos\widehat{Q} = \frac{104}{112}$

$\cos\widehat{Q} = \frac{13}{14}$.

Donc : mes $\widehat{Q} \simeq 21{,}79°$.

Par suite, mes $\widehat{R} \simeq 180° - (21{,}76 + 60) \simeq 98{,}21°$.

Exercice 3 Démontrer qu'une droite est tangente à un cercle

On donne ($\mathscr{C}$) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$.
Soit la droite (D) d'équation : $4x + y - 31 = 0$.

1. a) Détermine le centre Ω et le rayon r du cercle ($\mathscr{C}$).
   b) Justifie que les points A(7 ; 3) et B(−1 ;1) appartiennent à ($\mathscr{C}$).
2. Justifie que A $\in$ (D).
3. Démontre que (D) est la tangente à ($\mathscr{C}$) en A.
4. Démontre que la tangente en B au cercle ($\mathscr{C}$) est parallèle à (D).

Corrigé

1. a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) - 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 17$
$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $(\Omega\,(3\,;2)$; et de rayon $\sqrt{17}$.
b) On a : $(7 - 3)^2 + (3 - 2)^2 = 17$, donc A appartient à $(\mathscr{C})$.
On a : $(-1-3)^2 + (1-2)^2 = 17$, donc B appartient à $(\mathscr{C})$.

Les points A et B appartiennent à $(\mathscr{C})$.
2. $4 \times 7 + 3 - 31 = 0$, donc $A \in (D)$.
3. $\vec{u}$ $(-1\,;4)$ est un vecteur directeur de (D) et $\overrightarrow{\Omega A}$ $(4\,;1)$.

Méthode

1. Utiliser la forme canonique pour déterminer les éléments caractéristiques du cercle.

2. Démontrer qu'un vecteur directeur de (D) et le vecteur $\overrightarrow{MA}$ sont orthogonaux.

$\vec{u}.\overrightarrow{\Omega A} = -4 \times 4 = 0$, donc $\vec{u} \perp \overrightarrow{\Omega A}$.
(D) est tangente à $(\mathscr{C})$ en A.
4. $\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A}$, donc la tangente en B au cercle $(\mathscr{C})$ est parallèle à (D).

Exercice 4 Déterminer une équation cartésienne d'un cercle

A(1 ; −2) et B(3 ; 4), $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
Détermine une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.

Corrigé

$M(x\,;y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

On a : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x-1) + (y+2)(y-4) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.

Ainsi, $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ est une équation du cercle $(\mathscr{C})$.

Méthode

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0$.
Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.

1 Définition du produit scalaire

1.1. Définition et propriétés

1.1.1. Définition

Définition On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$.

Remarque

Pour tout point M et pour tous points N et P distincts de M, on a :

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \|\overrightarrow{MN}\| \times \|\overrightarrow{MP}\| \times \cos\widehat{PMN}$.

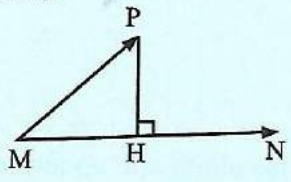
1.1.2. Propriétés

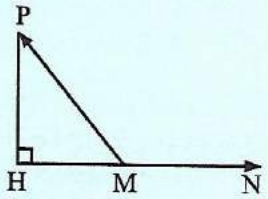
Propriété Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{u'}$ quatre vecteurs du plan, α et λ deux nombres réels. On a :

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
2. $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (inégalité de Cauchy - Schwarz).
3. a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
   b) $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.
4) $(\alpha\vec{u}).(\lambda\vec{v}) = (\alpha\lambda).(\vec{u}.\vec{v})$.
5) $\lambda(\vec{u}.\vec{w}) = (\lambda\vec{u}).\vec{w} = \vec{u}.(\lambda.\vec{w})$.
6) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.
7) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u'}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{u'} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{u'} + \vec{v}.\vec{w}$.

1.2. Interprétation géométrique

Propriété Pour tous points M, N et P tels que $M \neq N$, on a :
$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \overline{MN} \times \overline{MH}$ où le point H est le projeté orthogonal de P sur la droite (MN).

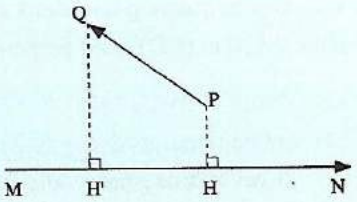




Remarque

- $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = MN \times MH$ si $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MH}$ ont le même sens.
- $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = -MN \times MH$ si $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont de sens contraires.

Propriété Pour tous points M, N , P et Q tels que $M \neq N$ on a : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = \overline{MN} \times \overline{HH'}$ où le point H et H' sont les projetés orthogonaux respectifs de P et Q sur la droite (MN).



1.3. Carré scalaire

Définition On appelle carré scalaire, et on note $\vec{u}^2$ le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$.

1.4. Règles de calcul

Propriété Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, On a :

1) $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
2) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$.
3) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$.
4) $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.
5) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.
6) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Remarque

Soient A, B et C trois non alignés du plan, on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2)$.

1.5. Vecteurs orthogonaux

Définition Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si leurs supports ont des directions perpendiculaires.

Propriété Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarque

A, B , C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan.
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Application de l'orthogonalité

1. A et B sont deux points distincts du plan. L'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$ est la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point A.
2. A et B sont deux points distincts du plan. L'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

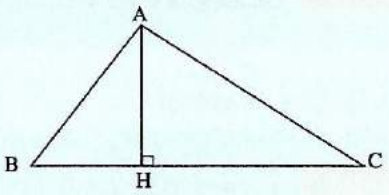
2 Relations métriques dans un triangle rectangle

2.1. Relations métriques caractérisant un triangle rectangle

Propriété

Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ABC est rectangle en A.
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.
- $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.



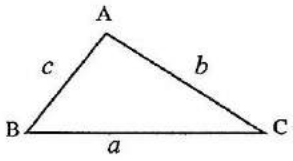
2.2. Théorème d'AL-KASHI

Propriété

Soit ABC un triangle. On a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Remarque

En posant : $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$.
On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$.
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$.
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$.

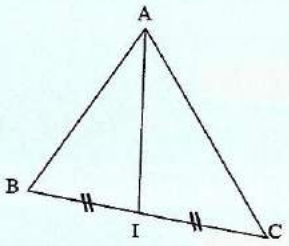


2.3. Théorème de la médiane

Propriété

Soit ABC un triangle, et I le milieu de [BC]. On a :

- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$.



3 Forme analytique du produit scalaire

3.1. Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Propriété Dans une base orthonormée, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Application : Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Remarque

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, alors le vecteur $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$.
- A et B sont deux points du plan,
  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

3.2. Équation cartésienne de la droite passant par un point et de vecteur normal $\vec{n}$

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $\vec{n}(a ; b)$.

(D) la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0.$

3. 3. Équation cartésienne de cercle

3.3.1. Cercle défini par son centre et son rayon

Soit $K(a ; b)$ un point du plan, r un nombre réel strictement positif et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre K et de rayon r.

$M(x ; y)$ est un point du plan $K(a ; b)$.

$M(x ; y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow KM = r$

$\Leftrightarrow KM^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$

3.3.2. Cercle défini par son diamètre

Soient A et B deux points distincts du plan et $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].

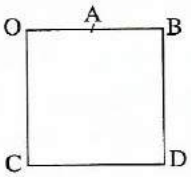
$M(x ; y)$ est un point du plan.

$M(x ; y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$

Exercices de renforcement

1 On donne la figure ci-contre où OBDC est un carré et A le milieu de [OB].



Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse est juste.
Écris le numéro de l'affirmation et la lettre qui correspond à la réponse juste.

		a	*b*	*c*
1	$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{BO}$ est un	vecteur	point	nombre réel
2	$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ est égal à	$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$	$-\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA}$
3	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est égal à	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CO}$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$
4	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est égal à	$-AB^2$	AB^2	OC^2
5	$\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CA}$ est égal à	$CO \times CA \times \cos \widehat{CAO}$	$CO \times CA \times \cos \widehat{ACO}$	$CO \times CA \times \cos \widehat{COA}$
6	DB^2 est égal à	$AD^2 - AB^2 - 2AD \times AB \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}\right)$	$AD^2 + AB^2 + 2AD \times AB \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}\right)$	$AD^2 - AB^2 - 2AD \times AB \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}\right)$

2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1) $\vec{a}.\vec{0} = \vec{0}$.
2) $\vec{a}.\vec{a} = \|\vec{a}\|$.
3) $\alpha(\vec{a}.\vec{b}) = \alpha\vec{a}.\alpha\vec{b}$.
4) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{b}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{a}$.
5) $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2$.
6) Dans un repère orthonormé, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\ (a;b)$ et $\vec{v}\ (c;d)$ est $ac+bc$.

3 EFG est un triangle équilatéral de côté 4 cm.
I est le milieu de [EF].
Calcule les produits scalaires suivants :
a) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}$; b) $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EI}$; c) $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FI}$.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
On considère les points $R\left(-\frac{3}{5};1\right)$, $T\left(4;\frac{-1}{2}\right)$ et $S\left(1;\frac{15}{2}\right)$.
Les droites (TR) et (RS) sont-elles perpendiculaires ? Justifie ta réponse.

5 ABC est un triangle tel que $AB = 4$; $AC = 7$ et mes $\widehat{BAC} = 120°$.
1. a) Calcule BC^2.
   b) Déduis $BC = \sqrt{93}$.
2. Justifie que $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 63$.
3. Détermine mes $\widehat{ACB}$.
4. Calcule la longueur de la médiane issue de A.
5. calcule l'aire du triangle ABC et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé et m est un nombre réel.
On donne : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-m+2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4m\\-1\end{pmatrix}$.
Détermine m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

7 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les deux vecteurs tels que :
$\|\vec{u}\| = 3$; et $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u}.\vec{v} = 10$.
Détermine le nombre réel a pour que les vecteurs $a\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}-3\vec{v}$ soient orthogonaux.

8 Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On donne : B (−4 ; 1), E (−1 ; 2), et N (1 ; 4).
1. Calcule $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EN}$; $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NE}$.
2. Détermine la mesure des angles du triangle BEN.
Déduis-en la nature du triangle BEN.

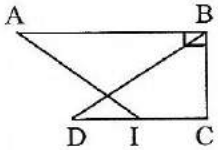
9 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6 cm.
Soient I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC] ; [AC] ; [AB].
1. Démontre que $AI = BJ = CK = 3\sqrt{3}$.
2. Calcule les produits scalaires suivants :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$;
c) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KI})$.

10 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et m est un nombre réel.
Détermine m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux dans chacun des cas suivants.
1. $\vec{u}(3;-m+2)$ et $\vec{v}(4m;-1)$.
2. $\vec{u}\left(m-1;-m+\frac{1}{4}\right)$ et $\vec{v}(-5m;4)$.

11 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :
$\|\vec{u}\| = 2 ; (2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 2$ et Mes$(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$.
Détermine $\|\vec{v}\|$.

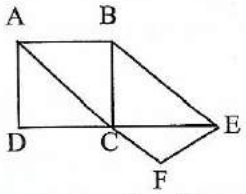
12 I) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Développe $(\vec{u} - \vec{v})^2$.
Déduis-en que : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
II) Soit ABC un triangle tel que AB = 4 ; AC = 4 ; BC = $4\sqrt{3}$.
1. a) Justifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.
b) Prouve que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8$.
2. Démontre que mes $\widehat{BAC} = 120°$.
3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
4. Calcule l'aire du triangle ABC et le rayon du cercle circonscrit.

13 Sur la figure ci-dessous AB =17 ; BC =12 ; CD = 16.
I est le milieu de [DC].
Les droites (AB) et (DC) sont perpendiculaires à (BC).



1. Exprime $\overrightarrow{BD}$ comme combinaison linéaire de deux vecteurs orthogonaux sur la figure.
2. a) Exprime $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI}$ en fonction de BC.
b) Calcule $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AI}$.
3. Calcule $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AI}$ puis déduis que (AI) et (BD) sont perpendiculaires.

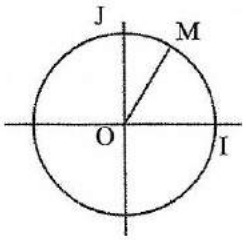
14 Sur la figure ABCD est un carré, ABEC est un parallélogramme et ECF est un triangle isocèle en F tel que mes $\widehat{CFE}$ =120°.
On donne BC = 3 cm.



1. a) Justifie que le point C est le milieu du segment [DE].
b) Calcule la distance AC.
2. Calcule les produits scalaires suivants :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE}$; c) $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CA}$.
3. a) Calcule $(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA})^2$ puis $\overrightarrow{CE}^2 + \overrightarrow{CA}^2$.
b) Compare $\|\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA}\|^2$ et $\|\overrightarrow{CE}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2$.
4. a) Calcule FC.
b) Calcule les mesures des angles du triangle ECF.

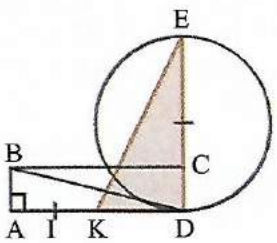
15 Soit PQR un triangle, I son orthocentre.
P', Q' et R' sont les projetés orthogonaux respectifs de I sur les droites (QR), (RP) et (PQ).
1. Démontre que $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{PR} = 0$.
2. Démontre que $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PR}$.
3. Démontre que $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IP} \times \overrightarrow{IP'} = \overrightarrow{IQ} \times \overrightarrow{IQ'}$.
4. Calcule de deux manières différentes chacun des produits scalaires suivants $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IR}$ et $\overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IQ'}$.
Déduis-en les égalités suivantes :
$\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IR}.\overrightarrow{IP}$.

16 (O, I, J) est un repère orthonormé.
($\mathscr{C}$) est le cercle trigonométrique de centre O.
P est le point d'abscisse −1.
M est un point de ($\mathscr{C}$) tel que Mes$(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{3}$.



1. a) Reproduis la figure en prenant OI = 4 cm.
Elle sera complétée au fur et à mesure.
b) Place le point Q symétrique de M par rapport à (OI).
c) Détermine la mesure en radian de l'angle oriente $(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OQ}})$.
2. a) Place A le point image du réel $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle ($\mathscr{C}$).
b) Justifie que le point M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. On donne Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{12}$.
a) En utilisant la forme analytique du produit scalaire, prouve que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.
b) En utilisant la forme trigonométrique u produit scalaire, prouve que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
c) Déduis-en la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

17 On considère la figure ci-dessous sur laquelle ABCD est un rectangle. On donne : AB = 1; AD = 3;
$\overrightarrow{KD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et
$\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{DC}$.



1. Calcule $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}$.
2. a) Justifie que $\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AB}$.

b) Sachant que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$, démontre que les droites (BD) et (KE) sont perpendiculaires.

3. Dans le plan muni du repère orthonormé (A, I, B), on donne les points K (2 ; 0), D(3 ; 0), C(3 ; 1) et E (3 ; 3).

a) Calcule $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}$.

b) Détermine une équation du cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [DE].

18 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points A(1 ; 0) ; B(2 ; −1) ; C(1 ; 3) et D(1 ; −1).

1. a) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Calcule AB et AC.

c) Déduis-en une valeur de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. Justifie que : $BC = \sqrt{17}$.
3. Justifie que le point D appartient au cercle de diamètre [BC].

19 ABCD est un carré de côté 1.
Soit M un point de [AB] tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et N un point de [BC] tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Fais une figure.
2. Calcule $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN}$ de deux manières différentes. On pourra considérer le repère (A, B, D).
3. Détermine la valeur exacte de l'angle $\widehat{MDN}$.

20 On considère le carré ABCD de côté 4, et M un point de [AB] tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et N un point de [BC] tel que : $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Fais une figure.
2. a) Calcule $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN}$.

b) En considérant le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, calcule $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN}$.

3. Détermine la valeur exacte de l'angle $\widehat{MDN}$.

21 Soient I, J, K et L quatre points de coordonnées respectives : $(-1;1);\left(\frac{5}{2};4\right);(-2;3);\left(-\frac{11}{2};0\right)$.

1. Détermine les coordonnés des vecteurs suivants : $\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{KL}$; $\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{JL}$; $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$.
2. Calcule les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KL}$; $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{JK}$.
3. Soit M le point défini par : $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{KL}$.
Détermine $\cos(\widehat{JIM})$ puis déduis-en mes $\widehat{JIM}$.

22 Soit IJJ' un triangle, on construit le carré IJKL tel que les points K et L n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (IJ) contenant le point J' et le carré IJ'K'L tel K' et L' n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (IJ') contenant le point J.

1. On pose : α = mes $\widehat{JIJ'}$ et B = mes $\widehat{LIL'}$.
Démontre que $B = \pi - \alpha$.
2. Compare le produit scalaire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ'}$ et $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IL'}$.
3. Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{JL'}.\overrightarrow{J'L}$.
4. Quelle est la position relative des droites (JL') et (J'L).

23 On suppose que le plan vectoriel $\mathscr{V}$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$. Pour tout réel x différent de -1, on donne $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\left(x^3-7x;\frac{2}{x+1}\right)$ et $\left(\frac{1}{x+1};-3\right)$.

1. Détermine $\vec{U}.\vec{V}$ en fonction de x.
2. Détermine les valeurs de x pour lesquelles $\vec{U}$ est orthogonal à $\vec{V}$. (on remarquera que $x^3-7x-6=(x-3)(x+2)(x+1)$).
3. On suppose que $x = -2$, exprime alors $\|3\vec{U}+2\vec{V}\|^2$ en fonction de $\|\vec{U}\|$ et $\|\vec{V}\|$ puis calcule $\|3\vec{U}+2\vec{V}\|$.

24 Soient A, B et K trois points du plan tels que AB = 2 et K est le milieu de [AB]. On veut déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 8$.

1. Fais une figure.
2. a) Calcule $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$.

b) Justifie que pour tout point M du plan $\overrightarrow{KM}.(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}) = 0$.

3. a) En utilisant la question 2), démontre que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -1 + \overrightarrow{KM}^2$.

b) Déduis-en alors l'ensemble (Γ) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 8$.

c) Construis l'ensemble (Γ).

Exercices d'approfondissement

25 Soient A, B et K trois points du plan tels que AB = 2 et K est le milieu de [AB].
On considère les points C et D tel que :
$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BK}$.

1. a) Construis le triangle CDE tel que :
Mes $(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}}) = \frac{\pi}{2}$ et la distance DE = 8.

b) Calcule la distance CE.

2. a) Place le point F tel que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

b) Calcule les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{FE}$.

c) Justifie que : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = CD^2$.

3. On veut maintenant calculer la longueur du côté [CF] du triangle CEF et la mesure en degré de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CE}}\right)$.

a) Justifie que : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$.

b) Calcule $\overrightarrow{CF}^2$ puis CF.

c) Détermine alors $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CE}$ puis Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CE}}\right)$ à 10^{-2} près.

26 ABCDest un carré de sens direct de côté 4 et de centre O.

1. a) Fais une figure.

b) Calcule les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$.

2. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

3. a) Calcule $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$ et $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2$.

b) Justifie que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ ont la même norme.

4. Détermine dans chacun des cas suivants l'ensemble (E) des points du plan vérifiant :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = 0$; b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0$.

27* (Puissance d'un point par rapport à un cercle)

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. A et B deux points diamétralement opposés de $(\mathscr{C})$ et M un point extérieur à $(\mathscr{C})$, n'appartenant pas à la droite (AB).

Les droites (AM) et (MB) recoupent $(\mathscr{C})$ respectivement en C et D.

1. Calcule de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

2. Démontre que : MA × MC = MB × MD.

3. Démontre que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - r^2$.

Le nombre réel $MO^2 - r^2$ qui est indépendant du point M est appelé la puissance du point M par rapport au cercle $(\mathscr{C})$.

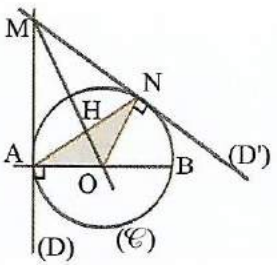
4. Soit (D) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en T passant par M.

a) Démontre que : $\overrightarrow{MT}^2 = MO^2 - r^2$.

b) Dans quel cas la puissance d'un point M par rapport au cercle $(\mathscr{C})$ est-elle positive, négative, nulle ?

28* Sur la figure ci-contre,

- $(\mathscr{C})$ est un cercle de diamètre[AB] de centre O et de rayon R ;
- (D) est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point A et M un point de (D) distinct de A ;
- (D') est la droite passant par M et tangente à $(\mathscr{C})$ en un point N ;
- H est le point d'intersection des droites (AN) et (OM) ;
- α = mes $\widehat{AOM}$.



1. a) Justifie que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}$.

b) Déduis-en que (AN)⊥(OM).

2. Démontre que OH = R cosα.

3. On suppose que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

On appelle K, le projeté orthogonal de N sur (AB).

a) Démontre que NOB est un triangle équilatéral.

b) Compare OK et OH.

c) Calcule en fonction de R : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{ON}$.

d) Déduis-en que (HK)⊥(ON).

29 L'unité est le centimètre.

Soit ABC un triangle tel que AB = 7, AC = 5, BC = 4 et I le milieu de [BC].

1. En utilisant le théorème de la médiane, justifie que : AI = $\sqrt{33}$.

2. a) Démontre que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$.

b) Déduis et construis l'ensemble (D) des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58$.

30 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne le point F(12 ; 18).

On désigne par G un point de l'axe $(O; \vec{i})$ et par H un point de l'axe $(O; \vec{j})$ tel que Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{FG}; \overrightarrow{FH}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de G et y l'ordonnée de H.

1. Démontre que le couple (x, y) est solution de l'équation : (E) : $2x + 3y = 78$.

2. On se propose de trouver tous les couples (G ; H) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

Vérifie que les couples $(12 + 3k ; 18 - 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de (E).

3. On admet que les seules solutions entières de (E) sont de la forme $(12 + 3k ; 18 - 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

PAUL, élève de la classe de second C, affirme qu'il y'a exactement trois couples de points (G ; H).

Ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$.

Paul a-t-il raison ? Justifie ta réponse.

31 ***Formule de HÉRON***

ABC est un triangle. On pose : $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$.

On note S l'aire du triangle ABC.

1. a) En utilisant le théorème d'Al Kashi démontre que : $4b^2c^2\sin^2\widehat{A} = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

b) Déduis-en sin $\widehat{A}$ en fonction de a, b, c.

2. On note $2p$ le périmètre du triangle ABC.

a) Donne l'expression du périmètre du triangle ABC en fonction de a, b, c.

b) Démontre que :

$(b^2c^2)\sin^2\widehat{A} = 4p(p-a)(p-b)(p-c)$.

c) Déduis-en que : $S = \sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

32 Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(3 ; 4) et B(5 ; −3).

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) et de la médiatrice (Δ) du segment [AB].

2. On appelle D le point de la droite (Δ) tel que :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} = -15$.

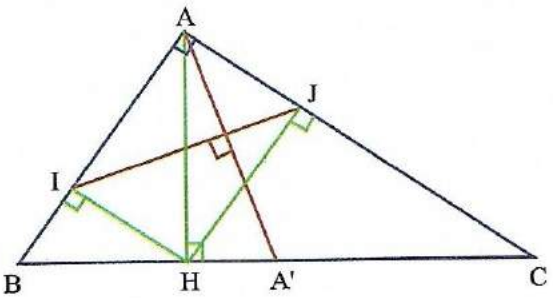
Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}\right)$.

3. a) Détermine les coordonnées du point C de la droite (Δ) tel que ABC soit un triangle rectangle direct.

b) Déterminer alors une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}\right)$.

4. Détermine les coordonnées du point E de la droite (Δ) tel que le triangle ABE soit équilatéral direct.

33 Soit ABC un triangle rectangle en A. On désigne par A' le milieu de [BC], par H le pied de la hauteur issue de A et par I et J les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC).



a) Démontre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

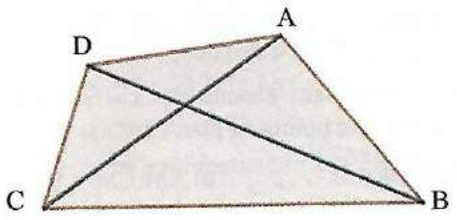
b) Démontre que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

Situation d'évaluation

34 Dans le cadre de la modernisation de l'agriculture, l'État octroie des subventions aux planteurs en fonction de la superficie du champ de maïs cultivé. Les semences de maïs sont conditionnées et vendues par sacs d'un hectare. Un Agriculteur désire déterminer la superficie de sa parcelle, afin d'acheter les semences nécessaires pour maximiser sa production de maïs et obtenir une meilleure subvention. Il connaît les dimensions figurant sur l'extrait topographique qu'il a obtenu de l'administration.

$AB = 230$; $AD = 200$; $BC = 280$; $BD = 450$; $DC = 130$.

Ne sachant pas comment s'y prendre. Il te sollicite afin de l'aider à déterminer l'aire de son terrain.







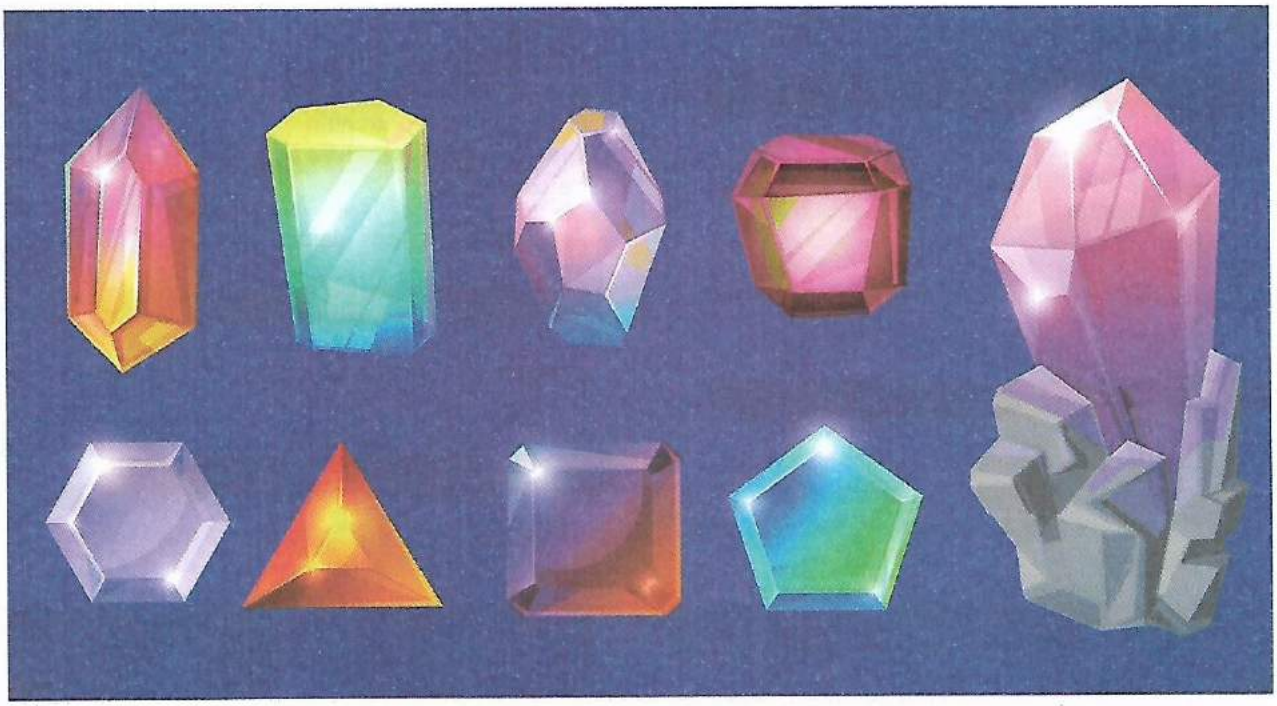
Coup de Pouce

27 Remarquer que :
- ABD rectangle en D ;
- ABC rectangle en C.

28 1. a) Projeter :
M sur (OA) et sur (ON) puis remarquer que OA = ON.

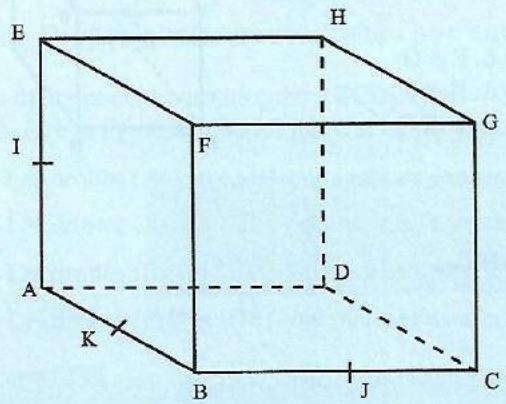
Leçon 12

DROITES ET PLANS DE L'ESPACE



1. Quelles sont les formes des différents cristaux ci-contre ?
2. Quelles sont les propriétés géométriques des faces de ces cristaux ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Un bijoutier a reçu d'une cliente une pierre précieuse en forme de pavé droit (voir figure ci-contre). Cette cliente lui a demandé de tailler cette pierre pour en faire un médaillon d'un collier suivant les points I, J et K qu'elle a marqués. Le point I est situé sur la face ABFE, les points K et J sont sur la face ABCD.

Ne voulant pas l'abîmer, le bijoutier fait appel à son fils élève en classe seconde pour l'aider.

Celui-ci, avec ses camarades de classe et une maquette, cherche à faire la section du pavé par le plan (IJK) en recherchant les intersections avec les différentes faces du solide.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Déterminations d'un plan

Connaître : les propriétés relatives à la détermination d'un plan

Justifier :
- que deux droites sont coplanaires
- que deux droites ne sont pas coplanaires

2 Droites et plans de l'espace

Connaître :
- les positions relatives de deux droites
- les positions relatives d'une droite et d'un plan

Justifier : qu'une droite est sécante à un plan

3 Plans de l'espace

Connaître :
- les positions relatives de deux plans
- les propriétés sur les positions relatives de deux plans

Justifier :
- qu'une droite est sécante à un plan
- que deux plans sont sécants

4 Parallélisme de droites et de plans

Connaître :
- les propriétés relatives au parallélisme de deux droites
- les propriétés relatives au parallélisme d'une droite et d'un plan
- les propriétés relatives au parallélisme de deux plans

Justifier : que deux plans sont parallèles

5 Section plane d'un solide

Construire : une section plane d'un solide de l'espace

6 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux droites et plans de l'espace

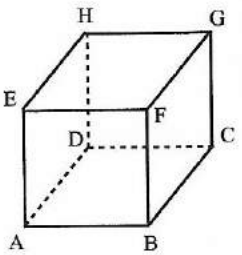
INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Déterminations d'un plan

1.1. Plan déterminé par trois points non alignés

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

1. Identifie : un plan vertical vu de face ; un plan horizontal et un plan vertical vu de profil.
2. Détermine trois plans passant par les points E et F.
3. Détermine le nombre de plans passant par les points non alignés E, F et G.
4. Détermine le nombre de plans passant par les points non alignés A, B et F.
5. Détermine le nombre de plans passant par les points non alignés B, C et G.



Synthèse

Par trois points non alignés, il passe un et un seul plan.
Le plan passant par trois points non alignés A, B et C se note (ABC).

Exercices de fixation

111 A, B et C sont trois points non alignés et D un point n'appartenant pas au plan (ABC).
Détermine le nombre de plans distincts que l'on peut former avec ces quatre points.

Exercices de fixation

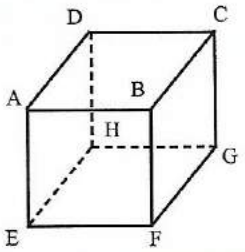
1-1-2 On considère les points A, B, C, D et E tels que :
- A, B et D sont alignés ;
- C, B et E sont alignés.

Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. Les points A, B et C déterminent un plan. .....
2. Les points A, B et D déterminent un plan. .....
3. Les points B, C et D déterminent un plan. .....
4. Les points E, B et C déterminent un plan. .....

1.2. Droite incluse dans un plan

Considérons le cube ABCDEFGH ci-contre.
1. Reproduis la figure. Marque deux points J et K dans le plan (ABC) puis trace la droite (JK).
2. Trouve un plan contenant la droite (JK).

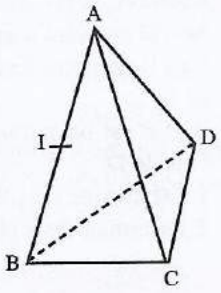


Synthèse

Lorsque deux points A et B appartiennent à un plan (P), la droite (AB) est incluse dans le plan (P) et on note : $(AB) \subset (P)$.

Exercices de fixation

1-2-1 ABCD est un tétraèdre et I est le milieu du segment [AB].
Complète par $\subset$ ou par $\not\subset$.
(AB)...(CBA) ; (DI) .....(BCI) ;
(ID).....(ABD) ; (CD) ....(ABD) ;
(CI)....(ABC).



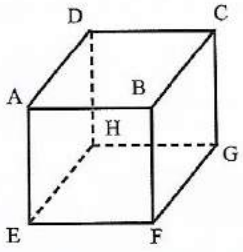
1-2-2 Réponds par vrai ou par faux aux propositions suivantes.

1. Deux points appartiennent nécessairement à un plan. .....
2. Si deux points A et B appartiennent à un plan, alors la droite (AB) est incluse dans ce plan. .....
3. Si un point A appartient à un plan, et B un point n'appartenant pas à ce plan alors la droite (AB) est incluse dans ce plan .....
4. Deux points déterminent toujours un plan. .....

1.3. Droites coplanaires, droites non coplanaires

La figure ci-contre est un cube ABCDEFGH.
Observe la figure et réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

1. Les droites (AC) et (AB) sont incluses dans le plan (ABC). .....
2. Les droites (AC) et (HD) sont incluses dans un même plan. .....
3. Les droites (BF) et (GH) sont incluses dans un même plan. .....
4. Les droites (FH) et (GE) sont incluses dans un même plan. .....

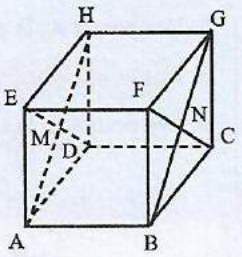


Synthèse

Lorsque des droites sont incluses dans le même plan, on dit que ces droites sont coplanaires.
Lorsque des droites ne peuvent pas être incluses dans un même plan, on dit que ces droites sont non coplanaires.

Exercices de fixation

131 La figure ci-contre est un cube ABCDEFGH.
M est le centre du carré ADHE, et N est le centre du carré BCGF.



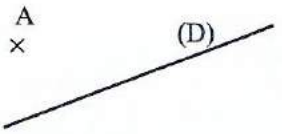
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. (AB) et (EH) sont coplanaires. .....
2. (AN) et (EN) sont coplanaires. .....
3. (AB) et (GF) sont coplanaires. .....
4. (AB) et (EF) sont coplanaires. .....
5. (ED) et (FC) sont coplanaires. .....
6. (NM) et (GH) sont coplanaires. .....

132 En utilisant la figure de l'exercice précédent, justifie que les droites (BG) et (HA) sont coplanaires.

1.4. Plan déterminé par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite

On considère une droite (D) et un point A n'appartenant pas à la droite (D).
Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant la droite (D) et le point A.

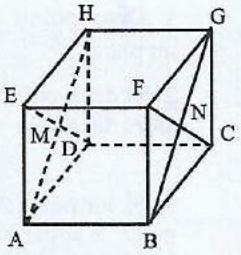


Synthèse

Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite déterminent un et un seul plan.

Exercices de fixation

141 Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube,
M est le centre du carré ADHE, et N est le centre du carré BCGF.
Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.



1. N et la droite (BG) déterminent un plan. .....
2. E et la droite (BC) déterminent un plan. .....
3. E et la droite (DM) déterminent un plan. .....
4. G et la droite (EF) déterminent un plan. .....

142 Soient A, B et C trois points non alignés.
Soit D un point n'appartenant pas au plan (ABC).
Soit E un point de la droite (BD) distinct de B et de D.
Soit F est un point de la droite (CD) distinct de C et de D.
1. Détermine les plans contenant le point E
2. Détermine deux plans qui contenant la droite (EF).

1.5. Plan déterminé par deux droites sécantes

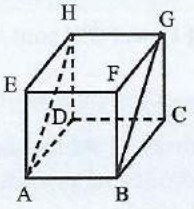
On considère deux droites (D) et (D') sécantes en A.
Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant les deux droites sécantes.

Synthèse

Deux droites sécantes déterminent un et un seul plan.

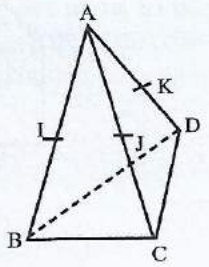
Exercices de fixation

151 Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube.
1. Justifie que les droites (HA) et (AB) déterminent un plan.
2. Justifie que les droites (BD) et (FG) ne déterminent pas un plan.



Exercices de fixation

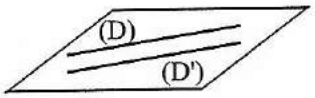
1 5 2 ABCD est un tétraèdre régulier. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [AD]. Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.



1. Les droites (IJ) et (AC) déterminent un plan. .....
2. Les droites (AC) et (BD) déterminent un plan. .....
3. Les droites (IK) et (JD) déterminent un plan. .....
4. Les droites (IK) et (JI) déterminent un plan. .....

1.6. Plan déterminé par deux droites parallèles

On considère deux droites strictement parallèles (D) et (D').
Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant les deux droites parallèles.



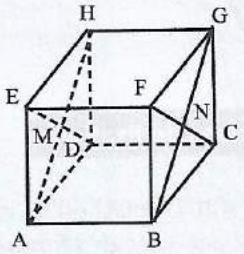
Synthèse

Deux droites strictement parallèles déterminent un et un seul plan.

Exercice de fixation

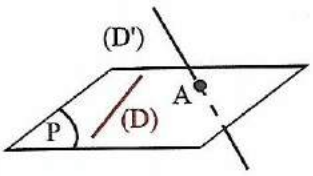
Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.
M est le centre du carré ADHE, et N est le centre du carré BCGF.
Réponds par vraie ou par faux aux affirmations suivantes.

1. Les droites (FC) et (ED) déterminent un plan. .....
2. Les droites (AH) et (FN) déterminent un plan. .....
3. Les droites (MN) et (HG) déterminent un plan. .....



1.7. Démontrer que deux droites sont non coplanaires

Soit un plan (P) contenant une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D).
Soit une droite (D') passant par A tel que (D') n'est pas contenu dans (P).
Démontre que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires. (On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde).

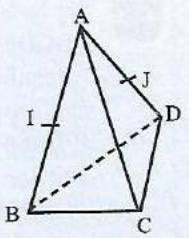


Synthèse

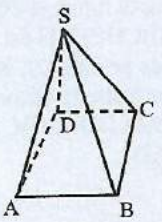
Pour démontrer que deux droites (D) et (D') sont non coplanaires, il suffit de trouver un plan (P) contenant la droite (D') tel que la droite (D') soit sécante au plan (P) en un point A qui n'appartient pas à (D)

Exercices de fixation

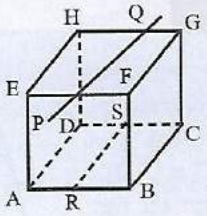
1 7 1 ABCD est un tétraèdre et I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD].
Cite deux droites non coplanaires et deux droites coplanaires.



1 7 2 SABCD est une pyramide.
Démontre que (SB) et (DC) ne sont pas coplanaires.



1-7-3 La figure ci-contre ABCDEFGH est un cube et les droites (PQ) et (RS) ne sont pas parallèles.
Démontre que (PQ) et (RS) sont non coplanaires.

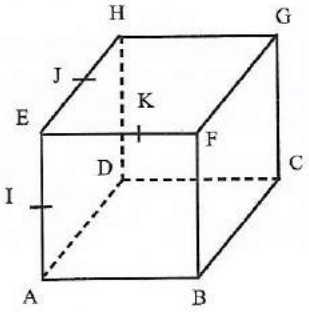


Activités 2 Droites et plans de l'espace

2.1. Positions relatives de deux droites

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K appartiennent respectivement aux arêtes [AE], [EH] et [FE].
Complète chacune des phrases par l'un des mots ou groupes de mots suivants : « non coplanaires », « parallèles », « sécantes » et « confondues ».

- (AE) et (IJ) sont .....
- (HA) et (IJ) sont .....
- (KE) et (EF) sont .....
- (HD) et (BC) sont .....
- (AC) et (DB) sont .....
- (AC) et (HF) sont .....
- (HF) et (BD) sont .....

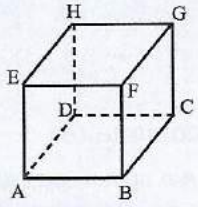


Synthese

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans ce cas elles peuvent être sécantes, ou confondues, ou strictement parallèles) soit non coplanaires.

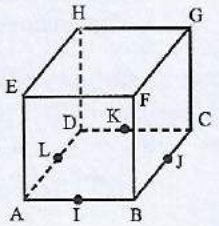
Exercices de fixation

2-1-1 ABCDEFGH est un cube.
Pour chaque affirmation trois propositions de réponse a, b et c sont données dont une seule est exacte.
Recopie la bonne réponse.



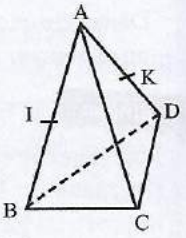
	Affirmation	a	b	c
1	La droite (HB) est incluse dans le plan	(BDG)	(ABC)	(BFH)
2	Les droites (HF) et (EB) sont	parallèles	sécantes	Non coplanaires
3	Les droites (HG) et (AB) sont	coplanaires	sécantes	Non coplanaires
4	Les droites (ED) et (HA) sont	coplanaires	sécantes	Non coplanaires

2-1-2 Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [DC] et [AD].

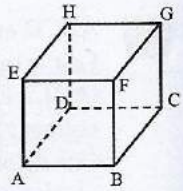


Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. Les droites (IJ) et (AC) déterminent un plan.
2. Les droites (AC) et (BD) déterminent un plan.
3. Les droites (IK) et (JD) déterminent un plan.
4. Les droites (IK) et (JI) déterminent un plan.

2-1-3 ABCD est un tétraèdre régulier. I et K sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AD].
1. Détermine la position relative des droites (AB) et (CD).
2. Justifie que les droites (BD) et (IK) sont parallèles.

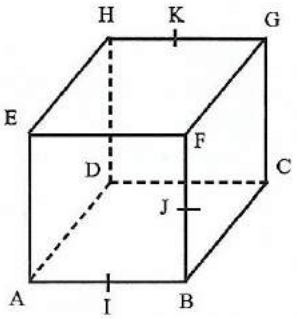


2-1-4 Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.
1. Justifie que (AH) et (BG) sont coplanaires.
2. Justifie que (DH) et (FG) sont non coplanaires.
3. Cite deux autres droites qui sont coplanaires.
4. Cite deux autres droites qui ne peuvent pas être sur un même plan.



2.2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un parallélépipède, K et I sont les milieux respectifs des côtés [HG] et [AB], J un point du segment [BF].
Détermine, dans chacun des cas suivants, le nombre de points communs à la droite et au plan.
a) la droite (AB) et le plan (EFG)
b) la droite (IJ) et le plan (ABC).
c) la droite (IK) est le plan (BFG).
d) la droite (AC) et le plan (ADB).

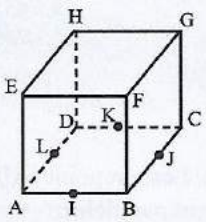


Synthèse

Soit (D) une droite et (P) un plan de l'espace.
(D) est soit sécante à (P) (ils ont un seul point commun), soit strictement parallèle à (P) (ils n'ont aucun point commun), soit incluse dans (P).

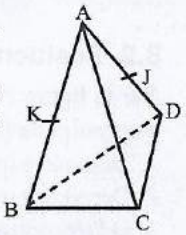
Exercices de fixation

2-2-1 Sur la figure ci-dessous ABCDEFGH est un cube.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [DC] et [AD].
Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes.



1. La droite (FI) et le plan (ADH) sont sécants.
2. La droite (FA) et le plan (EBC) sont sécants.
3. La droite (IJ) est parallèle au plan (CEG).
4. La droite (LK) est sécante au plan (EFG).
5. La droite (DE) est parallèle au plan (BCF).
6. La droite (LI) est sécante au plan (KJC).

2-2-2 ABCD est un tétraèdre régulier. J est le milieu de [AD] et K un point de [AB], comme l'indique la figure ci-contre.

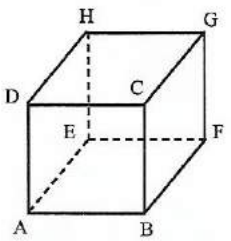


1. Justifie que la droite (KJ) est sécante au plan (BCD).
2. Reproduis la figure et construis le point d'intersection.

Activités 3 Plans de l'espace

3.1. Intersection de deux plans

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.
1. Justifie que E appartient au plan (DEF) et au plan (ABF).
2. Justifie que F appartient au plan (DEF) et au plan (ABF).
3. Justifie que (EF) est incluse à la fois aux plans (ABF) et (DEF).
4. Déduis-en l'intersection des plans (ABF) et (DEF).

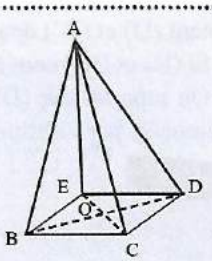


Synthèse

Lorsque deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

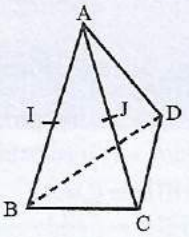
Exercices de fixation

3-1-1 ABCDE est une pyramide régulière.
Pour chaque affirmation quatre propositions de réponse a, b, c, et d sont données dont une seule est exacte.
Copie le numéro de chaque ligne suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

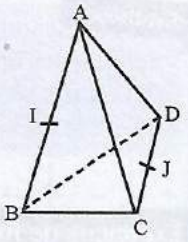


		a	b	c	d
1	L'intersection des plans (ABC) et (ACD) est :	la droite (AC)	le segment [AC]	le point A	la paire {A, C}
2	L'intersection des plans (ABD) et (ACE) est :	le point A	le point O	le plan (BCD)	la droite (AO)
3	L'intersection des plans (ABC) et (ADE) est :	le point A	le plan (BCD)	la droite passant par A et parallèle à (BC)	la droite (AO)

3-1-2 Soit ABCD un tétraèdre, I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
1. Justifie que I appartient aux plans (DIJ) et au plan (ABC).
2. Justifie que J appartient aux plans (DIJ)) et au plan (ABC).
3. Détermine l'intersection des plans (DIJ) et (ABC).

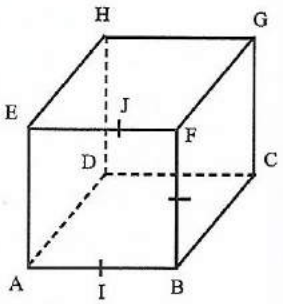


3-1-3 Dans le tétraèdre ABCD ci-contre, I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CD].
Le but de l'exercice est de trouver l'intersection des plans (AJB) et (CID).
1. Justifie que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).
2. Détermine l'intersection de ces deux plans.



3.2. Positions relatives de deux plans

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un pavé droit, I est un point [AB], J un point de [EF] tels que les droites (IJ) et (FB) soient parallèles.
1. Démontre que les plans (EJG) et (JFG) sont confondus.
2. Démontre que les plans (ABC) et (EFG) sont disjoints.
3. a) Démontre que la droite (JG) est incluse dans chacun des plans (EFG) et (IJG).
   b) Justifie que les plans (EFG) et (IJG) ne sont pas confondus.
4. Détermine la position relative d'un plan quelconque avec le plan (EFG).

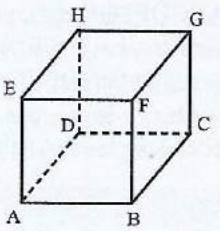


Synthèse

Deux plans de l'espace sont soit confondus, soit strictement parallèles, soit sécants.

Exercice de fixation

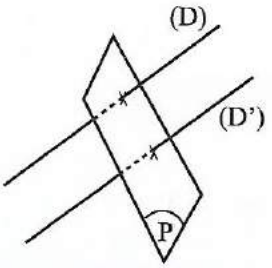
ABCDEFGH est un cube.
Détermine la position relative des plans dans chaque cas :
1. (ABC) et (CFG) ; 2. (BDF) et (EHG) ;
3. (ABC) et (DBC) ; 4. (ABF) et (CHG).



Activités 4 Parallélisme de droites et de plans

4.1. Droites parallèles

Soient (D) et (D') deux droites parallèles et (P) un plan qui coupe (D).
1. Si (D) et (D') sont confondues, justifie (P) coupe (D').
2. On suppose que (D) et (D') sont strictement parallèles.
Démontre par l'absurde que (P) coupe (D').

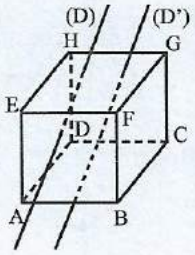


Synthèse

Lorsque deux droites sont parallèles, si un plan coupe l'une, alors il coupe l'autre.

Exercice de fixation

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube.
(D) et (D') sont deux droites parallèles.
(D) est sécante aux plans (EFG), (EFB) et (ABC).
Détermine les plans sécants à la droite (D').
Justifie ta réponse.



4.2. Parallélisme de trois droites de l'espace

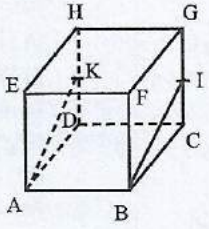
Soient (D) et (D') deux droites parallèles à une droite (Δ).
1. On suppose que deux des trois droites (D), (D') et (Δ) sont confondues.
Justifie que (D), (D') sont parallèles.
2. On suppose que les droites (D) et (D') et (Δ) sont deux à deux distinctes.
Soit A un point de (D') qui n'appartient pas à (D) et (P) le plan déterminé par A et (D).
a) Démontre que (D') est incluse dans le plan (P).
b) Déduis-en que (D) et (D') sont parallèles.

Synthèse

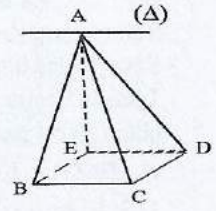
Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Exercices de fixation

4-2-1 ABCDEFGH est un cube, I et K sont les milieux respectifs des segments [CG] et [HD].
Justifie que (BI) et (AK) sont parallèles.

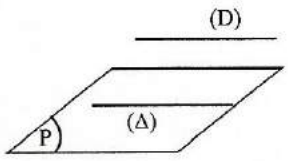


4-2-2 Sur la figure ci-dessous, ABCDE est une pyramide régulière et (Δ) la parallèle à la droite (ED) passant par A.
Donne la position relative des droites (Δ) et (BC).
Justifie ta réponse.



4.3. Droite parallèle à un plan

1. Soit une droite (D) et un plan (P) de l'espace.
On suppose qu'il existe une droite (Δ) contenue dans le plan (P) et parallèle à (D).
Démontre que (D) est parallèle à (P).
2. On suppose que (D) est parallèle à (P).
Démontre qu'il existe une droite (Δ) contenue dans (P) telle que (D) soit parallèle à (Δ).
3. Démontre qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

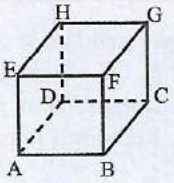


Synthèse

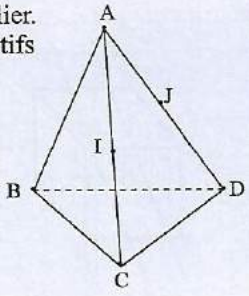
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Exercices de fixation

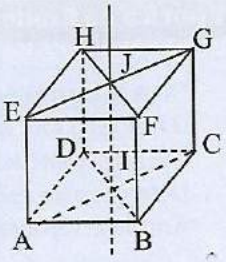
4-3-1 ABCDEFGH est un cube.
Dans chaque cas, indique si la droite (EF) est parallèle ou sécante au plan donné. a) (ABD) ; b) (FGH) ; c) (BGD).



4-3-2 ABCD est un tétraèdre régulier. I et J sont les milieux respectifs des côtés [AC] , [AD].
Démontre que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).

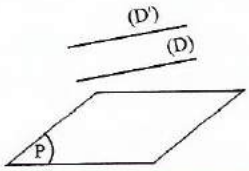


4-3-3 ABCDEFGH est un cube. I et J sont les centres respectifs des carrés ABCD et EFGH.
Prouve que (IJ) est parallèle à chacun des plans suivants : (AEH), (ABF), (BCG) et (CGH).



4.4. Conséquence d'une droite parallèle à un plan

Soit (D) une droite parallèle à un plan (P) et (D') une droite parallèle à (D).
Démontre que (D') est parallèle à (P).

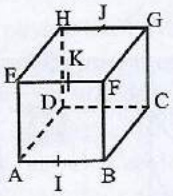


Synthèse

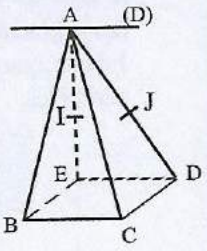
Lorsqu'une droite (D) est parallèle à un plan (P), toute droite parallèle à (D) est parallèle à (P).

Exercices de fixation

4-4-1 ABCDEFGH est un cube, I et K sont les milieux respectifs des [AB], [EF] et J est sur le segment [HG]. Soit (Δ) une droite.
Recopie les bonnes réponses :
1. Si la droite (IK) est parallèle au plan (Δ) est parallèle au plan :
a) (BCG) ; b) (ABC) ; c) (CDH).
2. Si la droite (FC) est parallèle au plan (IJK) et à la droite (Δ) alors, (Δ) est parallèle au plan :
a) (IJK) ; b) (EFB) ; c) (ABC).



4-4-2 Sur la figure ci-dessous ABCDE est une pyramide régulière, I et J sont les milieux respectifs des segments [AE] et [AD], et (D) une droite parallèle à la droite (IJ) passant par A.
Donne la position relative de la droite (D) et du plan (BCD). Justifie ta réponse.



4.5. Théorème du toit

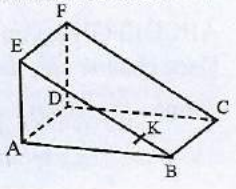
Soit une droite (D) parallèle à deux plans sécants (P_1) et (P_2) suivant une droite (Δ) et A un point de (Δ).
Soit la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).
Soit A un point commun à (P_1) et (P_2).
1. a) Justifie qu'il existe une droite (D_1) incluse dans (P_1) passant par A et une droite (D_2) incluse dans (P_2) passant par A tel que (D_1) soit parallèle à (D_2).
b) Démontre que (D_1) et (D_2) sont confondues.
2. a) Démontre par (D_1) et (Δ) sont confondues.
b) Déduis-en que (D) est parallèle à (Δ).

Synthèse

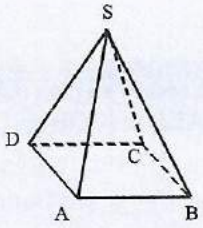
Lorsqu'une droite est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur intersection.

Exercices de fixation

4-5-1 On considère le solide suivant ci-contre. K est un point de [EB] autre que E et B. On considère les plans (EFC) et (ADK).
1. Détermine un point commun aux deux plans.
2. Reproduis puis dessine, en justifiant, l'intersection des deux plans.



4-5-2 SABCD est une pyramide régulière à base carrée.
Détermine l'intersection des plans (DCS) et (ABS).



4.6. Deux plans parallèles

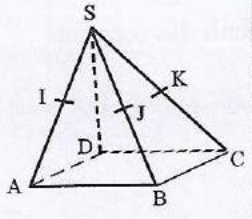
1. Soient (P) un plan, (D_1) et (D_2) deux droites sécantes et parallèles à (P).
   a) Justifie qu'il existe un plan (Q) contenant (D_1) et (D_2).
   b) Démontre par l'absurde que (P) et (Q) sont parallèles.
2. Démontre que si deux plans (P) et (Q) sont parallèles alors (Q) contient deux droites sécantes parallèles à (P).

Synthèse

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un d'eux contient deux droites sécantes parallèles à l'autre plan.

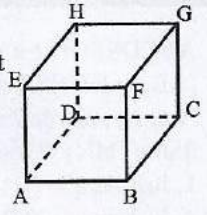
Exercices de fixation

4-6-1 SABCD est une pyramide.

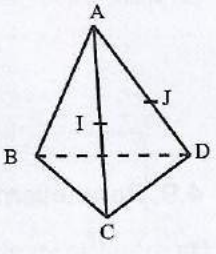


I, J et K sont les milieux respectifs de [SA], [SB] et [SC].
1. Justifie que (IJ) et (JK) sont deux droites sécantes de (IJK).
2. a) Justifie que (IJ) et (AB) sont parallèles
   b) Justifie que (JK) et (BC) sont parallèles
3. Déduis-en que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

4-6-2 ABCDEFGH est un cube.
Démontre que (ADH) et (BFG) sont parallèles.



4-6-3 ABCD est un tétraèdre régulier, I et J sont les milieux respectifs des côtés [AC], [AD].
Démontre que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).



4.7. Intersection de deux plans sécants

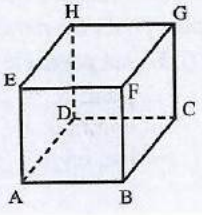
On considère deux plans parallèles (P) et (P') soit (P'') un plan sécant à (P') suivant une droite (Δ').
Démontre que le plan (P'') est sécant au plan (P) suivant une droite (Δ'') parallèle à (Δ').

Synthèse

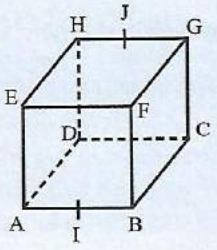
Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Exercices de fixation

4-7-1 ABCDEFGH est un cube.
1. Justifie que les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.
2. Détermine l'intersection des plans (ABC) et (CDE).
3. Justifie que (DC) est parallèle à (EFG).
4. Justifie que le plan (EFG) est sécant au plan (CDE).



4-7-2 ABCDEFGH est un cube.
J est le milieu du côté [HG].
1. Justifie que le plan (AEJ) est sécant au plan (CGH).
2. Construis l'intersection de (AEJ) et (CGH).



4.8. Plans parallèles et droites

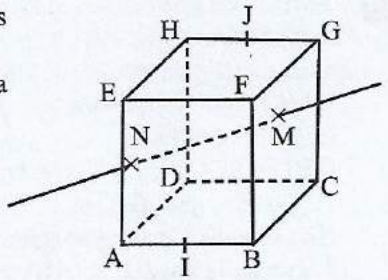
On considère deux plans parallèles (P) et (P') et (D) une droite.
1. On suppose que (D) est parallèle à (P).
Démontre que la droite (D) est parallèle au plan (P').
2. On suppose que la droite (D) est sécante à (P).
Démontre que la droite (D) est sécante au plan (P').

Synthèse

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre et toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube, I et J sont des points respectifs des segments [AB] et [HG] tel que (IJ) soit parallèle au plan (ADH).
N et M sont des points respectifs des plans (ADH) et (BCG) tels que la droite (MN) soit sécante au plan (ADH) en N.
1. Justifie que (IJ) est parallèle au plan (BCG).
2. Justifie que (MN) est sécante au plan (BCG).



4.9. Parallélisme de trois plans

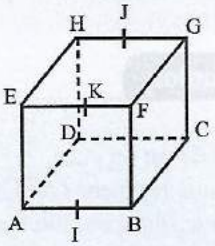
On considère les plans (P), (P') et (P'') tels que (P) et (P'') soient parallèles et (P') et (P'') soit parallèles.
Démontre que le plan (P') est parallèle au plan (P).

Synthèse

Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

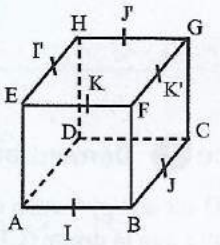
Exercices de fixation

4-9-1 ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [GH] et [EF].
1. Détermine la position relative des plans (ADH) et (BCG).
2. Justifie que le plan (IJK) est parallèle au plan (ADH).
3. Déduis-en que (IJK) est parallèle au plan (BCG).



4-9-2 ABCDEFGH est un cube.
Les points I, J, K, I', J' et K' sont les milieux respectifs des arêtes[AB], [BC], [EF], [HG] et [FG].

1. Justifie que les plans (I'KI) et (HFB) sont parallèles.
2. Justifie que les plans (J'K'J) et (HFB) sont parallèles.
3. Déduis-en que les plans (I'KI) et (J'K'J) sont parallèles.



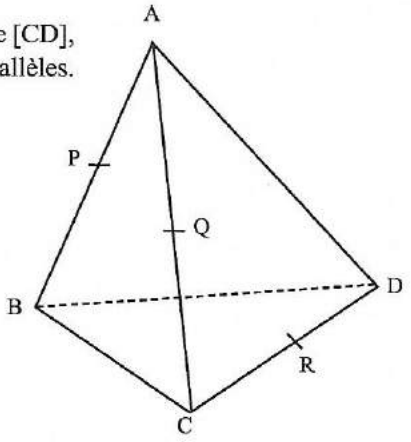
Activités 5 Section plane d'un solide

ABCD est un tétraèdre, P est un point du segment [AB], R est un point de [CD], Q est un point de [AC] tel que les droites (PQ) et (BC) ne soient pas parallèles.

1. a) Détermine l'intersection du plan (PQR) avec le plan (ABC).
   b) Place le point T, intersection des droites (PQ) et (BC).
2. a) Justifie T appartient au plan (BCD) et au plan (PQR).
   b) Justifie que $R \in (BCD)$.
   c) Détermine l'intersection du plan (PQR) avec le plan (BCD).

Place le point M, intersection des droites (TR) et (BD).

3. a) Justifie M appartient au plan (ABD) et au plan (PQR).
   b) Justifie que $P \in (ABD)$ et $P \in (PQR)$.
   c) Détermine l'intersection du plan (PQR) avec le plan (ABD).
4. Détermine la section du tétraèdre par le plan (PQR).

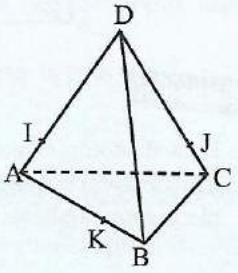


Synthèse

Le plan (PQR) coupe le tétraèdre suivant une surface appelée section plane.

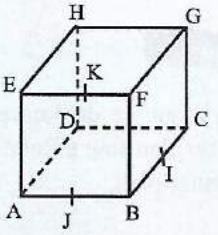
Exercices de fixation

5-1 Sur la figure ci-dessous DABC est un tétraèdre, I, J et K sont des points tels que : $I \in (AD)$, $J \in (CD)$ et $K \in (AB)$.



1. a) Construis le point P d'intersection des droites (IK) et (DB).
   b) Trace la droite (PJ) et elle coupe (BC) en T.
   c) Déduis-en l'intersection des plans (IJK) et (DBC).
2. Construis la section du tétraèdre par le plan (IJK).

5-2 ABCDEFGH est un cube.
Les points I, J, K, I', J' et K' et sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [EF], [EH] [HG] et [FG].



1. Justifie que les plans (I'KI) et (HFB) sont parallèles.
2. Justifie que les plans (J'K'J) et (HFB) sont parallèles.
3. Déduis-en que les plans (I'KI) et (J'K'J) sont parallèles.

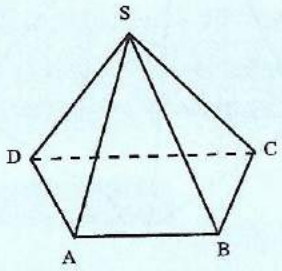
APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze.
Démontre que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).

Corrigé

(DC) est parallèle à (AB), A et B appartiennent au plan (SAB). Par conséquent (AB) est incluse dans le plan (SAB).
(DC) est parallèle à une droite du plan (SAB).
Donc (CD) est parallèle au plan (SAB).

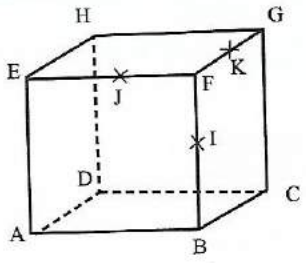


Méthode

Pour démontrer qu'une droite est parallèle à un plan, on peut démontrer qu'elle est parallèle à une droite incluse dans le plan.

Exercice 2 Démontrer que deux plans sont parallèles

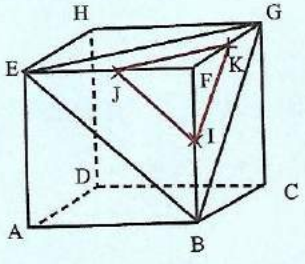
ABCDEFGH est un cube I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BF] ; [EF] et [FG].
Démontre que les plans (IJK) et (BEG) sont parallèles.



Corrigé

Il s'agit de démontrer que deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre plan.

Dans le triangle FEB, I et J sont les milieux respectifs des segments [BF] et [EF]. D'après la propriété de la droite des milieux les droites (IJ) et (EB) sont parallèles.
(IJ) est parallèle au plan (BEG).
(IJ) est incluse dans le plan (IJK).
De même (JK) est parallèle (EG) dans le triangle FEG et (JK) est incluse dans le plan (IJK).
Donc (IK) est parallèle à (BEG).
(IJK) contient deux droites sécantes (IJ) et (JK) qui sont parallèles respectivement aux droites (EB) et (EG) sécantes de (BEG).
Donc les plans (IJK) et (BEG) sont parallèles.



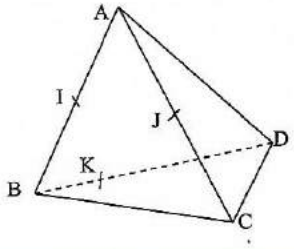
Méthode

Pour démontrer que deux plans sont parallèles, on peut démontrer que deux droites sécantes de l'un des plans sont parallèles à l'autre plan.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 3 Déterminer l'intersection de deux plans

ABCD est un tétraèdre, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC], K un point de [BD].
Détermine et trace l'intersection des plans (IJK) et (BCD).



Corrigé

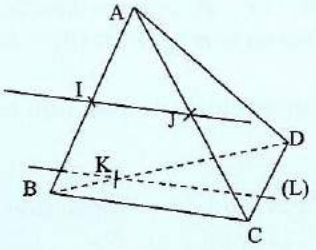
• $K \in (IJK)$ et $K \in (BD)$, $(BD) \subset (BCD)$ donc $K \in (BCD)$.
K est un point commun aux plans (IJK) et (BCD).

• $I \notin (BCD)$, les deux plans ne sont pas confondus, ni parallèles. Leur intersection est une droite (L) passant par le point K.

• Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles à cause de la propriété de la droite des milieux dans un triangle.
D'après le théorème du toit, la droite (D) intersection des plans (IJK) et (BCD) est parallèle aux droites (BC) et (IJ).
Donc l'intersection de (IJK) et (BCD) est la parallèle à (BC) passant par K.

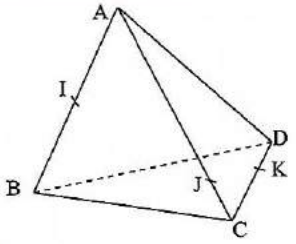
Méthode

Pour déterminer l'intersection de deux plans, on peut déterminer un point commun aux deux plans et utiliser le théorème du toit.



Exercice 4 Déterminer la section d'un solide par un plan

ABCD est un tétraèdre. I ; J et K sont des points respectifs des segments [AB], [AC] et [CD].
Détermine la section du solide par le plan (IJK).



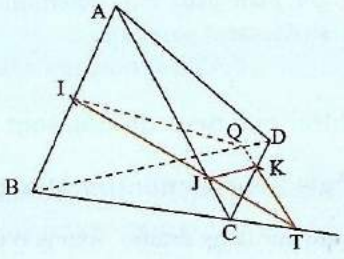
Corrigé

L'objectif est de trouver l'intersection du plan (IJK) avec toutes les faces du tétraèdre.

• (IJ) et (BC) sont dans le plan (ABC) et ne sont pas parallèles.
L'intersection de (IJK) et (ABC) est (IJ).
• Les droites (IJ) et (CB) sont sécantes en T.
T et K sont éléments de (BCD) et (IJK).
Traçons (TK) elle coupe (BD) en Q.
L'intersection de (IJK) avec (ACD) est (JK).
• K et Q sont les points des plans (IJK) et (BCD)
(QK) est l'intersection de (IJK) et (BCD).
• I et Q sont des points de (ABD) et (IJK).
(IQ) est l'intersection de (IJK) et (ABD).
Donc la section du tétraèdre avec le plan (IJK) est (IJKQ).

Méthode

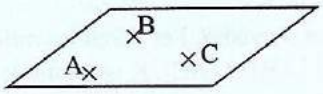
Pour déterminer la section plane d'un tétraèdre par un plan, on peut déterminer l'intersection de ce plan avec toutes les faces du tétraèdre.



1 Déterminations d'un plan

1.1. Plan déterminé par trois points non alignés

Propriété Par trois points A, B et C non alignés il passe un unique plan, noté (ABC).



1.2. Droite incluse dans un plan

Propriété Si E et F sont deux points distincts d'un plan (P), alors la droite (EF) est contenue dans le plan (P).

Vocabulaire

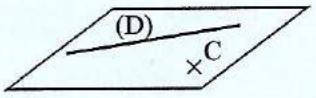
Lorsque la droite (EF) est contenue dans un plan (P), on dit que la droite (EF) est incluse dans le plan (P) et on note : $(EF) \subset (P)$.

1.3. Droites coplanaires, droites non coplanaires

Définition
- Deux droites sont coplanaires s'il existe un plan qui les contient toutes les deux.
- Deux droites sont non coplanaires s'il n'existe pas de plan les contenant.

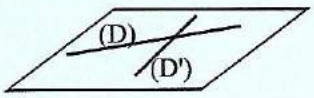
1.4. Plan déterminé par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite

Propriété Un plan peut être déterminé par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite.



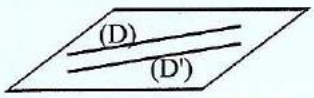
1.5. Plan déterminé par deux droites sécantes

Propriété Un plan peut être déterminé par deux droites sécantes.



1.6. Plan déterminé par deux droites parallèles

Propriété Un plan peut être déterminé par deux droites strictement parallèles.



1.7. Démontrer que deux droites sont non coplanaires

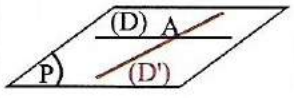
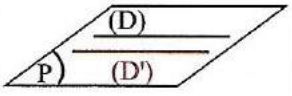
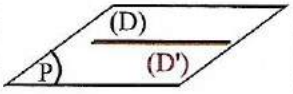
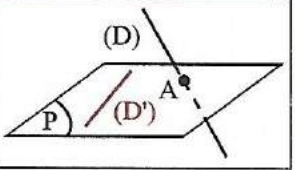
Méthodologie pour démontrer que deux droites sont non coplanaires

Pour démontrer que deux droites sont non coplanaires, il faut raisonner par l'absurde (en montrant qu'il est impossible qu'elles soient coplanaires).

2 Droites et plans de l'espace

2.1. Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace n'ayant pas de point commun sont soit strictement parallèles, soit non coplanaires.

Droites coplanaires : il existe un plan contenant les deux droites.			Droites non coplanaires : aucun plan ne contient les deux droites
			
$(D) \cap (D') = \{A\}$	$(D) \cap (D') = \emptyset$	$(D) \cap (D') = (D) = (D')$	$(D) \cap (D') = \emptyset$

2.2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

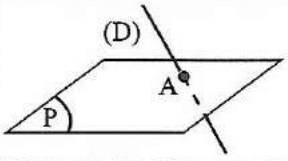
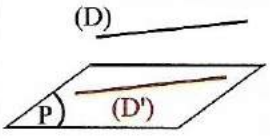
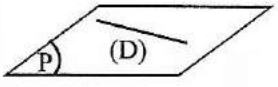
2.2.1. Définitions

Définition

- Une droite est parallèle à un plan si elle n'a aucun point commun avec ce plan ou si elle est contenue dans ce plan.
- Une droite est sécante à un plan si elle a un seul point commun avec ce plan.

2.2.2. Propriété

Propriété Une droite est soit sécante à un plan, soit parallèle à un plan.

(D) sécante au plan (P)	(D) est parallèle au plan (P)	
		
$(D) \cap (P) = \{A\}$	$(D) \cap (P) = \emptyset$	$(D) \subset (P)$

3 Plans de l'espace

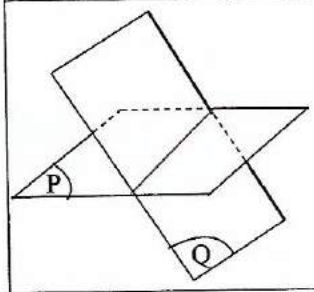
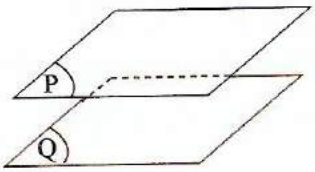
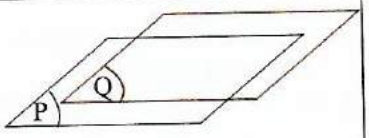
3.1. Intersection de deux plans

Propriété Lorsque deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

Définition

- Deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou s'ils n'ont aucun point en commun.
- Deux plans sont sécants si leur intersection est une droite.

3.2. Positions relatives de deux plans

sécants	parallèles	
		
$(P) \cap (Q) = (D)$	$(P) \cap (Q) = \phi$	$(P) \cap (Q) = (P) = (Q)$

Conséquence : Si deux plans (P) et (Q) distincts ont au moins un point commun, alors ils sont sécants.

4 Parallélisme de droites et de plans

4.1. Droites parallèles

Définition Deux droites parallèles sont deux droites coplanaires et non sécantes.

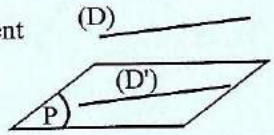
Propriété Si deux droites sont parallèles, alors tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.

4.2. Parallélisme de trois droites de l'espace

Propriété Si deux droites sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

4.3. Droite parallèle à un plan

Propriété Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si il existe dans le plan une droite parallèle à (D).



4.4. Conséquence d'une droite parallèle à un plan

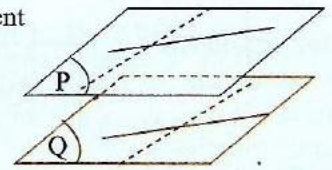
Propriété Si une droite est parallèle à un plan, alors toute droite parallèle à cette droite est parallèle à ce plan.

4.5. Théorème de toit

Propriété Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur intersection.

4.6. Deux plans parallèles

Propriété Deux plans (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si (P) contient deux droites sécantes parallèles à deux droites de (Q).



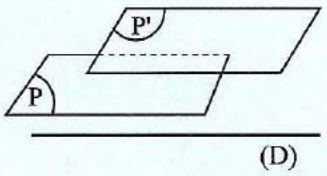
4.7. Intersection de deux plans sécants

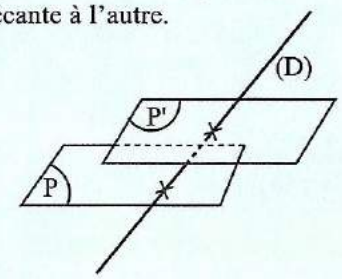
Propriété Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un, est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

4.8. Plans parallèles et droites

Propriété Si deux plans sont parallèles alors :

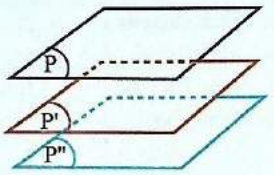
- Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;
- Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.





4.9. Parallélisme de trois plans

Propriété Si deux plans sont parallèles à un même troisième plan, alors ils sont parallèles entre eux.



5 Section plane d'un solide

5.1. Définition

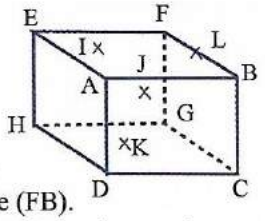
Définition Une section plane est l'intersection d'un solide ou d'une surface avec un plan.

5.2. Méthode

Le principe de la détermination d'une section plane, consiste à faire l'intersection du plan avec chaque face du solide.

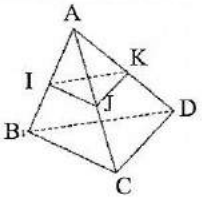
Exercices de renforcement

1 La figure ABCDEFGH ci-contre est un cube.
Le point I est situé sur la face ABFE, les points K et J sont sur la face ABCD et le point L est sur la droite (FB).



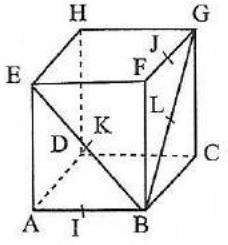
1. Justifie que la face ABCD détermine un plan.
2. Justifie que les points I, J et K déterminent un plan.
3. Justifie que les droites (EF) et (DC) déterminent un plan.
4. Justifie que les droites (FG) et (DC) ne sont pas coplanaires.

2 ABCD est un tétraèdre, I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [AB], [AC], [AD].
Pour chacune des affirmations, trois propositions de réponses sont données, une seule est juste.
Écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre de la bonne réponse.



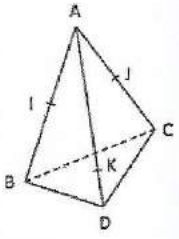
	Affirmations	a	b	c
1	La droite (BC) est parallèle à la droite :	(IK)	(AD)	(IJ)
2	Les plans (ACD) et (IJK) sont sécants suivant la droite	(AC)	(JK)	(IK)
3	La droite (IK) est parallèle au plan :	(ABC)	(BCD)	(ACD)
4	La droite (IK) est sécante au plan	(IJK)	(BCD)	(ABC)
5	Les droites (BK) et (DI) sont :	Non coplanaires	parallèles	sécantes

3 On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [FG] et K et L sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.
Pour chacune des affirmations, trois propositions de réponse sont données, une seule est juste.
Écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre de la bonne réponse.



	Affirmations	a	b	c
1	La droite (AB) est parallèle à	(EH)	(KL)	(DGC)
2	La droite (DC) est sécante à	(EGB)	(KL)	(DGC)
3	Le plan (EFG) est parallèle à	(EGB)	(DGC)	(KL)
4	L'intersection des plans (EBL) et (EFG) est :	E	(EG)	(EJ)
5	Les éléments suivants définissent un plan :	(FG) et K	A, I et B	(AD) et (EB)

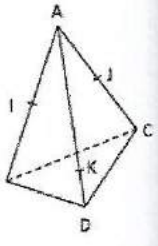
4 Dans le tétraèdre ci-contre, K est un point quelconque du segment [AD].
I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].



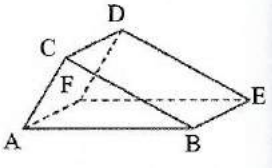
Écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre de la bonne réponse.

		a	b	c
1	I est un point du plan	ABD	ACD	ABC
2	I est un point du plan	BCD	ACD	ABC
3	les droites (BD) et (IK) sont	coplanaires	parallèles	sécantes
4	les droites (AD) et (BC) sont	coplanaires	parallèles	sécantes
5	les droites (IJ) et (CB) sont	coplanaires	parallèles	sécantes

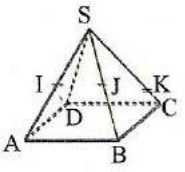
5 Dans le tétraèdre ci-dessous, K est un point quelconque du segment [AD]. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
1. a) Justifie que les droites (IK) et (BD) sont sécantes et construis leur point d'intersection M.
b) Justifie que ce point M est un point commun des plans (BCD) et (IKC).
2. Détermine la droite d'intersection des plans (IKC) et (BCD).



6 On considère la figure ci-dessous composée de trois rectangles et deux triangles identiques.
1. Détermine l'intersection des plans (AFD) et (CBE).
2. Construis l'intersection des plans (ADE) et (BFD).

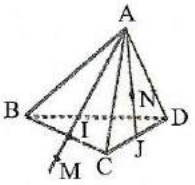


7 SABCD est une pyramide à base carrée. I est le milieu de [AS] et J est le milieu de [BS].



1. Démontre que les droites (IJ) et (SCD) sont parallèles.
2. Démontre que les droites (JK) et (ABC) sont parallèles.

8 ABCD est un tétraèdre, I est un point de l'arête [BC] et J un point de l'arête [CD].

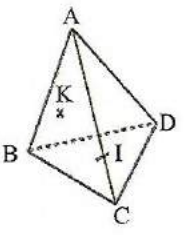


N est un point du segment [AJ] et M un point de la demi-droite [AI) extérieur au segment [AI].

1. Détermine l'intersection des plans (AIJ) et (BCD).
2. a) Démontre que les points M, N, I et J sont dans un même plan.

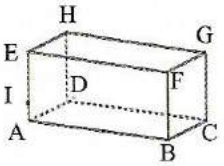
b) On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD). Prouve que P est sur (IJ).

9 ABCD est un tétraèdre régulier. K est un point de la face (ABC). I un point de [AC] tel que les droites (BC) et (KI) ne soient pas parallèles comme l'indique la figure ci-contre.



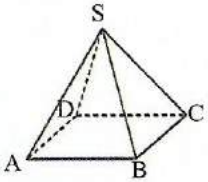
1. Justifie que la droite (KI) est sécante au plan (BCD).
2. Construis le point d'intersection de (KI) et (BCD).

10 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. I est un point du segment [AE] distinct de A et de E.



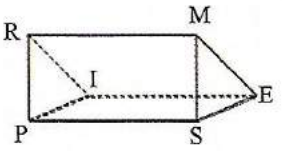
1. Démontre que A, C, G et I sont coplanaires.
2. Démontre que la droite (GI) n'est pas incluse dans le plan (ABC).
3. Construis le point d'intersection J de la droite (GI) et du plan (ABC).

11 SABCD est une pyramide régulière à base carrée.



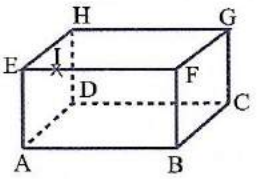
1. Détermine l'intersection des plans (SBD) et (SAC).
2. Détermine l'intersection (Δ) des plans (SAB) et (SDC).
3. Détermine l'intersection (Δ') des plans (SBC) et (SAD).
4. Démontre que (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.

12 On considère le prisme droit à base triangulaire ci-contre :



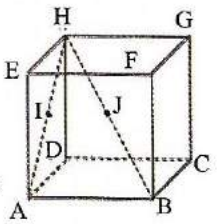
Détermine dans chacun des cas suivants les positions relatives :
1. des droites (RE) et (MI) ;
2. des droites (PI) et (EM) ;
3. de la droite (EM) et du plan (IPS) ;
4. de la droite (SR) et du plan (PMR) ;
5. du plan (IRP) et du plan (IEM).

13 ABCDEFGH est un pavé droit. Soit I un point du segment [EF].



Détermine et trace l'intersection des plans (EFG) et (ACI).

14 Dans le cube ABCDEFGH représenté ci-contre, I et J sont les milieux respectifs des segments [HA] et [HB].



1. Sans justifier, dis si le point D appartient au plan (HIJ).
2. En justifiant, donne les positions relatives des droites et plans suivants :

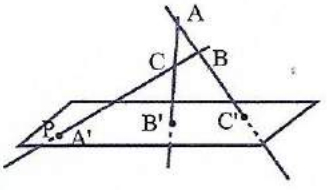
a) les droites (IJ) et (AB) ;
b) les droites (IJ) et (DC) ;
c) la droite (IJ) et le plan (DHG).

3. a) Cite un point d'intersection des plans (HAC) et (HBD).

b) Reproduis la figure puis construis le deuxième point d'intersection des plans (HAC) et (HBD), que l'on nommera P.

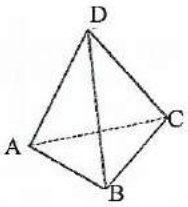
c) Détermine l'intersection des plans (HAC) et (HBD).

15* On considère dans l'espace, un plan (P) et A, B, C des points non alignés n'appartenant pas à ce plan.



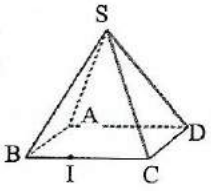
On note :
A′ le point d'intersection de la droite (BC) et du plan (P) ;
B′ le point d'intersection de la droite (AC) et du plan (P) ;
C′ est le point d'intersection de la droite (AB) avec (P) ;
Démontre que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

16 On considère un tétraèdre ABCD.



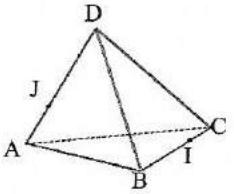
On note I le point du segment [AD] tel que DI = 13.
DA, J et K les milieux respectifs des segments [DB] et [DC].
Les droites (IJ) et (IK) coupent respectivement les droites (AB) et (AC) en M et N.
1. Reproduis et complète la figure ci-jointe.
2. Détermine et dessine l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
3. Démontre que la droite (JK) est parallèle au plan (ABC).
4. Démontre que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

17 SABCD est une pyramide à base carrée. I est un point du segment [BC], distinct de B et C.



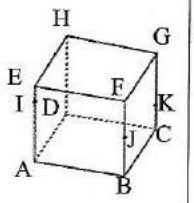
1. Démontre que les plans (SAI) et (SCD) sont sécants.
2. Construis leur intersection.

18 ABCD est un tétraèdre.



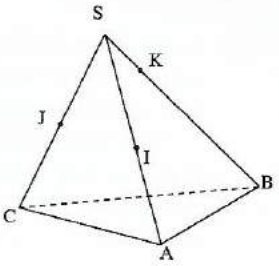
I est un point du segment [BC] distinct de B et de C.
J est un point du segment [AD] distinct de A et de D.
Dans chacun des cas suivants, démontre que les plans sont sécants et détermine leur intersection.
1. (DI) et (BCD).
2. (DIJ) et (ABD).
3. (DIJ) et (ABC).

19 Dans le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous, I est un point de l'arête [AE] tel que EI = EA, J est le milieu de l'arête [BF] et K un point de l'arête [CG] tel que : GK = GC.



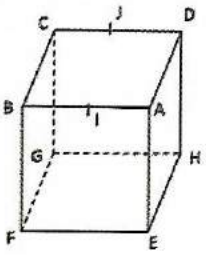
1. Explique pourquoi les droites (JK) et (BC) sont coplanaires puis démontre qu'elles sont sécantes. On appelle M leur point d'intersection, place M sur la figure.
2. On appelle N le point d'intersection des droites (IJ) et (AB).
   a) Place N sur la figure.
   b) Détermine l'intersection des plans (IJK) et (ABC), en justifiant la réponse.
   c) Trace cette intersection.
3. Construis l'intersection de la droite (IK) et le plan (ABC). La droite (IK) coupe le plan (ABC) en un point P.

20 SABC est un tétraèdre. I est le milieu de [SA], J est le milieu de [SC] et K est un point de [SB] distinct du milieu de ce segment. N est le point d'intersection des droites (JK) et (BC).



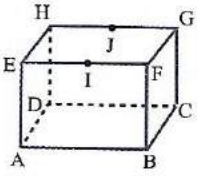
1. Place sur la figure, le point M intersection de la droite (IK) avec le plan (ABC).
2. Soit (D) la droite d'intersection des plans (ABC) et (IJK).
   a) Démontre que N est un point de la droite (D).
   b) Trace la droite (D) sur la figure.
3. Démontre que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).
4. Démontre que les droites (AC) et (D) sont parallèles.

21 ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD].



Détermine dans chacun des cas suivants, l'intersection des deux plans.
Justifie chaque réponse :
1. Le plan (AIE) et le plan (BIG).
2. Le plan (ADI) et le plan (BJC).
3. Le plan (HEF) et le plan (BJC).

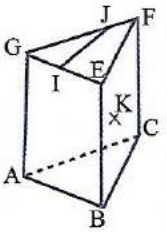
22 Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un pavé, I est le milieu de [EF] et J le milieu de [HG].



Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse est juste.
Écris le numéro de la ligne et la lettre de la colonne qui correspond à la réponse juste.

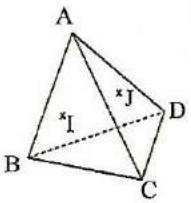
	Affirmations	a	b	c
1	La droite (BH) et la droite (BC) sont :	parallèles	sécantes	coplanaires
2	La droite (EG) et la droite(BC) sont :	parallèles	sécantes	coplanaires
3	La droite (EG) et la droite (AC) sont :	parallèles	sécantes	coplanaires
4	Le plan (EIA) et le plan (FIC) sont :	sécants	confondus	strictement parallèles,
5	Le plan (DAB) et le plan (FJG) sont :	sécants	confondus	strictement parallèles,
6	Le plan (EHI) et le plan (FJG) sont :	sécants	confondus	strictement parallèles,

23 Soit ABCDEF, un prisme droit, I un point de [DE], J un point de [DF] et K le centre de la face BCFE du prisme. On suppose que (IJ) et (EF) ne sont pas parallèles, I est distincts de D et E, J est distinct de Det F.



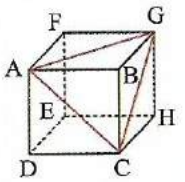
1. Détermine en justifiant les intersections :
   a) (FIJ) et (ABD).
   b) (CIJ) et (DEF).
   c). (BE) et (DIJ).
   d) (BE) et (JK).
2. a) Justifie que les droites (IJ) et (EF) se coupent. Soit N leur point d'intersection.
   b. Justifie que les plans (IJK) et (BEF) sont sécants.
   c. Représenter sur la figure l'intersection de ces deux plans. Justifie.

24 ABCD est un tétraèdre. I un point de la face (ABC) et J un point de la face (ACD).
Détermine l'intersection des plans (AIJ) et(BCD).

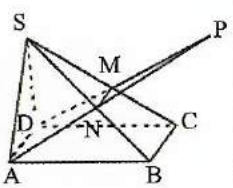


Exercices d'approfondissement

25 ABCDEFGH est un cube
Détermine l'intersection des plans (AGC) et (CDE)

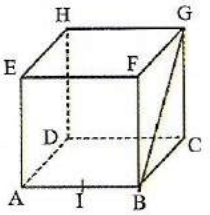


26 SABCD est une pyramide de sommet S ; la base ABCD est un parallélogramme. M est un point de l'arête [SC] et N de l'arête [SB] ; de plus (MN) est parallèle à (BC).



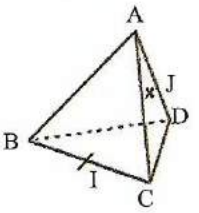
1. Démontre que les droites (AD) et (MN) sont parallèles.
2. Dans le plan (ADMN), les droites (AN) et (DM) se coupent en un point noté P.
   a) Démontre que le point P appartient à chacun des plans (SAB) et (SDC).
   b) Pourquoi la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est-elle la droite (SP) ?
   c) Déduis-en que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD).

27 Dans le pavé ABCDEFGH, le point I est le milieu de [AB].



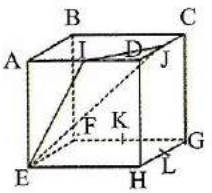
1. a) Justifie que les plans (ABG) et (CAF) sont sécants.
   b) Trace leur droite d'intersection.
2. Construis, en expliquant, la section du pavé par le plan (IEG).

28 Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [BC] et J un point de la face ACD (autre que A).



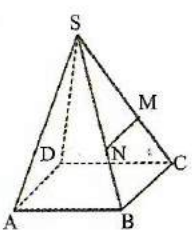
1. Construis l'intersection du plan (AIJ) avec le plan (BCD). Déduis-en l'intersection (Δ) des plans (AIJ) et (BCD)
2. a) Justifie que le plan (AIJ) est sécant au plan (ABD).
   b) Construis l'intersection des plans (AIJ) et (ABD).

29 ABCDEFGH est un cube.
I est le milieu de [AD], J est le milieu de [CD], K est le milieu de [FG] et L est le milieu de [GH].



1.a)Vérifie que le point E appartient au plan (EIJ) et au plan (EHG).
   b) Détermine un autre point des deux plans.
   c) Détermine l'intersection des plans (EIJ) et (EHG).
2. a) Justifie que les points I et J appartiennent aux plans (ABC) et (IJE).
   b) Détermine l'intersection de(ABC) et (IJE).
3. Démontre que (IJ) et (EG) sont parallèles, puis conclure.

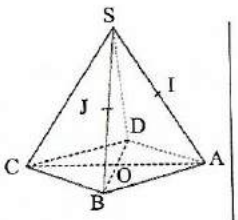
30 Sur la figure ci-contre SABCD est une pyramide de sommet S et dont la base ABCD est un parallélogramme.
M est un point de l'arête [SC], N est un point de l'arête [SB] et (MN) est parallèle à (BC).



1. Démontre que (AD) et (MN) sont parallèles.
2. Dans le plan (ADM), les droites (AN) et (DM) se coupent en P.
   a) Démontre que P appartient à chacun des plans (SAB) et (SDC).
   b) Dis pourquoi la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est droite (SP).
3. Déduis-en que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD).

Exercices

31 SABCD est une pyramide telle que la base BCDA soit un parallélogramme de centre O. I est milieu du segment [AS] et J est milieu du segment [SB].



1. a) Détermine en justifiant l'intersection du plan (CBS) et du plan (SAB).

b) Détermine en justifiant l'intersection du plan (SBD) et du plan (SAC).

c) Détermine en justifiant l'intersection de la droite (SO) et du plan (BAD).

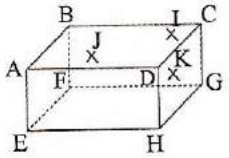
d) Détermine en justifiant l'intersection de la droite (DJ) et de la droite (SO).

2. a) Démontre que la droite (IJ) et la droite (CD) sont parallèles.

b) Déduis-en l'intersection des plans (ABS) et (CID).

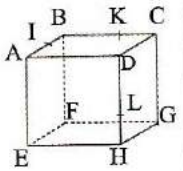
3. Démontre que la droite (IJ) et le plan (ABC) sont parallèles.

32* ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. I, J et K sont des points tels que : I ∈ (BCD) ; J ∈ (BCD) et K ∈ (CDG).



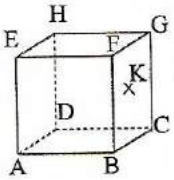
1. Reproduis la figure.
2. Construis la section du parallélépipède par le plan (IJK).

33 ABCDEFGH est un cube, I un point de [AB], K un point de [BC] et L un point de [DH], comme l'indique la figure ci-contre.

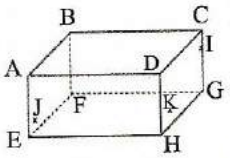


1. Reproduis la figure.
2. Construis la section du cube par le plan (ILK).

34 ABCDEFGH est un cube, K un point tel que : K ∈ (CGF). Reproduis et construis la section du cube par le plan (EGK).

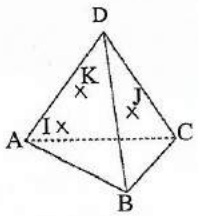


35 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. I, J et K sont des points tels que : I ∈ [CG] ; J ∈ (ABF) et K ∈ (CDG)



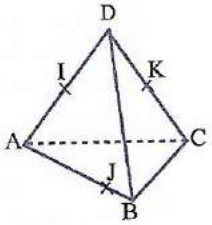
1. Reproduis la figure.
2. Construis la section du parallélépipède par le plan (IJK).

36 Sur la figure suivante DABC est un tétraèdre, I, J et K sont des points tels que : I ∈ (ABD), J ∈ (BCD) et K ∈ (ABD).



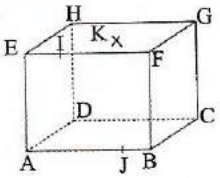
1. Reproduis la figure.
2. Construis la section du tétraèdre par le plan (IJK).

37 Sur la figure ci-contre DABC est un tétraèdre, I, J et K sont des points tels que : I ∈ [AD] , J ∈ [AB] et K ∈ [CD].



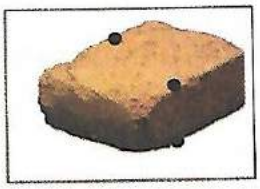
1. Reproduis la figure.
2. Détermine l'intersection des droites (IJ) et(DB).
3. Déduis-en l'intersection du plan (IJK) et (DBC).
3. Construis la section du tétraèdre par le plan (IJK).

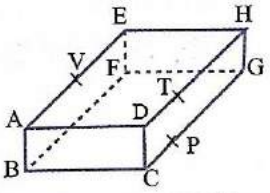
38 Sur la figure dessous, ABCDEFGH est un pavé droit. I est un point de l'arête [EF], J est un point de l'arête [AB] et K est un point de la face EFGH. Construis la section du pavé par le plan (IJK).



Situation d'évaluation

39 Pour fermer un trou creusé par des souris dans sa maison, le père d'un élève en classe de seconde, veut utiliser une brique en forme de parallélépipède rectangle. Il a pris soin de marquer en points noirs sur la brique les limites du trou. Pour éviter de briser la seule brique dont il dispose, son fils décide de l'aider à faire la section de la brique avec les points marqués. Pour cela, il utilise les schémas ci-dessous.





1. Représente les intersections de ce plan (PTV) avec les faces de la brique.
2. Représente la section de la brique avec le plan (PTV).

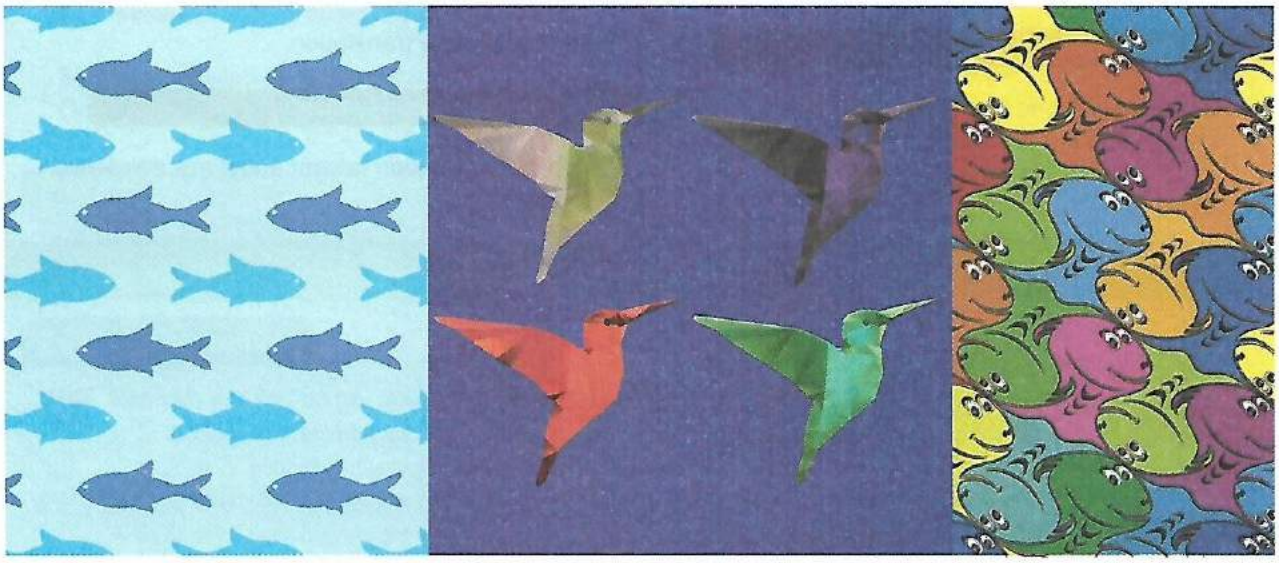
Coup de Pouce

15 Justifier que (A'B') est l'intersection des plans (P) et (ABC). Puis justifier que C' appartient à (A'B').

32 Détermine l'intersection du plan (IJK) avec les faces du parallélépipède.

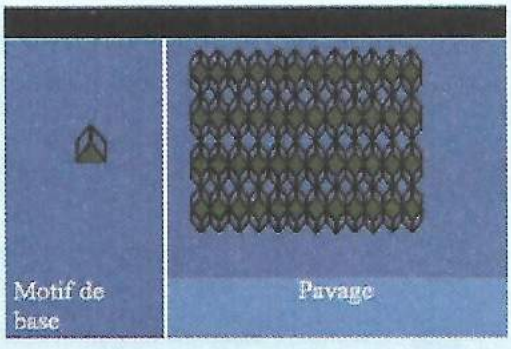
Leçon 13

UTILISATION DES SYMÉTRIES ET TRANSLATIONS



Quelles transformations pour réussir les pavages avec les motifs du poisson ou du colibri ?

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Un professeur d'arts plastiques demande à ses élèves de Seconde C de reproduire le pavage ci-contre à l'aide du motif de base.

Pour mieux réussir leurs productions, ils s'informent auprès de leur professeur de Mathématiques. Celui-ci leur conseille d'utiliser des translations et des symétries.

Les élèves décident d'approfondir leurs connaissances sur l'utilisation de ces deux applications du plan.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Symétrie et translation

Déterminer : l'image d'un point par une symétrie ou une translation

Connaître : la propriété caractéristique des translations.

2 Problème de construction

Construire : une figure en utilisant une symétrie ou une translation

3 Démonstration d'une propriété

Démontrer : une propriété en utilisant une symétrie ou une translation

4 Détermination d'un lieu géométrique

Trouver : un ensemble de points en utilisant une symétrie ou une translation

5 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux symétries et translations

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 **Symétries et translations.**

1.1. Image d'un point par une symétrie ou une translation

Transformation	M a pour image M' signifie que	Illustration
	Si M $\in (\Delta)$, alors M' = M Si M $\notin (\Delta)$, (Δ) est la médiatrice de [MM']	
Symétrie centrale de centre I		
Translation de vecteur $\vec{w}$		

Synthèse

A' est l'image de A par la symétrie centrale de centre O, signifie que A' est le symétrique de A par rapport à O.
A' est l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe (D), signifie que A' est le symétrique de A par rapport à (D).
A' est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, signifie que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.

Exercices de fixation

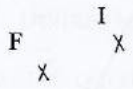
1.1.1 Traduis par une égalité vectorielle ou la notion de médiatrice de chaque phrase.

1. E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$.
3. K est l'image de P par la symétrie orthogonale d'axe (D).
4. Z est l'image de X par la symétrie de centre Y.

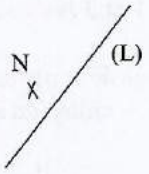
1.1.2 Construis l'image M' du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$.



1-1-3 Construis l'image F' du point F par la symétrie de centre I.



1-1-4 Construis l'image N' du point N par la symétrie orthogonale d'axe (L).



1.2. Propriété caractéristique des translations

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$.
On donne : le point M', image du point M par la translation t et le point N', image du point N par la translation t.
Démontre que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

Synthèse

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par une translation, on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

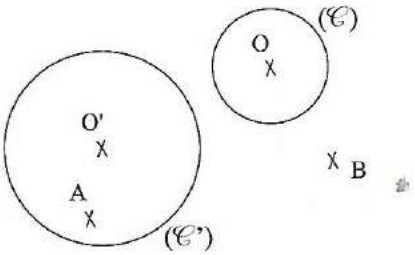
Exercices de fixation

2-1-1 Réponds par vrai ou par faux.
1. Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une translation alors on a nécessairement $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'B}$.
2. Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une translation alors on a nécessairement $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{A'B}$.
3. Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une translation alors on a nécessairement $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$.
4. Si A' et B' sont les images respectives de A et B par une translation alors on a nécessairement $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

2-1-2 A' et B' sont les images respectives de A et B par une translation.
Trouve une relation entre $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Activité 2 Problème de construction

Reproduis la figure ci-contre où $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O, $(\mathscr{C}')$ un cercle de centre O', A et B sont deux points du plan.
Construis un point M sur le cercle $(\mathscr{C})$ et un point P sur le cercle $(\mathscr{C}')$ tels que ABMP soit un parallélogramme.

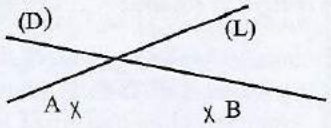


Synthèse

On peut utiliser des translations ou des symétries pour construire des ensembles de points.

Exercices de fixation

2-1 Reproduis la figure ci-dessous où (D) et (L) sont deux droites du plan, A et B deux points du plan.
Construis un parallélogramme ABCD tel que C soit sur (L) et D sur (D).

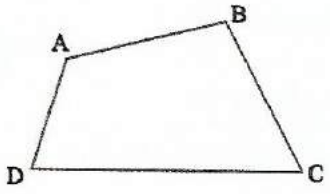


2-2 Reproduis la figure ci-dessous où (Δ) et (L) sont deux droites du plan, O est un point du plan.
Construis un point M sur (L) et un point N sur (Δ) tels que O soit le milieu [MN].



Activité 3 Démonstration d'une propriété

On considère le quadrilatère ABCD ci-contre.
On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [CD] et [AB].
On note K l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$.
Justifie que J est le milieu du segment [IK].



Synthèse

On peut utiliser des translations ou des symétries pour démontrer.

Exercice de fixation

ABC est un triangle rectangle en A (non isocèle), de hauteur [AH] ; P le milieu de [AB] et Q celui de [AC]. Démontre que (PQ) est la médiatrice de [AH].

Activité 4 Détermination d'un lieu géométrique

Soit une droite (D) et un point I n'appartenant pas à (D).
Soit M un point de (D) et M' le point tel que I soit le milieu du segment [MM'].
Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit la droite (D).

Synthèse

On peut utiliser des translations ou des symétries pour déterminer des ensembles de points.

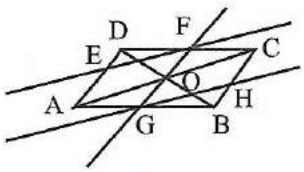
Exercice de fixation

Soit une droite (D), les points I et J n'appartiennent pas à (D). Soit M un point de (D).
Détermine l'ensemble des points M' du plan tels que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{IJ}$.

APPRENTISSAGE DE LA RÉDACTION

Exercice 1 Utiliser les translations pour démontrer

ABCD est un parallélogramme de centre O, E est un point de (AD) et F un point de (DC). La droite (OF) coupe la droite (AB) en G et la parallèle à (EF) passant par G coupe (BC) en H. Démontre que O est le milieu du segment [EH].



Corrigé

Soit S la symétrie de centre O.
On sait que : S(DC) = (AB) et S(AD) = (BC)
car ABCD est un parallélogramme.
F ∈ (DC) par suite, S(F) = (AB) ∩ (OF) soit S(F) = G.
S(F) = G et (GH)//(EF) ainsi S(EF) = (GH).
S(EF) = (GH), S(AD) = (BC) et {E} = (AD) ∩ (EF).
L'image du point d'intersection de deux droites est le point d'intersection des images de ces droites.
Par conséquent : S(E) = H.
S(E) = H donc O est le milieu du segment [EH].

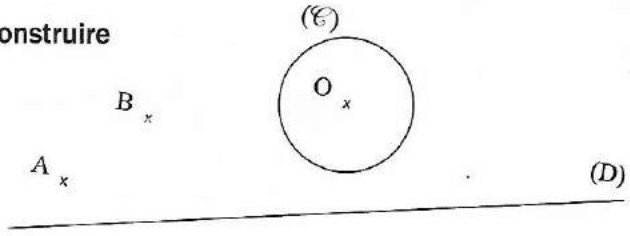
Méthode

Pour démontrer une propriété on peut procéder comme suit :

- lecture de l'énoncé (relever les données et la conclusion) ;
- recherche d'une démarche (choisir une propriété qui permet d'obtenir la conclusion) ;
- rédiger la solution.

Exercice 2 Utiliser les translations pour construire

(D) est une droite et (𝒞) un cercle de centre O.
A et B sont deux points du plan.
Construis un point M sur (D) et un point P sur (𝒞) tels que : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB}$.



Corrigé

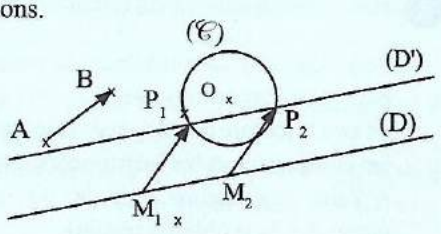
Si le point M existe alors ABPM est un parallélogramme. P est l'image de M par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AB}$. P appartient donc à l'image de la droite (D) par la translation T comme le montre l'esquisse ci-dessous.
Le point P existe si et seulement l'image (D') de (D) par la translation T est sécante à (𝒞).
Si l'intersection de (D') et de (𝒞) est vide alors le problème n'a pas de solution.

Méthode

- **Analyse** (elle doit aboutir à un programme de construction)
- **Justification du programme de construction**
Il s'agit de vérifier que les conditions sont suffisantes et discuter de l'existence d'une solution et du nombre de solution
- **Réalisation de la construction**
Faire une figure soignée

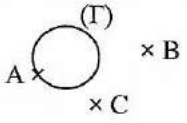
Si (D') est tangente à (𝒞) alors le problème admet une seule solution.
Si (D') coupe (𝒞) en deux points alors le problème admet deux solutions.

On peut donc construire les points M et P de la façon suivante :
- Construire l'image (D') de la droite (D) par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Marquer le point P, intersection de (𝒞) et de (D').
- M est l'image de P par la translation de vecteur $-\overrightarrow{BA}$.



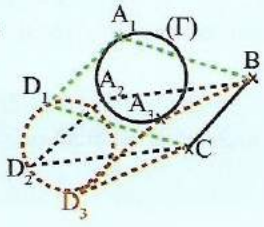
Exercice 3 Utiliser les translations pour déterminer un lieu géométrique

A est un point mobile d'un cercle (Γ). B et C sont des points fixes du plan.
D est le point tel que ABCD est un parallélogramme.
Détermine le lieu géométrique du point D lorsque A décrit (Γ).



Corrigé

La construction de plusieurs positions du point A sur (Γ) permet de visualiser les positions du point D.



Les points fixes sont B et C.
D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ car ABCD est un parallélogramme.
Si A appartient à (Γ), alors il existe un unique point D appartenant à l'image (Γ') de (Γ) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ vérifiant ABCD est un parallélogramme.
Inversement pour tout point D de (Γ'), il existe un unique point A tel que ABCD soit un parallélogramme.

Méthode

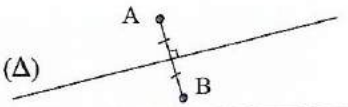
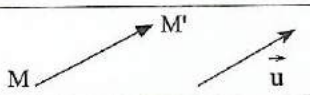
Pour rechercher un lieu géométrique, on peut procéder comme suit :
- lecture de l'énoncé (relever les données et les contraintes) ;
- faire une esquisse avec plusieurs positions du point mobile, identifier les points fixes ;
- faire intervenir une transformation pour caractériser le lieu géométrique.

A est l'image de D par la translation de vecteur $-\overrightarrow{BC}$
(Γ') est le lieu géométrique cherché. Pour le construire, il suffit de construire l'image de (Γ) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Résumé de cours

1 Symétries et translation

1.1. Image d'un point par une symétrie ou une translation

Transformation	M a pour image M' signifie que	Illustration
Symétrie orthogonale d'axe (Δ)	Si M ∈(Δ), alors M' = M Si M∉(Δ), (Δ) est la médiatrice de [MM']	
Symétrie de centre I	Si M = 0, alors M' = 0 . Si M ≠ 0 alors I est le milieu de [MM']	
Translation de vecteur $\vec{u}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	

1.2. Propriété caractéristique des translations

Propriété Soit t une translation.
Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par t, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

2 Problème de construction

Pour résoudre un problème de construction, on peut procéder comme suit :
- Faire la lecture de l'énoncé : relever les données, les contraintes et les instruments imposés.
- Faire une figure d'étude ou une esquisse (supposer le problème résolu).
- Analyser la figure conduisant à la résolution du problème.
- Traduire les contraintes en termes de transformations.
- Établir un programme de construction.
- Faire une discussion sur le nombre de solutions.
- Réalise une figure soignée.

3 Démonstration d'une propriété

Pour démontrer une propriété, on peut procéder comme suit :
- Faire la lecture de l'énoncé : relever les données et la conclusion
- Compléter la figure donnée si cela est nécessaire
- Analyser la conclusion en rapport avec les propriétés connues et faire le lien avec les données pour choisir les propriétés qui conviennent
- Traduire les données en termes de transformation
- Rédiger avec rigueur la démonstration

4 Détermination d'un lieu géométrique

Définition Un lieu géométrique est un ensemble de points qui vérifient une propriété géométrique donnée.

Points méthodes

Pour déterminer un lieu géométrique, on peut procéder comme suit :
- Faire la lecture de l'énoncé : relever les données et les contraintes.
- Faire une figure d'étude ou une esquisse avec plusieurs positions du point mobile.
- Identifier les points fixes, traduire les contraintes en termes de transformations.
- Préciser le lieu géométrique et ses caractéristiques et relever les points à exclure.
- Construire une figure solution du problème.

Exercices de renforcement

1 ABC est un triangle rectangle en B tel que :
AB = 6 cm et BC = 2 cm. On donne :
$S_B(A) = E$ et $S_B(C) = F$
1. Construis la figure.
2. Démontre que le quadrilatère ACEF est un losange.
3. Calcule la longueur du côté du losange ACEF.

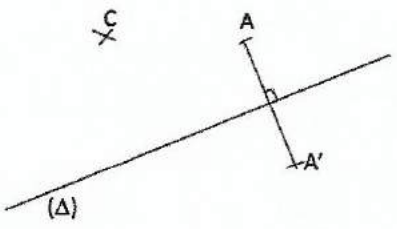
2 $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre I, [AC] et [BD] sont deux diamètres de ce cercle.
Justifie en utilisant la symétrie centrale de centre I que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

3 Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes. A et O sont deux points distincts n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2).
Construis un parallélogramme ABCD de centre O tel que B appartient à (D_1) et D appartient à (D_2).

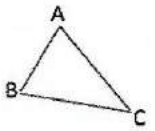
4 Soient A et B deux points distincts et M un point non aligné avec A et B.
Construis l'image de M par la symétrie orthogonale $S_{(AB)}$. Justifie ta réponse.

5 ABC est un triangle rectangle en B. On désigne par I le milieu de [BC], par J le milieu de [AB] et par H le projeté orthogonal de B sur (AC).
1. Construis les points I, J et H.
2. Démontre que (IJ) est la médiatrice de [BH].
3. En utilisant une symétrie orthogonale, démontre que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

6 Sur la figure ci-dessous, A' est l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
C un point du plan tel que (CA) n'est pas parallèle à (Δ).
Construis à la règle non graduée uniquement l'image C' du point C par la symétrie d'axe (Δ).
Justifie la construction.



7 1. Reproduis la figure ci-dessous où ABC est un triangle et G un point du plan.
2. Construis l'image A'B'C' de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



8 1. Construis un parallélogramme ABCD.
2. Construis E et F, les images respectives de B et de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Démontre que C est le milieu de [DE] et de [BF].
4. Déduis de ce qui précède que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EF}$

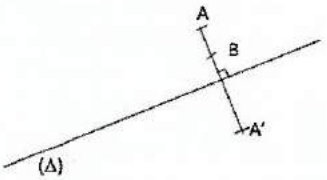
Exercices d'approfondissement

9 Soit (D) une droite, A et B deux points d'un même demi-plan de bord (D).
Construis le point M appartenant à la droite (D) tel que la somme AM + MB soit minimale.

10 Soient (D) et (L) deux droites parallèles et A un point appartenant à (D).
Construis un triangle ABC équilatéral tel que B appartienne à (L) et C n'appartienne ni à (D) ni à (L).

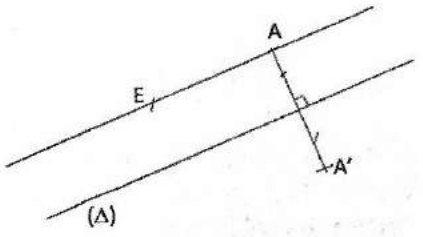
11 Soient (D) et (L) deux droites parallèles. A et B deux points de part et d'autre à l'extérieur de la bande formée par les deux droites parallèles.
Construis un segment [MN] de support perpendiculaire aux droites (D) et (L) dont les extrémités sont sur (D) et (L) de telle sorte que la distance à parcourir du point A au point B en passant par M et N soit minimale.

12 Sur la figure ci-dessous, A' est l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
B est un point de (AA').
Construis à la règle non graduée uniquement l'image B' du point B par la symétrie d'axe (Δ).



Exercices

13 Sur la figure ci-dessous, A' est l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
(AE) est parallèle à (Δ).
Construis à la règle non graduée uniquement l'image E' du point E par la symétrie d'axe (Δ).

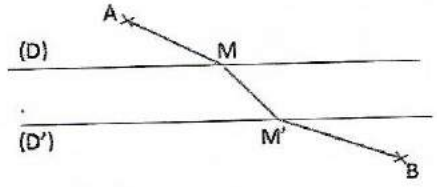


14 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I ; J), on considère les points A(–1 ; 2), B(1 ; 0) et C(2 ; 3).
1. a) Construis les points A' ; B' et C', images respectives de A, B et C par la translation t de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$.
b) Détermine les coordonnées de A', B', C'.
2. Soit M'(x', y') l'image du point M(x ; y) par la translation t.
a) Détermine les coordonnées x' et y' en fonction de x et de y.
b) Détermine les coordonnées du point D dont l'image par la translation t est A.

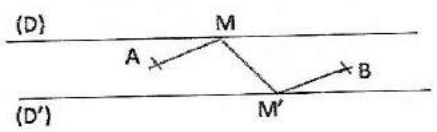
15 ABCD est un parallélogramme.
M est le milieu de [BC] et E est le symétrique de A par rapport à M.
1. Démontre que (CE) est parallèle à (AB).
2. Démontre que les points C, D et E sont alignés.
3. Démontre que C est le milieu du segment [DE].

16 Les droites (D) et (D') sont parallèles et les points A et B sont fixes.
Construis les points M de (D) et M' de (D') tel que le trajet AMM'B soit le plus petit possible dans chacun des cas suivants.

a)

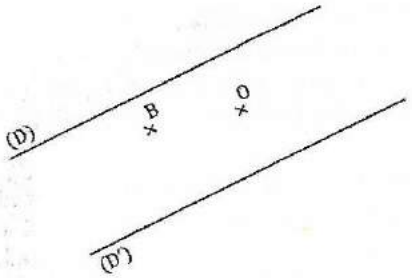


b)



Situation d'évaluation

17 Les élèves de seconde C d'un établissement découvrent la figure ci-dessous où les droites (D) et (D') sont symétriques par rapport à O.
Un élève affirme qu'il est possible de construire l'image du point B par la symétrie de centre O avec la règle non graduée uniquement.
Pour vérifier cette affirmation, les élèves recherchent la construction de l'image du point B.



1. Construis à la règle non graduée l'image d'une droite passant par B et sécante à la droite (D).
Justifie ta démarche.
2. Justifie que l'élève a raison en donnant un programme de construction.

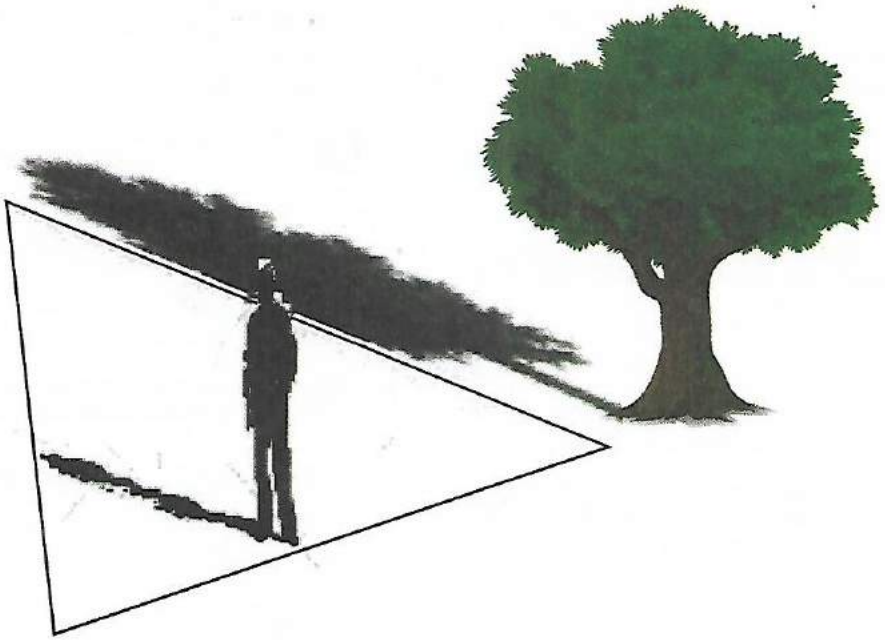
Coup de Pouce

12 Construire l'image d'un point n'appartenant pas à [AA'].

13 Construire l'image d'un point n'appartenant pas à (AE).

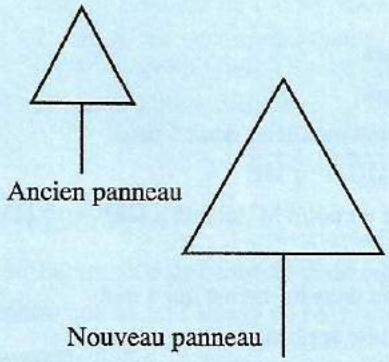
Leçon 14

HOMOTHÉTIES



Thalès se pénétra de l'idée suivante : le rapport que j'ai avec mon ombre est le même que celui que la pyramide de Kheops a avec la sienne. Détermine un procédé de calcul de la hauteur d'un l'arbre à partir de cette information.

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Le panneau de signalisation à l'entrée d'un lycée est devenu vétuste et illisible. Les élèves de la promotion seconde dudit lycée veulent faire repeindre ce panneau et faire confectionner un autre trois fois plus grand que l'ancien. Le président de la promotion propose le schéma ci-contre.

Il a fallu 10 000 F pour peindre le 1er panneau.

Les élèves se demandent combien il faudra débourser pour peindre le nouveau panneau sachant que les coûts restent inchangés.

Un élève de la promotion affirme qu'il peut rapidement calculer ce montant connaissant l'aire du 1er panneau.

Ses amis de classe cherchent à vérifier cette affirmation. Ils sollicitent donc leur professeur de mathématiques qui leur demande de faire des recherches sur les homothéties.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Définition et premières propriétés

Connaître :
- la définition d'une homothétie
- la propriété relative aux points invariants par une homothétie
- la propriété relative à l'alignement d'un point, de son image et du centre de l'homothétie
- la propriété fondamentale de l'homothétie
- la propriété relative à la multiplication des longueurs et des aires par les homothéties

Construire : l'image d'un point par une homothétie en utilisant la définition.

2 Images de figures simples

Connaître : les propriétés relatives aux images de figures simples par une homothétie.

Construire : l'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle par une homothétie.

3 Propriétés de conservation

Connaître : les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une homothétie

Démontrer
- que deux droites sont parallèles en utilisant une homothétie
- que des droites sont perpendiculaires en utilisant une homothétie
- une égalité angulaire en utilisant une homothétie
- qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une homothétie

4 Diverses déterminations d'une homothétie

Connaître : les propriétés relatives à la caractérisation d'une homothétie.

Construire : l'image d'un point par une homothétie définie par l'une de ses caractérisations.

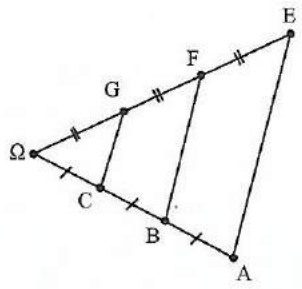
5 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux homothéties

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Définition et premières propriétés

1.1. Homothétie de centre Ω et de rapport *k*



Sur la figure codée ci-contre :
- les points Ω, G, F et E sont alignés.
- les points Ω, C, B et A sont alignés.
- Les droites (CG), (BF) et (AE) sont parallèles deux à deux.

1. Justifie que : $\overrightarrow{\Omega C} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega E}$.
2. À un point M donné, on associe un point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}$.
   a) Justifie que M'est unique.
   b) Justifie que la relation du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M'est une application.

Synthèse

L'application qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}$ s'appelle homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{3}$.

Exercices de fixation

1-1-1 Traduis chacune des phrases ci-dessous par une égalité vectorielle.

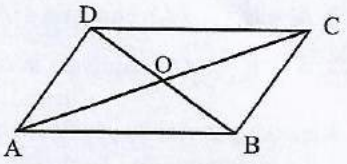
1. Le point B est l'image du point C par l'homothétie de centre E et de rapport 5.
2. Le point F est l'image du point G par l'homothétie de centre S et de rapport $-\frac{1}{4}$.

1-1-2 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

1. $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ signifie que A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3.
2. $\overrightarrow{OA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ signifie que A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

1-1-3 ABCD est un parallélogramme de centre O.

1. Détermine l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.
2. Détermine l'image de O par l'homothétie de centre D et de rapport 2.



1-1-4 Place deux points A et O.
Construis l'image A' de A par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

1-1-5 Place deux points A et O.
Construis l'image A' de A par l'homothétie de centre O et de rapport –2.

1.2. Point Invariant

Soient Ω un point du plan et k un nombre réel non nul.
Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
Détermine l'ensemble des points M du plan tel que $h(M) = M$.

Synthèse

Toute homothétie de rapport différent de 1 admet un unique point invariant : son centre.

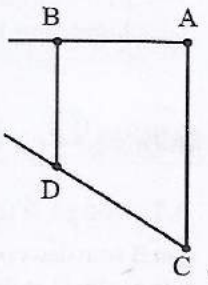
Exercices de fixation

1-2-1 A et O sont deux points distincts du plan.
Réponds par vrai ou par faux.

1. Si A est le centre d'une homothétie h de rapport différent de 1 alors $h(A) = O$.
2. Si A est le centre d'une homothétie h de rapport différent de 1 alors $h(A) = A$.
3. Si h est une homothétie de rapport différent de 1 tel que $h(A) = A$, alors A est le centre de l'homothétie h.

1-2-2 Sur la figure ci-contre, B et D sont les images respectives de deux points A et C par une homothétie h.

Reproduis la figure et construis le centre Ω de h.



1.3. Réciproque

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k, M est un point du plan et M'son image par h.
Démontre que M est l'image de M' par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$.

Synthèse

M' est l'image de M par une homothétie de centre Ω et de rapport k lorsque M est l'image de M' par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$.

Exercices de fixation

131 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. $A' = h_{(O,2)}(A)$ équivaut à $A = h_{(O,-2)}(A')$.
2. $A' = h_{(O,\frac{1}{3})}(A)$ équivaut à $A = h_{(O,\frac{1}{3})}(A')$.
3. $A' = h_{(O,\frac{1}{5})}(A)$ équivaut à $A = h_{(O,-5)}(A')$.

132 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
1. La réciproque de l'homothétie de centre A et de rapport –2 est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
2. La réciproque de l'homothétie de centre A et de rapport –2 est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
3. La réciproque de l'homothétie de centre A et de rapport –2 est l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

133 Détermine la réciproque de l'homothétie de centre A et de rapport – 5.

1.4. Propriété fondamentale

Soit h une homothétie de entre Ω et de rapport k.
Soient M, M', N et N' des points tels que : $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$.
Justifie que : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Synthèse

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par une homothétie de rapport k, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Exercices de fixation

141 F et G sont les images respectives de A et B par l'homothétie de centre I et de rapport –7.
Écris le vecteur $\overrightarrow{FG}$ et fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

142 E et F sont les images respectives de A et B par l'homothétie de centre I et de rapport 13.
Justifie que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

143 C et D sont les images respectives de A et B par une homothétie de centre I et de rapport $-\frac{5}{6}$.
Sachant que AB = 12 cm, calcule CD.

Activités 2 Images de figures simples

2.1. Image d'une droite, d'une demi-droite

A et B sont deux points distincts du plan. On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par l'homothétie h de centre Ω et de rapport k.
1. Justifie que la droite (A'B') est parallèle à la droite (AB).
2. Soit M un point de (AB).
Justifie que son image M' par h appartient à (A'B').
3. Justifie que pour tout point P' de (A'B'), il existe un point P de (AB) tel que : $P' = h(P)$.
4. Déduis-en l'image de la droite (AB) par h.
5. Démontre que l'image de la demi-droite [AB) par h est la demi-droite [A'B').

Synthèse

A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par une homothétie h.
L'image de la droite (AB) par h est la droite (A'B') et (A'B') // (AB).
L'image de la demi-droite [AB) par h est la demi-droite [A'B').

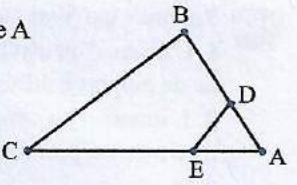
Exercices de fixation

2-1-1 A, B, C et O sont des points alignés et O est un point. A', B' et C' sont les images respectives de A, B et C par l'homothétie de centre O et de rapport 9. Justifie que A', B' et C' sont alignés.

2-1-2 Sur la figure ci-dessous, A, B, C D et E sont des points du plan tels que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

h est l'homothétie de centre A de rapport $\frac{AD}{AB}$.

1. Détermine l'image de la droite (BC) par h.
2. Détermine l'image de la demi-droite [BC] par h.



2.2. Image d'un segment

Soient A et B deux points du plan. On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par l'homothétie h de centre O et de rapport k.

1. Justifie que l'image d'un segment par l'homothétie h est un segment.
2. Justifie que $A'B' = |k| AB$.

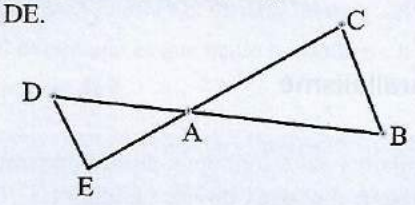
Synthèse

A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par une homothétie h de rapport k.
L'image du segment [AB] par h est le segment [A'B'] et $A'B' = |k|AB$.

Exercices de fixation

2-2-1 Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles, D et E sont les images respectives de B et C par l'homothétie h de centre A et de rapport $-\frac{2}{5}$.
On donne : $CB = \frac{5}{2}$.

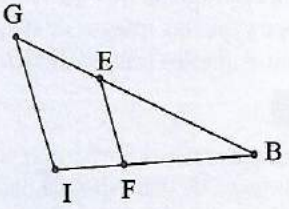
1. Détermine l'image du segment [BC] par h.
2. Détermine DE.



2-2-2 A, B et I sont des points du plan tels que I soit le milieu de [AB]. A', B', I' sont les images respectives de A, B et I par une homothétie h.
Justifie que I' est le milieu de [A'B'].

2-2-3 ABI est un triangle.
Construis l'image du segment [AB] par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.

2-2-4 Le triangle BIG est l'image du triangle BEF par l'homothétie de centre B et de rapport 1,5. Détermine les longueurs des trois côtés du triangle BIG sachant que BE = 5, BF = 3,5 et EF = 3.



2.3. Image d'un cercle

$(\mathscr{C})$ est le cercle de centre I et de rayon r et h une homothétie de rapport k.
On désigne par I' l'image de I par h et par $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre I' et de rayon $|k|r$.

1. Justifie que pour tout point M de $(\mathscr{C})$, son image M' appartient au cercle $(\mathscr{C}')$.
2. Justifie que pour tout point P' du cercle $(\mathscr{C}')$ il existe un point P de $(\mathscr{C})$ tel que : $P' = h(P)$.
3. Déduis-en l'image du cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et de rayon r par h.

Synthèse

L'image d'un cercle de centre I et de rayon r par une homothétie h de rapport k est le cercle de centre $h(I)$ et de rayon $|k|r$.

Exercices de fixation

2-3-1 Réponds par Vrai ou par Faux.

1. L'image d'un cercle de rayon r par une homothétie de rapport k différent de 1 est un carré de côté r.
2. L'image d'un cercle de rayon r par une homothétie de rapport k différent de 1 est un cercle de même rayon.
3. L'image d'un cercle de rayon r par une homothétie de rapport k différent de 1 est un cercle de rayon $|k|r$.

2-3-2 Le cercle $(\mathscr{C}')$ est l'image du cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et de rayon $\frac{15}{2}$ par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{5}{6}$.
Détermine le rayon de $(\mathscr{C}')$.

2-3-3 A et I sont deux points du plan.
Construis l'image du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 1,5 par l'homothétie de centre I et de rapport 2.

Activités 3 Propriétés de conservation

3.1. Conservation des angles orientés

Marque sur ton cahier quatre points A, B, C et I.
Construis les images respectives A', B' et C' des points A, B et C par l'homothétie h de centre I rapport 2.
Vérifie que : Mes $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ = Mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Synthèse

L'image d'un angle orienté par une homothétie est un angle orienté qui lui est égal.

Exercices de fixation

3-1-1 ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
A', B' et C' sont les images respectives de A, B et C par une homothétie h.
Détermine Mes $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.

3-1-2 ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
I est un point du plan.
Construis l'image de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$.

3.2. Conservation de l'orthogonalité et du parallélisme

Soit h une homothétie de rapport k.
1. Démontre que les images de deux droites perpendiculaires par h sont deux droites perpendiculaires.
2. Démontre que les images de deux droites parallèles par h sont deux droites parallèles.

Synthèse

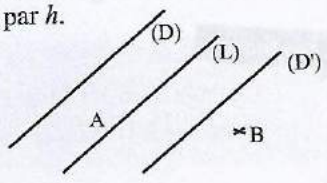
Les images de deux droites perpendiculaires par une homothétie sont deux droites perpendiculaires.
Les images de deux droites parallèles par une homothétie sont deux droites parallèles.

Exercices de fixation

3-2-1 Les droites (D') et (L') sont les images respectives de deux droites parallèles (D) et (L) par une homothétie h.
Justifie que (D') et (L') sont parallèles.

3-2-2 ABC est un triangle rectangle en A.
A', B' et C' sont les images respectives A, B et C par une homothétie.
Justifie que le triangle A'B'C' est rectangle en A'.

3-2-3 Sur la figure ci-dessous, (D) et (L) sont deux droites parallèles.
(D') est l'image de (D) par une homothétie h.
A est un point de (L) et B son image par h.
Donne un programme de construction de l'image (L') de la droite (L) par h.



3.3. Conservation du milieu d'un segment

[AB] est un segment de milieu I. h une homothétie de rapport k.
A', B' et I' sont les images respectives des points A, B et I par h.
Justifie que I' est le milieu du segment [A'B'].

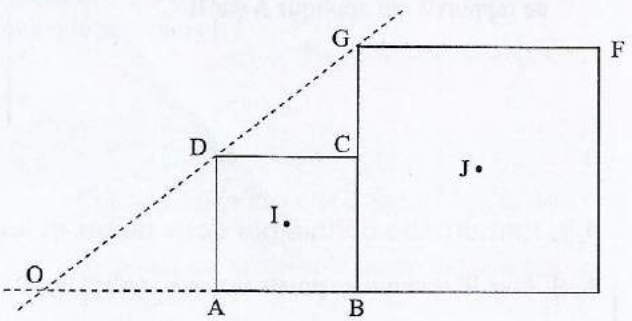
Synthèse

A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par une homothétie h.
L'image du milieu du segment [AB] par h est le milieu du segment [A'B'].

Exercices de fixation

3-3-1 A et B sont deux points distincts du plan et K est le milieu du segment [AB].
A', B' et K' sont les images respectives de A, B et K par une homothétie.
Justifie que K' est le milieu du segment [A'B'].

3-3-2 ABCD et BEFG sont deux carrés de centres respectifs I et J. Le milieu de [AB] est M.
L'homothétie h de centre O et de rapport 2 transforme ABCD en BEFG.



Détermine l'image de I et celle de M par h.

Activités 4 Diverses déterminations d'une homothétie

4.1. Homothétie définie par son centre, un point et son image

Soit un nombre réel k différent de 0 et 1 soit deux points distincts A et B.

1. Justifie qu'il existe un point O et un seul tel que : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}$.
2. a) Justifie qu'il existe une et une seule homothétie h de centre O qui applique A sur B.
   b) Précise le rapport de h.

Synthèse

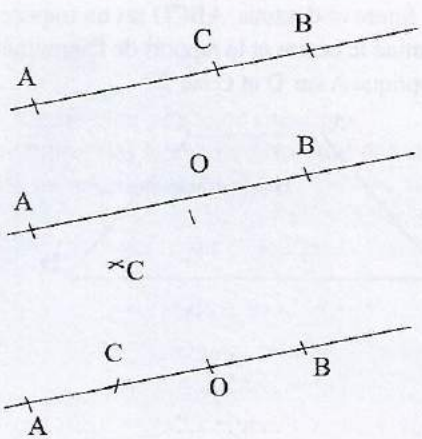
Une homothétie est parfaitement déterminée par la donnée de son centre, un point et son image.

Exercices de fixation

4-1-1 Sur la figure ci-contre, C est un point de la droite (AB). Justifie qu'il existe une homothétie et une seule de centre C qui applique A sur B.

4-1-2 Reproduis la figure ci-contre où les points O, A et B sont alignés.
Construis l'image C' du point C par l'homothétie de centre O qui applique A sur B.

4-1-3 Reproduis la figure ci-contre où les points O, A et B sont alignés.
Construis l'image C' du point C par l'homothétie de centre O qui applique A sur B.



4.2. Homothétie définie par son rapport, un point et son image

A et A' sont deux points du plan. Soit k un nombre réel non nul.
Justifie qu'il existe une seule homothétie h de rapport k qui applique A sur A'.

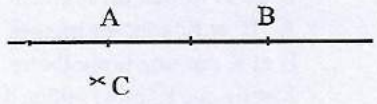
Synthèse

Une homothétie est parfaitement déterminée par la donnée de son rapport, un point et son image.

Exercices de fixation

4-2-1 A et B sont deux points distincts du plan. Justifie qu'il existe une et une seule homothétie de rapport 2 qui applique A sur B.

4-2-2 La droite ci-dessous est régulièrement graduée. Reproduis puis construis l'image C' du point C par l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ qui applique A sur B.



4.3. Homothétie définie par deux points et leurs images

A, B, A' et B' sont quatre points tels que : (A'B') //(AB) et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.

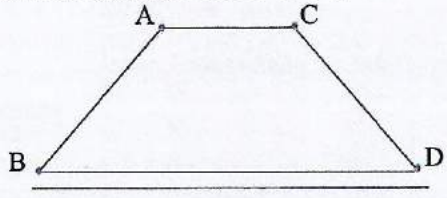
1. Justifie qu'il existe une seule homothétie h de rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ qui applique A sur A'.
2. Justifie que : $h(B) = B'$.

Synthèse

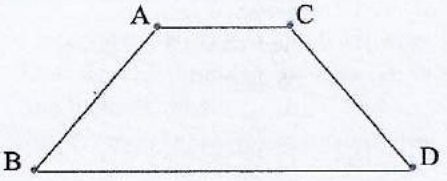
Une homothétie est parfaitement déterminée par la donnée de deux points et leurs images.

Exercices de fixation

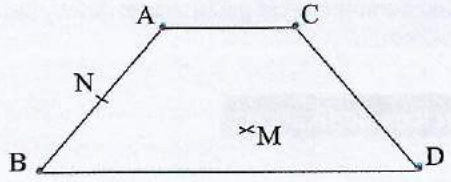
4-3-1 Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze. Justifie qu'il existe une homothétie et une seule qui applique A sur B et C sur D.



4-3-2 Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze. Détermine le centre et le rapport de l'homothétie qui applique A sur D et C sur B.

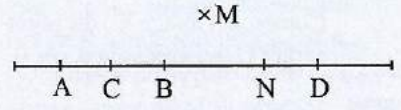


4-3-3 Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze. Reproduis puis construis les images M' et N' respectives des points M et N par l'homothétie qui applique A sur D et C sur B.

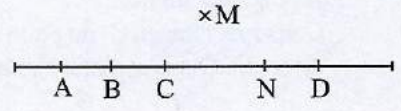


4-3-4 Dans chacun des cas suivants, reproduis puis construis les images M' et N' respectives des points M et N par l'homothétie qui applique A sur B et C sur D.

a.



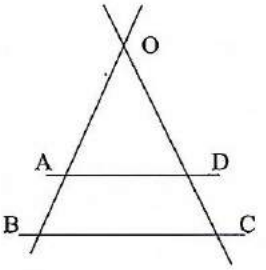
b.



Exercice 1 Utiliser les homothéties pour construire une droite et pour démontrer que des points sont alignés

Sur la figure ci-contre, ABCD un trapèze, les droites (AB) et (CD) se coupent en un point O. On considère l'homothétie h de centre O qui applique A sur B.

1. Reproduis puis construis l'image (D_1) de la droite (AC) par l'homothétie h.
2. a) Justifie que $h(D) = C$.
   b) Construis l'image (D_2) de la droite (BD) par l'homothétie h.
3. Les droites (AC) et (BD) se coupent en un point I. Les droites (D_1) et (D_2) se coupent en un point J. À l'aide de l'homothétie h, démontre que les points I, J et O sont alignés.



Corrigé

1. (D_1) est la droite parallèle à (AC) passant par B.
2. a) ABCD est un trapèze donc (AD)//(BC) et $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$.

Il existe une homothétie et une seule qui applique A sur B et D sur C.

Son centre est le point d'intersection O des droites (AB) et (DC).

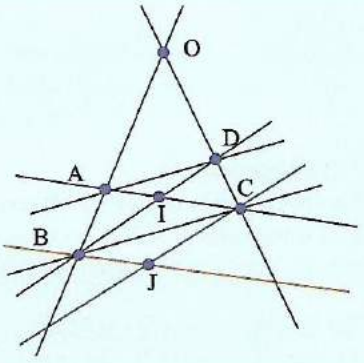
Donc cette homothétie est h et $h(D) = C$.

b) (D_2) est la droite parallèle à (BD) passant par C.

3. On a : $h(AC) = (D_1)$ et $h(BD) = (D_2)$.

Par suite, l'image du point d'intersection I de (AC) et (BD) est le point d'intersection J de (D_1) et (D_2). On en déduit que $h(I) = J$.

Les points O, I et J sont donc alignés.



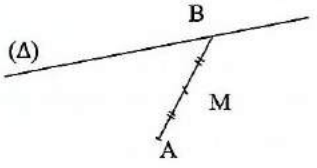
Méthode

- Utiliser l'image du point d'intersection de deux droites.
- Un point, son image et le centre de l'homothétie sont alignés.

Exercice 2 Déterminer un lieu géométrique

(Δ) est une droite et B un point variable sur (Δ). A est un point qui n'appartient pas à (Δ). M est le milieu du segment [AB].

Détermine l'ensemble des points M lorsque B décrit (Δ).



Corrigé

Détermination d'un lieu géométrique.

A, B et M sont alignés. A est fixe et $\frac{AM}{AB}$ est constant.

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

$M = h(B)$.

Lorsque B décrit (Δ), M décrit l'image de (Δ) par h.

L'ensemble des points cherchés est la parallèle à (Δ) passant par M.

Méthode

- Représenter plusieurs situations.
- Utiliser des éléments fixes pour définir les transformations du plan.

Exercice 3 Résoudre un problème de construction

ABC est un triangle.
Construis un triangle MNP inscrit dans le triangle ABC ayant ses côtés de supports perpendiculaires à ceux de ABC.

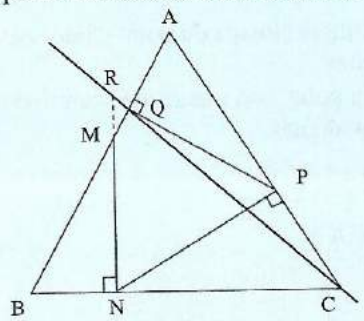
Corrigé

Méthode

Pour résoudre un problème de construction, on peut :
- Analyser
- Justifier
- Réaliser la construction

- **Analyse**

Soit un point M de [AB]. On appelle N le projeté orthogonal de M sur (BC), P le projeté orthogonal de N sur (AC), Q le projeté orthogonal de P sur (AB).
En général la ligne brisée MNPQ ne se referme pas et on appelle R le point d'intersection des droites (MN) et (PQ).



R est le point d'intersection de (MN) et (PQ)
On trace la droite (RC). Elle coupe (AB) en M'.
Soit h l'homothétie de centre C qui transforme R en M'.
Par h on ramène N en N' sur le segment [BC] et P en P' sur le segment [AC].

- **Justification**

La droite (CR) rencontre (AB) en M'. L'homothétie de centre C qui applique R sur M' applique N sur N' et P sur P'. Le triangle M'N'P' a ses supports à côtés parallèles aux supports des côtés de RNP, donc orthogonaux aux supports des côtés du triangle ABC. Le triangle M'N'P' inscrit dans ABC est une solution.

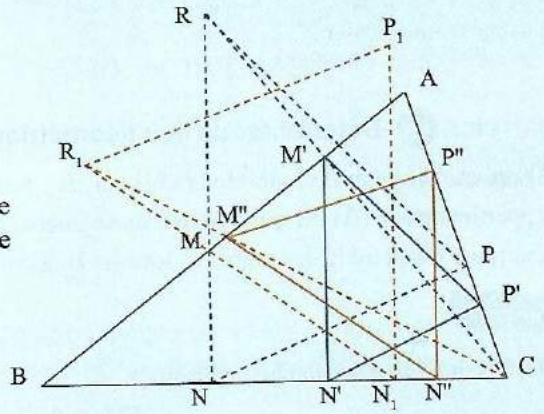
Recherche d'une autre solution

En plaçant le point N_1 sur la perpendiculaire à (AB) en M, on construit le triangle $N_1P_1R_1$ tel que :

$(N_1P_1) \perp (BC)$ et $P_1 \in (AC)$.

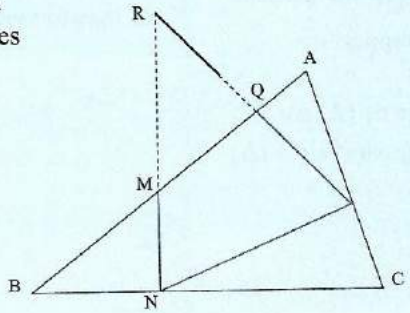
$(R_1P_1) \perp (AC)$ et $R_1 \in (MN_1)$.

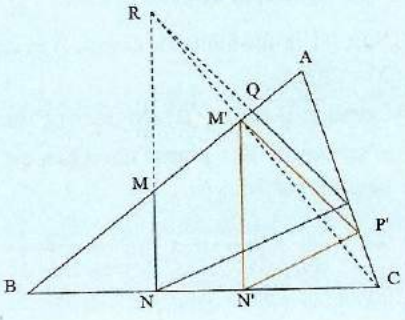
La droite (CR_1) rencontre (AB) en M". L'homothétie de centre C qui transforme R_1 en M" permet de construire une deuxième solution : le triangle M"N"P".



- **Réalisation de la construction**

Le tracé de la droite (RC) permettant de mettre en évidence des homothéties de centre C.





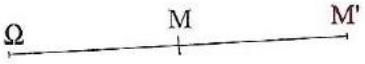
1 Définition et premières propriétés.

1.1. Homothétie de centre Ω et de rapport k

Définition Soient Ω un point du plan et k un nombre réel non nul.
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

On note généralement $h_{(\Omega; k)}$ ou h (s'il n'y a pas de confusion possible) l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Exemple

$k > 2$	$k < 0$	$k = -1$
		
$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$

Conséquences

- Si M' est l'image de M par une homothétie de centre Ω, alors M', M et Ω sont alignés.
- Si M' est l'image de M par une homothétie de rapport k, alors $\Omega M' = |k| \Omega M$.
- L'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre Ω.

1.2. Point Invariant

Propriété Toute homothétie de rapport différent de 1 admet un seul point invariant : son centre.

Remarque
Par une homothétie de rapport 1, tout point du plan est invariant.

1.3. Réciproque

Propriété Soit h une homothétie de entre Ω et de rapport k.
Quels que soient les points M et M',
$h_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow M = h_{(O, \frac{1}{k})}(M')$.

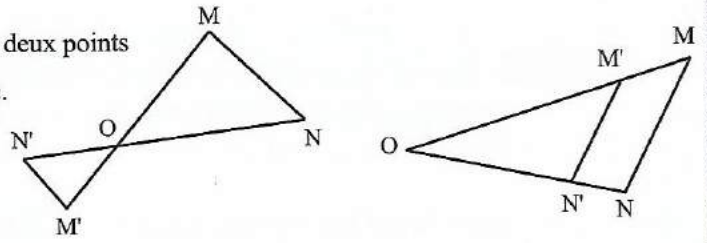
Définition Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
L'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$ est appelée la réciproque de l'homothétie h.

1.4. Propriété fondamentale

Propriété fondamentale

Soit h une homothétie de rapport k, M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par h.

On a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.



2 Images de figures simples

2.1. Image d'une droite, d'une demi-droite

Propriété Soit h une homothétie de rapport k,

- l'image d'une droite par h est une droite qui lui est parallèle ;
- l'image d'une demi-droite par h est une demi-droite ;
- les images de points alignés par h sont des points alignés.

2.2. Image d'un segment

Propriété Soit h une homothétie de rapport k, A' et B' les images respectives de deux points distincts A et B par h.
L'image du segment [AB] par h est le segment [A'B'] et $A'B' = |k|AB$.

Conséquences

- L'homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport.
- L'homothétie multiplie les aires de surfaces planes par le carré de son rapport.

2.3. Image d'un cercle

Propriété Soit h une homothétie de rapport k.
L'image d'un cercle de centre I et de rayon r par h est le cercle de centre h(I) et de rayon $|k|r$.

3 Propriétés de conservation

3.1. Conservation des angles orientés

Propriété Soient A', B' et C' les images respectives de trois points deux à deux distincts A, B et C par une homothétie.
On a : $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

3.2. Conservation de l'orthogonalité et du parallélisme

Propriété Par une homothétie :

- deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires ;
- deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.

3.3. Conservation du milieu d'un segment

Propriété Par une homothétie l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image.

4 Diverses déterminations d'une homothétie

4.1. Homothétie définie par son centre, un point et son image

Propriété Soient trois points alignés O, A et B deux à deux distincts.
Il existe une homothétie et une seule de centre O qui transforme A en B.

Méthode

Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie de centre A qui applique B sur C, on peut procéder comme suit :

• **Cas où M n'appartient pas à la droite (AB)**
- Tracer la droite (AM) ;
- Tracer la parallèle (L) à (BM) passant par C ;
- Le point M' cherché est le point d'intersection des droites (AM) et (L).

• **Cas où M appartient à la droite (AB)**
- Par la méthode précédente, construire l'image N' d'un point N n'appartenant pas à la droite (AB) ;
- Tracer la parallèle (L) à la droite (MN) passant par N' ;
- M'est le point d'intersection de (AB) et de (L).

4.2. Homothétie définie par son rapport, un point et son image

Propriété Soient un nombre réel k différent de 0 et 1 et deux points distincts A et B.
Il existe une homothétie et une seule de rapport k qui applique A sur B.

Méthode

A et B sont deux points du plan et k un nombre réel différent de 0 et 1.
Pour construire l'image M' d'un point M par l'homothétie de rapport k qui applique A sur B, on peut procéder comme suit :
- Construire le centre O tel que : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB}$;
- Construire le point M'en utilisant la définition ou en utilisant une homothétie définie par son centre, un point et son image.

4.3. Homothétie définie par deux points et leurs images

Propriété Soient A, B, A' et B' quatre points deux à deux distincts tels que : (A'B') //(AB) et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.
Il existe une homothétie et une seule qui applique A sur A' et B sur B'.

Méthode

A, B, A' et B' sont quatre points tels que :
(A'B') //(AB) et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.
Pour construire l'image M' d'un point M par l'homothétie h qui applique A sur A' et B sur B', on peut procéder comme suit :

• **Cas où M n'appartient ni à (AA') ni à (BB').**
- tracer la parallèle (D) à (MA) passant par A' ;
- tracer la parallèle (L) à (MB) passant par B' ;
- M' est le point d'intersection de (D) et (L).

• **Cas où M n'appartient à (AA').**
- Construire l'image N' d'un point N qui n'appartient ni à (AA') ni à (BB') ;
- tracer la parallèle (Q) à (MN) passant par N' ;
- M' est le point d'intersection de (AA') et de (Q).

Exercices de renforcement

1 Interprète en utilisant une homothétie les égalités vectorielles suivantes :

a) $\overrightarrow{AM'} = 3\overrightarrow{AM}$; b) $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OB}$;

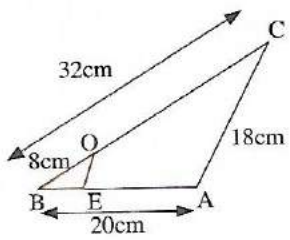
c) $5\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IC}$; d) $\overrightarrow{\Omega A} + 3\overrightarrow{\Omega M} = \vec{O}$.

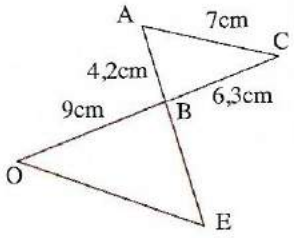
2 Les points A, B et C sont tels que $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{O}$

1. C est l'image de B par une homothétie de centre A. Détermine son rapport.
2. B est l'image de C par une homothétie de centre A. Détermine son rapport.
3. C est l'image de A par une homothétie de centre B. Détermine son rapport.
4. A est l'image de B par une homothétie de centre C. Détermine son rapport.

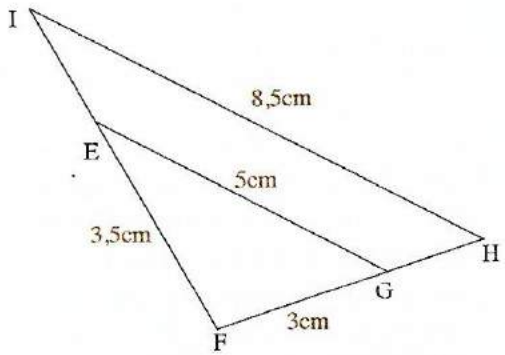
3 Dans chaque cas, On passe du triangle OBE au triangle ABC par une homothétie. Donne le centre et le rapport de l'homothétie puis calcule les longueurs OE et BE.

a)

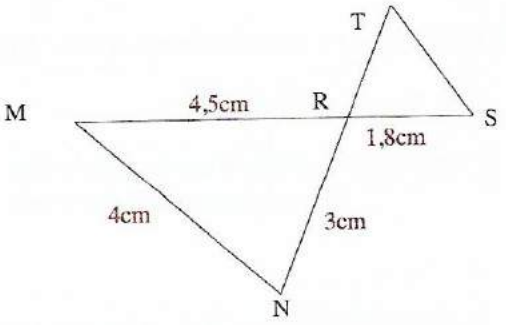




4 Les droites (GH) et (EI) sont sécantes en F. Les droites (GE) et (HI) sont parallèles. Décris cette figure avec le mot homothétie, en précisant son centre et son rapport. Calcule les longueurs FI et FH.



5 Les droites (MS) et (NT) sont sécantes en R. Les droites (MN) et (TS) sont parallèles. Décris cette figure avec le mot homothétie, en précisant son centre et son rapport.
Calcule les longueurs RT et ST.

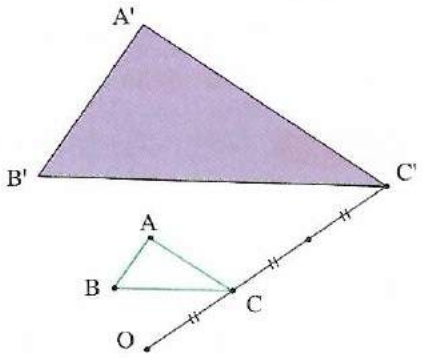


6 Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

1. Démontre qu'il existe une homothétie de centre C transformant B en A' et A en B'.
2. En utilisant une homothétie, donne, en fonction de l'aire du triangle ABC, l'aire du triangle A'B'C.

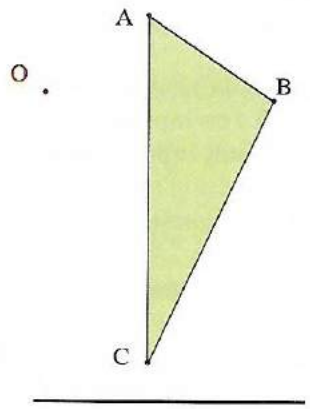
7 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC = 8 cm. A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par l'homothétie h de centre O.

1. Donne en le justifiant le rapport de h.
2. Détermine la nature du triangle A'B'C'.
3. Détermine le périmètre de l'aire de ABC.
4. Déduis-en le périmètre de l'aire de A'B'C'.

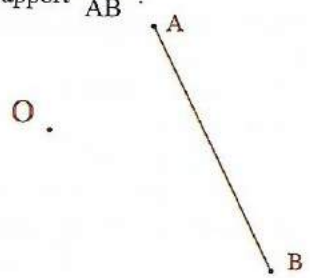


8 Construis l'image d'un cercle de centre O et de rayon 2 cm par l'homothétie de centre O et de rapport 1,5.

9 Reproduis puis construis l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 3.



10 Reproduis la figure ci-dessous puis construis l'image du segment [AB] par l'homothétie de centre O et de rapport 2,5.
Détermine le rapport $\frac{A'B'}{AB}$.



11 Reproduis puis construis l'image des points C et D par l'homothétie de rapport $\frac{2}{5}$ qui transforme A en B.

× D

A C B

12 Reproduis puis construis l'image des points C et D par l'homothétie de rapport 2 qui transforme A en B.

× D

B A C

13 Reproduis puis construis l'image des points C et D par l'homothétie de centre O qui transforme A en B.

A C O B

× D

14 Reproduis puis construis l'image des points C et D par l'homothétie de centre O qui transforme A en B.

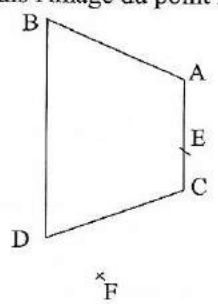
O B A C

× D

15 Sur la figure ci-dessous, (AB) // (BD) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$

1. Reproduis puis construis à l'aide de la règle non graduée uniquement, l'image du point E par l'homothétie h qui transforme A en B et C en D.

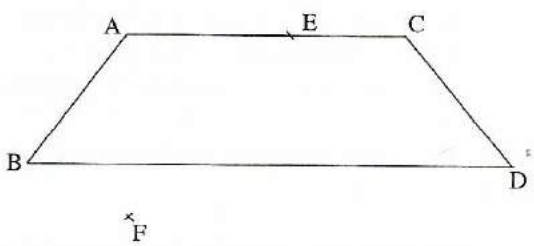
2. Construis l'image du point F par h.



16 Sur la figure ci-dessous, (AB) // (BD) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.

1. Reproduis puis construis à l'aide de la règle non graduée uniquement, l'image du point E par l'homothétie h qui transforme A en D et C en B.

2. Construis l'image du point F par h.

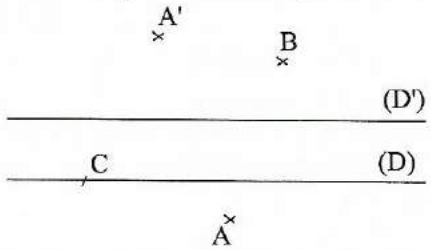


17 Reproduis puis construis l'image des points E et F par l'homothétie qui transforme A en B et C en D.

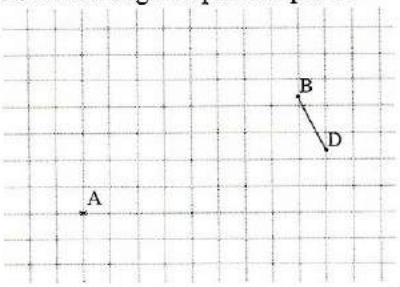
E A B C D

× F

18 Sur la figure ci-dessous que l'on reproduira, les droites (D) et (D') sont parallèles. h est une homothétie qui transforme A en A' et (D) en (D'). Construis l'image de chacun des points B et C par h.



19 Sur la figure ci-dessous, B est l'image de A par l'homothétie h de centre O et de rapport $-\frac{1}{3}$. Construis l'image du point D par h.



20 Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit, $\Omega(1, 2)$ et $M(x, y)$. Détermine en fonction de x et y, les coordonnées du point M', image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport 5.

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$
Soit h la transformation du plan qui à tout point $M(x ; y)$ associe le point $M'(x' ; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 1 \end{cases}$$

Justifie que h est une homothétie. Précise son centre et son rapport.
2. Détermine l'image du point A(3 ; −2) par h.
3. Détermine l'image de la (AO) par h.
4. Détermine l'image de la droite (D) d'équation $y = x + 3$ par h.
5. Détermine l'image du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$ par h.

22* Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit h la transformation du plan qui à tout point $M(x ; y)$ associe le point $M'(x' ; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y' = -\frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

Justifie que h est une homothétie. Précise son centre et son rapport.
2. Détermine l'image par h du cercle de diamètre [AB] où A(0 ; 1) et B(3 ; −7).

23* Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$
Soit h la transformation du plan qui à tout point $M(x ; y)$ associe le point $M'(x' ; y')$ tel que :

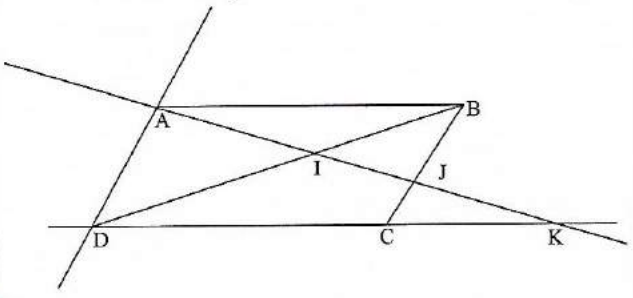
$$\begin{cases} x' = 3x - 1 \\ y' = 3y + 2 \end{cases}$$

Justifie que h est une homothétie.
Précise son centre et son rapport.
2. Détermine l'image du cercle de centre O et de rayon 1 par h.

24 On considère un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu [CD]. J est le point d'intersection des droites (BI) et (AC) et K le point d'intersection des droites (AI) et (BD).
1. Dis ce que représente J pour le triangle BCD. Justifie ta réponse.
2. Détermine une homothétie qui transforme (JK) en (AB).
3. Justifie que (JK) est parallèle à (AB).
4. Dis ce que représente l'aire du triangle IJK par rapport à l'aire du parallélogramme.
Justifie ta réponse.

25 On considère le quadrilatère ABCD tel que (AB) soit parallèle à (CD) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Soit O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).
1. Justifie qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$.
2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k. Détermine h(A).
3. Justifie que D = h(B).
4. Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD]. Justifie que O,I et J sont alignés.
5. Soit O' le point d'intersection de (AD) et (BC). Démontre que O, O', I et J sont alignés.

26 Dans la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme, I est un point donné de (BD), (AI) coupe (BC) en J et (DC) en K.
1. Justifie qu'il existe une homothétie qui transforme A en J et D en B.
2. Justifie qu'il existe une homothétie de centre I qui transforme A en K et B en D.
3. Déduis-en que : $AI^2 = IJ \times IK$.



27 Soit (Γ) le cercle circonscrit à un triangle ABC. On appelle O son centre. D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle (Γ).
On considère l'homothétie h de centre A et de rapport 2.
1. Construis le point E, image de B par h et le point F, image de C par h.
2. Détermine l'image de O par h.
3. Construis l'image de la droite (OI) par h.
Démontre que l'image de (IO) par h est perpendiculaire à (EF).
4. La perpendiculaire à (EF) passant par D coupe (EF) en K.
a) Détermine l'image de I par h.
b) Démontre que I est le milieu de [AK].

28 Dans le plan, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\text{Mes}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$.
On appelle (Γ) le cercle de centre O circonscrit à ABC.
Les droites (OA) et (OC) recoupent (Γ) respectivement en D et E soit I le milieu de [ED].
1. Fais une figure avec (OA = 4 cm)
2. Soit G le point tel que :
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}=\vec{0}$.
a) Exprime $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.
b) Déduis-en une construction de G.
3. Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout M associe le point M' tel que :
$\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME})$.
Démontre que h est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

29 Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].
Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout M associe le point M' tel que :

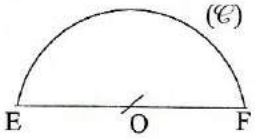
$$\overrightarrow{MM'}=k\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}.$$

1. a) Démontre que si $k=\frac{1}{2}$, l'application f est une homothétie dont le centre est le centre de gravité du triangle ABC et dont on déterminera le rapport.
b) Quelle est l'image par cette homothétie du triangle ABC.
2. Démontre que si $k=-1$, l'application f est une translation dont on donnera le vecteur.

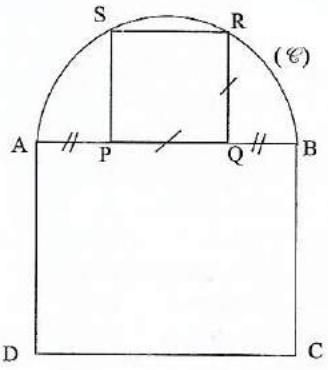
30 Soit ABC un triangle. Trouve un carré DEFG inscrit dans le triangle ABC (ses sommets sont sur les côtés du triangle).
1. Construis un carré ARHB de sens direct.
2. En utilisant une homothétie de centre C, construis le carré DEFG.

31 Soit ABC un triangle. Le but de l'exercice est d'inscrire un carré dans le triangle ABC de telle sorte que deux des sommets soient sur [AB], un troisième sur [AC] et le quatrième sur [BC].
1. Place un point M sur le côté [AC] du triangle.
2. Soit P le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
Construis le carré direct MPQR tel que le côté [PQ] se trouve sur la droite (AB).
3. La droite (AR) coupe (BC) en OG.
En utilisant l'homothétie de centre A qui transforme R en F construis, le carré DEFG.

32 Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C})$ est un demi-cercle de diamètre [EF]. Construis un carré ABCD tel que : A et B appartiennent à [EF], C et D appartiennent au demi-cercle $(\mathscr{C})$.
On utilisera une homothétie de centre O.



33 Sur la figure ci-dessous, ABCD et PQRS sont des carrés tels que (RQ) est parallèle à (BC).
PQRS est tel que R et S appartiennent au demi-cercle de diamètre [AB]. AP = QB.
Soit h l'homothétie qui transforme R en B et Q en C.
1. Justifie que le rapport de h est $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
2. Justifie que le centre de h appartient à la médiatrice de [AB].
3. On Pose PQ = 1
a) Démontre que AQ est égal au nombre d'or φ.
b) Démontre que le centre M de h, situé sur la médiatrice de [AB], est tel que $IM = AB\times\frac{\varphi}{2}$.
4. Étant donné un demi-cercle de diamètre [AB], donne un programme de construction d'un carré PQRS tel que P et Q appartiennent à [AB] et R et S appartiennent au demi-cercle de diamètre [AB].



Exercices

34 Soient A et B deux points distincts, I le milieu de [AB], (D) la médiatrice [AB], soit ($\mathscr{C}$) le cercle de centre A et de rayon AI, et ($\mathscr{C}'$) le cercle de diamètre [AB]. À tout point M du plan, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{M'A} = 2\overrightarrow{M'M}$.
Détermine le lieu géométrique de M' lorsque M décrit :
a) la droite (AB) ;
b) la droite (D) ;
c) le cercle ($\mathscr{C}$) ;
d) le cercle ($\mathscr{C}'$).

35 1. Partie préliminaire : on considère un triangle ABC, G son centre de gravité, Ω le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.
Démontre que H est l'image de Ω dans une homothétie de centre G dont on précisera le rapport.
2. On considère un cercle (Γ) de centre O, de rayon R, passant par un point fixe A. Soient B et C deux points de Γ tels que la distance BC soit constante et égale à l.
a) Quel est le lieu géométrique des milieux I de [BC] ?
b) Quel est le lieu géométrique des centres de gravité G de ABC ?
c) Quel est le lieu géométrique des orthocentres H de ABC ?
3. Reprends la partie 2 avec B et C sur une droite (Δ) ne passant pas par A, A fixe.

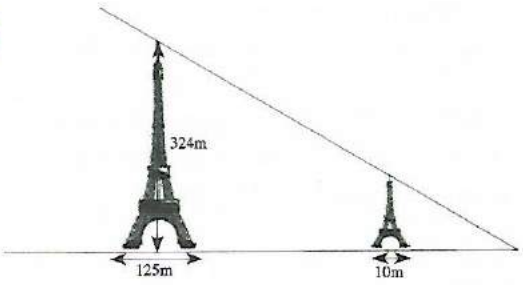
36 Dans le plan, on donne deux points A et B distincts. Soit (D) la droite perpendiculaire à (AB) en B. On considère tous les cercles ($\mathscr{C}$) du plan caractérisés par la propriété suivante : T et T ' étant les points de contact des tangentes menées de A à ($\mathscr{C}$), le triangle ATT' est équilatéral.
1. En étudiant le rapport des distances du centre d'un cercle (C) aux points A et B, déterminer et préciser la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) qui passent par B.
2. Détermine et précise la nature de l'ensemble des centres des cercles (C) tangents à la droite (D).

37 Soit k un réel différent de 0 et de 1. On considère trois points A, B et C deux à deux distincts tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et les cercles (Γ_1) et (Γ_2) de diamètres respectifs [AB] et [AC].
Une droite (Δ) non perpendiculaire à (AB) et distincte de (AB), passant par A, recoupe les cercles (Γ_1) et (Γ_2) respectivement en M et N.
1. a) Quelle est la position relative des droites (BM) et (CN) ?
b) Détermine de k pour lesquelles les droites (BN) et (CM) sont-elles parallèles.
2. On suppose désormais que k est fixé et différent de −1. Soit P le point d'intersection des droites (BN) et (CM).
a) Soit h l'homothétie de centre P telle que h(B) = N. Démontre que h(M) = C.
Calcule le rapport de h en fonction de k.
b) Détermine le réel α tel que $\overrightarrow{BP} = \alpha \overrightarrow{BN}$. Quel est le lieu géométrique du point P lorsque (Δ) varie ?
c) En se plaçant dans le cas où $k = 2$ et où la distance BA = 6 cm, donne les éléments géométriques remarquables du lieu géométrique L de P et fais une figure soignée.

38 Dans le triangle ABC, le segment [BC] est fixe. Le point A parcourt un cercle passant B et C.
Détermine le lieu géométrique des centres de gravité des triangles ABC.
On pourra utiliser une homothétie de centre le milieu de [BC].

Situation d'évaluation

39



On dispose sur le sol une Tour EIFFEL miniature non loin de la véritable Tour EIFFEL. On obtient ainsi la figure ci-dessus.
Détermine la hauteur de la Tour EIFFEL miniature. Justifie ta réponse.
(*On donnera l'arrondi au centimètre près*).

Coup de Pouce

22
- Rechercher un point invariant A.
- Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$.
- Établir une relation entre $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$.

23
- Rechercher un point invariant A.
- Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$.
- Établir une relation entre $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$.

Leçon 15

ROTATIONS



Décris le mouvement d'un point sur une roue de bicyclette.

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Un élève en classe de Seconde C choisit un siège S de la grande roue d'un parc d'attraction. La grande roue tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre puis s'immobilise. Il est bloqué 30 minutes sur son siège à une certaine hauteur. Pour les ramener à la position de départ, le maintenancier affirme avoir effectué une rotation de la roue d'un angle de $-\frac{2\pi}{3}$.

De retour en classe, il explique à ses camarades la situation qu'il a vécue au parc. Pour mieux comprendre, les élèves décident d'étudier les rotations, construire les images de figures simples et de résoudre des problèmes à l'aide de rotation.

HABILETÉS ET CONTENUS

1 Définition et premières propriétés

Connaître :
- la définition d'une rotation
- la propriété relative aux points invariants par une rotation
- la propriété fondamentale de la rotation.

Construire : l'image d'un point par une rotation en utilisant la définition

Trouver : l'image d'un point par une rotation

2 Images de figures simples

Connaître : les propriétés relatives aux images de figures simples par une rotation

Construire : l'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle par une rotation

3 Propriétés de conservation

Connaître : les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une rotation

Démontrer :
- que deux droites sont parallèles en utilisant une rotation
- que des droites sont perpendiculaires en utilisant une rotation
- une égalité d'angles en utilisant une rotation
- qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une rotation

4 Caractérisation d'une rotation

Connaître : la propriété relative à la caractérisation d'une rotation

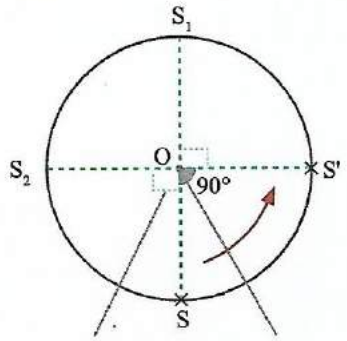
5 Traitement de situation

Traiter une situation faisant appel aux rotations

INSTALLATION DES HABILETÉS

Activités 1 Définition et premières propriétés

1.1. Rotation de centre O d'angle θ



Sur la grande roue de centre O d'un parc d'attraction representée par la figure ci-contre, le siège S tourne de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et se retrouve en S'.

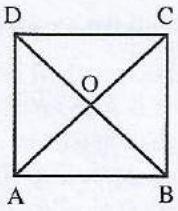
1. Compare OS et OS'.
2. Détermine Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OS'}}\right)$.
3. Détermine la position d'un objet M placé en O lorsque le siège S tourne et se retrouve en S'.
4. Soit r l'application du plan dans le plan définie par :
$r(O) = O$ et si $M \neq O$, $r(M) = M'$ lorsque $OM' = OM$ et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Détermine $r(S)$; $r(S')$, $r(S_1)$ et $r(S_2)$.

Synthèse

L'application r du plan dans le plan définie ci-après est appelée rotation de centre O et d'angle 90° :
- $r(O) = O$;
- si $M \neq O$, $r(M) = M'$ lorsque $OM' = OM$ et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercices de fixation

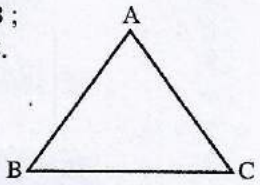
1-1-1 ABCD est un carré de sens direct et O est son centre.



1. Détermine l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Détermine l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. Détermine l'image de chacun des points A, B, C et D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1-1-2 ABC est un triangle équilatéral de sens direct. En utilisant les points A, B et C, donne le centre et l'angle de la rotation :

a) qui transforme A en B ;
b) qui transforme C en B ;
c) qui transforme A en C.



1.2. Point invariant

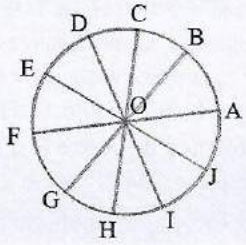
Soit r la rotation de centre O et d'angle θ ($\theta \neq 0$).
Justifie, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que O est le seul point tel que $r(O) = O$.

Synthèse

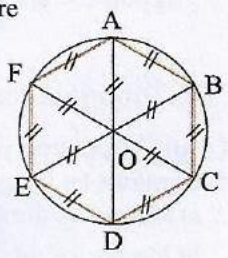
Une rotation d'angle non nul admet un seul point invariant : son centre.

Exercices de fixation

1-2-1 Le cercle ci-contre a 10 rayons régulièrement espacés.
Détermine le centre et l'angle d'une rotation qui applique :
a) A sur B
b) A sur I



1-2-2 Sur la figure codée ci-contre l'hexagone ABCDEF est inscrit dans un cercle.
Recopie et complète la phrase suivante.
On peut passer du point A au point E par la rotation de centre..... et d'angle .....



1.3. Construction de l'image d'un point

Place un point O et un point M distinct de O dans ton cahier.

1. Construis l'image M' du point M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Donne ton programme de construction.

Synthèse

Pour construire l'image M' d'un point M par une rotation de centre O et d'angle α :
- tracer la demi-droite [OM) ;
- tracer la demi-droite [OP) telle que Mes$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}\right) = \alpha$;
- placer sur [OP) le point M' tel que OM' = OM.

Exercices de fixation

1-3-1 Place deux points O et A sur ta feuille.
Construis l'image A' de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

1-3-2 Place deux points O et C sur ta feuille.
Construis l'image C' de C par la rotation de centre O et d'angle π.

1.4. Réciproque

O, M et M' sont trois points du plan et $r_{(O;\theta)}$ la rotation de centre O d'angle θ.
Recopie et complète :

$$r_{(O,\theta)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \ldots \\ \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = \ldots \\ \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}}) = \ldots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots = r_{(O,-\theta)}(M')$$

Synthèse

$M' = r_{(O,\alpha)}(M) \Leftrightarrow M = r_{(O,-\alpha)}(M')$.

Exercices de fixation

1-4-1 A et B sont deux points distincts du plan.
C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Détermine une rotation qui applique C sur B.

1-4-2 A est un point du plan.
F est l'image de E par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{5}$.
Détermine une rotation de centre A qui applique F sur E.

1-4-3 O, A et B sont trois points du plan tels que B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Détermine l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

1.5. Propriété fondamentale

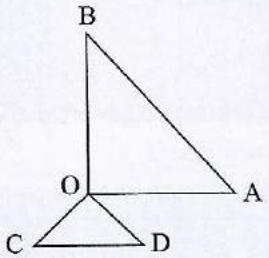
O, M et N sont trois points du plan.
1. Construis les images M' et N' des points M et N par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. a) Mesure les distances M'N' et MN puis recopie et complète : M'N' = ...
   b) Mesure à l'aide du rapporteur Mes $(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}})$ puis recopie et complète : Mes $(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}})$ =..... .

Synthèse

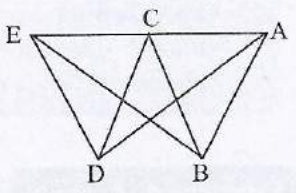
Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par une rotation d'angle α,
on a : M'N' = MN et Mes $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \alpha$.

Exercices de fixation

1-5-1 Sur la figure ci-contre, les points B et D sont les images respectives des points A et C par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Justifie que : AC = BD et (AC) $\perp$ (BD).



1-5-2 Sur la figure ci-contre, les points B et E sont les images respectives des points A et D par la rotation de centre C d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Justifie que : AD = BE et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{BE}}\right) = -\frac{\pi}{3}$.



Activités 2 Images de figures simples

2.1. Image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment

Soit (D) une droite du plan. Soient A et B, deux points de (D) et O un point n'appartenant pas (D).

1. Construis les images A' et B' respectives de A et B par la rotation r de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. a) Soit M un point de la droite (D). Justifie que son image M' appartient à la droite (A'B').
   b) Soit N' un point de (A'B'). Justifie qu'il existe un point N de (D) tel que $r(N) = N'$.
3. Déduis-en l'image de la droite (AB), celle de la demi-droite [AB) et celle du segment [AB] par r.
4. Justifie que A'B' =AB.

Synthèse

A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par une rotation r.
L'image de la droite (AB) par r est la droite (A'B').
L'image de la demi-droite [AB) par r est la demi-droite [A'B').
L'image du segment [AB] par r est la segment [A'B'] et A'B' = AB.

Exercices de fixation

2-1-1 Trace une droite (D) et marque un point O. Construis l'image de la droite (D) par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2-1-2 Trace un segment [AB] et marque un point O. Construis l'image de [AB] par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2.2. Image d'un cercle

Soit r une rotation de centre Ω et d'angle θ, $\theta \in]-\pi ; \pi]$;
$(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon R et O' l'image de O par r ; $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre O' et de rayon R.

1. Justifie que si M appartient à $(\mathscr{C})$, alors son image M' par r appartient à $(\mathscr{C}')$.
2. Justifie que si M' appartient $(\mathscr{C}')$, alors M' est l'image d'un point de $(\mathscr{C})$.

Synthèse

L'image d'un cercle de centre I par une rotation r est le cercle de centre $r(I)$ et de même rayon.

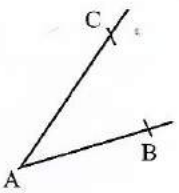
Exercices de fixation

2-2-1 Trace un cercle de centre O et de rayon 2 cm. Construis l'image de $(\mathscr{C})$ par la rotation de centre O d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

2-2-2 Marque trois points non alignés O, A et B. Construis l'image du cercle de diamètre [AB] par la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Activités 3 Propriétés de conservation

3.1. Conservation des angles orientés



1. Construis l'image de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ par la rotation de centre Ω d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
2. Compare les angles $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})}$.



Synthèse

L'image d'un angle orienté par une rotation est un angle orienté qui lui est égal.

Exercice de fixation

Soit un triangle ABC tel que : Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

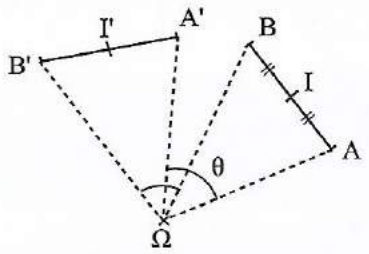
On note $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right)$ l'image de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Détermine : Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right)$.

3.2. Conservation du milieu d'un segment

Sur la figure ci-contre, A, B, I et Ω sont quatre points du plan tels que I soit le milieu du segment [AB]. A', B' et I' sont les images respectives de A, B et I par la rotation de entre Ω et d'angle θ ($\theta \neq 0$).

1. Justifie que I' appartient au segment [A'B'].
2. Déduis-en que I' est le milieu du segment [A'B'].



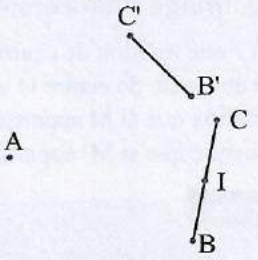
Synthèse

A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par une rotation r.
L'image du milieu du segment [AB] par r est le milieu du segment [A'B'].

Exercices de fixation

3.2.1 Soient I, J et K trois points tels que J soit le milieu de [IK].
I', J' et K' les images respectives de I, J et K par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
Justifie que J' est le milieu de [I'K'].

3.2.2 Sur la figure ci-contre, I, A, B et C sont quatre points tels que I soit le milieu de [BC].
B' et C' sont les images respectives de B et C par une rotation r de centre A et d'angle θ.($\theta \neq 0$)
Donne un programme de construction de l'image I' de I par r.



3.3. Conservation de l'orthogonalité

Soient deux droites perpendiculaires (Δ) et (D), (Δ') et (D') les images respectives de (Δ) et (D) par une rotation r.
Justifie que (Δ') et (D') sont perpendiculaires.

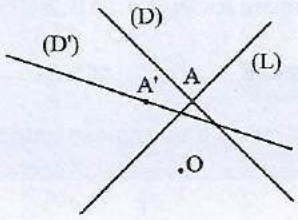
Synthèse

Les images de deux droites perpendiculaires par une rotation sont deux droites perpendiculaires.

Exercices de fixation

3.3.1 Soient (L) et (U) deux droites perpendiculaires et r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{15}$.
(L') et (U') les images respectives de (L) et (U) par r.
Justifie que (L') et (U') sont perpendiculaires.

3.3.2 Sur la figure ci-contre, (D) et (L) deux droites perpendiculaires en A.
(D') est l'image de (D) par une rotation r.
A' est l'image de A par r.
Donne un programme de construction de l'image (L') de (L) par r.



3.4. Conservation du parallélisme

(Δ) et (D) sont deux droites parallèles, (Δ') et (D') les images respectives de (Δ) et (D) une rotation .
Justifie que (Δ') et (D') sont parallèles.

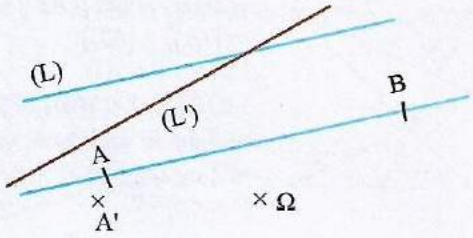
Synthèse

Les images de deux droites parallèles par une rotation sont deux droites parallèles.

Exercices de fixation

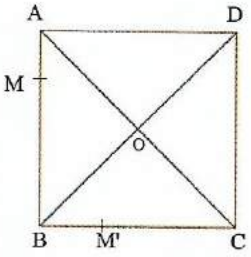
3-4-1 Soient (L) et (U) deux droites parallèles et r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{12}$.
(L') et (U') les images respectives de (L) et (U) par r.
Justifie que (L') et (U') sont parallèles.

3-4-2 Sur la figure ci-contre, la droite (AB) est parallèle à la droite (L). (L') est l'image de (L) par une rotation r de centre Ω. A' est l'image de A par la rotation r.
Donne un programme de construction de la droite (A'B'), image de la droite (AB) par r.



Activité 4 **Caractérisation d'une rotation**

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de centre O et de sens direct. M est un point de [AB] et M'un point du segment [BC] tel que AM = BM'.



1. a) Justifie que la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ applique A sur B.
   b) Justifie que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.
   c) Justifie que $r(M) = M'$.
2. Démontre qu'il n'existe aucune autre rotation qui applique A sur B et M sur M'.

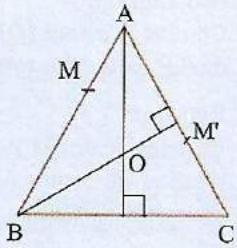
Synthèse

Étant donné 4 points A, B, C et D tels que : AB = CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, il existe une unique rotation qui transforme A en C et B en D.

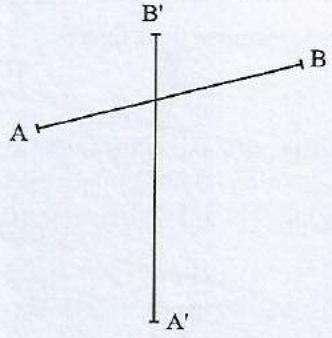
Exercices de fixation

4-1 On considère un triangle ABC de sens direct, BAB' et ACC' deux triangles rectangles et isocèles en A et de sens direct.
Démontre qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en C' et B' en B.

4-2 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct. M et M' deux points tels que : CM = AM'.
Détermine le centre et l'angle de la rotation qui applique C sur A et M sur M'.



4-3 Sur la figure ci-dessous, AB = A'B'.
Reproduis puis construis le centre de la rotation qui applique A sur A' et B sur B'.

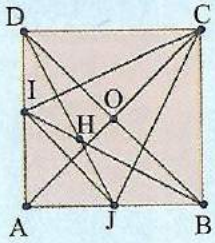


Exercice 1 Démontrer une propriété en utilisant une rotation

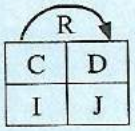
Soit un carré ABCD de sens direct et O son centre. On considère un point I de [AD] et un point J de [AB] tels que AI = BJ. Les droites (BI) et (DJ) se coupent en H.

1. Démontre que J est l'image de I par la rotation r de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Démontre que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.
3. Démontre que H est l'orthocentre du triangle CIJ.

Corrigé



1. $r(D) = A$ et $r(A) = B$ donc $r([DA]) = [AB]$.
Notons $I' = r(I)$
$I \in [AD]$, $I' \in [AB]$ et $I'B = IA$
or J est le seul point de [AB] tel que JB = IA.
Donc $J = I'$.



2. (CI) est perpendiculaire à (DJ) d'après la propriété fondamentale des rotations.

3. Dans le triangle CIJ, on a :
d'après la question précédente, (DJ) est la hauteur issue de J.
De plus on a :
$r(B) = C$ et $r(I) = J$ d'où (BI) est perpendiculaire (CJ).

On en déduit que (BI) est la hauteur issue de I dans le triangle (CIJ).

Conclusion
Dans le triangle CIJ, on a :
(DJ) est la hauteur issue de J et (BI) est la hauteur issue de I.
(DJ) et (BI) se coupent en H.
Donc H est l'orthocentre du triangle CIJ.

Méthode

- Lire l'énoncé pour relever les données et la conclusion.
- Recherche une démarche.
- Faire une rédaction soignée.

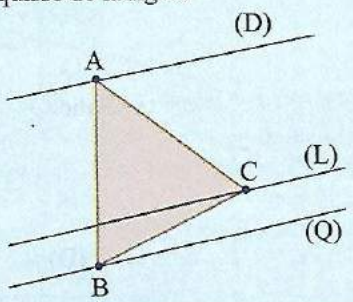
Exercice 2 Construire une figure en utilisant une rotation

Trois droites parallèles étant données, construis un triangle équilatéral ayant un sommet sur chaque droite.

Corrigé

Analyse
Nous avons trois droites parallèles
Nous devons construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chaque droite.

Faisons une esquisse de la figure



Observons la figure terminée (tracée en commençant par le triangle).

Le point C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Comme B est sur (Q), l'image de B est sur l'image (Q') de (Q) dans cette rotation.

Remarque :
En considérant le point C comme image de B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, on obtient une deuxième solution.

Méthode

- Analyse ou lecture de l'énoncé.
- Justification ou recherche d'une démarche.
- Réalisation de la solution.

Justification

Il faut justifier que (Q') et (L) sont sécantes pour déterminer C puis trouver $B = r^{-1}(C)$.

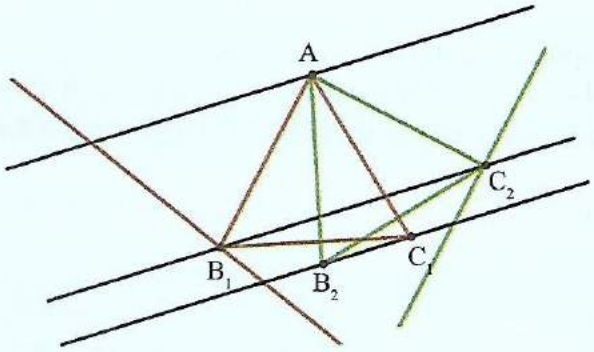
Réalisation de la construction

La construction est donc la suivante :

- Placer un point A sur (D).
- Construire l'image (Q') de (Q) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- (Q') coupe (L) en C.
- Il suffit de construire le point B image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Recherche d'une autre solution

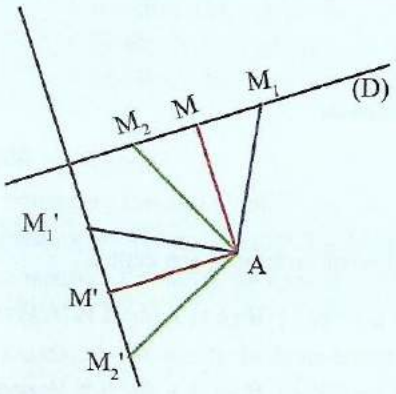
- On obtient un deuxième triangle équilatéral en construisant l'image de (Q) par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.



Exercice 3 Déterminer un lieu géométrique en utilisant une rotation

Soient une droite (D), un point M de (D) et un point A n'appartenant pas à (D).
Soit M' un point tel que le triangle AMM' soit rectangle et isocèle en A de sens direct.
Détermine le lieu des points M' lorsque M décrit (D).

Corrigé



Méthode

- Représenter plusieurs situations.
- Utiliser les points fixes pour définir la transformation utilisée.

Le triangle AMM' étant rectangle et isocèle de sens direct, M' est l'image de M par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

M appartient à la droite (D), par conséquent M' appartient à (D'), image de (D) par r.

(D') est perpendiculaire à (D) car r est un quart de tour direct.

Réciproque pour tout point N' de (D'), il existe un point $N = r_{(A,-\frac{\pi}{2})}(N')$ appartenant à (D) tel que ANN' soit rectangle et isocèle.

L'ensemble cherché est la droite (D').

1 Définition et premières propriétés

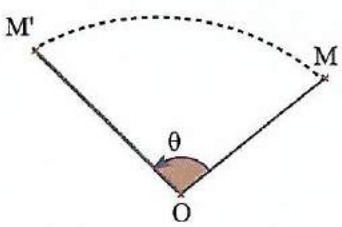
1.1. Rotation de centre O d'angle θ

Définition Soient un point O du plan et un nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
On appelle rotation de centre O et d'angle θ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :
- si M = O, alors M' = M
- si M ≠ O, alors OM' = OM et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) = \theta$.

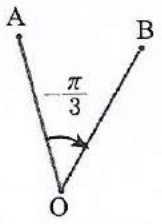
Notation
On note généralement $r_{(O;\theta)}$ ou r (s'il n'y a pas de confusion possible) la rotation de centre O d'angle θ.

Remarque
- La rotation de centre O et d'angle π est la symétrie de centre O.
- Si A' est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle θ et $\theta \neq \pi$, alors A est l'image de A' par la rotation de centre O et d'angle $-\theta$ (Si $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) = \theta$ et $\theta \neq \pi$ alors $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}}\right) = -\theta$.

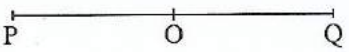
Exemples :



$r(M) = M' \Leftrightarrow OM' = OM$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) = \theta$.



$r(A) = B \Leftrightarrow OB = OA$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = -\frac{\pi}{3}$.



$r(P) = Q \Leftrightarrow OQ = OP$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OQ}}\right) = \pi$.
La rotation de centre O et d'angle π est la symétrie de centre O.

Vocabulaire
- Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ s'appelle un quart de tour direct.
- Une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ s'appelle un quart de tour indirect.

1.2. Point invariant

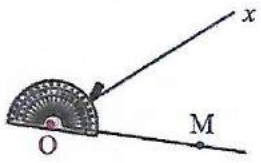
Propriété Une rotation d'angle non nul admet un seul point invariant : son centre.

1.3. Construction de l'image d'un point

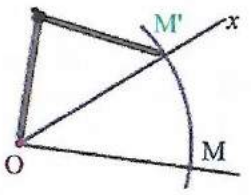
Méthode
Pour construire l'image M' d'un point M par la rotation de centre O et d'angle orienté θ, on peut procéder de la façon suivante :
- Tracer la demi-droite [OX) telle que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OX}}\right) = \theta$.
- Tracer un arc de cercle de centre O et de rayon OM : il coupe [OX) en M'.

M' est l'image du point M par la rotation de centre O d'angle θ.

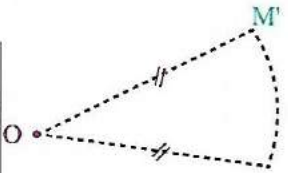
O M



Trace la demi-droite [OX) telle que Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OX}}\right) = \theta$



Trace un arc de cercle de centre O et de rayon OM : il coupe [OX) en M'.



M' est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle θ.

1.4. Réciproque

Propriété La réciproque de la rotation de centre O et d'angle θ est la rotation de centre O et d'angle $-\theta$.

$r_{(O,\theta)}(M) = M' \Leftrightarrow M = r_{(O,-\theta)}(M')$

1.5. Propriété fondamentale

Propriété Soient r une rotation d'angle θ, A' et B' les images respectives par r de deux points distincts A et B.

On a : A'B' = AB et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}}\right) = \theta$.

2 Images de figures simples

2.1. Image de droite, d'une demi-droite, d'un segment

Propriété Toute rotation transforme :
- une droite en une droite ;
- un segment en un segment de même longueur ;
- une demi-droite en une demi-droite.

Méthode

▸ Pour construire l'image d'une droite (D) par une rotation, il suffit de choisir deux points A et B et d'en construire les images A' et B'. La droite (A'B') est l'image de la droite (D) par cette rotation.

▸ Pour construire l'image d'un segment [AB] par une rotation, il suffit de construire les images respectives A' et B' de A et de B. [A'B'] est l'image du segment [AB] par cette rotation.

▸ Pour construire l'image de la demi-droite [AB) par une rotation, il suffit de construire les images respectives A' et B' de A et de B. [A'B') est l'image de la demi-droite [AB) par cette rotation.

2.2. Image d'un cercle

Propriété L'image d'un cercle par une rotation est un cercle de même rayon.

Méthode

Pour construire l'image d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon r (r est un nombre réel positif) par une rotation, il suffit de construire l'image O' de O par cette rotation puis construire le cercle de centre O' et de rayon r. L'image de $(\mathscr{C})$ est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre O' et de rayon r.

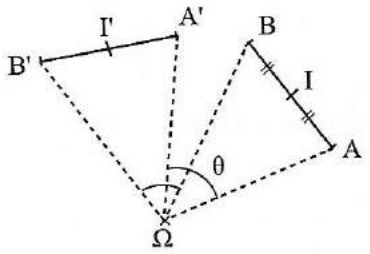
3 Propriétés de conservation

3.1. Conservation des angles orientés

Propriété Toute rotation transforme un angle orienté en un angle orienté qui lui est égal.

3.2. Conservation du milieu d'un segment

Propriété Toute rotation transforme le milieu d'un segment en le milieu du segment image.



$R_{(\Omega\,;\,\theta)}$	
A	A'
B	B'
I	I'

I est milieu du segment [AB] donc I' est milieu du segment [A'B'].

3.3. Conservation de l'orthogonalité

Propriété Toute rotation transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

3.4. Conservation du parallélisme

Propriété Toute rotation transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

4 Caractérisation d'une rotation

Propriété Soit A, B, C et D quatre points tels que $A \neq B$, $AB = CD$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.
Il existe une unique rotation r tel que $r(A) = C$ et $r(B) = D$, d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

Remarque

Le centre de la rotation r qui applique A sur C et B sur D est :
- le point d'intersection des médiatrices [AC] et [BD] si ces médiatrices sont sécantes ;
- le point d'intersection de la droite (AB) et de la médiatrice du segment [AC] si ces médiatrices sont confondues.

Exercices de renforcement

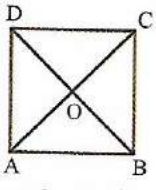
1 Complète les pointillés dans chacune des propositions suivantes :

1. B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{11}$ signifie que $\begin{cases} OB = \ldots \\ mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \ldots \end{cases}$

2. G est l'image de ..... par la rotation de centre ..... et d'angle ..... signifie que $\begin{cases} EG = \ldots \\ mes(\widehat{\overrightarrow{EG};\overrightarrow{EF}}) = \frac{2\pi}{13} \end{cases}$

3. $\begin{cases} GB = GC \\ mes(\widehat{\overrightarrow{GB};\overrightarrow{GC}}) = -\frac{\pi}{7} \end{cases}$ signifie que .....

2 Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de centre O et de sens direct.

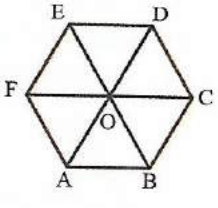


1. Détermine l'image du point A par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Détermine l'image du point B par la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3. Détermine l'image du point B par la rotation de centre O d'angle $-\frac{3\pi}{2}$.

PQR est un triangle équilatéral de centre O.

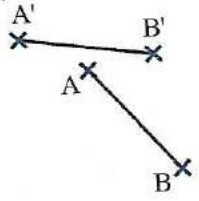
1. Détermine l'image du point P par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
2. Détermine l'image du point R par la rotation de centre O d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
3. Détermine l'image du point P par la rotation de centre R d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3 Dans la figure ci-contre, ABCDEF est un hexagone régulier de centre O. Recopie puis complète les phrases suivantes.



1. ..... est l'image du point F par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
2. ..... l'image du point A par la rotation de centre O d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
3. ..... l'image du point B par la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
4. C l'image du point ..... par la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
5. B l'image du point D par la rotation de centre O d'angle .....

4 Sur la figure ci-contre, A'B' = AB. Soit r la rotation qui transforme respectivement A' et B' en A et B. Construis le centre O de r.



5 Soit A et O deux points du plan.

1. Construis l'image A' de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Justifie que OAA' est un triangle rectangle et isocèle.

6 Soit B et O deux points du plan.

1. Construis l'image B' de B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
2. Justifie que OBB' est un triangle équilatéral.

7 Soit C et O deux points du plan.

1. Construis l'image C' de C par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{5}$.
2. Détermine mes $\widehat{OCC'}$.

8 Construis une droite (D) et place un point A qui n'appartient pas à (D). Construis l'image (D') de (D) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

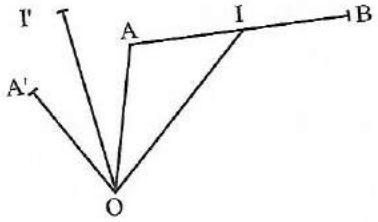
9 ABC est un triangle et D est un point du plan. Construis l'image A'B'C' du triangle ABC par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{10}$.

10 Construis un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 2 cm. Place un point A sur le cercle $(\mathscr{C})$. Construis l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

11 1. Construis un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1 cm puis place un point E extérieur au cercle $(\mathscr{C})$.
2. Construis l'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3. Compare les aires de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

12 1. Construis un losange OABC tel que mes $\widehat{COA} = \frac{\pi}{6}$ et OA = 3 cm.
2. Construis l'image de OABC par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
3. Construis l'image de la figure obtenue par r et ainsi de suite.

13 Sur la figure ci-dessous, I est le milieu du segment [AB].
A, I et B sont trois points tels que J soit le milieu de [IK].
A', I' sont les images respectives de A et I par la rotation R de centre O et d'angle θ.
Donne un programme de construction du point B' et image de B par R.



14 ***Le Moulin***





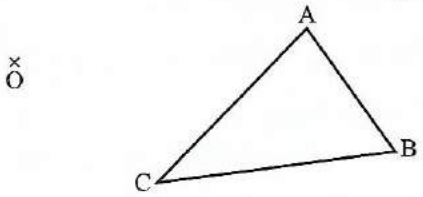
1. Reproduis la figure ci-dessus où ABCD est un rectangle relié à une tige [TO].
Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. $A_1B_1C_1D_1$ est l'image ABCD par r.
$A_2B_2C_2D_2$ est l'image $A_1B_1C_1D_1$ par r.
$A_3B_3C_3D_3$ est l'image $A_2B_2C_2D_2$ par r.
Construis $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ et $A_3B_3C_3D_3$.

15 ***Energie renouvelable***

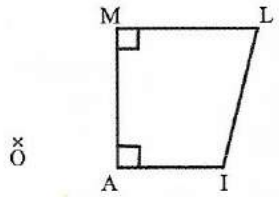


Les trois palettes d'un pylône d'une énergie éolienne sont identiques et régulièrement espacées.
Détermine les angles des rotations qui permettent de passer d'une palette à l'autre.

16 Reproduis la figure puis construis l'image du triangle ABC par la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{3}$.



17 Reproduis la figure puis construis l'image du quadrilatère MAIL par la rotation de centre O d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.



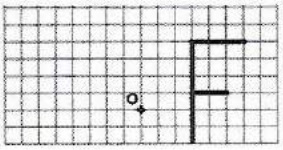
18 ***Le ventilateur***

Le ventilateur de plafond ci-contre possède 5 palettes identiques et régulièrement espacées.



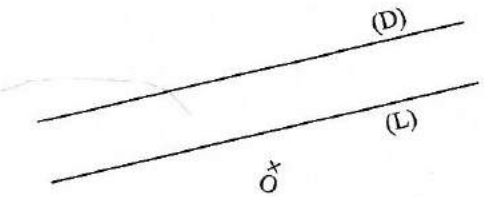
Détermine les angles de deux rotations qui permettent de passer d'une palette à l'autre.

19 Reproduis la lettre F sur ton cahier.
Place le point O.
Construis l'image de la lettre F par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

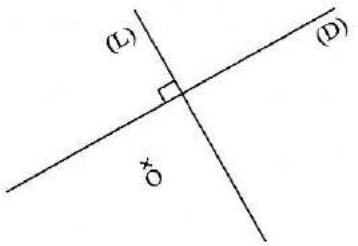


20 Construis un parallélogramme ABCD de centre O.
Construis l'image A'B'C'D' de ABCD par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

21 Dans la figure ci-dessous, (D) et (L) sont deux droites parallèles. O est un point donné.
Construis les images (D') et (L') respectives de (D) et (L) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



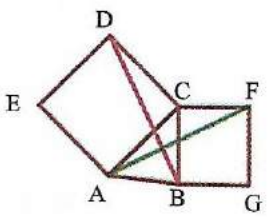
22 Dans la figure ci-dessous, (D) et (L) sont deux droites perpendiculaires. O est un point donné.
Construis les images (D') et (L') respectives de (D) et (L) par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.



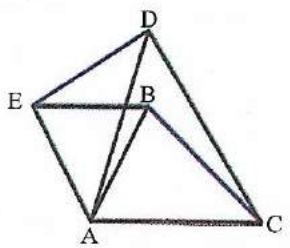
23 ABCD est un carré de sens direct de centre O. Soit r la rotation de centre O qui transforme A en B.
1. Détermine l'angle de r.
2. Soient E et F deux points situés sur les demi-droites [AB) et [BC) et tels que AE = BF.
Détermine l'image du point E par r.
3. Les droites (AF) et (EC) se coupent en H.
Que représente le point H pour le triangle DEF ?

1. Construis un triangle ABC rectangle et isocèle en A de sens direct.
2. Construis l'image D' de D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. Justifie que A est le milieu [BD'].

24 ABC est un triangle de sens direct rectangle en B. On construit à l'extérieur du triangle les carrés ACDE et BCFG.
Démontre que les droites (BD) et (AF) sont perpendiculaires, et que BD = AF.

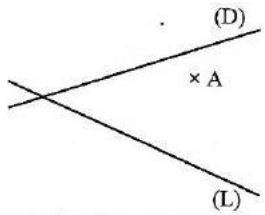


25 Soit ABC un triangle quelconque sur lequel on construit deux triangles équilatéraux ABE et ACD disposés comme sur la figure suivante :

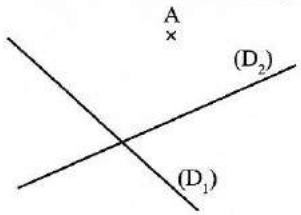


Démontre que [ED] et [BC] ont la même longueur et que les droites (ED) et (BC) forment un angle de 60°.

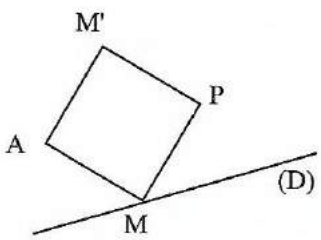
26 Sur la figure ci-dessous, les droites (D) et (L) sont sécantes et non perpendiculaires. A est un point qui n'appartient ni à (D) ni à (L).
Construis un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que B appartienne à (D) et C appartienne à (L).



27 Construis un triangle équilatéral dont deux sommets sont situés sur deux droites (D_1) et (D_2).
Le point A est un sommet de ce triangle.



28 Dans la figure ci-dessous, (D) est une droite donnée et A un point fixé. Pour tout point M de la droite (D), On considère le point M' tel que AMPM' est un carré.
Détermine le lieu géométrique du point M', lorsque M décrit (D).



29 On considère un point A et une droite (D).
Soit B un point de la droite (D).
Le point C est tel que ABC soit un triangle équilatéral (direct).
Détermine le lieu géométrique du point C lorsque B décrit la droite (D).

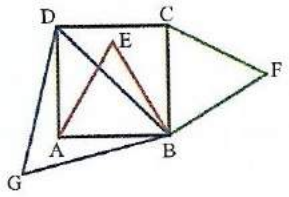
Exercices d'approfondissement

30* On considère un triangle direct ABC et H son orthocentre. Soit S la symétrie centrale de centre A.
r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. Construis D = r(B) ; E = r'(C) et F = S(E).
2. Démontre que r(C) = F puis que la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (DF).
3. Que représente la droite (AH) pour le triangle AED ?

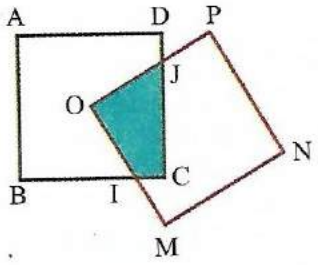
31* Soit ABCD un carré direct, les triangles ABA' et DCC' sont équilatéraux et à l'extérieur du carré.
Les triangles ADD' et CBB' sont équilatéraux et à l'intérieur du carré.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
1. Détermine les images des points A' et D' par r et les images des points B et D par r'.
2. Démontre que A'D' = B'C' et que les droites (A'D') et (B'C') sont parallèles.
3. Déduis-en que A'B'C'D' est un parallélogramme.
4. Prouve que A'B'C'D' est un losange.

32* Dans la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur, ABCD est un carré, de côté 3 m ; ABE, FBC et BDG sont trois triangles équilatéraux.



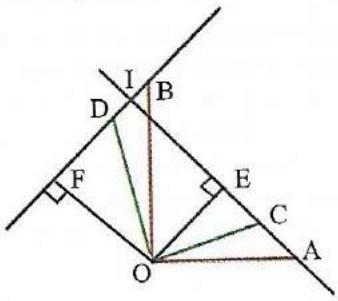
1. Démontre que les points A, C et G sont alignés.
2. Démontre que les points D, E et F sont alignés.
3. Justifie que : EF = $3\sqrt{2}$.

33* Sur la figure ci-dessous, ABCD et OMNP sont des carrés. O est le centre de ABCD.

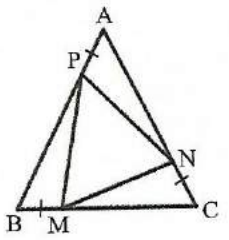


(OP) coupe (CD) en J.
(OM) coupe (BC) en I.
Démontre que quelle que soit la position du carré OMNP, l'aire de OICJ est constante.

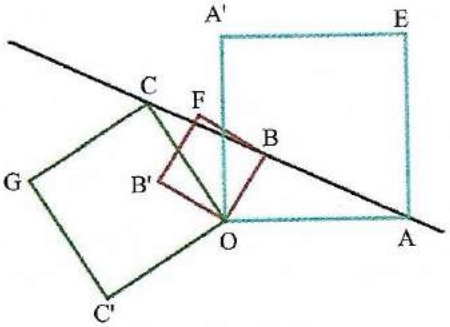
34* Soient les points O, A, B et C et la rotation r de centre O qui amène le point A sur le point B.
Soit D l'image de C par r. Soit E le point de (AC) tel que (OE) perpendiculaire à (AC), et F le point de (BD) tel que (OF) soit perpendiculaire à (BD).
Les droites (AC) et (BD) se coupent en I.
1. Démontre que les médiatrices de [AB] et [CD] se coupent en O.
2. Détermine l'image de (AC) par r.
3. Démontre que : r (E) = F.
4. Démontre que O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{EIF}$.
5. Démontre que : mes $\widehat{AIF}$ = mes $\widehat{AOB}$.



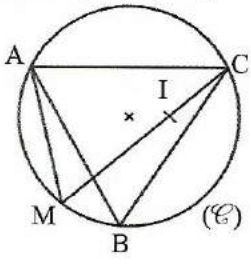
35* ABC est un triangle équilatéral, M, N, P sont des points de [BC], [CA], [AB] tels que :
BM = CN = AP.
Démontre que MNP est équilatéral.



36* Les trois carrés ci-dessous ont un sommet commun O. Les sommets A, B et C sont alignés.
Démontre que les points
A', B' et C' sont alignés.

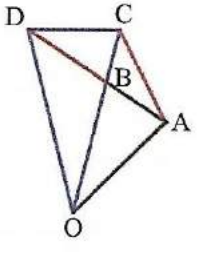


37* Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit.
M est un point quelconque de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
On considère le point I du segment [MC] tel que : MI = MA.

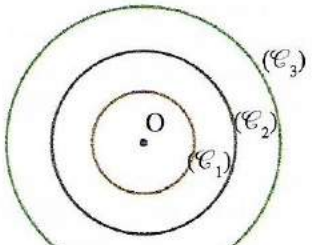


1. Démontre que MAI est un triangle équilatéral.
2. Démontre que MB = IC.
3. Déduis-en que MA + MB = MC.

38 Les triangles OAB et OCD sont isocèles et : $\text{mes}\widehat{AOB} = \text{mes}\widehat{COD} = 30°$.
Démontre que : AC = BD.

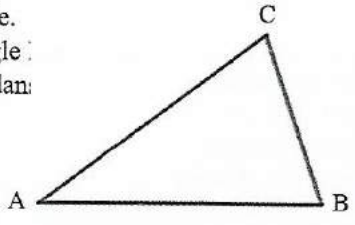


39 Construis un triangle équilatéral dont les sommets sont situés sur des cercles concentriques.



40 (D) et (D_0)sont deux droites parallèles et A un point situé à égale distance des droites (D) et (D_0). Construis un triangle ABC, rectangle et isocèle en A, avec B sur (D) et C sur (D_0), de telle sorte que la droite (BC) soit perpendiculaire à (D).

41 ABC est un triangle.
Construis un triangle équilatéral inscrit dans le triangle ABC.



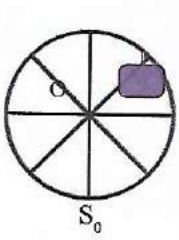
42 On considère un point A et un cercle $(\mathscr{C})$. Soit B un point du cercle $(\mathscr{C})$.
Le point C est tel que ABC soit un triangle équilatéral (direct).
Détermine la courbe sur laquelle se déplace le point C lorsque B décrit le cercle $(\mathscr{C})$.

43 On considère un parallélogramme ABCD de sens direct.
1. Construis le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}}\right) = \frac{\pi}{2}$ et le triangle DCE rectangle et isocèle en D tel que Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Détermine l'image de A par R.
   b) Démontre que R(B) = E.
3. Soit A' le symétrique de A par rapport à I.
   a) Justifie que R(D) = A'.
   b) Démontre que : A'E = BD et que les droites (A'E) et (BD) sont perpendiculaires.

44 On considère un triangle ABC tel que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$ et AB < AC.
On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit à ce triangle et O son centre.
1. Fais une figure.
2. Soit l'ensemble (E) l'ensemble des points M du plan tels que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
   a) Vérifie que A appartient à (E).
   b) Détermine et construis le point I du plan tel que IB = IC et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
3. Soit P le point du segment [AC] tel que CP = AB.
   a) Démontre qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) = P et r(B) = C.
   b) Détermine l'angle et le centre de r.
4. Donne la nature du triangle IAP et déduis-en que AC = AI + AB.
5. Soit M un point variable de l'ensemble (E) et G le centre de gravité du triangle MBC.
Détermine et construis l'ensemble décrit par le point G lorsque M décrit (E).

Situation d'évaluation

45

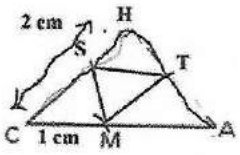




Des enfants sont bloqués dans la nacelle d'une grande roue de manège. Les rayons de cette roue sont régulièrement espacés. Ce manège est détraqué, mais, lorsqu'on introduit un angle α donné dans l'ordinateur lié à la grande roue, la nacelle tourne d'un angle 2α autour du point O puis s'arrête.
Détermine l'angle à introduire dans l'ordinateur pour faire descendre les enfants.

46 Des élèves du club de mathématique nommé "CMATHS" d'une ville décident de concevoir un logo formé d'un triangle rectangle et d'un triangle équilatéral. Les sommets du triangle équilatéral sont situés sur les trois côtés du triangle rectangle. Ils doivent mettre ce logo sur les tricots polo du club.

Dessin à main levée du logo





Le président du club te choisit pour dessiner ce logo.
Construis le logo.
Donne ton programme de construction.

Coup de Pouce

30 1. Faire une figure soignée.
2. Justifier que ACF est rectangle et isocèle en A puis utilise la propriété fondamentale de la rotation.
3. Utiliser la droite des milieux.

31 1. Faire une figure soignée.
2. Utiliser un tableau de correspondance et les angles correspondants.
3. Les côtés sont parallèles et de même longueur.
4. On peut utiliser les médiatrices.

32 a) Utiliser la médiatrice d'un segment.
b) Utiliser une rotation et les Images de points alignés par cette rotation.
c) Utiliser la conservation de distance.

33 Soit G le point de (BC) tel que (OG) soit perpendiculaire à (BC).
Soit H le point de (DC) tel que (OH) soit perpendiculaire à (DC).
Utiliser la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

34 1. Utiliser la définition de la rotation.
2. Les éléments sont dans l'énoncé.
3. Utiliser la question 2 et l'image du point d'intersection de deux droites.
4. Utiliser la propriété relative à l'appartenance d'un point à la bissectrice d'un angle.
5. Utiliser la définition de la rotation et la propriété fondamentale de la rotation.

35 Choisir une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

36 Utiliser la conservation de l'alignement.

37 1. Utiliser les angles inscrits et MI = MA.
2. Utiliser une rotation.
3. Conclure.

Mise en page : Vallesse Éditions
Tel : 22410821/01916125
Maquette couverture : I Graph
Achevé d'imprimer en Côte d'Ivoire
1er trimestre 2020
Dépôt légal : N° 15406

Logique et raisonnement

I- Proposition

Une proposition est un énoncé auquel on peut répondre sans ambiguïté par vrai ou par faux.

On dit alors que les deux valeurs de vérité d'une proposition sont « vrai » et « faux ».

II- Implication et équivalence

La proposition « si P, alors Q » ou « P implique Q » est appelée implication. Elle est symbolisée par $\Longrightarrow$.

On dit que P est l'hypothèse et que Q est la conclusion.

La proposition « P si, et seulement si Q » ou « P équivaut à Q » est la proposition « (Si P, alors Q) et (si Q, alors P) ». Elle est symbolisée par $\Leftrightarrow$.

III- Les quantificateurs

▪ **Quantificateur universel**

Pour énoncer une propriété vraie dans tous les cas, on utilise le quantificateur « pour tout », noté $\forall$.

Remarque : Il signifie « Quel que soit » ou encore « Pour tous ».

« $\forall x \in E$, $P(x)$ » signifie : Pour tout élément x appartenant à l'ensemble E, la proposition $P(x)$ est vraie.

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$: Quel que soit x élément de $\mathbb{R}$, x^2 est positif ou nul.

▪ **Quantificateur existentiel**

Pour énoncer une propriété vraie sur des exemples mais qui n'est pas dans tous les cas, on utilise le quantificateur « il existe », noté $\exists$.

« $\exists x \in E$ / $P(x)$ » ou « $\exists x \in E$, $P(x)$ » signifie : Il existe au moins un élément x de l'ensemble E tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

Exemple : $\exists x \in \mathbb{R}$ / $x^2 > 100$: Il existe des réels x tels que : $x^2 > 100$.

« $\exists ! x \in E$ / $P(x)$ » signifie : Il existe un et un seul élément x de l'ensemble E tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

Exemple : $\exists ! x \in \mathbb{N}$ / $n^2 = 100$: Il existe un unique entier naturel n tel que : $n^2 = 100$.

IV- Les différents types de raisonnement

On peut définir le raisonnement comme un ensemble de propositions organisées pour aboutir à une conclusion.

▪ **Le raisonnement inductif :** de l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs) on déduit, par présomption, une propriété générale.

Exemple : Deux points A et B étant donnés, détermine l'ensemble de tous les points C tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle.

▪ **Le raisonnement déductif :** à partir de propriétés reconnues comme vraies, par enchaînement logique, on déduit une propriété.

▪ **Raisonnement par l'absurde :** consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire.

Exemple : Démontre que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

▪ **La disjonction des cas :** pour démontrer une propriété, il est parfois nécessaire de l'étudier cas par cas.

Exemple : Démontre par disjonction des cas que pour tout entier n, $\frac{n(n+1)}{2}$ un entier.

▪ **Le contre-exemple :** un contre-exemple ou contrexemple est un exemple particulier et concret qui contredit une affirmation.

Exemple : Démontre que l'affirmation « Tout entier positif est somme de trois carrés » est fausse.

Mémento

Ensemble des nombres réels

Approximation décimale d'ordre n

Soit a un nombre décimal d'ordre n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Si $a \leq x \leq a + 10^{-n}$, alors :

- a est l'approximation décimale d'ordre n par défaut de x ;
- $a + 10^{-n}$ est l'approximation décimale d'ordre n par excès de x.

Polynômes

Égalités remarquables

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Généralités sur les fonctions

Variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est croissante sur I signifie que pour tous réels u et v de I : si $u < v$, alors $f(u) \leq f(v)$.
- f est décroissante sur I signifie que pour tous réels u et v de I : si $u < v$, alors $f(u) \geq f(v)$.
- f est constante sur I signifie que pour tous réels u et v de I, $f(u) = f(u)$.

Maximum - Minimum

f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble I ; a est un élément de I.

- Lorsque pour tout élément x de I, $f(x) \leq f(a)$; on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I.
- Lorsque pour tout élément x de I, $f(x) \geq f(a)$; on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I.

Vecteurs et points du plan

Propriété fondamentale

Pour tout point O du plan et pour tout vecteur $\vec{u}$ donnés, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



Vecteur unitaire

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.

Propriétés

- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre réel k, $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $(\alpha ; \beta) \neq (0 ; 0)$ tel que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

Norme d'un vecteur

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Déterminant de deux vecteurs dans une base

▪ Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Le déterminant de $(\vec{u},\vec{v})$ relativement à la base $(\vec{i},\vec{j})$ est : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$.

▪ Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

▪ Deux vecteurs forment une base si et seulement si leur déterminant est non nul.

Angles orientés et trigonométrie

Conversion degré-radian

Soit x la mesure en degré et α la mesure en radian d'un angle. On a : $\frac{x}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$.

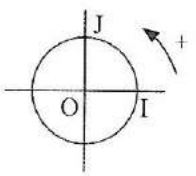
Mesure principale d'un angle orienté

Tout angle orienté admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$: c'est sa mesure principale.

Cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct.

Le repère (O, I, J) est dit orthonormé direct.



Propriétés

Pour tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$,

on a : $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$; $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Pour tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ tel que $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, on a : $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

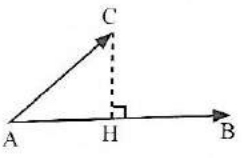
Produit scalaire

Calcul du produit scalaire de deux vecteurs

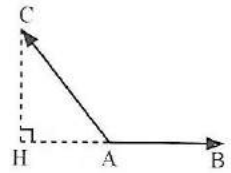
▪ Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ tel que :

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

▪ Pour tous points A, B et C tels que $A \neq B$, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$, où le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



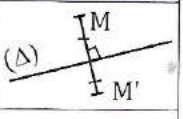
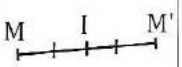
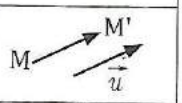
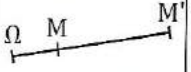
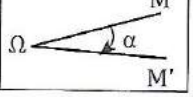
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$



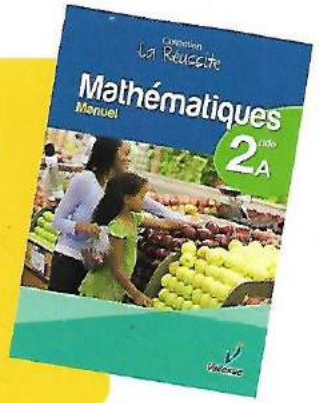
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

▪ Si dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y'), alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$.

Transformations du plan

Transformation	M a pour image M' signifie que	Illustrations
Symétrie orthogonale d'axe (Δ)	Si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$ Si $M \notin (\Delta)$, (Δ) est la médiatrice de [MM']	
Symétrie de centre I	Si M = I, alors M' = I. Si M ≠ I, alors I est le milieu de [MM'].	
Translation de vecteur $\vec{u}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	
Homothétie de centre Ω et de rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	
Rotation de centre Ω et d'angle α	$\begin{cases}\Omega M' = \Omega M\\ \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha\end{cases}$	

Collection
La Réussite

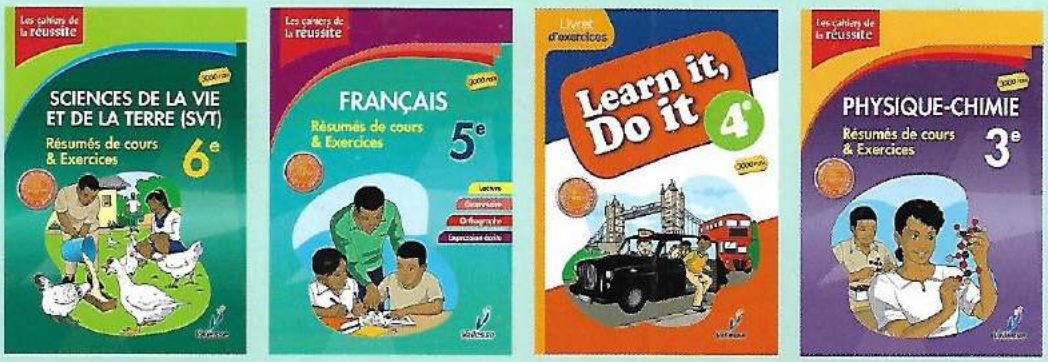


Une collection pour vous conduire sur le chemin de la Réussite.
On y trouve, pour chaque leçon :

- *Situations d'apprentissage*
- *Habiletés et contenus*
- *Installation des habiletés*
- *Apprentissage de la rédaction*
- *Résumés de cours*
- *Exercices*
- *Situation d'évaluation*
- *Coup de pouce*

Collection Les Cahiers de la Réussite





Des résumés de cours et des exercices élaborés par des professeurs et encadreurs pédagogiques chevronnés.

Disponibles pour toutes les classes

9 782916 532967
ISBN : 978-2-916532-96-7