C. LEBOSSÉ
C. HEMERY

GÉOMÉTRIE



FERNAND
NATHAN

GÉOMÉTRIE

COLLECTION LEBOSSÉ ET HÉMERY

6e	Arithmétique et Travaux Pratiques
5e	Arithmétique et Géométrie
4e	Arithmétique, Algèbre et Géométrie
3e	Algèbre, Arithmétique et Géométrie
2e A	Algèbre et Géométrie
2e C	Algèbre
2e C	Géométrie
1re A	Algèbre et notions d'Analyse
1re C et D	Algèbre et notions d'Analyse
1re C	Géométrie et Géométrie analytique
Mathématiques	Géométrie
Mathématiques	Algèbre

Enseignement technique

LEBOSSÉ-HÉMERY-FAURE

Nouveaux programmes

2e Techn. industrielle	Algèbre
2e Techn. industrielle	Géométrie
1re Techn. industrielle	Algèbre et Géométrie

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Claude-Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

GÉOMÉTRIE

Classe de Seconde C

PROGRAMME 1965

LIBRAIRIE FERNAND NATHAN

Tous droits réservés

© 1961 Fernand Nathan - Paris

PROGRAMME DU 20 AOUT 1965

des Classes de Seconde C

(ancien programme 1960 de Seconde A′, C, M, M′)

Note préliminaire.

Les nécessités de la rédaction ont conduit à choisir, pour le libellé du programme, un certain ordre d'énumération. Mais, il est bien entendu que le professeur est libre d'adopter l'ordre de présentation qu'il désire, et, en particulier, de lier les enseignements relatifs à des théories qui sont mentionnées sous des rubriques différentes.

Le professeur s'attachera, tant en Algèbre qu'en Géométrie, à l'aide des nombreux exemples que fournissent les divers chapitres, à préciser quelques notions déjà rencontrées dans les classes précédentes : proposition réciproque, condition nécessaire, condition suffisante, propriété caractéristique. L'étude systématique de problèmes spéculatifs, c'est-à-dire de problèmes proposant la recherche d'éléments dont l'existense doit être mise en cause (tels que les problèmes de « lieu géométrique », les problèmes de « construction », les problèmes de « résolution » d'équations et d'inéquations...), permettra de dégager un certain nombre d'idées générales concernant la conduite logique d'un raisonnement : analyse, synthèse, emploi de conditions à la fois nécessaires et suffisantes, transformation d'un problème en un problème équivalent.

ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

I. Les nombres et le calcul algébrique.

Rappel et mise en ordre (comportant éventuellement quelques compléments) des éléments d'arithmétique et d'algèbre acquis dans les classes précédentes : nombres; opérations; comparaison; propriétés fondamentales. Rapports et proportions. Exposants entiers positifs, nuls, négatifs; opérations sur les puissances entières. Racine carrée arithmétique.

Monômes, polynômes, fractions rationnelles d'une ou plusieurs variables; opérations. Identités usuelles relatives aux polynômes $(x + y)^2$, $(x - y)^2$, $(x + y)^3$, $(x - y)^3$, $x^2 - y^2$, $x^3 + y^3$, $x^3 - y^3$.

Technique du calcul algébrique; exercices raisonnés de transformation de polynômes, de fractions rationnelles, et d'expressions irrationnelles simples.

Pratique du calcul numérique; calcul de valeurs approchées par encadrement.

II. Les fonctions.

1° Notion de fonction conçue comme correspondance; exemples.

Fonction d'une variable; notation $y = f(x)$. Notion d'accroissement. Fonction croissante, fonction décroissante, fonction constante sur un intervalle.

2° Transformation du binôme $ax + b$ conduisant à la forme $a(x - p)$.

Equation et inéquation du premier degré à une inconnue, à coefficients numériques ou littéraux.

Fonction $y = ax$, $y = ax + b$, de la variable x; existence, sens de variation; étude lorsque x tend vers l'infini; signe.

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues, à coefficients numériques ou littéraux; étude théorique de sa résolution; définition du déterminant du système. Méthodes pratiques de résolution.

3° Transformation du polynôme $ax^2 + bx + c$ conduisant à la forme $a(x - h)^2 + k$, et éventuellement à la forme $a(x - p)(x - q)$.

Equation et inéquation du second degré à une inconnue, à coefficients numériques ou littéraux. Somme et produit des racines d'une équation (ou d'un polynôme) du second degré.

Fonction $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, de la variable x; existence, sens de variation, maximum ou minimum; étude lorsque x tend vers l'infini, signe.

4° Fonction $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{a}{x}$, de la variable x; existence, sens de variation; étude lorsque x tend vers zéro ou vers l'infini.

5° Etude de problèmes, pouvant faire appel à l'ensemble des connaissances des élèves, dont la résolution conduit à des équations ou des inéquations du premier degré.

GÉOMÉTRIE

I. Les premiers éléments. Compléments de géométrie plane.

1° Rappel et mise en ordre des premiers éléments, figurant dans le programme de géométrie de la classe de cinquième, et dans les paragraphes II, III, IV du programme de géométrie plane de la classe de quatrième. Le professeur s'attachera à construire un répertoire de définitions et de propriétés; il pourra éventuellement donner une certaine ampleur au caractère déductif de telle ou telle partie de son exposé, sans perdre de vue qu'il ne convient pas, à ce niveau, de s'attarder longuement sur ces notions, qui ont déjà été présentées, et qui constituent un point de départ.

2° Ensemble des points équidistants de deux points donnés. Ensemble des points équidistants de deux droites données, sécantes ou parallèles. Médiatrices, hauteurs, bissectrices d'un triangle.

3° Cercle. Positions d'un point par rapport à un cercle. Cordes et arcs. Tangente en un point. Proportionnalité des angles au centre et des arcs interceptés.

Comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre interceptant le même arc. Ensemble des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle saillant donné. Angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, propriété réciproque.

Positions relatives d'une droite et d'un cercle. Tangentes à un cercle parallèles à une droite donnée, ou passant par un point donné.

Comparaison des segments joignant un point aux différents points d'un cercle. Positions relatives de deux cercles.

Cercle passant par deux points; cercle circonscrit à un triangle. Cercles tangents à deux droites. Cercles tangents à trois droites.

II. Géométrie dans l'espace.

1° Plan et droite. Leurs déterminations. Leurs positions relatives; parallélisme de droites et de plans; notions de direction de droite, de direction de plan.

2° Angles de deux droites; orthogonalité.

Plans perpendiculaires à une droite; droites perpendiculaires à un plan.

Angles dièdres; plans perpendiculaires.

Comparaison des segments joignant un point aux différents point d'un plan; distance d'un point à un plan.

Définition d'un angle trièdre, d'un angle polyèdre.

3° Projection sur un plan parallèlement à une direction de droite; projection d'un point, d'une droite, d'un segment; projections de deux droites parallèles.

Projection orthogonale sur un plan. Projection orthogonale d'un angle droit.

4° Plan médiateur d'un segment. Ensemble des points équidistants de deux points donnés, de trois points donnés.

Plans bissecteurs des dièdres formés par deux plans sécants. Ensemble des points équidistants de deux plans sécants ou parallèles.

Symétrie par rapport à une droite, par rapport à un point, par rapport à un plan. Définition. Symétriques d'une droite, d'un segment, d'un angle, d'un plan.

Définitions d'un axe, d'un centre, d'un plan de symétrie d'un ensemble géométrique; exemples simples.

(Les produits de symétries ne sont pas au programme).

III. Éléments orientés. Vecteurs.

1° *Éléments orientés sur une droite.* Segment orienté. Droite orientée ou axe. Mesure algébrique d'un segment orienté sur son support orienté. Formule de Chasles. Abscisse d'un point sur un axe; changement d'origine. Segment défini par les abscisses des points qui le limitent : mesure algébrique (segment orienté), longueur, abscisse du milieu.

Division harmonique de points alignés : relations caractéristiques.

2° *Vecteur.* Equipollence. Addition; associativité et commutativité. Vecteur nul; vecteurs opposés. Soustraction.

Projection d'un vecteur : sur un plan, parallèlement à une direction de droite; sur une droite, parallèlement à une direction de droite (géométrie plane), ou parallèlement à une direction de plan. Projection orthogonale d'un vecteur. Projection d'une somme ou d'une différence de vecteurs (sur un plan, sur une droite).

Projection sur une droite orientée; mesure algébrique de la projection d'un vecteur, d'une somme ou d'une différence de vecteurs.

3° Multiplication d'un vecteur par un nombre relatif; rapport de deux vecteurs parallèles.

Thèorème de Thalès en géométrie plane; problème réciproque. Théorème de Thalès dans l'espace; réciproque. Projection (sur une droite, sur un plan) du vecteur produit d'un vecteur par un nombre. Projection sur une droite orientée : mesure algébrique de la projection du vecteur produit d'un vecteur par un nombre.

4° Translation; homothétie. Définition. Transformés d'une droite, d'un plan d'un segment, d'un angle, d'un cercle.

Double propriété de distributivité, par rapport à l'addition, de la multiplication d'un vecteur par un nombre.

Triangles homothétiques dans un plan; application aux médianes d'un triangle.

Homothéties transformant l'un en l'autre deux cercles d'un plan; tangentes communes à deux cercles d'un plan.

(Les produits de translations et d'homothéties ne sont pas au programme.)

IV. Triangles semblables; applications.

1° Triangles semblables. Cas de similitude. Relations métriques dans le triangle rectangle; problèmes réciproques.

2° Définition des rapports trigonométriques d'un angle saillant; (cosinus, sinus, tangente, cotangente); relations simples entre les rapports relatifs à un même angle, à deux angles supplémentaires, à deux angles aigus complémentaires. Cosinus de l'angle saillant de deux vecteurs ou de deux axes.

Relations trigonométriques dans un triangle tectangle. Valeurs numériques des rapports trigonométriques des angles de 30°, 45°, 60°.

Relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ dans un triangle quelconque.
Exercices de calcul comportant l'usage des tables de rapports trigonométriques.

V. Coordonnées (géométrie plane). Représentations graphiques.

1° Système de coordonnées cartésiennes dans le plan; axes obliques, axes rectangulaires; choix des unités sur les axes. Système (ou repère) orthonormé. Composantes scalaires (coordonnées) d'un vecteur; coordonnées d'un point.

Changement de coordonnées par la translation des axes.

2° Représentation graphique de la fonction $y = ax + b$. Ordonnée à l'origine; coefficient directeur (repère quelconque), pente (repère orthonormé).

3° Equation d'une droite relativement à un repère cartésien donné; interprétation géométrique du signe d'un polynôme du premier degré à deux variables.

Détermination de l'équation d'une droite définie par deux points, ou par un point et sa direction. Intersection de deux droites définies par leurs équations. Application aux équations et inéquations du premier degré à deux inconnues.

4° Représentation graphique des fonctions :

$y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{a}{x}$, dans un système de coordonnées rectangulaires (pas nécessairement normé). Symétries des courbes représentatives de ces fonctions.

NOTE DES AUTEURS

Le présent ouvrage comporte le développement des paragraphes I, II, III et IV du programme de Géométrie ci-dessus de la classe de seconde C.

Conformément à la tradition et utilisant la liberté donnée dans la note préliminaire, nous avons fait figurer le paragraphe V (coordonnées et représentations graphiques) dans l'ouvrage d'Algèbre de la classe.

GÉOMÉTRIE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. Éléments géométriques fondamentaux. — On appelle ***volume*** la portion de l'espace occupée par un corps.

La ***surface*** d'un corps sépare le volume défini par ce corps de l'espace environnant. Deux régions contiguës de l'espace sont donc séparées par une surface.

Toute portion de surface est limitée par une ***ligne***. Une ligne tracée sur une surface sépare deux régions contiguës de cette surface. Lorsqu'une ligne appartient à deux surfaces, elle constitue l'***intersection*** de ces deux surfaces.

On appelle ***point*** la séparation entre deux portions contiguës d'une ligne, ou encore l'intersection de deux lignes. C'est pourquoi on représente un point par l'intersection de deux petits traits (fig. 1).



Fig. 1.

On désigne sous le nom de ***figure géométrique*** tout ensemble donné de points, lignes, surfaces et volumes.

2. But de la géométrie. — La géométrie a pour but l'étude des figures et en particulier la recherche de propriétés nouvelles déduites des propriétés antérieures et de celles qui définissent une figure donnée.

Les propriétés géométriques reposent toutefois sur un certain nombre de faits vérifiés expérimentalement dont on ne donne aucune autre justification. L'énoncé d'une telle propriété constitue un ***axiome*** ou ***postulat.***

3. Postulat du déplacement. Figures égales. — La notion de corps solide que l'on peut déplacer sans déformation, conduit à la notion de figure géométrique invariable susceptible de subir un changement de position dans l'espace :

On peut déplacer dans l'espace une figure invariable.

Considérons une figure à laquelle nous faisons occuper successivement les positions F_1 et F_2. Les figures F_1 et F_2 considérées comme deux figures distinctes sont superposables. On dit que ces figures sont égales :

Deux figures égales sont deux figures superposables par déplacement.

Lorsque deux figures F_1 et F_2 sont égales à une même figure F_3, on peut amener F_1 sur F_3, puis F_3 sur F_2, c'est dire F_1 sur F_2 :

Deux figures égales à une troisième sont égales entre elles.

Considérons également comme acquis les résultats expérimentaux suivants :

Un point qui se déplace engendre une ligne. Une ligne qui se déplace engendre une surface. Une surface qui se déplace engendre un volume.

4. Postulats de la ligne droite. — 1° L'image d'un fil très fin tendu (fig. 2), l'arête rectiligne d'une règle (fig. 3), donnent la notion de ligne



Fig. 2.

droite. Étant donnés deux points A et B, on peut toujours amener un fil tendu (ou l'arête d'une règle) à passer par A et B. On constate que tout autre

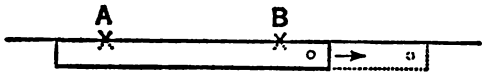


Fig. 3.

fil tendu entre A et B coïncide avec le premier et représente la même droite AB :

Par deux points donnés, il passe une droite et une seule.

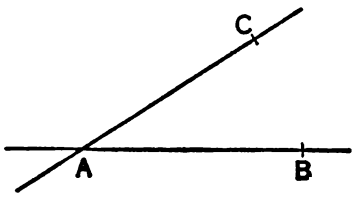


Fig. 4.

Il en résulte que *deux droites distinctes ont au plus un point commun* sans quoi elles coïncideraient. Les droites AB et AC (fig. 4) sont dites concourantes et le point commun A est leur point d'intersection.

2° Les extrémités du fil tendu ou celles de l'arête de la règle, qui matérialise la droite AB peuvent être aussi éloignées que l'on veut des points A et B :

Une droite est illimitée dans les deux sens.

3° Faisons coïncider l'arête rectiligne d'une règle avec la droite AB (fig. 3). Nous constatons qu'on peut encore faire glisser cette arête sans qu'elle cesse de coïncider avec la droite AB :

Une droite peut glisser sur elle-même.

5. Postulats du plan. — 1° La surface d'une nappe d'eau au repos celle d'un tableau, donnent la notion de plan. Si nous plaçons l'arête rectiligne d'une règle sur la surface du tableau (fig. 5), nous constatons que tous les points de cette arête sont en contact avec le tableau, et ceci quelle que soit la position de cette arête :

La droite qui joint deux points d'un plan y est contenue tout entière.

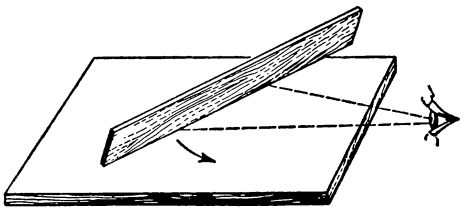


Fig. 5.

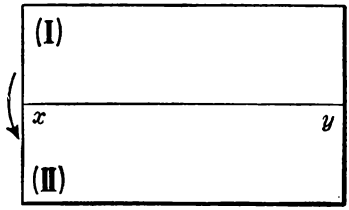


Fig. 6.

2° On peut faire glisser l'une ou l'autre des deux faces d'une feuille de bristol sur la surface du tableau sans qu'aucun de ses points quitte la surface du tableau :

Un plan peut glisser sur lui-même, même après avoir été retourné face pour face.

Une ligne droite *xy* partage un plan en deux régions appelées *demi-plans* (fig. 6). On peut faire tourner le demi-plan I autour de *xy* pour l'amener à coïncider avec le demi-plan II. Nous dirons que le demi-plan I a été rabattu sur le demi-plan II, autour de *xy* comme charnière.

6. Figures planes. — Une figure plane est une figure tracée dans un plan. Deux figures planes égales d'un même plan peuvent être superposées soit par simple glissement (fig. 7) soit par retournement, puis glissement (fig. 8). Dans le premier cas elles sont dites *directement égales* et dans le second cas *inversement égales.*

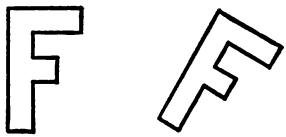


Fig. 7.

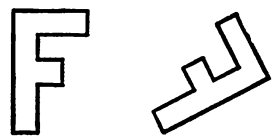


Fig. 8.

7. Propositions géométriques. — Une *proposition* est l'énoncé d'une propriété géométrique. Elle comprend deux parties : l'*hypothèse* qui indique les conditions supposées réalisées et la *conclusion* qui exprime les conséquences de l'hypothèse. Ces conséquences doivent être acquises à la suite d'une *démonstration* dans laquelle on pourra utiliser les *définitions* (propriétés qui caractérisent une figure donnée), les *postulats* précédemment énoncés et les propositions démontrées antérieurement.

Toute proposition importante constitue un *théorème*. Un *lemme* est une proposition qui facilite la démonstration d'un théorème. Un *corollaire* est une conséquence immédiate d'un théorème (ou d'un postulat).

Deux propositions sont dites *réciproques* lorsque la conclusion de chacune d'elles constitue totalement ou partiellement l'hypothèse de l'autre. Une proposition peut être exacte sans que sa réciproque le soit. Ainsi : Deux droites sont deux figures égales, mais deux figures égales ne sont pas nécessairement deux droites.

8. Implication et équivalence. — 1° Si la proposition B est conséquence de la proposition A, on dit que A *entraîne* ou implique B et on écrit :

$$A \Longrightarrow B$$

Le signe $\Longrightarrow$ est le symbole de l'*implication.*

2° Lorsque les propositions A et B sont conséquences l'une de l'autre, c'est-à-dire si :

$$A \Longrightarrow B \quad \text{et} \quad B \Longrightarrow A$$

on dit que ces propositions sont *équivalentes* et on écrit :

$$A \Longleftrightarrow B$$

Le signe $\Longleftrightarrow$ est le symbole de l'équivalence logique.

I. GÉOMÉTRIE PLANE

Première leçon

SEGMENTS DE DROITE

9. Définitions. — ***On appelle demi-droite l'une des portions de droite limitées à un point de cette droite.***

Le point O détermine sur la droite *xy* (fig. 9) deux demi-droites O*x* et O*y* et se nomme l'*origine* de chacune de ces demi-droites.

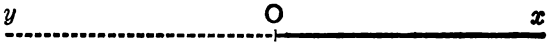


Fig. 9.

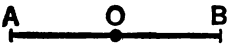


Fig. 10.

On appelle segment de droite la portion de droite comprise entre deux points de cette droite.

Les points A et B (fig. 10) limitent le segment AB d'extrémités A et B.

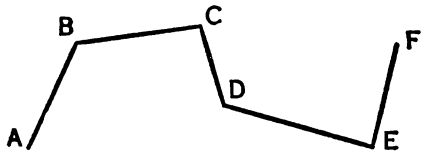


Fig. 11.



Fig. 12.

Une ligne brisée (fig. 11) est formée de segments successifs et *une ligne courbe* (fig. 12) est une ligne qui ne contient pas de portion de droite.

10. Segments égaux. — Deux segments de droite AB et CD sont égaux si on peut transporter le second sur le premier de façon que le point C vienne en A et le point D en B (fig. 13). Les deux segments coïncideront alors dans toute leur étendue. En effet (n° 4) les deux droites illimitées AB et CD sont alors confondues et il en est de même pour les portions comprises entre A et B sur l'une et C et D sur l'autre.

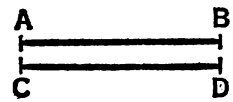


Fig. 13.

La coïncidence des deux segments AB et CD peut aussi être établie en amenant le point D en A et le point C en B. Autrement dit, on peut retourner un segment donné de façon que chacune de ses extrémités vienne à la place de l'autre.

Le point O qui partage le segment AB en deux segments égaux OA et OB se nomme *milieu* de AB (fig. 10).

11. Somme de deux ou plusieurs segments. — Si B est un point du segment AC (fig. 14), le segment AC est la *somme* des segments AB et BC; le segment AB est la *différence* des segments AC et BC. On écrit :

$$AC = AB + BC \Longleftrightarrow AB = AC - BC$$

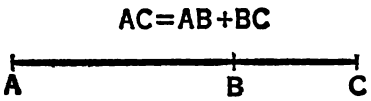


Fig. 14.

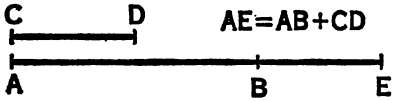


Fig. 15.

Le segment AC est *supérieur* au segment AB et celui-ci est *inférieur* au segment AC :

$$AC > AB \Longleftrightarrow AB < AC$$

Pour construire la somme de deux segments AB et CD, il suffit de porter sur le prolongement de AB un segment BE égal à CD (fig. 15) et :

$$AE = AB + BE = AB + CD$$

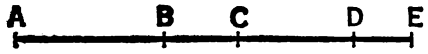


Fig. 16.

La somme de plusieurs segments se définit de même. Ainsi (fig. 16) :

$$AE = AB + BC + CD + DE$$

12. Mesure d'un segment. — Si le segment AB est la somme de trois segments égaux au segment EF on écrit :

$$AB = 3\,EF \Longleftrightarrow EF = \frac{1}{3}\,AB$$

De même, si

$$CD = 5\,EF \Longleftrightarrow EF = \frac{1}{5}\,CD,$$

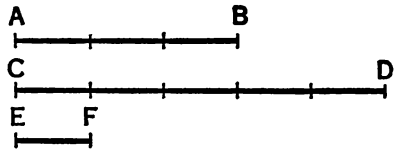


Fig. 17.

on écrit : $AB = \frac{3}{5}\,CD \Longleftrightarrow CD = \frac{5}{3}\,AB.$

Le nombre $\frac{3}{5}$, rapport des segments AB et CD est la *mesure* du segment AB (ou sa *longueur*) en prenant CD comme unité.

La distance de deux points A ***et*** B ***est la longueur du segment*** AB.

Ce que nous venons de dire pour les segments de droite peut s'étendre aux grandeurs de même espèce, pourvu qu'on puisse définir l'égalité et la somme de deux de ces grandeurs.

La mesure d'une grandeur est le rapport de cette grandeur à la grandeur de même espèce choisie comme unité.

ANGLES

13. Définitions. — *On appelle angle la figure formée par deux demi-droites issues du même point.*

Le point A est le *sommet* de l'angle BAC qu'on désigne par $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{A}$ (fig. 18). Les demi-droites AB et AC en sont les *côtés*. Cet angle partage le plan en

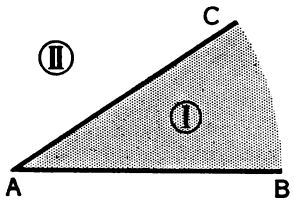
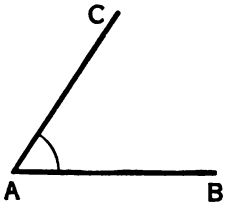


Fig. 18.



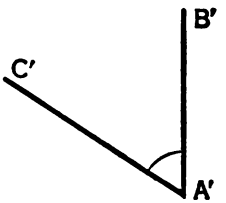


Fig. 19.

deux régions I et II que, par extension, on appelle angles. La région I est l'angle *saillant* BAC, appelée aussi *intérieur* de l'angle BAC; la région II est l'angle *rentrant* BAC. Sauf indication contraire, nous ne considérerons que des angles saillants.

L'angle BAC (fig. 20) dont les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre est un *angle plat.*

Deux angles sont égaux lorsqu'ils sont superposables

C'est le cas des angles BAC et B'A'C' de la figure 19 qu'on peut superposer en amenant A'B' et A'C' sur AB et AC ou A'C' et A'B' sur AB et AC.

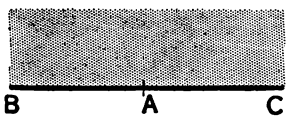


Fig. 20.

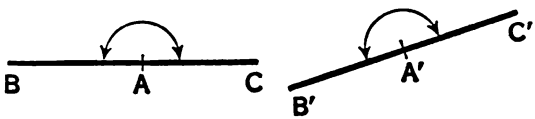


Fig. 21.

14. Théorème. — *Tous les angles plats sont égaux.*

En effet (fig. 21) on peut amener la droite B'C' sur la droite BC de façon que A' vienne en A et que la région intérieure à l'angle plat B'A'C' coïncide avec celle de l'angle plat BAC.

15. Angles adjacents. Somme de deux angles. — *Deux angles sont adjacents lorsqu'ils ont même sommet, un côté commun, et sont situés de part et d'autre de ce côté commun.*

Les angles AOB et BOC sont adjacents (fig. 22), $\widehat{AOC}$ est la *somme* des angles AOB et BOC; l'angle AOB est la *différence* des angles AOC et BOC. On écrit :

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} \Longleftrightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AOC} - \widehat{BOC} \quad \text{et}$$

$$\widehat{AOC} > \widehat{AOB} \Longleftrightarrow \widehat{AOB} < \widehat{AOC}.$$

On peut, de même, définir la somme de plusieurs angles.

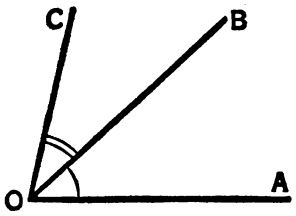


Fig. 22.

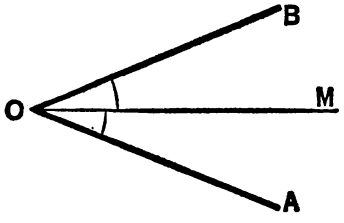


Fig. 23.

16. Bissectrice d'un angle. — ***On appelle bissectrice d'un angle, la demi-droite qui partage cet angle en deux angles égaux.***

Si OM est la bissectrice de l'angle AOB (fig. 23), on peut écrire :

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

On peut obtenir la bissectrice d'un angle découpé dans une feuille de papier en pliant cet angle de façon à amener l'un des côtés sur l'autre. Le pli se fait suivant la bissectrice de cet angle.

17. Angle droit. — ***On appelle angle droit la moitié d'un angle plat.***

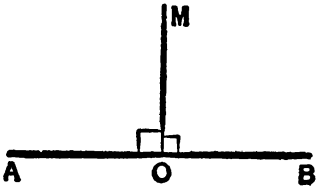


Fig. 24.

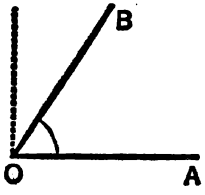


Fig. 25.

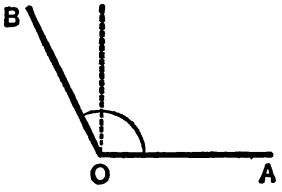


Fig. 26.

Traçons la bissectrice OM de l'angle plat AOB (fig. 24), on obtient deux angles droits. On écrit :

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = 1^{D}.$$

18. Théorème. — ***Tous les angles droits sont égaux.***

Tous les angles plats étant égaux, il en est de même de leurs moitiés.

19. Mesure des angles. — Nous avons défini l'égalité et la somme de deux angles. Les angles sont donc des grandeurs mesurables (n° 12).

On peut, comme pour les segments, définir le rapport de deux angles et par suite la mesure d'un angle relative à un angle pris pour unité.

L'unité d'angle est l'angle droit.

On utilise également :

1° ***Le degré*** (°) ***et ses sous-multiples : minute*** (′) ***et seconde*** (″) : Par définition :

$$1^D = 90^\circ \quad 1^\circ = 60' \quad \text{et} \quad 1' = 60''.$$

2° ***Le grade*** (gr) ***et ses sous-multiples décimaux*** (décigrade, centigrade, etc.).

$$1^D = 100 \text{ gr} \quad 1 \text{ gr} = 10 \text{ dgr} = 100 \text{ cgr}$$

Un angle plat vaut 2^D *ou* 180° *ou* 200 gr.

L'instrument qui sert à mesurer les angles est le *rapporteur* qui est gradué soit en degrés, soit en grades.

20. Définitions. — 1° On appelle *angle aigu* un angle inférieur à l'angle droit (fig. 25), et *angle obtus* un angle supérieur à l'angle droit (fig. 26).

2° ***Deux angles aigus sont complémentaires si leur somme est un angle droit*** (ou 90°); chacun de ces deux angles est le *complément* de l'autre.

3° ***Deux angles sont supplémentaires si leur somme est un angle plat*** (2^D ou 180°).

Si les deux angles ne sont pas tous deux droits l'un est aigu et l'autre obtus. Chacun d'eux est le *supplément* de l'autre.

Il résulte immédiatement de ces définitions que :

21. ***Si deux angles adjacents sont complémentaires, leurs côtés non communs forment un angle droit*** (fig. 27).

22. ***Si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés non communs sont dans le prolongement l'un de l'autre*** (fig. 28).

A des angles égaux correspondent des compléments égaux et des suppléments égaux et réciproquement :

23. ***Lorsque deux angles ont même complément ou même supplément, ces deux angles sont égaux.***

24. Angles opposés par le sommet. — ***On dit que deux angles sont opposés par le sommet si les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.***

Ainsi lorsque deux droites AA′ et BB′ se coupent en O, les angles AOB et A′OB′ sont opposés par le sommet (fig. 29). Il en est de même des angles AOB′ et A′OB.

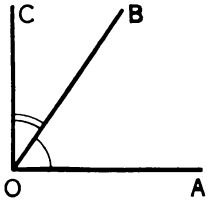


Fig. 27.

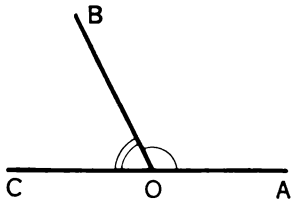


Fig. 28.

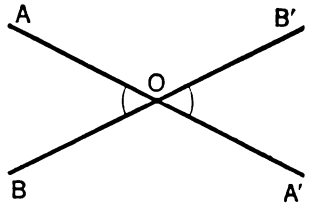


Fig. 29

25. Théorème. — *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

En effet les deux angles AOB et A′OB′ ont tous deux pour supplément l'angle AOB′ : ils sont donc égaux.

26. Droites perpendiculaires. — *On dit que deux droites sont perpendiculaires lorsque l'un des angles qu'elles forment est droit.*

Les deux droites AB et CD (fig. 30) forment un angle droit AOC. Elles sont donc perpendiculaires.

Les angles AOD et COB ont pour supplément AOC qui est droit. Ils sont donc eux-mêmes droits. L'angle BOD qui est opposé par le sommet à l'angle AOC est également droit. Il en résulte que :

Deux droites perpendiculaires forment quatre angles droits.

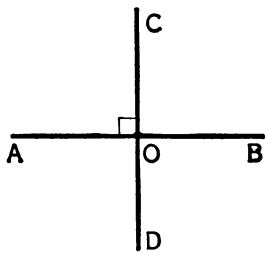


Fig. 30.

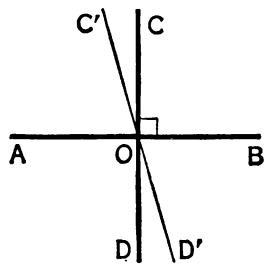


Fig. 31.

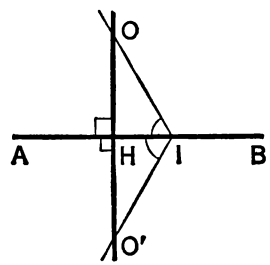


Fig. 32.

27. Théorème. — *Par un point on peut mener une perpendiculaire à une droite et on ne peut en mener qu'une.*

1er Cas. — ***Le point** O **est sur la droite** AB.* Menons la bissectrice de l'angle plat AOB (fig. 31) et prolongeons-la jusqu'en D. La droite CD est perpendiculaire en O à AB. Toute autre droite C′D′ passant par O et distincte

de CD ne peut être perpendiculaire à AB, car les deux angles AOC′ et BOC′ sont l'un aigu et l'autre obtus. La perpendiculaire est donc unique.

2e Cas. — ***Le point O est en dehors de la droite*** AB. Rabattons l'un sur l'autre les deux demi-plans limités par AB et désignons par O′ le point qui coïncide avec O (fig. 32). Joignons OO′ et soit H le point d'intersection avec AB. Les deux angles AHO et AHO′ sont égaux car ils coïncident dans le rabattement précédent. Comme ils sont supplémentaires, chacun d'eux est droit et OO′ est perpendiculaire à AB. Toute autre demi-droite telle que OI, coïncide avec O′I dans le rabattement. Les deux angles AIO et AIO′ sont encore égaux, mais comme les trois points O, I et O′ ne sont pas en ligne droite aucun d'eux n'est droit. La droite OO′ est donc la seule droite passant par O et perpendiculaire à AB.

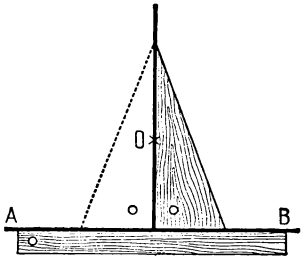


Fig. 33.

Le tracé des perpendiculaires peut se faire à l'aide de *l'équerre* (fig. 33) : Placer la règle suivant la droite AB, puis un des côtés de l'angle droit de l'équerre contre la règle et faire glisser l'équerre jusqu'à ce que l'autre côté passe par O. On peut alors tracer la perpendiculaire.

28. Théorème. — *Les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont perpendiculaires.*

Soient OM et ON les bissectrices des angles supplémentaires AOB et BOC (fig. 34). Ces deux angles ont pour somme deux droits. Leurs moitiés MOB et BON ont pour somme un droit. L'angle MON étant droit OM et ON sont perpendiculaires.

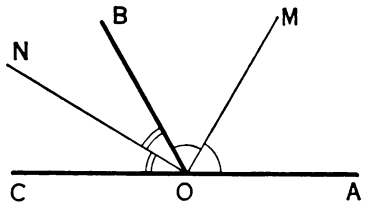


Fig. 34.

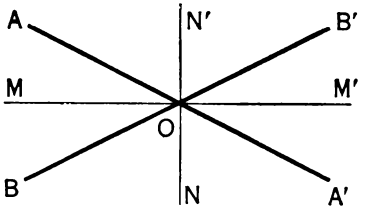


Fig. 35.

29. Corollaire. — *Les quatre bissectrices des angles déterminés par deux droites qui se coupent forment deux droites perpendiculaires.*

Soient AA′ et BB′ les deux droites et OM, ON, OM′ et ON′ les bissectrices des angles AOB, BOA′, A′OB′ et B′OA (fig. 35).

D'après le théorème précédent, les angles MON, NOM′, M′ON′ et N′OM sont droits. Les bissectrices OM et OM′ des deux angles opposés par le som-

met AOB et A'OB' sont donc dans le prolongement l'une de l'autre et il en est de même pour ON et ON'. Les deux droites MM' et NN' formant quatre angles droits en O sont perpendiculaires.

30. Médiatrice d'un segment. — ***On appelle médiatrice d'un segment, la perpendiculaire au segment en son milieu.***

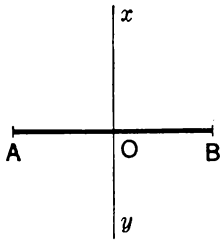


Fig. 36.

Ainsi (fig. 36) la droite *xy* perpendiculaire au segment AB en son milieu O est la médiatrice du segment AB.

31. Distance d'un point à une droite. — ***On appelle distance d'un point à une droite la longueur du segment de perpendiculaire à la droite compris entre ce point et la droite.***

Ainsi (fig. 32) la longueur OH est la distance du point O à la droite AB.

Le point H se nomme le *pied de la perpendiculaire* ou encore la *projection orthogonale du point* O *sur la droite* AB. Tout segment tel que OI joignant le point O à un point de AB distinct du point H est appelé *oblique*.

CERCLE

32. Définition. — ***Un cercle est une courbe plane fermée dont tous les points sont à même distance d'un point fixe appelé centre.***

On obtient un cercle en faisant tourner dans un plan un segment donné OM dont l'extrémité O est fixe. La ligne décrite par le point M est un cercle de centre O.

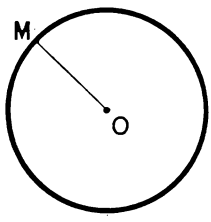


Fig. 37.

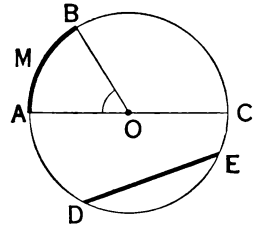


Fig. 38.

On appelle ***rayon*** tout segment de droite tel que OM joignant le centre O à un point quelconque du cercle (fig. 37). D'après la définition *tous les rayons d'un même cercle sont égaux*. On désigne un cercle par son centre, suivi s'il en est besoin de l'indication de son rayon : *cercle* O ou *cercle* O (OM).

Le compas est un instrument qui permet de tracer dans un plan un cercle de centre donné et de rayon donné.

Un arc de cercle est une portion de cercle limitée par deux points. Les deux points A et B limitent sur le cercle deux arcs AMB et ACB (fig. 38). On écrit :

$$\overset{\frown}{AMB} \quad \text{et} \quad \overset{\frown}{ACB}.$$

Sauf indication contraire la notation $\overset{\frown}{AB}$ désigne l'arc situé à l'intérieur de l'angle saillant AOB.

Une corde est un segment de droite joignant deux points du cercle. On dit que la corde DE *sous-tend* l'arc DE qui a mêmes extrémités.

Un diamètre est une corde qui passe par le centre du cercle. Sa longueur est donc le double d'un rayon : *Tous les diamètres d'un cercle sont égaux.*

Un angle au centre est un angle qui a pour sommet le centre du cercle. On dit que l'angle au centre AOB intercepte l'arc AB compris entre ses côtés.

33. Régions du plan limitées par le cercle. — Le cercle de centre O et de rayon R partage le plan en deux régions. Celle qui contient le centre est la *région intérieure* et l'autre est la *région extérieure* (fig. 39). Désignons par d la distance d'un point du plan au centre O du cercle.

Tout point A du cercle est tel que $d = R$.

Tout point intérieur M est situé sur un rayon. Sa distance au centre est donc inférieure au rayon : $d < R$.

Tout point extérieur P est situé sur le prolongement d'un rayon. Sa distance au centre est donc supérieure au rayon : $d > R$.

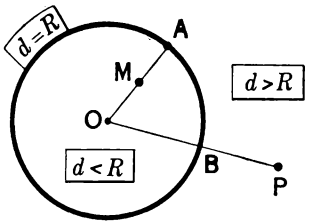


Fig. 39.

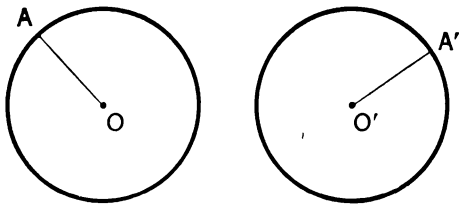


Fig. 40.

Réciproquement tout point M du plan tel que par exemple $d = R$ ne peut être ni intérieur ni extérieur. C'est donc un point du cercle. Il en résulte que :

$$d = R \iff M \text{ est sur le cercle (O, R).}$$

$$d < R \iff M \text{ est intérieur au cercle;}$$
$$d > R \iff M \text{ est extérieur au cercle.}$$

34. Cercles égaux. — Deux cercles égaux O et O′ se superposent lorsqu'on fait coïncider leurs centres. Les rayons de ces deux cercles sont égaux. Réciproquement :

Deux cercles de même rayon sont égaux.

Amenons le point O′ en O (fig. 40). Tout point A′ du second cercle O′ vient coïncider avec un point du cercle O. Les deux cercles se superposent, ils sont donc égaux.

D'autre part nous pouvons, en maintenant le point O′ en O, faire coïncider le point A′ successivement avec tous les points du cercle O, sans que les deux cercles cessent de coïncider. Autrement dit :

Un cercle peut glisser sur lui-même.

EXERCICES

1. M est le milieu du segment AB et O un point quelconque de la droite AB.

1° Si O est extérieur au segment AB montrer que OM est égal à la demi-somme de OA et OB.

2° Si O est entre A et B montrer que OM est égal à la demi-différence de OA et OB.

2. 1° On donne 5 points d'un plan tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés. Combien de droites distinctes obtient-on en joignant ces points deux à deux de toutes les façons possibles?

2° Généraliser avec n points tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés.

3. 1° On donne 4 droites telles que deux d'entre elles soient concourantes et que trois d'entre elles ne soient pas concourantes. Quel est le nombre des points d'intersection de ces droites prises deux à deux de toutes les façons possibles?

2° Même question avec 5 droites, en général avec n droites.

4. Soient quatre points A, B, C, D situés dans cet ordre sur une droite.

1° On désigne par M, N, P, Q les milieux respectifs de AB, BC, CD et DA. Montrer que les segments MP et NQ ont même milieu O.

2° On désigne par R et S les milieux de AC et BD. Montrer que RS a aussi O pour milieu.

5. Soient trois points d'une droite O, A et B placés dans cet ordre.

1° Trouver entre A et B un point M tel que $MA = \frac{3}{4} MB$.

2° Démontrer la relation $OM = \frac{4\,OA + 3\,OB}{7}$.

6. Soient trois demi-droites Ox, Oy, Oz et la bissectrice Ou de l'angle yOz.

1° Si Ox est extérieure à l'angle yOz montrer que l'angle xOu est la demi-somme des angles xOy et xOz.

2° Si Ox est intérieur à yOz, montrer que xOu est la demi-différence des angles xOy et xOz.

7. 1° Deux angles adjacents ont pour mesure a et b en degrés. Évaluer l'angle de leurs bissectrices. Comment faut-il choisir a et b pour que cet angle soit droit?

2° Trois angles consécutifs de même sommet ont pour mesure a, b, c en degrés. Évaluer les angles formés par leurs bissectrices.

8. On considère deux angles opposés par le sommet et on trace dans chacun d'eux les deux demi-droites qui partagent cet angle en trois angles égaux (trisectrices de l'angle). Montrer que chaque trisectrice de l'un est dans le prolongement d'une trisectrice de l'autre.

9. On construit un angle aigu AOB, puis les deux angles égaux AOC et BOD adjacents à l'angle AOB.

1° Montrer que les angles AOB et COD ont même bissectrice OM.

2° On mène les bissectrices ON et OP des angles AOC et BOD. Comparer les angles NOP et AOD. A quelle condition NOP est-il droit? Les points O, P et N peuvent-ils être alignés?

10. On construit des angles égaux à 75° successivement adjacents : $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, etc. Retombera-t-on finalement sur un côté déjà tracé? Combien d'angles aura-t-on construit lorsque l'on retombera sur OA?

11. Un cercle variable de centre M, de rayon R donné passe par un point donné A. Quelle figure décrit son centre?

12. Construire un cercle de rayon donné R passant par deux points donné A et B.

13. Construire un cercle de rayon donné R, centré sur une droite donnée D et passant par un point donné A.

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UNE DROITE

35. Définition. — ***Deux points*** M ***et*** M′ ***sont symétriques par rapport à une droite*** *xy* ***lorsque la droite*** *xy* ***est la médiatrice du segment*** MM′.

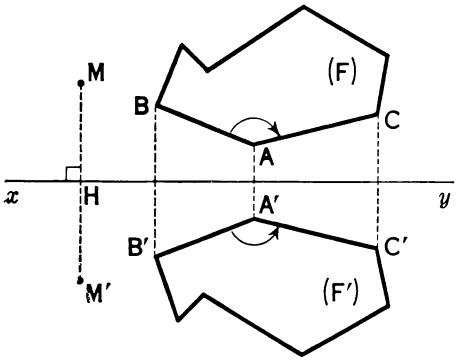


Fig. 41.

Pour construire le symétrique M′ d'un point M par rapport à *xy*, il suffit de mener MH perpendiculaire à *xy* et de prolonger MH d'un segment égal HM′ (fig. 41).

Rabattons le demi-plan I, autour de *xy* comme charnière, sur le demi-plan II. Le segment HM prend la direction de HM′ et, comme HM = HM′, le point M′ vient en M. Donc :

Deux points symétriques par rapport à une droite coïncident si on rabat l'un sur l'autre les demi-plans limités par cette droite.

En construisant les symétriques de tous les points d'une figure F par rapport à une même droite *xy*, on obtient une *figure* F′ *appelée symétrique de la figure* F, par rapport à la droite *xy* (fig. 41).

36. Théorème. — ***Deux figures symétriques par rapport à une droite sont inversement égales.***

En effet, si on rabat l'un sur l'autre les deux demi-plans limités par cette droite chaque point de la figure F coïncide avec son symétrique de la figure F′. Les deux figures se superposent après retournement de l'une d'elles. Elles sont donc inversement égales (n° 6).

Ainsi, le symétrique d'un segment AB est un segment égal A′B′, le symétrique d'un angle BAC est un angle B′A′C′ égal mais de sens contraire, le symétrique d'un cercle est un cercle égal, etc.

37. Axe de symétrie d'une figure. — *On dit qu'une droite est un axe de symétrie d'une figure lorsqu'elle partage cette figure en deux parties symétriques par rapport à cette droite.*

EXEMPLES. — 1° La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie du segment (fig. 42).

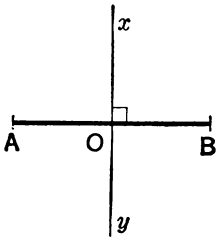


Fig. 42.

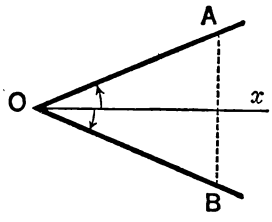


Fig. 43.

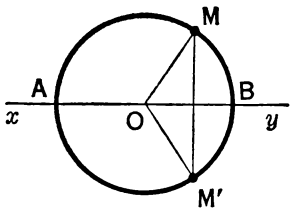


Fig. 44.

2° La bissectrice d'un angle est un axe de symétrie de cet angle (fig. 43).

3° Tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie de ce cercle. En effet, en rabattant le demi-cercle AMB (fig. 44) autour de AB comme charnière, tout point de ce demi-cercle reste à une distance du centre égale au rayon et vient coïncider avec un point du demi-cercle AM'B.

4° Certaines lettres de l'alphabet (A, B) ont un axe de symétrie. D'autres, comme la lettre H, en ont deux.

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN POINT

38. Définition. — ***Deux points*** M ***et*** M' ***sont symétriques par rapport à un point*** O ***lorsque le point*** O ***est le milieu du segment*** MM'.

Le point O est appelé *centre de symétrie.*

Pour construire le symétrique M' d'un point M par rapport au point O, il suffit de joindre MO et de le prolonger d'un segment égal OM' (fig. 45).

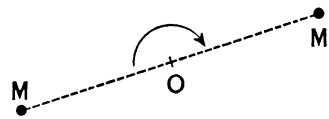


Fig. 45.

Lorsque l'on construit les symétriques de tous les points d'une figure (F) par rapport au même centre O, on obtient *une figure* F' *symétrique de la figure* F *par rapport au point* O.

Remarquons que le point O est lui-même son propre symétrique.

39. Théorème. — ***Deux figures symétriques l'une de l'autre par rapport à un point sont directement égales.***

Soient (fig. 46) deux points A et B de la figure (F) et leurs symétriques A' et B' de la figure (F'). Calquons la figure (F) et le point O sur un transparent et faisons tourner le calque de deux droits autour du point O de façon à amener par glissement le segment OA sur le segment égal OA'.

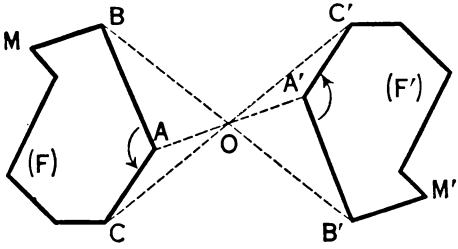


Fig. 46.

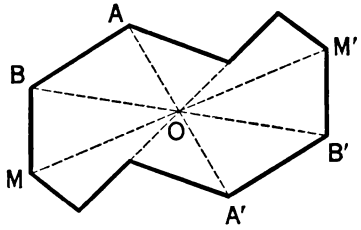


Fig. 47.

Les angles égaux AOB et A'OB', primitivement opposés par le sommet, coïncident. Et comme OB = OB' le point B coïncide avec son symétrique B'. De même tout autre point M de la figure (F) coïncide avec son symétrique M' dans la figure (F'). Ces deux figures se superposent par glissement; elles sont donc directement égales (n° 6).

EXEMPLES. — La figure symétrique d'un segment AB est un segment égal A'B' (fig. 46), la figure symétrique d'un angle BAC est un angle égal B'A'C', la figure symétrique d'un cercle est un cercle égal.

40. Centre de symétrie d'une figure. — Lorsqu'une figure coïncide avec sa symétrique par rapport à un point donné, on dit que ce point est *un centre de symétrie de la figure* (fig. 47).

EXEMPLES. — 1° Le milieu d'un segment est un centre de symétrie de ce segment.

2° Le centre d'un cercle est un centre de symétrie pour ce cercle.

3° Certaines lettres de l'alphabet ont un centre de symétrie (N, S, Z).

De même certains objets tels que cartes à jouer ou dominos ont un centre de symétrie. Il est alors impossible de savoir si l'un de ces objets a été retourné bout pour bout.

POLYGONES. TRIANGLES

41. Polygone. — ***On appelle polygone toute ligne brisée fermée.***

Les points A, B, C, D, E sont les *sommets* du polygone ABCDE (fig. 48). Les segments tels que AB sont les *côtés* du polygone et les angles tels que $\widehat{ABC}$ sont les angles du polygone.

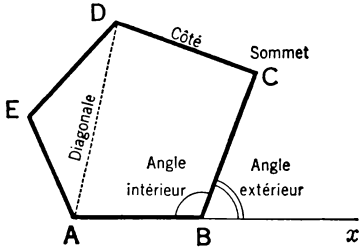


Fig. 48.

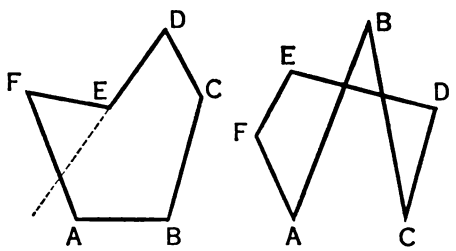


Fig. 49.

Un segment tel que AD qui joint deux sommets non consécutifs est appelé *diagonale*. Le *périmètre* d'un polygone est la longueur de la somme de ses côtés. Un polygone est dit *convexe* s'il est tout entier situé d'un seul côté de la droite qui porte l'un quelconque de ses côtés. Il est *concave* dans le cas contraire (fig. 49).

Dans le polygone convexe ABCDE (fig. 48) l'angle saillant ABC se nomme *angle intérieur*. Le supplément CB*x* de cet angle se nomme *angle extérieur*.

42. Classification des polygones. — On désigne un polygone suivant le nombre de ses côtés. Les principaux polygones sont : *Le triangle* (3 côtés),

Le quadrilatère	(4 côtés),	*le pentagone*	(5 côtés)
L'hexagone	(6 côtés),	*l'octogone*	(8 côtés)
Le décagone	(10 côtés),	*le dodécagone*	(12 côtés).

43. Triangle. — Un triangle ABC (fig. 50) est toujours convexe. Il possède 3 sommets, 3 côtés et 3 angles. Les côtés et les angles sont les *six éléments* du triangle. Le côté BC est dit *opposé* à l'angle A et adjacent à chacun des angles B et C.

Un triangle est *isocèle* s'il a deux côtés égaux, *équilatéral* si ses trois côtés sont égaux et *rectangle* s'il a un angle droit.

On appelle *hauteur* la perpendiculaire menée d'un sommet sur le côté opposé.

On appelle *médiane* le segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé.

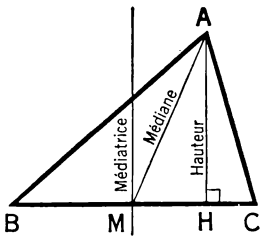


Fig. 50.

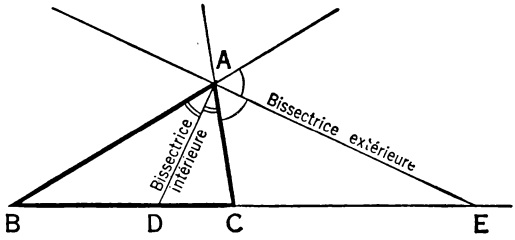


Fig. 51.

Une *médiatrice* est la médiatrice de l'un des côtés.

Une *bissectrice intérieure* est bissectrice de l'un des angles intérieurs et une *bissectrice extérieure* est bissectrice d'un angle extérieur (fig. 51).

La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure relatives à un même sommet sont perpendiculaires (n° 28).

TRIANGLE ISOCÈLE

44. Définition. — ***Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux.***

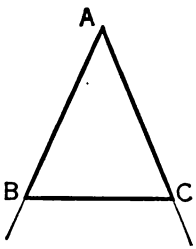


Fig. 52.

En portant, sur les côtés d'un angle A deux segments égaux AB et AC on obtient un triangle isocèle (fig. 52).

Le côté BC est appelé *base* du triangle isocèle et le sommet opposé A est le sommet principal ou simplement le *sommet du triangle isocèle.*

45. Théorème. — ***Dans tout triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.***

Soit le triangle isocèle ABC (fig. 52). Retournons l'angle BAC sur lui-même. Le côté AB vient coïncider avec son égal AC, et le point B vient en C. De même le point C vient en B. L'angle ABC coïncide donc avec l'angle ACB. Ainsi ces deux angles sont égaux.

46. Réciproque. — ***Lorsqu'un triangle a deux angles égaux, il est isocèle.***

Soit un triangle ABC dans lequel $\widehat{B} = \widehat{C}$ (fig. 53). Calquons le triangle et retournons le calque A'B'C'. Nous pouvons amener B' en C et C' en B. L'angle B' étant égal à l'angle C, le côté B'A' prend la direction de AC. De même le côté C'A' prend la direction de BA. Le point A' vient donc à l'intersection de BA et CA, c'est-à-dire en A. A'B' calque de AB coïncide avec AC, ce qui démontre que AB = AC.

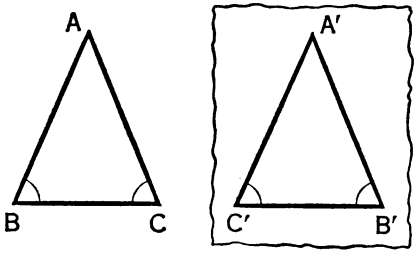


Fig. 53.

47. Propriété caractéristique d'une figure. — Pour montrer qu'un triangle est isocèle, on peut donc indifféremment démontrer :

1° Que ce triangle a deux côtés égaux.

2° Que ce triangle a deux angles égaux.

L'égalité de deux angles permet, aussi bien que l'égalité de deux côtés, de caractériser un triangle isocèle. C'est pourquoi on dit :

L'égalité de deux angles est une propriété caractéristique du triangle isocèle.

En général, on appelle *propriété caractéristique d'une figure*, toute propriété qui équivaut à la définition de cette figure.

48. Théorème. — ***Dans tout triangle isocèle la bissectrice de l'angle au sommet est en même temps hauteur, médiane, médiatrice et axe de symétrie du triangle.***

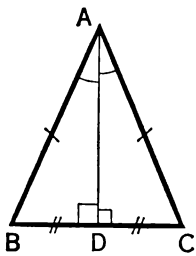


Fig. 54.

Soit AD la bissectrice de l'angle au sommet A du triangle isocèle ABC (fig. 54). Rabattons, autour de AD comme charnière, le triangle ACD sur le triangle ABD. L'angle DAC vient coïncider avec son égal DAB et comme AC = AB le point C vient en B. Les triangles ACD et ABD coïncident.

On en déduit :

1° $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. On retrouve la propriété des angles à la base.

2° BD = DC donc AD est *médiane*.

3° $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 1^D$ car ces deux angles sont à la fois égaux et supplémentaires. AD est donc *hauteur* et *médiatrice*.

4° La droite AD est par suite (n° 37) un *axe de symétrie* du triangle ABC. On peut donc en conclure :

Dans tout triangle isocèle la médiatrice de la base passe par le sommet.

49. Triangle équilatéral. — ***Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés égaux.***

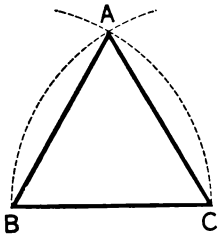


Fig. 55.

On obtient un triangle équilatéral ABC (fig. 55) en prenant le point A à l'intersection des cercles de centres B et C et de rayon BC.

Ce triangle peut être considéré de trois façon différentes comme un triangle isocèle :

Un triangle équilatéral a ses trois angles égaux et réciproquement un triangle qui a ses trois angles égaux est équilatéral.

L'égalité des trois angles est donc une propriété caractéristique du triangle équilatéral.

50. Théorème. — ***Pour qu'un point soit équidistant des extrémités d'un segment, il faut et il suffit qu'il appartienne à la médiatrice de ce segment.***

1° Soit un point M équidistant des points A et B (fig. 56). Le triangle MAB est isocèle car MA = MB. La médiatrice du côté AB passe par le sommet M (n° 48).

2° Si le point M appartient à la médiatrice *xy* du segment AB, les segments MA et MB, symétriques par rapport à la droite *xy* sont égaux. Ainsi :

MA = MB $\Longleftrightarrow$ M sur *xy*, médiatrice de AB.

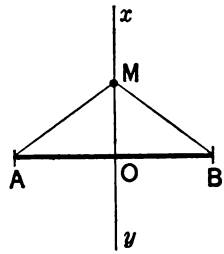


Fig. 56.

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES FONDAMENTALES

51. Définition. — On donne le nom de construction géométrique à toute construction effectuée à l'aide de deux seuls instruments, la règle et le compas.

52. Construire la médiatrice d'un segment. — Soit à construire la médiatrice du segment AB (fig. 57). Il suffit d'en déterminer deux points, donc (n° 50) deux points équidistants de A et de B.

Traçons de A et de B comme centres, deux cercles de même rayon se coupant en M et N. La droite MN est la médiatrice cherchée.

Nous démontrerons que les points M et N existent pourvu que le rayon commun des deux cercles soit supérieur à la moitié de AB. Cette construction permet également de construire le milieu O de AB et de partager un segment en deux segments égaux.

53. Construire par un point d'une droite la perpendiculaire à cette droite. — Soit à mener au point O la perpendiculaire à la droite *xy* (fig. 58). Traçons un cercle de centre O, coupant *xy* en A et B. La perpendiculaire cherchée est la médiatrice de AB (car OA = OB). Il suffit d'en construire comme précédemment un second point M distinct de O et de joindre OM.

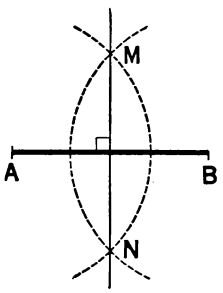


Fig. 57.

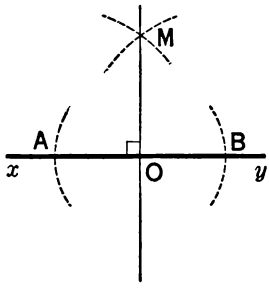


Fig. 58.

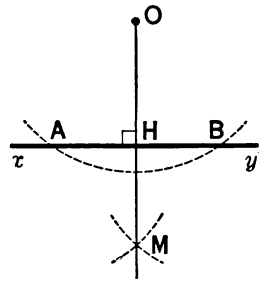


Fig. 59.

54. Construire par un point situé hors d'une droite la perpendiculaire à cette droite. — Soit à mener par le point O la perpendiculaire à *xy* (fig. 59). Traçons un cercle de centre O et dont le rayon soit supérieur à la distance de O à *xy*. Nous démontrerons que ce cercle coupe *xy* en deux points A et B.

Le triangle OAB est isocèle. La perpendiculaire cherchée est la hauteur issue de O du triangle OAB et par suite la médiatrice de AB. Il suffit d'en construire un deuxième point M distinct de O et de joindre OM.

55. Construire la bissectrice d'un angle. — Soit à mener la bissectrice de l'angle *x*O*y* (fig. 60). Traçons un cercle de centre O coupant O*x* en A et O*y* en B. Le triangle OAB est isocèle. La bissectrice de l'angle au sommet est la médiatrice de AB (n° 48). Il suffit donc d'en construire un deuxième point M, distinct de O et de joindre OM.

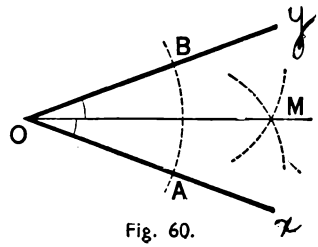


Fig. 60.

EXERCICES

14. Soit un point A hors de la droite xy et le point A' symétrique du point A par rapport à x y.

1° Montrer que tout cercle dont le centre est sur xy et qui passe par A passe aussi par A'.

2° En déduire une construction du point A' et de la perpendiculaire AH menée de A à xy.

15. On considère deux points fixes A et B et une droite variable D passant par B. Soit A' le symétrique de A par rapport à D. Quelle figure décrit A' lorsque D tourne autour de B?

16. On considère deux droites concourantes Ox, Oy, un point A sur la première, un point B sur la seconde.

1° Montrer que la symétrique de la droite Ox par rapport au milieu I de AB passe B.

2° Soient deux droites fixes Ox, Oy et un point I. Construire un segment de droite AB, de milieu I, tel que A soit sur Ox et B sur Oy.

17. Deux droites D et D' sont perpendiculaires et se coupent en O. On construit le symétrique M' d'un point M quelconque par rapport à D, puis le symétrique M'' de M par rapport à D'.

1° Que peut-on dire des 3 points M, O et M''?

2° Montrer que si une figure admet deux axes de symétrie perpendiculaires elle admet aussi un centre de symétrie.

18. Deux droites perpendiculaires D et D' se coupent en O. Soit M' le symétrique d'un point M par rapport à D et M'' le symétrique de M' par rapport à D'.

1° Comparer les segments OM et OM''. Évaluer leur angle.

2° On construit la symétrique F' d'une figure F par rapport à D, puis la symétrique F'' de F' par rapport à D'. Les deux figures F et F'' sont-elles égales, directement ou inversement? Par quel déplacement peut-on passer de l'une à l'autre?

19. On considère un angle xOy. Un cercle de centre O coupe ses côtés respectivement en A et B. Un second cercle de centre O coupe ses côtés respectivement en C et D.

1° Montrer que AD et BC se coupent sur l'axe de symétrie commun aux deux triangles OAB et OCD.

2° En déduire une construction de la bissectrice d'un angle.

20. 1° A quelle figure appartiennent les centres des cercles qui passent par deux points donnés A et B?

2° Construire un triangle isocèle de base AB (A et B donnés) sachant que son sommet O appartient à une droite donnée D.

21. En utilisant les propriétés de la symétrie, montrer qu'un triangle isocèle a deux médianes égales et deux bissectrices égales. Étudier le cas du triangle équilatéral.

22. 1° Montrer que si un triangle admet un axe de symétrie, ce dernier passe par un des sommets du triangle.

2° Un triangle peut-il avoir deux axes de symétrie, un centre de symétrie?

23. Deux segments AB et CD ont même médiatrice xy. Démontrer que les médiatrices de AC, de BD et la droite xy sont concourantes.

24. Soit un triangle isocèle ABC (AB = AC). On construit deux segments égaux BD = CE de façon que les angles ABD et ACE soient égaux et de sens contraires.

1° Montrer que AD = AE.

2° Montrer que les droites BD et CE se coupent sur la bissectrice de l'angle BAC.

25. On donne deux segments AB et CD. Construire un point O de façon que les triangles OAB et OCD soient isocèles de sommet O.

Donné un angle xOy et un point P. Construire un triangle isocèle OAB de sommet O, sachant que A est sur Ox, B sur Oy et que AB passe par P.

27. Démontrer qu'un triangle BAC est isocèle dans chacun des cas suivants :

1° La hauteur AH est en même temps bissectrice de l'angle A.

2° La médiane AM est en même temps hauteur.

3° La médiane AM est en même temps bissectrice de l'angle A. (Prolonger AM d'une longueur égale MD et montrer d'abord que le triangle ACD est isocèle.)

28. Soit un angle xOy et un point M. On désigne par M′ et M″ les symétriques de M par rapport à Ox et à Oy.

1° Montrer que la médiatrice de M′M″ passe par O.

2° Montrer que cette médiatrice est symétrique de OM par rapport à la bissectrice de xOy.

ÉGALITÉ DES TRIANGLES

56. Triangles égaux. — ***Deux triangles sont égaux lorsqu'ils sont superposables.***

Leurs éléments (angles et côtés) sont alors deux à deux égaux.

Les cas d'égalité des triangles sont des conditions suffisantes pour que deux triangles soient égaux.

ÉGALITÉ DES TRIANGLES QUELCONQUES

57. 1er cas. — ***Lorsque deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, ils sont égaux.***

Soient les triangles ABC et A'B'C' (fig. 61) tels que, par hypothèse :

$$BC = B'C' \quad \widehat{B} = \widehat{B'} \quad \text{et} \quad \widehat{C} = \widehat{C'}.$$

Transportons le triangle A'B'C', et faisons coïncider B'C' avec son égal BC en amenant B' en B, C' en C et de façon que A' se place du même côté de BC que le point A. L'angle B' étant égal à l'angle B la demi-droite B'x' coïncide alors avec Bx. De même l'angle C' étant égal à l'angle C, C'y' coïncide avec Cy. Le point A' se place à la fois sur Bx et Cy soit au point A. Les deux triangles coïncident et sont donc égaux.

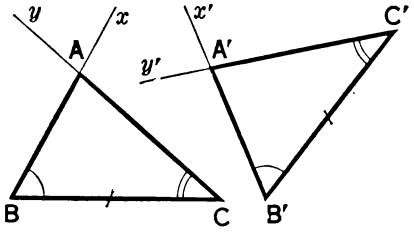


Fig. 61.

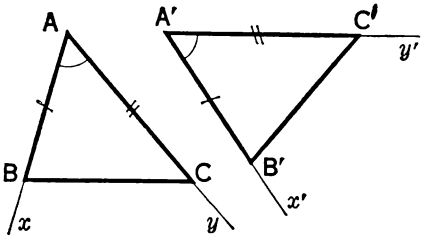


Fig. 62.

58. 2e Cas. — ***Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, ils sont égaux.***

Soient les triangles ABC et A'B'C' (fig. 62) tels que

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad AB = A'B' \quad \text{et} \quad AC = A'C'.$$

raisons coïncider l'angle $x'A'y'$ avec son égal xAy en amenant $A'x'$ sur Ax et $A'y'$ sur Ay. Comme $A'B' = AB$ le point B' vient en B et comme $A'C' = AC$ le point C' vient en C. Les deux triangles coïncident et sont donc égaux.

59. 3e Cas. — *Lorsque deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, ils sont égaux.*

Soient les triangles ABC et A'B'C' (fig. 63) tels que :

$BC = B'C' \qquad CA = C'A'$
et $\quad AB = A'B'$.

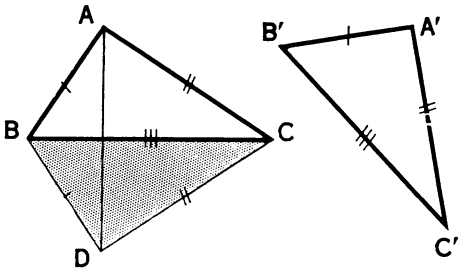


Fig. 63.

Transportons le triangle A'B'C' en amenant B' en B, C' en C, de façon que A' se place en D, du côté opposé au point A par rapport à BC. Les points B et C sont alors équidistants de A et D et se trouvent sur la médiatrice de AD. Cette médiatrice est donc la droite BC. Les triangles BDC et ABC symétriques par rapport à BC sont égaux. Il en est de même des triangles primitifs A'B'C' et ABC.

ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES

60. Définition. — *Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle hypoténuse.*

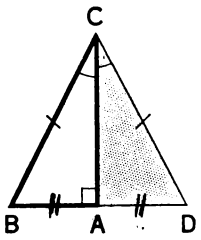


Fig. 64.

Prolongeons le côté BA du triangle rectangle ABC d'une longueur AD égale à BA (fig. 64). Le côté CA est la médiatrice de BD et par suite CB = CD et le triangle BCD est isocèle. On peut donc toujours considérer un triangle rectangle comme la moitié d'un triangle isocèle.

La droite CA médiatrice de BD, est en même temps la bissectrice de l'angle BCD. Par suite l'angle BCA est la moitié de l'angle saillant BCD. Ce dernier étant inférieur à 2^D, sa moitié BCA est inférieure à 1^D. C'est donc un angle aigu :

61. Théorème. — *Dans tout triangle rectangle les angles autres que l'angle droit sont des angles aigus.*

Il en résulte que *les angles égaux d'un triangle isocèle sont des angles aigus* car la hauteur d'un triangle isocèle partage ce triangle en deux triangles rectangles égaux (n° 48).

62. 1er Cas d'égalité des triangles rectangles.

Lorsque deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, ils sont égaux.

Soient ABC et A'B'C' deux triangles rectangles tels que BC = B'C' et $\widehat{C} = \widehat{C'}$ (fig. 65). Complétons les triangles isocèles BCD et B'C'D', comme précédemment. Ces triangles ont :

$$BC = B'C' = CD = C'D' \quad \text{et} \quad \widehat{BCD} = \widehat{B'C'D'}.$$

Ils sont donc égaux d'après le 2e cas d'égalité des triangles quelconques et leur superposition entraîne celles des triangles ABC et A'B'C'.

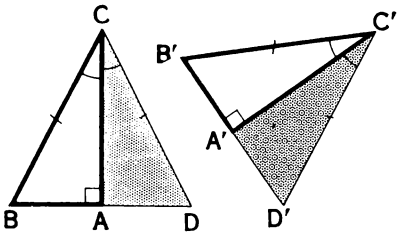


Fig. 65.

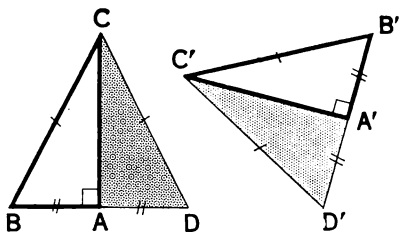


Fig. 66.

63. 2e Cas d'égalité des triangles rectangles.

Lorsque deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, ils sont égaux.

Soient ABC et A'B'C' deux triangles rectangles tels que BC = B'C' et AB = A'B' (fig. 66). Complétons les triangles isocèles BCD et B'C'D'. Ces triangles ont :

$$BC = B'C' = CD = C'D' \quad \text{et} \quad BD = B'D'.$$

Ils sont donc égaux d'après le 3e cas d'égalité des triangles quelconques et leur superposition entraîne celle des triangles ABC et A'B'C'.

APPLICATIONS

64. Importance des cas d'égalités des triangles.

1° ***Les cas d'égalité des triangles permettent de démontrer l'égalité de deux triangles sans en vérifier la superposition.***

2° Les cas d'égalité utilisent comme hypothèse l'*égalité de trois éléments* (dont au moins un côté). Ils permettent de conclure à l'*égalité des trois autres éléments* des deux triangles :

A deux angles égaux sont opposés deux côtés égaux et à deux côtés égaux sont opposés deux angles égaux.

3° Ainsi pour démontrer l'égalité de deux angles ou de deux segments, il suffit de trouver deux triangles dont ces angles ou ces segments soient des éléments et de démontrer l'égalité de ces triangles.

REMARQUE. — *Lorsque deux triangles sont égaux, il faut énoncer dans le même ordre les sommets correspondants.* Ces sommets sont dits homologues.

Si les triangles ABC et DEF sont égaux, il est commode d'écrire $\begin{cases} ABC \\ DEF \end{cases}$.

Les angles et les côtés égaux se correspondent ainsi verticalement :

$$\widehat{A} = \widehat{D} \qquad \widehat{B} = \widehat{E} \qquad \widehat{C} = \widehat{F}$$
$$BC = EF \qquad CA = FD \qquad AB = DE.$$

65. Bissectrice d'un angle. — *Pour qu'un point soit situé sur la bissectrice d'un angle il faut et il suffit que ce point soit équidistant des deux côtés de cet angle.*

Soient un angle xOy et un point M situé à l'intérieur de cet angle (fig. 67).

1° Supposons le point M sur la bissectrice de xOy. Les deux triangles rectangles MOA et MOB ont l'hypoténuse MO commune et les angles aigus en O égaux. Ils sont donc égaux (1er cas d'égalité des triangles rectangles). Il en résulte que MA = MB et le point M est équidistant des deux côtés de l'angle.

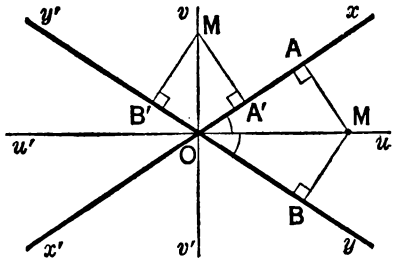


Fig. 67.

2° Supposons que le point M soit équidistant de Ox et Oy. Les deux triangles rectangles MOA et MOB ont l'hypoténuse commune et par hypothèse MA = MB. Ils sont donc égaux (2e cas d'égalité des triangles rectangles). Il en résulte que les angles en O sont égaux. M est donc sur la bissectrice de l'angle xOy.

Les bissectrices des angles déterminés par les droites concourantes $x'x$ et $y'y$ (fig. 67) forment deux droites perpendiculaires (n° 29). Pour qu'un point M soit équidistant des droites $x'x$ et $y'y$, il faut et il suffit qu'il soit situé sur l'une de ces bissectrices, donc sur l'une ou l'autre des droites perpendiculaires $u'u$ et $v'v$.

66. Construction d'un angle égal à un angle donné. — Soit à construire un angle $x'O\hat{y}'$ égal à un angle donné xOy (fig. 68). Donnons-nous le premier côté $O'x'$ et traçons un arc de cercle de centre O coupant Ox en A et Oy en B, puis avec le même rayon un arc de centre O′ coupant $O'x'$ en A′. Avec un rayon égal à AB, traçons un arc de cercle de centre A′ coupant l'arc de centre O′ au point B′. Les deux triangles AOB et A′O′B′ ont :

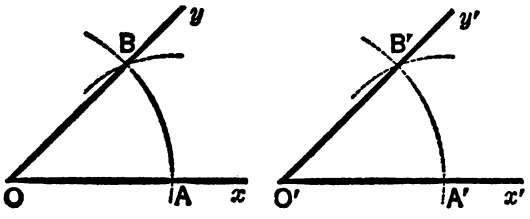


Fig. 68.

$$OA = O'A' = OB = O'B' \quad \text{et} \quad AB = A'B'$$

Ils sont égaux (3e cas) et les angles AOB et A′O′B′ sont égaux.

INÉGALITÉS DANS LE TRIANGLE

67. Théorème préliminaire. — ***Dans tout triangle un côté opposé à un angle droit ou obtus est supérieur à chacun des deux autres côtés du triangle.***

Considérons un triangle ABC (fig. 69) dans lequel, $A \geqslant 1^D$ et soit Cx le prolongement du côté BC. Portons, sur la demi-droite Bx, une longueur BD = BA.

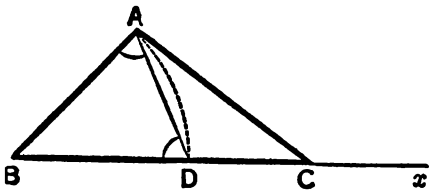


Fig. 69.

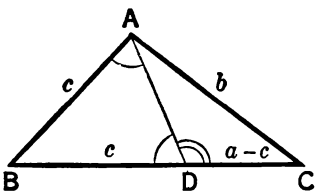


Fig. 70.

Le triangle BAD est un triangle isocèle de base AD dont l'angle à la base BAD est aigu. Donc : $\widehat{BAD} < \widehat{BAC}$. La droite AD est intérieure à l'angle BAC et par suite BC > BD. Donc BC > BA. On démontrerait de même que BC est supérieur à CA.

68. Théorème. — ***Dans tout triangle un côté quelconque est inférieur à la somme des deux autres.***

Supposons que dans le triangle ABC (fig. 70) les côtés BC = a, CA = b et AB = c soient tels que : $a > b > c$.

Soit D le point du côté BC tel que BD = BA = c. On obtient :

$$DC = BC - BD = a - c.$$

Le triangle BAD étant isocèle, l'angle à la base ADB est aigu et son supplément ADC est obtus. Dans le triangle ADC, on obtient, d'après le théorème précédent : DC < AC, c'est-à-dire $a - c < b$ ou :

$$\boxed{a < b + c}.$$

Le théorème est évident pour les côtés b et c car :

$$b < a \quad \text{et} \quad c < a \Longrightarrow b < a + c \quad \text{et} \quad c < a + b.$$

69. Corollaire. — ***Dans tout triangle un côté quelconque est supérieur à la différence des deux autres.***

Supposons que l'on ait : $a > b > c$. En retranchant c aux deux membres de l'inégalité : $a + c > b$, on obtient :

$$\boxed{a > b - c}.$$

De même, en retranchant c ou b aux deux membres de l'inégalité $b + c > a$, nous obtenons : $b > a - c$ et $c > a - b$. En définitive :

70. Résumé. — ***Dans tout triangle un côté quelconque est compris entre la somme et la différence des deux autres.***

$$\boxed{b - c < a < b + c}.$$

71. Théorème. — ***Lorsqu'un triangle a deux angles inégaux, les côtés opposés à ces angles sont inégaux et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.***

Soit un triangle ABC (fig. 71) dans lequel on a par hypothèse :

$$\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}.$$

Construisons, à l'intérieur de l'angle BAC, un angle BAx égal à l'angle ABC, ce qui est possible d'après l'hypothèse. La demi-droite Ax coupe le côté BC en D. Le triangle DAB ayant deux angles égaux est isocèle et DA = DB. Or dans le triangle ACD, nous avons (n° 68) :

$$AC < CD + DA, \quad \text{soit} \quad AC < CD + DB.$$

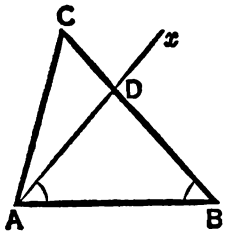


Fig. 71.

On obtient donc AC < CB, c'est-à-dire $b < a$ ou $a > b$.

On démontrerait de même que : $\widehat{B} > \widehat{C} \Longrightarrow b > c$. Donc :

$$A > B > C \Longrightarrow a > b > c.$$

72. Réciproque. — ***Lorsqu'un triangle a deux côtés inégaux les angles opposés à ces côtés sont inégaux et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.***

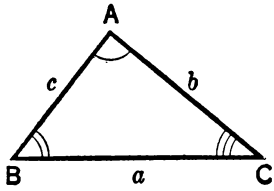


Fig. 72.

Soit un triangle ABC (fig. 72) dans lequel, par hypothèse : $a > b > c$.

L'hypothèse $a > b$ ne peut correspondre à A < B qui entraîne $a < b$ d'après le théorème précédent, ni à A = B qui entraîne : $a = b$ (n° 46). Seule la conclusion : A > B est compatible avec l'hypothèse $a > b$. On verrait de même que l'hypothèse $b > c$ exige B > C. Il en résulte que :

73. Résumé. — ***Dans tout triangle les angles et les côtés opposés à ces angles sont dans le même ordre de grandeur.***

Soit :

$$\boxed{\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}} \Longleftrightarrow \boxed{a > b > c}.$$

En particulier, dans tout triangle rectangle, l'hypoténuse est supérieure à chacun des côtés de l'angle droit.

74. Théorème. — ***Un segment de droite est plus court que toute ligne brisée ayant mêmes extrémités.***

Soient un segment AB et une ligne brisée ACDEB (fig. 73). Menons AD et AE. Nous pouvons écrire :

$$AB < AE + EB$$
$$AE < AD + DE$$
$$AD < AC + CD.$$

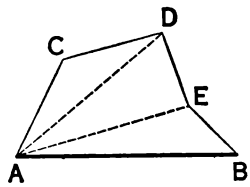


Fig. 73.

Additionnons membre à membre ces inégalités en supprimant les termes AE et AD communs aux deux membres du résultat. Il reste :

$$AB < AC + CD + DE + EB.$$

75. Théorème. — ***Une ligne brisée convexe est plus courte que toute ligne brisée enveloppante ayant mêmes extrémités.***

Soit la ligne brisée convexe ABCD et une ligne brisée enveloppante AEFGD (fig. 74). Prolongeons AB jusqu'en H et BC jusqu'en I.

La ligne ABCD est plus courte que la ligne ABID car elles ont en commun la partie ABC et CD est plus court que CID.

$$ABCD < ABID.$$

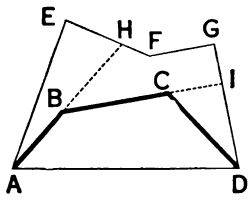


Fig. 74.

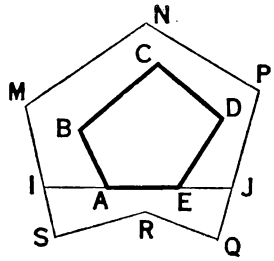


Fig. 75.

On démontrerait de même que :

$$ABID < ABHFGD.$$
$$ABHFGD < AEFGD.$$

D'où il résulte finalement que :

$$ABCD < AEFGD.$$

76. Corollaire. — ***Le périmètre d'un polygone convexe est inférieur au périmètre de tout polygone enveloppant.***

Prolongeons le côté AE du polygone convexe ABCDE jusqu'en I et J sur le polygone enveloppant MNPQRS (fig. 75).

D'après le théorème précédent la ligne ABCDE est plus courte que la ligne AIMNPJE, de sorte que le périmètre du polygone ABCDE est inférieur au périmètre du polygone IMNPJ. Or ce dernier a un périmètre inférieur à celui du polygone MNPQRS car ils ont en commun la ligne IMNPJ et JI est plus court que la ligne JQRSI. D'où il résulte que le périmètre du polygone ABCDE est inférieur au périmètre du polygone MNPQRS.

APPLICATIONS

77. Régions limitées par la médiatrice d'un segment. — ***Pour qu'un point donné*** M ***soit situé du même côté que le point*** A ***par rapport à la médiatrice du segment*** AB, ***il faut et il suffit que l'on ait*** $MA < MB$.

Soit un segment AB et la médiatrice *xy* de ce segment (fig. 76). Elle sépare le plan en deux demi-plans I et II qui contiennent l'un le point A, l'autre le point B.

1° *Pour tout point* M *de la région* I, *on a* $MA < MB$.

En effet MB coupe *xy* en C situé entre M et B et : $CB = CA$.

Dans le triangle MCA, on a : $MA < MC + CA.$

donc $MA < MC + CB$

c'est-à-dire $MA < MB.$

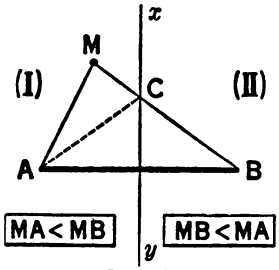


Fig. 76.

On démontrerait de même que pour tout point M de la région II on a :

$$MB < MA.$$

2° *Si* MA < MB *le point* M *est dans la région* I.

Le point M ne peut être sur *xy* sans quoi on aurait : MA = MB (n° 50). Il ne peut être dans la région II sinon on aurait MA > MB. Il est donc dans la région I.

78. Perpendiculaire et obliques. — ***Si d'un point situé hors d'une droite on mène à cette droite la perpendiculaire et diverses obliques :***

1° ***La perpendiculaire est plus courte que toute oblique.***

2° ***Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales et réciproquement deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire.***

3° ***De deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus longue et réciproquement, de deux obliques inégales, c'est la plus longue qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.***

1° Soient AH la perpendiculaire et AB une oblique quelconque menées de A à la droite *xy* (fig. 77). Dans le triangle rectangle AHB, le côté AH opposé à l'angle aigu B est inférieur à l'hypoténuse AB opposée à l'angle droit (n° 73).

2° Considérons deux obliques AB et AC telles que HB = HC (fig. 78). AH est la médiatrice de BC, donc (n° 50) : AB = AC.

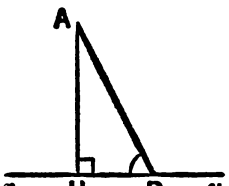


Fig. 77.

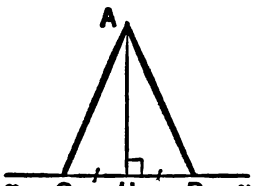


Fig. 78.

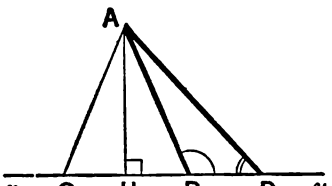


Fig. 79.

Réciproquement si nous supposons AB = AC, la hauteur AH du triangle isocèle ABC est en même temps médiane. Donc BH = HC.

3° Soient deux obliques AB et AD d'un même côté de AH (fig. 79). Supposons HB < HD. Dans le triangle ABD l'angle B, extérieur au triangle rectangle

AHB est obtus, et l'angle D intérieur au triangle rectangle AHD est aigu. Donc $\widehat{B} > \widehat{D}$ et par suite AD > AB.

Réciproquement, supposons AD > AB. On ne peut avoir HD < HB car il en résulterait AD < AB ce qui est contraire à l'hypothèse. On ne peut avoir HD = HB sinon on aurait AD = AB ce qui est également contraire à l'hypothèse. On a donc HD > HB.

Remarque : Pour comparer deux obliques AC et AD de part et d'autre de AH, il suffit de remplacer AC par l'oblique AB qui lui est égale. On est ramené au cas étudié.

79. Corollaire. — *Dans tout triangle rectangle un côté de l'angle droit est inférieur à l'hypoténuse.*

En effet dans le triangle rectangle ABH (fig. 77) l'oblique AB est supérieure à la perpendiculaire AH.

80. Triangles ayant deux côtés égaux. — *Lorsque deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés respectivement égaux, les troisièmes côtés sont inégaux et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

Soient les triangles ABC et A'B'C' tels que AB = A'B', AC = A'C' et $\widehat{A} > \widehat{A'}$ (fig. 80). Transportons le triangle A'B'C' en ABD de façon que A'B' coïncide avec son égal AB et que le côté A'C' se place en AD à l'intérieur de l'angle A, ce qui est possible puisque $\widehat{A'} < \widehat{A}$. On a donc AD = AC et BD = B'C'. Menons la bissectrice de l'angle CAD. Elle coupe BC en un point E situé entre B et C. Elle est d'autre part médiatrice de la base CD du triangle isocèle ADC. Donc :

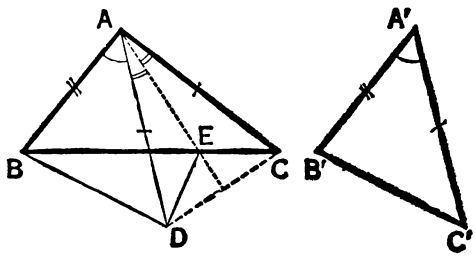


Fig. 80.

$$DE = EC.$$

Or dans le triangle BDE on a (n° 70) : BD < BE + ED.

D'où B'C' < BE + EC soit B'C' < BC.

81. Réciproque. — *Lorsque deux triangles ont deux côtés respectivement égaux et les troisièmes côtés inégaux, les angles opposés aux côtés inégaux sont inégaux et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

Supposons que les deux triangles ABC et A'B'C' aient AB = A'B', AC = A'C' et BC > B'C'. On ne peut avoir $\widehat{A} < \widehat{A'}$ ou $\widehat{A} = \widehat{A'}$ car cela entraînerait (n° 80 ou n° 58) : BC < B'C' ou BC = B'C'.

On obtient donc :

$$\widehat{A} > \widehat{A'}.$$

EXERCICES

29. Démontrer que si deux triangles sont égaux, les médianes, les hauteurs et les bissectrices de l'un sont respectivement égales aux médianes, aux hauteurs, aux bissectrices homologues de l'autre.

30. On donne un triangle équilatéral ABC et on prolonge dans le même sens de parcours ses trois côtés d'une même longueur : on obtient ainsi A' sur BC, B' sur CA et C' sur AB.

1° Montrer que le triangle A'B'C' est équilatéral.

2° Soit P l'intersection de BB' et CC', Q celle de AA' et CC', R celle de AA' et BB'. Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

31. Dans un triangle isocèle ABC de base BC, on mène les médianes BM et CN qui se coupent en G.

1° Montrer que ces médianes sont égales.

2° Montrer qu'elles se coupent sur l'axe de symétrie du triangle ABC.

32. Dans un triangle ABC on prolonge la médiane AM d'une longueur MD = AM.

1° Comparer les côtés du triangle ABD aux segments AB, AC et AM.

2° Que peut-on dire de deux triangles qui ont deux côtés respectivement égaux ainsi que les médianes relatives aux troisièmes côtés.

3° Construire le triangle ABC sachant que AB = 12, AC = 20, AM = 13.

33. 1° Montrer que pour qu'un triangle soit isocèle il faut et il suffit qu'il ait deux hauteurs égales.

2° Montrer que les trois hauteurs d'un triangle isocèle sont concourantes.

34. On considère un triangle isocèle ABC dans lequel la médiatrice de AC coupe le prolongement de la base BC en D. On joint DA que l'on prolonge d'une longueur AE = BD.

1° Montrer que le triangle DAC est isocèle.

2° Montrer que le triangle CDE est isocèle.

3° Étudier le cas où le point D se trouve entre B et C, et où l'on prend sur la demi-droite AD un segment AE = BD.

35. On considère un triangle ABC. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe en D la médiatrice de BC. Soient E et F les projections de D sur AB et AC.

1° Comparer les triangles DBE et DCF. Montrer que AE et AF sont égaux à la demi-somme de AB et de AC et que BE et CF sont égaux à leur demi-différence.

2° Reprendre le même problème avec le point D' intersection de la médiatrice de BC et de la bissectrice extérieure de l'angle A, et ses projections E' et F' sur AB et AC.

3° Montrer que les segments EE' et FF' sont respectivement égaux à AC et AB.

36. Soit un triangle isocèle ABC dans lequel la base BC est inférieure au côté AB. On prolonge AB et BC de longueurs BD et CE égales à AB — BC.

1° Comparer les triangles ACE et EBD et montrer que le triangle EAD est isocèle.

2° Montrer que l'angle ADE est égal à la demi-somme des angles BAC et AED.

37. On prolonge la hauteur AH d'un triangle ABC, d'une longueur HD = HA, et la médiane AM d'une longueur ME = AM.

1° Comparer les angles CBD et BCE et les segments BD et CE.

2° BD et CE se coupent en S. Que représente SM pour les triangles SBC et SDE?

38. 1° Montrer que si deux triangles OAB et OCD sont égaux ils se déduisent l'un de l'autre soit par rotation de centre O, soit par symétrie par rapport à une droite issue de O, médiatrice commune de AC et de BD.

2° On considère deux segments égaux AB et CD et on suppose que les médiatrices de AC et BD se coupent en un point et un seul O. Démontrer que les angles AOC et BOD sont égaux.

39. 1° Deux polygones convexes de n côtés ont $n-1$ côtés consécutifs respectivement égaux et les $n-2$ angles compris entre ces côtés respectivement égaux. Démontrer que ces polygones sont égaux.

2° Deux polygones convexes de n côtés ont n-1 angles consécutifs respectivement égaux et les $n-2$ côtés adjacents à ces angles respectivement égaux. Montrer que ces polygones sont égaux.

40. Soit O le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère convexe ABCD.

1° Montrer que chaque diagonale est inférieure au demi-périmètre du quadrilatère.

2° Montrer que AC + BD est supérieure à chacune des sommes AB + CD et AD + BC.

3° En déduire que la somme des diagonales est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre du quadrilatère.

41. Soit un quadrilatère convexe ABCD et un point M intérieur à ce quadrilatère.

1° Montrer que la somme des distances de M aux quatre sommets est supérieure à la somme des diagonales.

2° Comparer MA + MB au périmètre de la ligne brisée ADCB. En déduire que la somme MA + MB + MC + MD est inférieure aux $\frac{3}{2}$ du périmètre du quadrilatère.

42. Soit un point A et un cercle O. Le diamètre passant par A coupe le cercle en B et C. Soit M un point quelconque du cercle.

1° Comparer AM à la somme, puis à la différence de OA et OM.

2° Montrer que AM est compris entre AB et AC.

3° Comment faut-il choisir le rayon d'un cercle de centre A pour que ce cercle coupe le cercle O?

43. On donne deux points A et B et une droite D, et on désigne par A' le symétrique de A par rapport à D.

1° Si A et B sont d'un même côté de D montrer qu'il existe un point M de D tel que la somme MA + MB soit la plus petite possible. Construire ce point.

2° Si A et B sont de part et d'autre de D montrer qu'il existe un point M' de D tel que la différence entre M'A et M'B soit la plus grande possible. Construire ce point.

44. Soit un triangle ABC et les deux bissectrices de l'angle A (on suppose AB > AC).

1° Pour tout point M de la bissectrice intérieure, montrer que :

$$MB - MC < AB - AC.$$

2° Pour tout point M' de la bissectrice extérieure, montrer que :

$$M'B + M'C > AB + AC.$$

45. On considère deux points A et B et du même côté que B de la médiatrice de AB, deux autres points M et M' tels que le quadrilatère ABMM' soit convexe.

Montrer que : $MA - MB > M'A - M'B.$

46. On considère un segment AB, un point P de sa médiatrice et une droite xy passant par A.

1° Comparer les distances de P à la droite xy et au point B.

2° Comment choisir xy pour que ces distances soient égales?

47. Soit un triangle ABC et sa médiane AM. On suppose AB > AC.

1° On construit le symétrique A′ de A par rapport à M. Comparer les angles A′AB et AA′B puis les angles BAM et CAM.

2° Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle A coupe le côté BC en un point du segment MC.

48. Dans un triangle ABC on prolonge la médiane CM d'une longueur MD = CM. Comparer les triangles MBC et MAD puis l'angle BAD et l'angle BAx extérieur au triangle ABC. En déduire que :

Tout angle extérieur d'un triangle est supérieur à chacun des angles intérieurs non adjacents.

49. 1° On considère un triangle ABC et un point D de la demi-droite BAx. Montrer que l'angle BDC est supérieur, égal ou inférieur à l'angle BAC suivant que D est entre B et A, en A ou au-delà de A. Réciproques?

2° En déduire que si deux triangles ont deux angles respectivement égaux et le côté opposé à l'un de ces angles égal ils sont égaux. (Superposer les triangles ABC et A′B′C′ tels que $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}$ et BC = B′C′.)

50. 1° Montrer que si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et des angles aigus inégaux, au plus grand angle est opposé un plus grand côté et réciproquement. (Compléter les triangles rectangles de façon à obtenir des triangles isocèles.)

2° On considère un angle xOy et sa bissectrice Oz. Montrer que pour tout point M de la région intérieure à l'angle xOz la distance MA au côté Ox est inférieure à la distance MB au côté Oy.

3° Soit un triangle ABC dans lequel AC > AB. On mène les hauteurs BB′ et CC′. Comparer les triangles rectangles BCC′ et CBB′. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont dans un ordre de grandeur inverse de celui des côtés correspondants.

PARALLÈLES

82. Définition. — Rappelons que deux droites distinctes d'un plan ont au plus un point commun. Dans ce cas elles sont dites *concourantes*.

On appelle droites parallèles, deux droites d'un même plan qui n'ont aucun point commun.

Le théorème suivant montre qu'il existe effectivement, dans un plan, des droites parallèles.

83. Théorème. — ***Lorsque deux droites distinctes sont perpendiculaires à une même troisième elles sont parallèles.***

Soient les droites D_1 et D_2 perpendiculaires à la droite xy (fig. 81). Si ces deux droites D_1 et D_2 étaient concourantes on pourrait, par leur point commun, mener deux perpendiculaires à la même droite. Cela est impossible (n° 27) et par suite D_1 et D_2 n'ont pas de point commun.

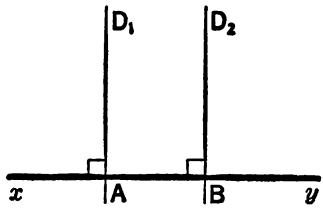


Fig. 81.

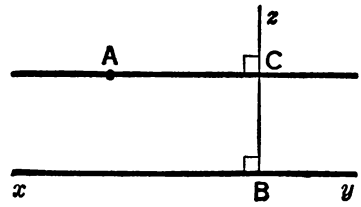


Fig. 82.

84. Corollaire. — ***Par un point extérieur à une droite, on peut toujours mener une parallèle à cette droite.***

Soit à mener par le point A une parallèle à la droite xy (fig. 82). Traçons une perpendiculaire Bz à xy, puis AC perpendiculaire à Bz. Les deux droites AC et xy étant perpendiculaires à Bz sont parallèles.

85. Postulat d'Euclide. — *Par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite.*

Il est impossible de démontrer que la parallèle ainsi construite est la seule que l'on puisse mener par le point A, à la droite *xy*. Cette propriété, nullement évidente et uniquement vérifiée par l'expérience, constitue un *postulat* (n° 2) énoncé pour la première fois par Euclide (géomètre grec, IIIe siècle av. J.-C.).

Bien que ce postulat soit confirmé par les mesures les plus précises, toutes les tentatives faites pour le démontrer ont été vaines. Par contre Lobatchefski en 1826 et Bolyai en 1832 ont développé une géométrie dite « non-euclidienne » n'admettant pas le postulat d'Euclide. Si paradoxaux que soient les résultats ainsi obtenus, il n'en est aucun dont l'absurdité puisse être mise en évidence par le raisonnement. Enfin Henri Poincaré en 1892 a prouvé que la démonstration du postulat d'Euclide était impossible.

86. Corollaire I. — *Lorsque deux droites sont parallèles :*

1° *Toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.*

2° *Toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.*

3° *Toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Soient D_1 et D_2, deux parallèles et une troisième droite Δ.

1° Si Δ est parallèle à D_1 (fig. 83), elle ne peut couper D_2, sinon on pourrait par leur point d'intersection mener deux parallèles à la droite D_1, ce qui est contraire au postulat d'Euclide. Autrement dit :

Deux parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

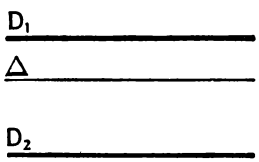


Fig. 83.

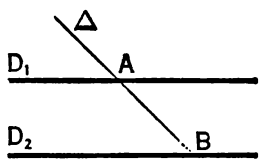


Fig. 84.

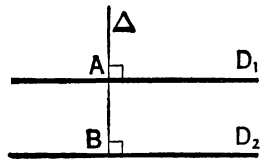


Fig. 85.

2° Si Δ coupe D_1 en un point A (fig. 84), elle ne peut être parallèle à D_2, sinon on pourrait mener par A deux parallèles à D_2, ce qui est impossible. Elle coupe donc D_2 en B.

3° Si Δ est perpendiculaire à D_1 en A (fig. 85), elle coupe D_2 en B. La perpendiculaire en B à AB est parallèle à D_1 (n° 83). Elle est donc confondue avec D_2 et par suite AB est perpendiculaire à D_2.

87. Corollaire II. — *Deux droites respectivement perpendiculaires aux deux côtés d'un angle sont concourantes.*

Soient deux droites, D_1 perpendiculaire en A à AO et D_2 perpendiculaire en B à OB (fig. 86). Si D_1 et D_2 étaient parallèles, la droite OA perpendiculaire à D_1, serait perpendiculaire à D_2. On pourrait mener par O deux perpendiculaires OA et OB à D_2, ce qui est impossible (n° 27).

88. Angles formés par deux droites et une sécante.

Lorsqu'on coupe deux droites D_1 et D_2 par une sécante AB, on forme huit angles : quatre en A et quatre en B (fig. 87). On appelle :

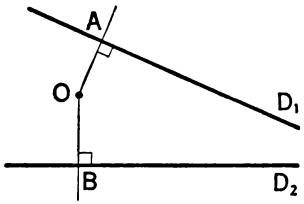


Fig. 86.

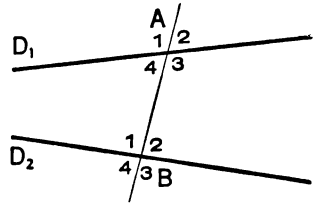


Fig. 87.

1° ***Angles alternes-internes*** deux angles tels que $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_1}$ situés de part et d'autre de la sécante et entre les deux droites.

2° ***Angles correspondants*** deux angles tels que $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_1}$ situés d'un même côté de la sécante, l'un entre les deux droites, l'autre à l'extérieur.

3° ***Angles intérieurs d'un même côté*** deux angles tels que $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_1}$ situés entre les deux droites et d'un même côté de la sécante.

89. Théorème. — ***Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante.***

1° ***Les angles alternes-internes sont égaux.***

2° ***Les angles correspondants sont égaux.***

3° ***Les angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires.***

Soient CD et EF deux droites parallèles coupées par la sécante AB (fig. 88). Par le milieu O de AB menons la perpendiculaire OM à CD, elle est également perpendiculaire en N à EF (n° 86). Les deux triangles rectangles OAM et OBN

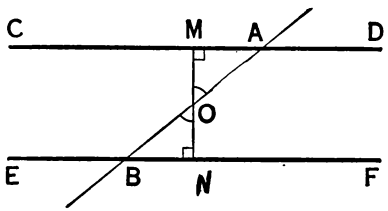


Fig. 88.

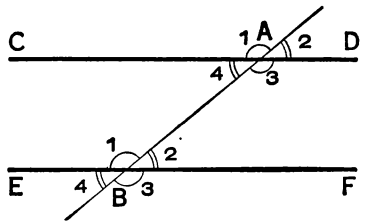


Fig. 89.

ont l'hypoténuse égale et les angles aigus en O égaux comme opposés par le sommet : ils sont donc égaux (n° 62) et les angles alternes-internes BAC et ABF sont égaux.

Reportons-nous à la figure 89. Nous avons démontré l'égalité des angles A_4 et B_2. Les angles A_2 et B_4 leur sont égaux comme opposés par le sommet. Les quatre angles A_1, A_3, B_1 et B_3 sont égaux entre eux comme suppléments des précédents. Il en résulte que les huit angles formés en A et B sont deux à deux égaux ou supplémentaires ce qui achève la démonstration du théorème.

90. Réciproque. — ***Deux droites étant coupées par une sécante, ces droites sont parallèles :***

1° ***Si deux angles alternes sont égaux.***

2° ***Si deux angles correspondants sont égaux.***

3° ***Si deux angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires.***

L'une de ces hypothèses entraîne entre les huit angles formés en A et B (fig. 89) les mêmes relations que dans le théorème direct.

Menons par le milieu O de AB, la sécante MN perpendiculaire à CD et supposons égaux les angles alternes-internes OAM et OBN (fig. 88). Les deux triangles OAM et OBM qui ont d'autre part OA = OB et les angles en O égaux, sont égaux (1er cas) et l'angle ONB est droit; CD et EF étant perpendiculaires à MN sont parallèles.

91. Application au tracé des parallèles.

1° Lorsqu'une équerre glisse contre une règle fixe, deux positions successives d'un même côté de l'équerre sont parallèles car elles forment des angles correspondants égaux avec l'arête de la règle. Pour mener par le point A la parallèle à la droite *xy* (fig. 90) il suffit de placer un côté de l'équerre suivant *xy*, d'appliquer la règle contre l'équerre et de faire glisser celle-ci jusqu'en A. On peut alors tracer la parallèle cherchée.

2° Soit à mener par A la parallèle à *xy* (fig. 91).

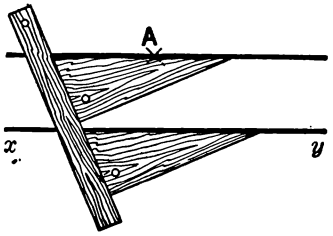


Fig. 90.

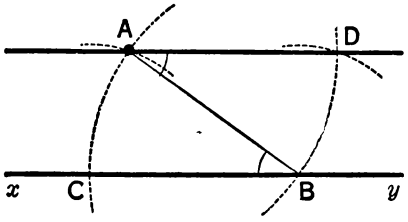


Fig. 91.

De A comme centre, tracer un arc de cercle coupant *xy* en B. De B comme centre, avec le même rayon tracer l'arc AC. Puis avec CA comme rayon et de B comme centre, tracer un arc qui coupe le premier arc tracé en D. La droite AD est parallèle à *xy* car les angles alternes-internes ABC et BAD appartiennent aux triangles ABC et BAD qui sont égaux d'après le 3e cas d'égalité des triangles.

92. Définitions.

1° On exprime que deux ou plusieurs droites sont parallèles en disant qu'elles ont *même direction.*

2° Deux segments de droite ou deux demi-droites sont parallèles lorsqu'ils appartiennent à deux droites parallèles.

ANGLES A COTÉS PARALLÈLES OU PERPENDICULAIRES

93. Définition. — Deux demi-droites parallèles Ax et By sont de *même sens* quand elles sont situées d'un même côté de la droite AB qui joint leurs origines.

Elles sont de *sens contraires* quand elles sont situées de part et d'autre de la droite qui joint leurs origines.

94. Théorème. — *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

1° ***Ils sont égaux si leurs côtés sont deux à deux de même sens ou deux à deux de sens contraires.***

2° ***Ils sont supplémentaires si deux côtés sont de même sens et les deux autres de sens contraires.***

Par le point B menons les parallèles $u'u$ et $v'v$ aux côtés de l'angle xAy (fig. 92). Les droites Ax et Bv se coupent en C.

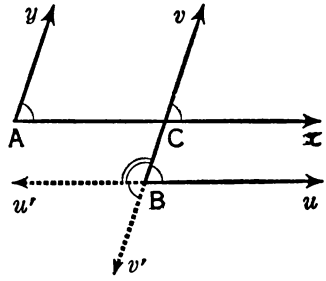


Fig. 92.

1° Les angles xAy et uBv ont leurs côtés parallèles et de même sens. Ils sont tous deux égaux à l'angle xCv comme correspondants, donc égaux entre eux.

Les angles xAy et u'Bv' ont leurs côtés parallèles et de sens contraires. Ils sont aussi égaux car l'angle u'Bv' est égal à l'angle uBv comme opposé par le sommet.

2° Les angles xAy et u'Bv ont deux côtés Ay et Bv parallèles et de même sens et les deux autres Ax et Bu' parallèles et de sens contraires. Ils sont supplémentaires car $\widehat{u'\text{B}v}$ est le supplément de $\widehat{u\text{B}v}$ et par suite celui de $\widehat{x\text{A}y}$.

95. Théorème. — *Lorsque deux angles ont leurs côtés perpendiculaires ils sont égaux ou supplémentaires.*

Ils sont égaux s'ils sont tous deux aigus ou tous deux obtus.
Ils sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre obtus.

Soient $\widehat{xAy}$ et $\widehat{uBv}$ deux angles à côtés respectivement perpendiculaires (fig. 93). Faisons tourner l'angle $\widehat{xAy}$ d'un angle droit autour de son sommet. Ses côtés deviennent parallèles à ceux de l'angle uBv. Nous sommes ainsi ramenés au théorème précédent : xAy et uBv sont égaux ou supplémentaires. Il est clair d'ailleurs que deux angles aigus (ou deux angles obtus) ne peuvent être supplémentaires tandis qu'un angle aigu et un angle obtus ne peuvent être égaux.

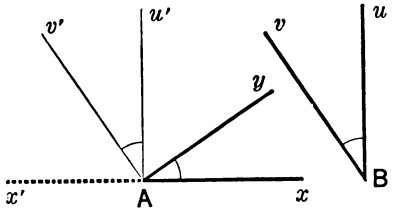


Fig. 93.

SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE

96. Somme des angles d'un triangle.

La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

Soit un triangle ABC (fig. 94). Prolongeons BC jusqu'en D et menons CE parallèle à BA et de même sens. Les angles BAC et ACE sont égaux comme alternes-internes. Les angles ABC et ECD sont égaux comme correspondants. La somme des trois angles du triangle ABC est donc égale à la somme des trois angles formés en C, soit à deux droits.

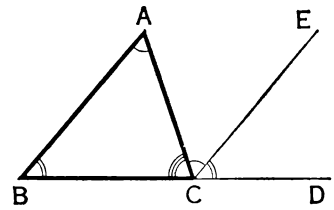


Fig. 94.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2^{D}.$$

97. Corollaire. — *Un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents à cet angle.*

On voit en effet (fig. 94) que l'angle extérieur ACD est égal à la somme $\widehat{ACE} + \widehat{ECD} = \widehat{A} + \widehat{B}$. L'angle extérieur $\widehat{C}$ est donc égal à la somme des angles intérieurs $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.

98. Applications. — 1° *La somme de deux angles d'un triangle est inférieure à deux droits.*

Par suite un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ou d'un angle obtus et a donc au moins deux angles aigus.

2° ***Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.***

En particulier :

Les angles aigus d'un triangle rectangle isocèle valent chacun 45°.

3° ***Les angles d'un triangle équilatéral valent chacun*** 60°.

Si un triangle isocèle a un angle de 60° (au sommet ou adjacent à la base), les trois angles valent chacun 60° et ce triangle est équilatéral.

4° ***Lorsque deux triangles ont deux angles respectivement égaux ils ont leurs trois angles égaux.***

Dans chacun des deux triangles le troisième angle est le supplément de la somme des deux premiers.

99. Théorème. — ***Lorsque deux droites font avec une même sécante des angles intérieurs d'un même côté dont la somme diffère de deux droits, elles sont concourantes et se coupent du côté de la sécante où la somme des angles est inférieure à deux droits.***

Les droites $x'x$ et $y'y$ ne peuvent en effet être parallèles (fig. 95) sinon les angles intérieurs d'un même côté de AB seraient supplémentaires (n° 89).

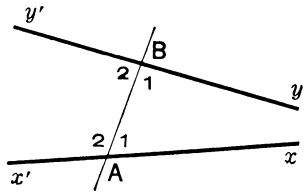


Fig. 95.

Si l'on a $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 > 2^D$ et par conséquent $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 < 2^D$, les demi-droites A$x'$ et By' ne peuvent se rencontrer car nous aurions un triangle dont la somme des angles serait supérieure à deux droits. Ce sont donc les demi-droites Ax et By qui se rencontrent.

REMARQUE. — Ce théorème montre que l'on peut toujours construire un triangle admettant une base donnée AB et deux angles adjacents donnés pourvu que la somme de ces derniers soit inférieure à deux droits.

100. Théorème. — ***La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux droits que ce polygone a de côtés moins deux.***

Soit un polygone convexe ABCDEF (fig. 96). Désignons par n le nombre de ses côtés. Menons les diagonales issues de A. Nous décomposons le polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés autres que AB et AF, soit en $(n—2)$ triangles. La somme S des angles du polygone est égale à celle des angles de tous ces triangles et par suite à (n—2) fois deux droits.

$$S = 2^D \times (n—2) = 2n^D — 4^D.$$

101. Corollaire. — ***La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère convexe est égale à quatre droits.***

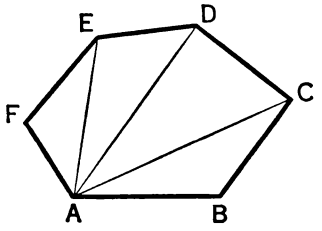


Fig. 96.

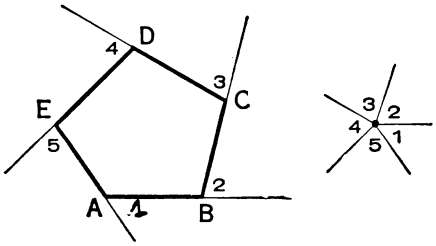


Fig. 97.

On le voit en faisant $n = 4$ dans la formule précédente ou en décomposant, par une diagonale, le quadrilatère en deux triangles.

102. Théorème. — ***La somme des angles extérieurs de tout polygone convexe est égale à quatre droits.***

La somme de l'angle intérieur et de l'angle extérieur relatifs à un même sommet est égale à deux droits (fig. 97). La somme des angles tant intérieurs qu'extérieurs est donc égale à autant de fois deux droits qu'il y a de sommets, soit $2n$ droits. Or la somme S des angles intérieurs est égale à $2n^{D} - 4^{D}$. La somme S′ des angles extérieurs est donc

$$S' = 2n^{D} - (2n^{D} - 4^{D}) = 4^{D}.$$

On le voit également en menant par un point O quelconque des demi-droites parallèles aux côtés du polygone, orientés dans le sens ABCDEA. Les angles formés autour de O sont les angles extérieurs du polygone. Leur somme est donc 4^{D}.

EXERCICES

51. Démontrer que pour qu'un triangle soit isocèle, il faut et il suffit que la bissectrice extérieure d'un angle soit parallèle au côté opposé.

52. Étant données deux parallèles coupées par une sécante, montrer que :

1° Les bissectrices de deux angles alternes-internes ou correspondants sont parallèles.

2° Les bissectrices de deux angles intérieurs d'un même côté sont perpendiculaires.

3° Énoncer et démontrer les réciproques.

53. On donne un angle BAC. Le cercle de centre A, de rayon AC coupe la droite AB aux points D et E. On mène par A les parallèles à CD et CE. Que représentent ces parallèles pour l'angle BAC?

54. 1° Soient AB et CD deux diamètres d'un cercle O. Comparer les directions de AC et BD à celle de la bissectrice de l'angle AOC. Qu'en conclure pour AC et BD?

2° Par deux points A et C, diamétralement opposés dans un cercle O on mène deux cordes parallèles AB et CD. Montrer que les points B, O et D sont alignés.

55. On considère deux angles adjacents et supplémentaires AOB et BOC et leurs bissectrices Ox et Oy. On mène par B la parallèle à AC qui coupe Ox en M et Oy en N.

1° Montrer que les triangles BOM et BON sont isocèles. En déduire que B est le milieu de MN.

2° Montrer que le triangle MON est rectangle, que les angles M et N de ce triangle sont complémentaires, et que la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de celle-ci.

56. On considère un triangle ABC et on désigne par I le point d'intersection des bissectrices intérieures des angles B et C. On mène par I la parallèle à AB qui coupe BC en D et la parallèle à AC qui coupe BC en E.

1° Que peut-on dire des triangles DIB et EIC?

2° Comparer le périmètre du triangle IDE au segment BC.

57. 1° Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures des angles B et C du triangle ABC. La parallèle menée par I à BC coupe AB en D et AC en E. Démontrer que

$$DE = BD + CE.$$

2° Soit I' le point commun à la bissectrice intérieure de B et à la bissectrice extérieure de C du triangle ABC. La parallèle menée par I' à BC coupe AB en D' et AC en E'. Démontrer que $D'E' = |\, BD' - CE' \,|$.

58. 1° Soit un triangle ABC. Les bissectrices intérieures des angles B et C coupent en D et E la parallèle à BC menée par A. Démontrer que $DE = AB + AC$.

2° La bissectrice extérieure de l'angle C coupe en F la parallèle à BC menée par A. Montrer que $DF = |\, AB - AC \,|$.

59. Soit un triangle ABC. On mène par le milieu D de BC la perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle A. Cette perpendiculaire coupe AB en E et AC en F. EF coupe la parallèle menée par B à AC en G.

1° Montrer que les triangles AEF et BEG sont isocèles.

2° Comparer les triangles BDG et DCF. Démontrer l'égalité des segments BE et CF.

3° Les médiatrices de BC et de EF se coupent en O. Comparer les triangles OCF et OBE.

60. On considère un triangle ABC tel que $AC > AB$. On mène la demi-droite Bx parallèle à AC et de même sens, puis on construit le point D de AC tel que $AD = AB$.

1° Démontrer que BD est bissectrice de l'angle ABx.

2° La médiatrice de BC coupe AC en I. Montrer que BC est bissectrice de l'angle IBx.

3° Démontrer que l'angle ABI est le double de l'angle DBC, et comparer sa valeur à celle des angles ABC et ACB.

61. 1° Montrer que les bissectrices de deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont parallèles ou perpendiculaires.

2° Que peut-on dire des bissectrices de deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires?

62. On considère un triangle ABC rectangle en A et la hauteur AH relative à l'hypoténuse :

1° Comparer les angles BAH et ACB, puis CAH et ABC;

2° Quel est l'angle des bissectrices de BAH et CAH.

63. 1° Évaluer en fonction des angles B et C du triangle ABC, l'angle de la hauteur AH et de la bissectrice intérieure AD.

2° Évaluer en fonction de l'angle A, l'angle BIC des bissectrices intérieures des angles B et C.

3° Évaluer en fonction de l'angle A l'angle BJC des bissectrices extérieures des angles B et C.

4° Évaluer en fonction de l'angle A l'angle BHC des hauteurs issues de B et C.

64. Soit un triangle ABC. On désigne par J l'intersection des bissectrices extérieures des angles B et C, par K l'intersection des bissectrices extérieures des angles A et C, par L l'intersection des bissectrices extérieures des angles A et B.

1° Évaluer les angles du triangle JKL en fonction des angles A, B et C.

2° Comparer les angles des triangles JBC, KAC et LAB à ceux du triangle JKL.

65. Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle B coupe en I la hauteur issue de A et en D la perpendiculaire en A à AB.

1° Évaluer en fonction de l'angle B les angles IAB, AID et ADI.

2° Comparer AI et AD.

66. Soit un triangle ABC et un point M intérieur au triangle. Montrer que l'angle BMC est supérieur à l'angle BAC.

67. On considère un quadrilatère convexe ABCD :

1° Montrer que l'angle des bissectrices de deux angles consécutifs tels que A et B est égal à la demi-somme des deux autres angles du quadrilatère.

2° Montrer que l'angle des bissectrices de deux angles opposés tels que A et C est égal à la demi-différence des deux autres angles du quadrilatère.

3° On appelle E l'intersection de AB et CD et F l'intersection de AD et BC. Montrer que les bissectrices des angles AED et AFB font un angle égal à la demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère.

68. Soit un triangle ABC rectangle en A. On prolonge CB d'une longueur BD = BA et sur la perpendiculaire en C à BC on porte du côté de A un segment CE = CA.

1° Calculer en fonction de l'angle B les angles BAD, ACE et CAE.

2° Montrer que D, A et E sont alignés.

69. Soit un triangle rectangle isocèle ABC. Par le sommet A de l'angle droit on mène extérieurement au triangle une droite xy, puis les perpendiculaires BM et CN à cette droite et la hauteur AH du triangle ABC.

1° Montrer que HA = HB = HC.

2° Montrer que MN = BM + CN.

3° Montrer que le triangle MHN est rectangle et isocèle.

70. Dans un triangle ABC, on prolonge BC de deux longueurs BD = BA et CE = CA.

1° Que représente DE pour le triangle ABC?

2° Calculer les angles D et E du triangle ADE en fonction des angles B et C.

3° Construire un triangle connaissant son périmètre et deux angles.

Que peut-on dire de deux triangles qui ont même périmètre et deux angles respectivement égaux?

71. Dans un triangle ABC l'angle C est triple de l'angle B. La médiatrice de BC coupe AB en D.

1° Montrer que CD partage le triangle ABC en deux triangles isocèles.

2° Calculer l'angle extérieur A du triangle ABC en fonction de l'angle B.

72. On considère un triangle ABC dans lequel l'angle B est aigu et double de l'angle C. On mène la hauteur AH et on prolonge AB d'un segment BE = BH. La droite HE coupe AC en D.

1° Montrer que DA = DH = DC.

2° Comparer les angles des triangles ADE et ABC.

3° Soit B′ le symétrique de B par rapport à H. Montrer que le triangle AB′C est isocèle.

4° Montrer que AE = HC.

PARALLÉLOGRAMME

103. Définition. — ***Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.***

On obtient un parallélogramme en coupant deux parallèles par deux sécantes parallèles entre elles (fig. 98).

Le quadrilatère ABCD ainsi obtenu est *convexe* car il est tout entier situé d'un même côté de l'une des quatre droites précédentes.

PROPRIÉTÉS DES ANGLES

104. Théorème. — ***Dans tout parallélogramme :***

1° Deux angles consécutifs sont supplémentaires.

2° Deux angles opposés sont égaux.

Dans le parallélogramme ABCD (fig. 98) les angles consécutifs A et B occupent la position d'intérieurs d'un même côté de la sécante AB par rapport aux deux parallèles AD et BC. Ils sont donc supplémentaires.

Les angles opposés A et C sont égaux car ils ont même supplément B (ou D). On peut également remarquer qu'ils ont leurs côtés respectivement parallèles et de sens contraires.

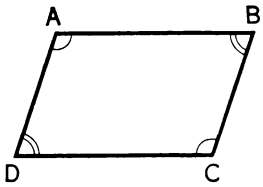


Fig. 98.

105. Réciproque. — ***Lorsqu'un quadrilatère convexe a ses angles opposés égaux deux à deux, c'est un parallélogramme.***

Soit le quadrilatère convexe ABCD (fig. 98). Supposons que :

$$\widehat{A} = \widehat{C} \quad \text{et} \quad \widehat{B} = \widehat{D}.$$

La somme des angles A et B est donc égale à la moitié de la somme des quatre angles du quadrilatère. Or cette somme est égale à quatre droits (n° 101).

Donc :

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 2 \text{ droits}$$

Les deux angles A et B occupent la position d'intérieurs d'un même côté de la sécante AB par rapport aux droites AD et BC. Il en résulte (n° 90) que ces deux droites sont parallèles.

On démontrerait de même que A + D = 2 droits et que les droites AB et CD sont parallèles. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

PROPRIÉTÉS DES CÔTÉS

106. Théorème. — ***Dans tout parallélogramme les côtés opposés sont égaux deux à deux.***

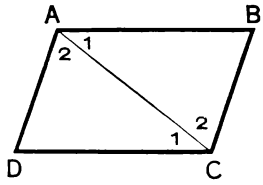


Fig. 99.

Soit le parallélogramme ABCD (fig. 99). Menons la diagonale AC et comparons les triangles ABC et CDA. Ils ont le côté AC commun, les angles A_1 et C_1 égaux comme alternes-internes et les angles C_2 et A_2 égaux pour la même raison. Les deux triangles sont donc égaux (1er cas) et par suite :

$$AB = CD \quad \text{et} \quad AD = BC.$$

107. Réciproque I. — ***Lorsqu'un quadrilatère convexe a ses côtés opposés égaux deux à deux, c'est un parallélogramme.***

Supposons que le quadrilatère convexe ABCD (fig. 99) soit tel que :

$$AB = CD \quad \text{et} \quad AD = BC.$$

Les deux triangles ABC et CDA ont deux côtés respectivement égaux et le troisième côté AC commun. Ils sont donc égaux (3e cas). Les angles A_1 et C_1 opposés aux côtés égaux BC et DA sont égaux. Les droites AB et CD formant deux angles alternes-internes égaux avec la sécante AC sont parallèles.

De même les angles C_2 et A_2 sont égaux et les droites BC et DA sont aussi parallèles. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

108. Réciproque II. — ***Lorsqu'un quadrilatère convexe a deux côtés à la fois égaux et parallèles, c'est un parallélogramme.***

Supposons que le quadrilatère convexe ABCD (fig. 99) ait les côtés AB et CD égaux et parallèles.

Les deux triangles ABC et CDA ont le côté AC commun, AB = CD et les angles A_1 et C_1 égaux comme alternes-internes. Ils sont donc égaux (2e cas) et par suite les angles A_2 et C_2 sont égaux. Les droites AD et BC formant des angles alternes-internes égaux avec la sécante AC sont parallèles. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

REMARQUE. — Cette réciproque permet de construire facilement un parallélogramme sur du papier réglé ou quadrillé.

PROPRIÉTÉS DES DIAGONALES

109. Théorème. — ***Dans tout parallélogramme les diagonales se coupent en leur milieu.***

Soit O le point de rencontre des diagonales du parallélogramme ABCD (fig. 100). AB étant parallèle et égal à CD, les triangles OAB et OCD ont AB = CD, $\widehat{A} = \widehat{C}$ comme alternes-internes et de même $\widehat{B} = \widehat{D}$. Ils sont donc égaux (1er cas) et par suite OA = OC et OB = OD. Le point O est le milieu de chacune des diagonales AC et BD.

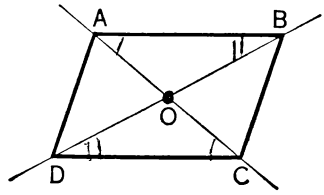


Fig. 100.

110. Réciproque. — ***Lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu ce quadrilatère est un parallélogramme.***

Supposons que le quadrilatère ABCD (fig. 100) ait été obtenu en portant sur deux droites se coupant en O des segments OA = OC sur la première et OB = OD sur la seconde. Les deux triangles OAB et OCD ont leurs angles en O égaux (comme opposés par le sommet) compris entre des côtés respectivement égaux. Ils sont donc égaux (2e cas). Les côtés AB et CD sont égaux et les angles alternes-internes OAB et OCD étant égaux, ils sont aussi parallèles. Le quadrilatère ABCD ayant deux côtés à la fois égaux et parallèles est un parallélogramme.

111. Centre d'un parallélogramme. — Il résulte du théorème précédent que *le point de concours des diagonales est un centre de symétrie du parallélogramme.* Et réciproquement, un quadrilatère convexe qui admet un centre de symétrie est un parallélogramme.

APPLICATIONS

112. Reconnaître un parallélogramme. — L'étude précédente montre qu'un quadrilatère convexe est un parallélogramme s'il possède l'une quelconque des propriétés caractéristiques suivantes :

1° Ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
2° Ses angles opposés son égaux deux à deux.
3° Ses côtés opposés sont égaux deux à deux.
4° Deux de ses côtés sont à la fois égaux et parallèles.
5° Ses diagonales se coupent en leur milieu.

113. Théorème. — ***Les portions de parallèles comprises entre deux parallèles sont égales.***

Les segments parallèles AA′, BB′, CC′ compris entre les parallèles D et D′ sont égaux comme côtés opposés de parallélogrammes (fig. 101).

114. Distance des deux parallèles. — En particulier si les segments parallèles tels que AA′ sont perpendiculaires aux deux parallèles D et D′ (fig. 102) on voit que tous les points de l'une sont à la même distance *d* de l'autre. D'où la définition :

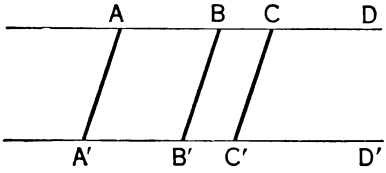


Fig. 101.

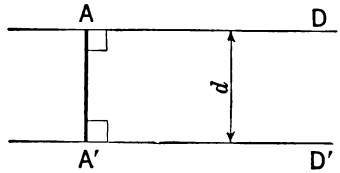


Fig. 102.

On appelle distance de deux parallèles la longueur du segment qu'elles découpent sur une perpendiculaire commune quelconque.

115. Droites symétriques par rapport à un point.

Soient deux segments AB et A′B′ symétriques par rapport à un point O (fig. 103). Le quadrilatère ABA′B′ a des diagonales qui se coupent en leur milieu; c'est un parallélogramme. Les segments égaux AB et A′B′ sont donc parallèles et de sens contraires.

Il en résulte que :

Deux demi-droites symétriques par rapport à un point sont parallèles et de sens contraires. Deux droites symétriques par rapport à un point sont parallèles.

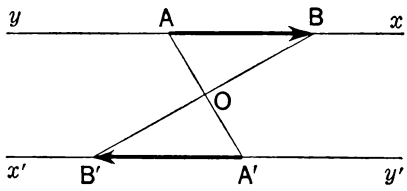


Fig. 103.

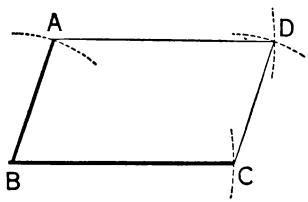


Fig. 104.

116. Construction du quatrième sommet d'un parallélogramme.

Soient A, B et C trois sommets consécutifs d'un parallélogramme (fig. 104). Le quatrième sommet D se trouve à l'intérieur de l'angle ABC sur l'arc de cercle de centre A et de rayon BC et sur l'arc de cercle de centre C et de rayon BA. Le quadrilatère convexe obtenu ayant ses côtés opposés égaux est un parallélogramme.

Notons que cette construction peut être utilisée pour mener par A, la parallèle à BC.

RECTANGLE

117. Définition. — ***Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit.***

Pour construire un rectangle il suffit de se donner un angle droit ABC (fig. 105) et de terminer le parallélogramme ABCD d'après la construction n° 116. Il en résulte (n° 104) que :

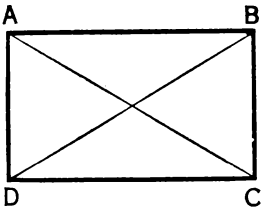


Fig. 105.

Les quatre angles d'un rectangle sont droits.

Réciproquement :

Un quadrilatère qui a ses angles droits est un rectangle. Deux côtés opposés sont alors perpendiculaires aux deux autres et par suite parallèles. Comme dans tout parallélogramme *les côtés opposés d'un rectangle sont égaux et les diagonales se coupent en leur milieu.*

118. Théorème. — ***Les diagonales d'un rectangle sont égales.***

Dans le rectangle ABCD (fig. 105) les deux triangles ABC et BAD ont $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 1^D$, le côté AB commun et BC = AD. Ils sont donc égaux (2e cas) et par suite AC = BD.

119. Réciproque. — ***Lorsqu'un parallélogramme a ses diagonales égales, c'est un rectangle.***

Soit un parallélogramme ABCD (fig. 105) tel que les diagonales AC et BD soient égales. Les deux triangles ABC et BAD ont alors AB en commun, BC = AD, comme côtés opposés et AC = BD par hypothèse. Ils sont donc égaux (3e cas). Les angles ABC et BAD, à la fois égaux et supplémentaires, valent chacun un droit.

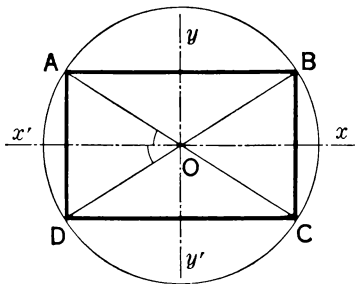


Fig. 106.

120. Cercle circonscrit, axes de symétrie du rectangle.

Les diagonales d'un rectangle étant égales, le milieu O de ces diagonales est équidistant des quatre sommets (fig. 106). Il est donc le centre d'un cercle passant par les quatre sommets et appelé *cercle circonscrit au rectangle.*

Les quatre triangles tels que AOD sont

isocèles. La droite $x'x$ bissectrice des angles AOD et BOC est médiatrice de AD et de BC. De même $y'y$ est médiatrice de AB et de CD. Il en résulte que $x'x$ et $y'y$ sont *des axes de symétrie du rectangle.*

121. Application au triangle rectangle. — Soit un triangle ABC (fig. 107). Prolongeons la médiane AM d'une longueur MD' = AM. Le quadrilatère ABD'C est un parallélogramme car ses diagonales ont même milieu.

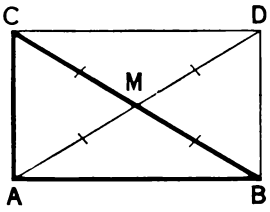


Fig. 107.

1° Si le triangle ABC est rectangle en A, le quadrilatère ABD'C est un rectangle et AD' = BC. La médiane AM est donc égale à la moitié de BC.

2° Si AM est par hypothèse égal à la moitié de BC, il en résulte que AD' = BC et le parallélogramme ABD'C ayant ses diagonales égales est encore un rectangle. Donc l'angle BAC est droit.

D'où :

122. Théorème. — ***Dans tout triangle rectangle, la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse.***

Et réciproquement :

Lorsqu'une médiane d'un triangle est égale à la moitié du côté correspondant ce triangle est rectangle.

Cette propriété de la médiane est donc une *propriété caractéristique du triangle rectangle.* Il en résulte d'autre part que :

1° *Le cercle qui a pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle passe par le sommet de l'angle droit.*

2° *Lorsqu'on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient un angle droit* (fig. 108).

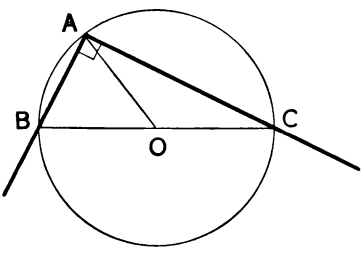


Fig. 108.

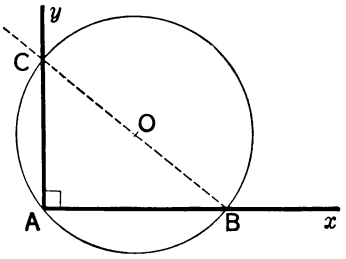


Fig. 109.

123. Construction d'un angle droit. — Soit une demi-droite Ax (fig. 109). Pour construire l'angle droit xAy, la construction suivante est préférable à

celle du n° 53 lorsqu'on ne peut pas prolonger Ax au-delà de A. Du point O comme centre, tracer le cercle passant par A et coupant Ax en B, puis mener le diamètre BC. D'après ce qui précède l'angle BAC est l'angle cherché.

LOSANGE

124. Définition. — ***Un losange est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.***

Il en résulte (n° 106) que :

Les quatre côtés d'un losange sont égaux.

RÉCIPROQUEMENT : ***Un quadrilatère qui a ses quatre côtés égaux est un losange.***

En effet (n° 107) ses côtés opposés étant égaux c'est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.

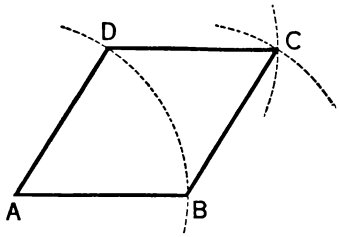


Fig. 110.

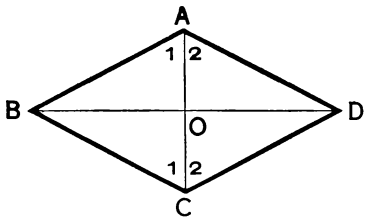


Fig. 111.

Comme dans tout parallélogramme : *les angles opposés d'un losange sont égaux et les diagonales se coupent en leur milieu.*

125. Théorème. — ***Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et bissectrices des angles du losange.***

Soit un losange ABCD de centre O (fig. 111). Dans le triangle isocèle DAB la médiane AO est en même temps bissectrice de l'angle A et médiatrice de DB. Donc AC et BD sont perpendiculaires. On montrerait de même que BD est bissectrice des angles B et D.

126. Réciproque I. — ***Lorsqu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires c'est un losange.***

Si les diagonales du parallélogramme ABCD (fig. 111) sont perpendiculaires, elles sont alors médiatrices l'une de l'autre. Le point A est équidistant de B et D et AB = AD. Le parallélogramme ABCD est donc un losange.

127. Réciproque II. — ***Lorsqu'une diagonale d'un parallélogramme est bissectrice de l'un de ses angles, ce parallélogramme est un losange.***

Soit le parallélogramme ABCD (fig. 111) tel que AC soit bissectrice de l'angle DAB. L'angle C_2 est égal à l'angle A_1 comme alterne-interne et par suite $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$. Le triangle ADC est isocèle et AD = DC. Le parallélogramme est donc un losange.

128. Axes de symétrie du losange. — Les diagonales du losange ABCD (fig. 111) sont médiatrices l'une de l'autre. En pliant le losange suivant la diagonale BD par exemple les deux parties ABD et CBD coïncident.

Les diagonales d'un losange sont des axes de symétrie du losange.

CARRÉ

129. Définition. — ***Le carré est un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux ou un losange qui a un angle droit*** (fig. 112).

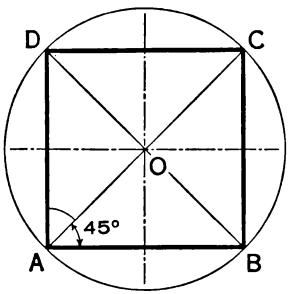


Fig. 112.

Le carré possède donc toutes les propriétés du rectangle et du losange.

130. Théorème. — ***Dans un carré les quatre côtés sont égaux, les quatre angles sont droits et les diagonales sont égales, médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles du carré.***

L'angle formé par une diagonale et un côté est donc égal à 45° et le centre du carré est le centre d'un *cercle circonscrit au carré* (fig. 112). *Le carré possède quatre axes de symétrie : les médiatrices* des côtés opposés comme dans le rectangle et *les diagonales* comme dans le losange.

EXERCICES

73. On considère un parallélogramme ABCD. On porte sur AB et CD deux segments égaux AE = CF et sur AD et BC deux segments égaux AG et CH.

1° Démontrer que EGFH est un parallélogramme.

2° Démontrer que les deux parallélogrammes ABCD et EGFH ont même centre.

74. Soit un triangle ABC. Les hauteurs issues de B et de C se coupent en H. Les perpendiculaires en B à AB et en C à AC se coupent en D.

1° Quelle est la nature du quadrilatère BDCH?
2° Soit M le milieu de BC. Montrer que M est le milieu de HD. Comment faut-il choisir le triangle ABC pour que la droite DH passe par A?
3° Que peut-on dire des angles A et D du quadrilatère ABDC?

75. D'un point D de la base BC d'un triangle ABC on mène les parallèles aux côtés AB et AC. Elles coupent respectivement en E et F la parallèle à BC menée par A.

1° Comparer les triangles ABC et DEF.
2° Comparer les segments CE et BF en grandeur et en direction.
3° La figure obtenue admet-elle un centre de symétrie?

76. 1° Soit un triangle isocèle ABC de sommet A. Par un point M quelconque du segment BC on mène les parallèles aux côtés AB et AC. Elles coupent ces côtés en N et P. Comparer MN + MP au côté AB du triangle.
2° Par un point M de BC extérieur au segment BC, on mène les parallèles aux côtés AB et AC. Elles coupent ces côtés ou leurs prolongements en N et P. Comparer la différence de MN et MP au segment AB.

77. Dans un triangle ABC on mène par un point E de AC les parallèles à AB et BC qui coupent BC en D et AB en F. On suppose que AE = BF.

1° Que peut-on dire du triangle AED?
2° Que représente la droite AD dans le triangle ABC?
3° Construire un segment FE parallèle au côté BC du triangle ABC de façon que AE = BF.

78. Soit un parallélogramme ABCD et une parallèle à la diagonale BD qui coupe les droites AB, BC, CD et DA respectivement en M, N, P et Q.

1° Comparer les segments MP et NQ.
2° Mener par un point donné O une droite qui coupe les côtés du parallélogramme en des points MNPQ de façon que MP = NQ.

79. Deux cercles de centres O et O′ passent par deux points A et B. On mène les diamètres AOC et AO′D et les diamètres BOE et BO′F.

1° Montrer que les points C, B et D sont alignés, de même que les points F, A et E.
2° Comparer les directions de AB, CD et EF et celles de FE, OO′ et CD.
3° OO′ coupe CE en P et DF en Q. Comparer les segments CD, PQ et OO′.

80. On donne un triangle ABC et la hauteur AH. On complète les rectangles AHBD et AHCE. On joint HD qui coupe AB en P et HE qui coupe AC en Q.

1° Que peut-on dire des trois points D, A, E?
2° Montrer que PQ est médiatrice de AH.
3° PQ coupe BD en M et CE en N. Comparer les segments MN, BC et PQ.

81. On considère un parallélogramme ABCD. Les bissectrices de ses angles se coupent en M, N, P et Q.

1° Trouver la nature du quadrilatère MNPQ.
2° Montrer que ses diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme à égale distance des côtés parallèles et que leur longueur est égale à la différence des côtés AB et AD.

82. Dans un triangle ABC rectangle en A la médiatrice de BC coupe le segment AC en D. Soit E le symétrique de D par rapport à A.

1° Comparer les angles E et C du triangle EBC.
2° La médiane AM du triangle ABC coupe BE en F. Comparer EF et EA.
3° Comparer les segments BF et AC.

83. Soit un triangle ABC rectangle en A, la hauteur AH et la médiane AM.

1° Comparer les angles BAH et MAC. Montrer que BAC et HAM ont même bissectrice.

2° La médiatrice de BC coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point D situé sur le demi-cercle qui ne contient pas A; on appelle E et F les projections de D sur AB et AC. Comparer les triangles DBE et DCF.

3° Quelle est la nature du quadrilatère AEDF? Montrer que AD est bissectrice de BAC.

84. Soit un triangle isocèle ABC de sommet A. D'un point M quelconque de BC entre B et C on mène les perpendiculaires MP et MQ aux côtés égaux AB et AC. On prolonge QM d'un segment MR = MP et on projette B en H sur AC.

1° Montrer que BHQR est un rectangle.

2° Comparer BH et MP + MQ; comparer de même les sommes AP + AQ et AB + AH.

85. Soit un triangle rectangle ABC, AH la hauteur relative à l'hypoténuse. On construit extérieurement au triangle les carrés ABDE et ACFG.

1° Montrer que D, A et F sont alignés et que les triangles ABC et AEG sont symétriques par rapport à DF.

2° Soient I et J les projections de D et F sur BC. Comparer BC à la somme DI + FJ.

3° Montrer que AH passe au milieu de EG et que les droites AH, DE et FG sont concourantes.

86. Soit O le milieu de la base BC du triangle rectangle isocèle ABC. Un point M du segment BC se projette orthogonalement en P sur AB, en Q sur AC.

1° Nature du quadrilatère APMQ ? Montrer que son périmètre est indépendant du point M.

2° Montrer que le milieu I de PQ est sur la médiatrice de AO. Quelle est la mesure de l'angle POQ ?

3° Comparer les triangles OBP et OAQ puis les segments OP et OQ. Nature du triangle POQ.

87. On considère deux points A et B et une droite *xy* telle que les distances AH et BK de A et B à *xy* soient égales.

1° Montrer que *xy* passe par le milieu de AB ou est parallèle à AB.

2° Mener les droites *xy* issues d'un point P, ou parallèles à une direction donnée.

3° Rechercher les droites équidistantes des trois sommets d'un triangle ABC.

TRAPÈZE

131. Définition. — ***Un trapèze est un quadrilatère convexe qui a deux côtés parallèles.***

Si le trapèze n'est pas un parallélogramme, les deux côtés parallèles ne sont pas égaux. On les appelle *bases* du trapèze. Les côtés non parallèles sont les *côtés obliques*. La distance des deux bases est la *hauteur* du trapèze. Il résulte de la définition que :

Les deux angles adjacents à un même côté oblique sont supplémentaires.

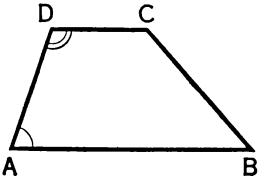


Fig. 113.

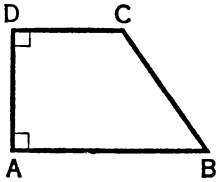


Fig. 114.

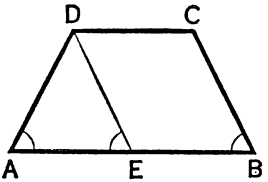


Fig. 115.

Ainsi (fig. 113) les angles A et D sont supplémentaires car ils occupent la position d'intérieurs d'un même côté de AD par rapport aux deux bases parallèles.

RÉCIPROQUEMENT : *Un quadrilatère qui a deux angles consécutifs supplémentaires est un trapèze.*

132. Trapèzes particuliers. — ***Un trapèze rectangle est un trapèze qui a un côté perpendiculaire aux bases. Il a donc deux angles droits*** (fig. 114).

Un trapèze isocèle est un trapèze dont les côtés non parallèles sont égaux (fig. 115).

133. Théorème. — ***Dans un trapèze isocèle les angles adjacents à une même base sont égaux.***

Soit le trapèze isocèle ABCD (fig. 115). Par hypothèse AD = BC et AB est parallèle à CD. Terminons le parallélogramme BCDE. Nous avons BC = DE et par suite AD = DE. Le triangle DAE est isocèle et les angles

DAB et DEA sont égaux. Or les angles DEA et CBA sont égaux comme correspondants. Il en résulte donc que $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$. Les angles A et B du trapèze sont égaux et il en est de même de leurs suppléments C et D.

134. Réciproque. — *Lorsqu'un trapèze a deux angles adjacents à une même base égaux il est isocèle.*

L'égalité des angles A et B (ou C et D) du trapèze ABCD (fig. 115) entraîne celle des angles A et E du triangle DAE obtenu comme précédemment. Le triangle DAE est isocèle et le côté AD est égal à DE et par suite à BC.

135. Axe de symétrie; cercle circonscrit au trapèze isocèle.

Prolongeons les côtés non parallèles du trapèze ABCD jusqu'en M (fig. 116). Les triangles MAB et MCD ont des angles à la base égaux. Ils sont donc isocèles. La bissectrice de l'angle au sommet M est donc médiatrice de AB et de CD et par suite ***c'est un axe de symétrie du trapèze isocèle.***

Notons que réciproquement, lorsqu'on coupe un triangle isocèle MAB par une parallèle DC à la base, on détermine un trapèze isocèle ABCD car il a les angles A et B égaux.

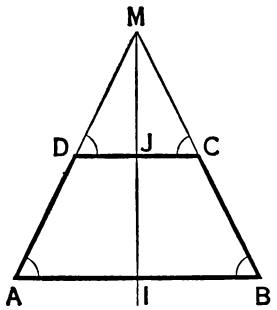


Fig. 116.

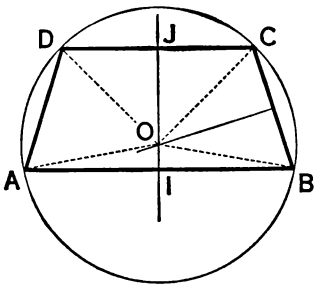


Fig. 117.

La médiatrice du côté oblique BC coupe l'axe de symétrie au point O (fig. 117). On a donc OA = OB, OB = OC et OC = OD. Le point O est équidistant des quatre sommets. ***C'est donc le centre d'un cercle circonscrit au trapèze isocèle.***

PARALLÈLES ÉQUIDISTANTES

136. Théorème. — ***Lorsque des parallèles déterminent des segments égaux sur une première sécante, elles déterminent des segments correspondants égaux sur toute autre sécante.***

Soient AB et CD deux segments égaux déterminés par des parallèles sur une sécante Δ (fig. 118). Pour comparer les segments correspondants A'B' et C'D' déterminés sur la sécante Δ', remplaçons-les par les segments parallèles AE et CF. Nous avons AE = A'B' et CF = C'D' comme côtés opposés de parallélogrammes. Les deux triangles ABE et CDF ont AB = CD, les angles A et C égaux comme correspondants et les angles B et D égaux pour la même raison. Ils sont donc égaux (1er cas). AE et CF sont par suite égaux et par conséquent A'B' et C'D' sont égaux.

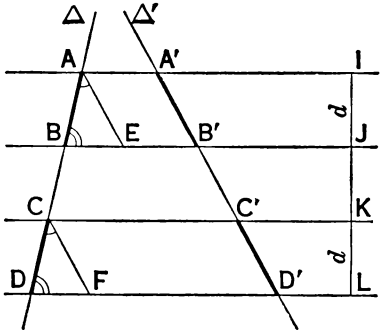


Fig. 118.

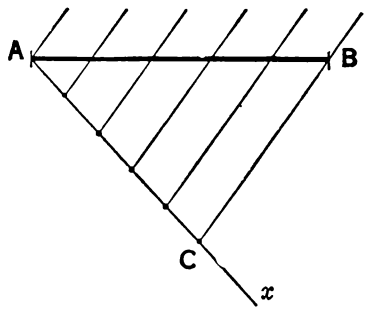


Fig. 119.

137. Parallèles équidistantes. — Si tous les segments déterminés par les parallèles sur la première sécante sont égaux, il en est de même de tous les segments déterminés sur une sécante perpendiculaire à ces parallèles qui sont donc équidistantes (fig. 118).

Il en est ainsi des lignes d'une feuille de papier réglé ou de celles d'un guide-lignes.

138. Partage d'un segment en parties égales — Soit à partager un segment AB en cinq parties égales (fig. 119). Menons une demi-droite auxiliaire A*x* et portons sur cette demi-droite à partir de A, cinq segments consécutifs égaux. Joignons l'extrémité C du dernier au point B et par les points de division de AC menons les parallèles à BC. Ces parallèles sont équidistantes. Elles partagent donc AB en cinq segments égaux. Pratiquement il est inutile de mener la parallèle à BC passant par A.

139. Droite des milieux des côtés d'un triangle. — Soit un triangle ABC (fig. 120). Désignons par M, N et P les milieux des côtés AB, AC et BC, et par M menons la parallèle à BC. D'après la construction précédente, cette parallèle passe par le milieu N de AC. Autrement dit MN est parallèle à BC.

De même NP est parallèle à AB et le quadrilatère MNPB est un parallélogramme. Donc MN est égal à BP soit à la moitié de BC.

D'où le théorème :

Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égal à sa moitié.

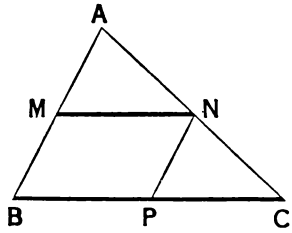


Fig. 120.

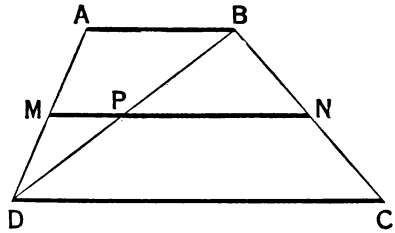


Fig. 121.

140. Base moyenne d'un trapèze. — Soit un trapèze ABCD (fig. 121). Par le milieu M du côté oblique AD menons la parallèle aux bases. D'après le théorème n° 136 cette parallèle passe par le milieu N de BC et par le milieu P de la diagonale BD. D'après le théorème précédent, nous avons :

$$MP = \frac{1}{2} AB \qquad \text{et} \qquad PN = \frac{1}{2} CD.$$

Par suite :

$$MN = MP + PN = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD = \frac{AB + CD}{2}.$$

Ainsi :

Le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et égal à leur demi-somme.

Ce segment se nomme *base moyenne* du trapèze, et passe par les milieux des diagonales AC et BD du trapèze.

DROITES CONCOURANTES DANS UN TRIANGLE

141. Médiatrices — Menons les médiatrices des côtés du triangle ABC (fig. 122). Les médiatrices de AB et AC sont perpendiculaires aux côtés de l'angle BAC et se coupent donc en O (n° 87). Ce point est équidistant de A et B d'une part, de A et C d'autre part (n° 50). Donc OA = OB = OC. Le point O étant équidistant de B et C appartient à la médiatrice de BC. Ainsi :

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Le point O équidistant des trois sommets du triangle, est le centre d'un cercle passant par ces trois points. Ce cercle se nomme *cercle circonscrit* au triangle.

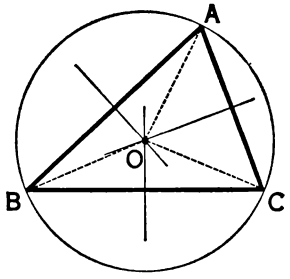


Fig. 122.

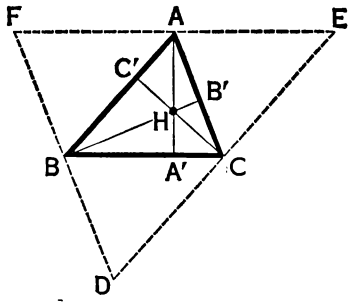


Fig. 123.

142. Hauteurs — Soit un triangle ABC de hauteurs AA', BB' et CC' (fig. 123). Menons par chaque sommet la parallèle au côté opposé; nous obtenons un triangle DEF. Dans les parallélogrammes ABCE et ACBF nous avons BC = AE et BC = FA. Donc FA = AE; A est le milieu de EF. La hauteur AA' perpendiculaire à BC est aussi perpendiculaire au segment parallèle EF en son milieu A. Donc AA' est médiatrice de EF.

On démontrerait de même que BB' et CC' sont les médiatrices de FD et DE.

Les hauteurs du triangle ABC sont les médiatrices du triangle DEF. Elles sont donc concourantes.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

Notons que l'un des quatre points A, B, C et H est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.

143. Médianes — Considérons dans le triangle ABC, les médianes AM et BN (fig. 124). Les points A et M étant situés de part et d'autre de BN ces deux médianes se coupent en un point G situé entre A et M et par suite à l'intérieur du triangle.

Le segment MN est parallèle à AB et égal à sa moitié (n° 139). Le segment DE qui joint les milieux de GA et GB est lui aussi parallèle à AB et égal à sa moitié. Les segments MN et DE sont donc égaux et parallèles et le quadrilatère MNDE est un parallélogramme de centre G (n° 110). Il en résulte que

$$MG = GD = DA.$$

La médiane BN coupe donc AM au point G situé au tiers de MA. On démontrerait de même qu'il en est ainsi de la médiane CP qui passe donc aussi par G. Et par analogie avec AM on peut conclure :

Les trois médianes d'un triangle se coupent en un point situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté correspondant, et appelé centre de gravité du triangle.

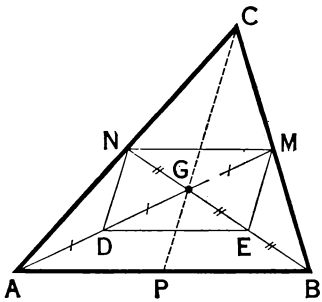


Fig. 124.

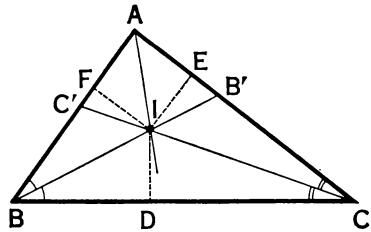


Fig. 125.

144. Bissectrices intérieures. — Considérons dans le triangle ABC les bissectrices intérieures BB′ et CC′ (fig. 125). B et B′ étant de part et d'autre de CC′ ces deux bissectrices se coupent en un point I situé entre B et B′ à l'intérieur du triangle. Le point I situé sur la bissectrice de l'angle ABC est équidistant de BA et de BC, d'où ID = IF. Étant situé sur la bissectrice de l'angle ACB, le point I est équidistant de CB et CA, d'où ID = IE. Il en résulte que ID = IE = IF et le point I est équidistant de AB et AC. Il se trouve donc sur la bissectrice intérieure de l'angle BAC.

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.

Le point de concours est équidistant des trois côtés du triangle. Pour une raison qui sera donnée ultérieurement ce point se nomme *centre du cercle inscrit* au triangle.

145. Bissectrices extérieures. — Considérons dans le triangle ABC (fig. 126), les bissectrices Bu et Cv des angles extérieurs xBC et yCB. Les angles B_1 et C_1 formés avec BC sont aigus car ce sont des moitiés d'angles saillants. Leur somme est donc inférieure à deux droits. Les demi-droites Bu et Cv se coupent par suite en un point J (n° 99) situé dans la portion de plan xBCy intérieure à l'angle xAy.

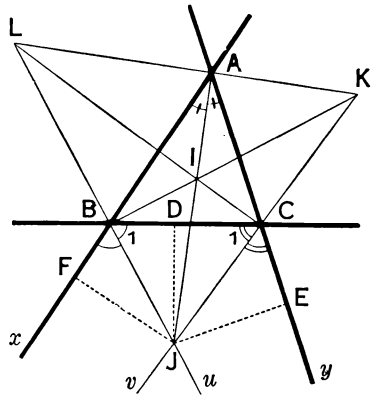


Fig. 126.

En raisonnant comme précédemment nous voyons que J est équidistant de BC et Bx d'une part et de BC et Cy d'autre part. Il est donc équidistant de Bx et Cy c'est-à-dire des côtés de l'angle xAy. Il est donc sur la bissectrice intérieure de cet angle. D'où :

Les bissectrices extérieures de deux angles d'un triangle et la bissectrice intérieure du troisième angle sont concourantes.

Pour une raison donnée ultérieurement ce point se nomme *centre d'un cercle exinscrit* au triangle. Nous obtiendrons de même les points K et L sur les bissectrices intérieures des angles B et C. Il existe ainsi quatre points I, J, K et L équidistants des trois côtés d'un triangle ABC (fig. 126).

146. Remarque. — Il est facile de démontrer que l'un de ces points est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points. Ainsi JA est perpendiculaire en A à KL (n° 28) et est donc une hauteur du triangle JKL. Il en est de même de KB et LC et le point I est l'orthocentre de ce triangle.

EXERCICES

88. Dans un trapèze ABCD la base AB est le double de la base CD. Les côtés obliques se coupent en I et on désigne par M le milieu de AB, par N celui de CD.

1° Nature des quadrilatères CDAM, CDMB et CMDI ? Démontrer que N est le milieu de IM.

2° Montrer que MN passe par le point J commun aux diagonales AC et BD. Comparer les segments JM et JN.

89. M et N sont les milieux des côtés BC et AB du triangle ABC dans lequel AC > AB. Les perpendiculaires menées de C et de M à la bissectrice extérieure de l'angle A coupent la droite AB en D et P.

1° Montrer que $AP = \frac{AC - AB}{2}$.

2° Comparer PN et AC.

3° Comment modifier l'énoncé quand on remplace la bissectrice extérieure de A par la bissectrice intérieure?

90. On joint les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère ABCD.

1° Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ainsi obtenu?

2° Comment faut-il choisir ABCD pour que MNPQ soit un rectangle, un losange ou un carré?

3° Montrer que MP, NQ et le segment RS qui joint les milieux de AC et BD sont concourants et se coupent en leur milieu.

91. Soit un trapèze ABCD, M et N les milieux des côtés non parallèles, AD et BC, P et Q les milieux des bases, R et S les milieux des diagonales :

1° Montrer que les quatre points MNRS sont alignés et que RS est égale à la demi-différence des bases.

2° Montrer que MN et RS ont même milieu O.

3° On suppose que A, B et Q milieu de CD sont fixes. Que peut-on dire de O?

92. Soit un triangle ABC. On projette le sommet A en P et Q sur les bissectrices de l'angle B, et en R et S sur les bissectrices de l'angle C.

1° Nature des quadrilatères APBQ et ARCS.

2° Montrer que P, Q R et S sont alignés sur la droite MN qui joint les milieux de AB et AC.

93. Soit un parallélogramme ABCD, E et F les milieux de AB et CD. Les droites AF et CE coupent la diagonale BD en P et Q. Comparer les segments DP, PQ et BQ.

94. Soient D et E les points qui partagent le côté AC du triangle ABC en trois segments égaux AD, DE et EC. La médiane AM coupe BD en I.

1° Montrer que I est le milieu de AM.

2° Montrer que ID est la moitié de ME et le quart de BD.

3° CI coupe AB en F. Montrer que AF est le tiers de AB.

95. On considère quatre points A, B, C et D. On désigne par M, N, P, Q, R, S les milieux de AB, CD, AC, BD, AD et BC.

1° Montrer que les 3 segments MN, PQ, RS ont même milieu ω.

2° On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que DG passe par ω et que $G\omega$ est le quart de GD. Donner trois autres segments analogues.

96. On mène dans un triangle ABC les médianes AM, BN et CP. La parallèle menée par M à BN coupe la droite NP en Q.

1° Comparer les côtés du triangle AMQ aux médianes du triangle ABC.

2° Comparer les médianes du triangle AMQ aux côtés du triangle ABC.

3° Montrer que la somme des médianes d'un triangle est inférieure au périmètre et supérieure au trois quarts de ce périmètre.

97. 1° Soient C et D les points qui divisent un segment donné AB en trois segments égaux AC, CD et BD. On projette A, B, C, et D en A', B', C' et D' sur une droite qui ne coupe pas le segment AB. Comparer CC' à AA' et DD' puis DD' à CC' et BB'. En déduire la relation

$$3CC' = 2AA' + BB'.$$

2° Montrer que la somme des distances des trois sommets d'un triangle ABC à une droite qui ne traverse pas le triangle est égale au triple de la distance de cette droite au centre de gravité G du triangle.

98. On donne deux points fixes A et B et un troisième point C mobile sur une droite perpendiculaire en I à AB. Les perpendiculaires menées en A à CA et en B à CB se coupent en D. Soit J la projection de D sur AB.

1° Montrer que le milieu O de CD est équidistant de I et J d'une part et de A et B d'autre part.

2° Montrer que le point J est fixe et trouver la figure décrite par D.

3° Soit H le point symétrique de D par rapport au milieu M de AB. Montrer que ce point est sur CI. Que représente-t-il pour le triangle ABC?

99. Les sommets B et C d'un triangle ABC sont fixes et le sommet A est mobile sur un cercle O passant par B et C. Soit H l'orthocentre de ce triangle et D et E les points diamétralement opposés à B et C.

1° Nature des quadrilatères AHCD et AHBE? Comparer en grandeur et direction les segments AH, DC et EB.

2° Soit O' le symétrique du point O par rapport à BC. Nature du quadrilatère HAOO'?

3° Montrer que H se déplace sur un cercle de centre O'. Préciser son rayon.

100. Trois cercles égaux passent par un même point A et se recoupent en B, C et D. On désigne par M, N et P les points diamétralement opposés à A.

1° Montrer que B, C et D sont les milieux des côtés du triangle MNP. Que représente le point A pour chacun des triangles ABC et MNP?

2° Montrer que le cercle circonscrit à BCD est égal à chacun des trois cercles initiaux.

3° Comparer CD au segment joignant les centres des cercles BAC et BAD et AB au segment joignant les centres des cercles ACD et BCD.

101. Dans un triangle ABC dont les sommets sont sur un cercle de centre O et de rayon R, on désigne par AA', BB' et CC' les hauteurs, par H l'orthocentre et par G le centre de gravité, puis par M, N, P les milieux des côtés BC, CA et AB et par α, β et γ les milieux de HA, HB et HC.

1° On mène AO que l'on prolonge jusqu'en D diamétralement opposé à A. Montrer que BC et HD ont même milieu M et que AH recoupe le cercle en H' symétrique de H par rapport à BC.

2° Montrer que G est le centre de gravité du triangle AHD. En déduire que O, G et H sont alignés et que OG est le tiers de OH.

3° Comparer les segments OM et αH et montrer que le segment αM a même milieu ω que OH, et est égal à R. Trouver deux autres segments analogues et montrer que le cercle de diamètre αM, admet également pour diamètres βN et γP et passe par les pieds des hauteurs du triangle ABC (*cercle des neuf points*).

102. 1° On considère un trapèze isocèle ABCD de bases AD et BC; soit CH la perpendiculaire à AD. Montrer que AH est égal à la demi-somme des bases du trapèze et que DH est égal à leur demi-différence.

2° En déduire que la diagonale d'un trapèze isocèle est supérieure à la demi-somme des bases.

3° Les côtés non parallèles AB et CD se coupent en O; M et N désignant les milieux de AB et CD comparer les périmètres des triangles OAC et OMN.

4° Parmi tous les triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés dont la somme est constante quel est celui dont le périmètre est minimum?

103. On considère un triangle ABC et un point M, puis on construit les symétriques P, Q et R de M par rapport à BC, CA et AB.

1° Montrer que la médiatrice de QR passe par A et est symétrique de AM par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle A.

2° Montrer que les symétriques de MA, MB et MC respectivement par rapport aux bissectrices des angles A, B et C sont concourantes en un point M' équidistant de P, Q et R. Comparer les angles BAM et CAM' (M et M' sont appelés *points inverses dans le triangle*). Étudier le cas où M est le centre du cercle circonscrit ou l'orthocentre.

3° Démontrer que le milieu ω de MM' est équidistant des projections D, E et F de M sur les côtés du triangle et des projections D', E' et F' de M' sur ces côtés.

104. Soit un carré ABCD. On joint C au milieu M de AB et D au milieu N de BC.

1° Montrer que CM et DN sont égaux et perpendiculaires en I.

2° Montrer que la perpendiculaire AH à DN passe par le milieu P de CD et que AI est égal au côté du carré. En est-il de même de BH?

3° Comparer les triangles DHP et CIN et en déduire que IN est égal à la moitié de IC, au tiers de IM et au quart de ID.

CERCLE. DROITE ET CERCLE

147. Cercle passant par trois points donnés. — Il existe une infinité de cercles passant par deux points donnés A et B. Le centre d'un tel cercle est équidistant de A et B et se trouve sur la médiatrice de AB (n° 50).

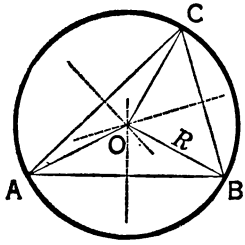


Fig. 127.

Pour qu'un cercle passe par trois points donnés A, B et C, il faut que son centre O soit équidistant de A, B et C. Si A, B et C ne sont pas alignés (fig. 127), les médiatrices de AB, BC et CA sont concourantes et il existe un cercle et un seul répondant à la question (n° 141). Si A, B et C sont en ligne droite, ces trois médiatrices sont parallèles et le problème est impossible. Donc :

Par trois points non en ligne droite il passe un cercle et un seul.

Et il en résulte d'autre part que :

Une droite et un cercle ont au plus deux points communs.
Deux cercles distincts ont au plus deux points communs.

POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

148. Définitions. — ***Une droite est dite sécante à un cercle lorsqu'elle le coupe en deux points, tangente au cercle si elle a un point commun unique avec ce cercle, extérieure si tous ses points sont extérieurs au cercle.***

La position d'une droite xy par rapport au cercle donné de centre O et de rayon R est déterminée par la position du pied H de la perpendiculaire menée du point O à xy, c'est dire par la distance $OH = d$.

149. Théorème. — ***Une droite est sécante, tangente ou extérieure à un cercle suivant que sa distance*** d ***au centre du cercle est inférieure, égale ou supérieure au rayon*** R ***de ce cercle.***

1er Cas : $d < R$. Le pied H de la perpendiculaire menée de O à xy est intérieur au cercle (fig. 128). Lorsqu'un point M parcourt la demi-droite Hx la longueur de l'oblique OM augmente de la valeur $d < R$, à une valeur

aussi grande qu'on le désire. Il existe donc un point A de cette demi-droite et un seul, tel que OA = R. Ce point A est commun au cercle et à la droite *xy*. Il en existe un second B sur H*y* tel que HA = HB (n° 78) et il ne peut en exister d'autre (n° 147). *La droite xy est une sécante au cercle.*

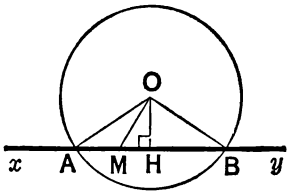


Fig. 128.

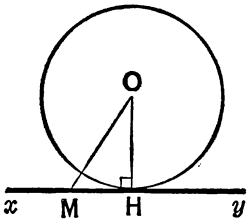


Fig. 129.

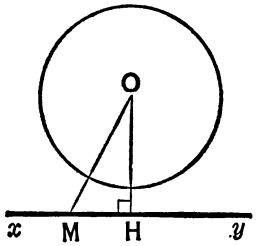


Fig. 130.

2e Cas : $d = R$. Le point H de *xy* est sur le cercle (fig. 129). Tout autre point M de *xy* distinct de H est tel que OM > OH (n° 78), donc OM > R. Le point M est extérieur au cercle. La droite *xy* n'a donc que le seul point H commun avec le cercle. *Elle est tangente au cercle.*

Le point H est appelé *point de contact* de la tangente *xy*.

3e Cas : $d > R$. Le point H est extérieur au cercle (fig. 130). Il en est de même de tout autre point M de *xy* car OM > OH, donc OM > R. *La droite xy est extérieure au cercle.*

Les réciproques de ces propriétés sont vraies : Par exemple, si la droite *xy* est tangente au cercle, on ne peut avoir ni $d > R$, ni $d < R$, car la droite *xy* serait extérieure ou sécante au cercle. Donc $d = R$. Il en résulte que :

$d < R \iff$ droite *sécante* au cercle
$d = R \iff$ droite *tangente* au cercle
$d > R \iff$ droite *extérieure* au cercle

En particulier :

Pour qu'une droite soit tangente à un cercle, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à un rayon, en l'extrémité de ce rayon.

150. Tangente à une courbe quelconque.

On appelle tangente à une courbe en un point A ***de cette courbe, la position limite d'une sécante*** AM ***lorsque le point*** M ***décrivant la courbe, se rapproche indéfiniment du point*** A.

Ainsi (fig. 131) la droite AT est tangente en A à la courbe (C) si lorsque le point M vient se confondre avec le point A, la droite AM vient se confondre avec la droite AT. Inversement la courbe (C) est dite tangente à la droite AT.

Montrons que cette nouvelle définition de la tangente coïncide dans le cas du cercle avec la définition donnée au n° 149.

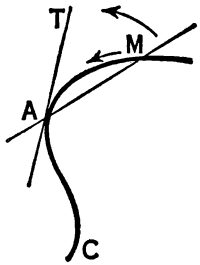


Fig. 131.

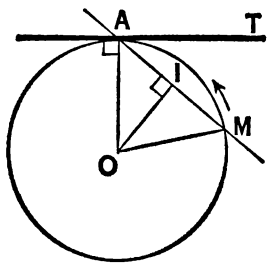


Fig. 132.

Soient sur un cercle O (fig. 132) un point fixe A et un point variable M, et soit I le milieu de AM. La médiane OI du triangle isocèle OAM est en même temps hauteur. Lorsque le point M se rapproche indéfiniment du point A il en est de même du point I et le segment OI vient donc se confondre avec OA. La sécante AM, constamment perpendiculaire à OI vient donc se confondre avec la perpendiculaire AT au rayon OA. L'angle MAT se nomme angle du cercle et de la droite AM.

151. Notion d'enveloppe — Une droite mobile reste en général *tangente à une courbe fixe appelée son enveloppe.* Ainsi une droite *xy* qui reste à une distance R d'un point fixe O enveloppe le cercle de centre O et de rayon R.

Si la droite *xy* passe par un point fixe P, on dit de même que le point P est l'enveloppe de la droite *xy*.

POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

152. Distances d'un point donné aux différents points d'un cercle. — Considérons un cercle de centre O et de rayon R. Soit d'autre part un point donné O′ tel que $OO' = d$, situé sur le diamètre AB soit au-delà de A (fig. 133) soit entre O et A (fig. 134). Le segment O′A est la différence entre OO′ et OA, donc $O'A = |\, d - R \,|$, tandis que $O'B = O'O + OB = d + R$. Montrons que :

Lorsqu'un point M ***parcourt de*** A ***à*** B, ***l'un des demi-cercles de diamètre*** AB ***le segment*** OM ***croît de la valeur*** $O'A = |\, d - R \,|$ ***à la valeur*** $O'B = d + R$ ***et prend une fois et une seule toute valeur intermédiaire.***

Soient M et M′ deux positions du point variable telles que $\widehat{AOM} < \widehat{AOM'}$. Les deux triangles MOO′ et M′OO′ ont : $\widehat{MOO'} < \widehat{M'OO'}$, OM = OM′ et OO′ en commun. Donc (n° 80) on a : O′M < O′M′.

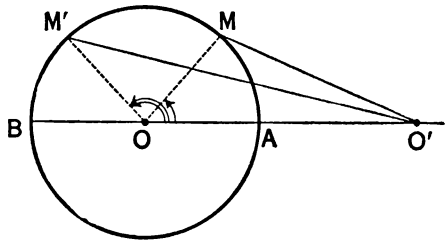


Fig. 133.

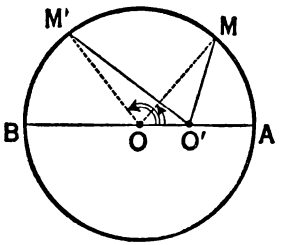


Fig. 134.

Le segment O′M va donc en croissant depuis la valeur O′A jusqu'à la valeur O′B et ne peut reprendre deux fois la même valeur. Par suite :

$$| d - R | \leqslant O'M \leqslant d + R$$

153. Figure formée par deux cercles. — La figure formée par deux cercles est déterminée par la distance des centres O et O′ et par leurs rayons R et R′. Nous poserons OO′ = d et nous supposerons R > R′. Tout diamètre d'un cercle étant un axe de symétrie de ce cercle, on voit que :

La figure formée par deux cercles admet pour axe de symétrie, la droite des centres OO′.

Deux cercles distincts ont au plus deux points communs (n° 147). Le nombre des points communs à deux cercles ne peut donc être que deux, un ou zéro. Étudions ces trois cas.

154. Cercles sécants. — ***Lorsque deux cercles distincts ont un point commun en dehors de la droite des centres, ils en ont un second symétrique du premier par rapport à cette droite. Les deux cercles sont dits sécants.***

Si les cercles O et O′ ont en commun le point A (fig. 135), ils passent tous deux par le point B symétrique de A par rapport à la droite OO′. Ils ne peuvent avoir d'autre point commun sans être confondus (n° 147).

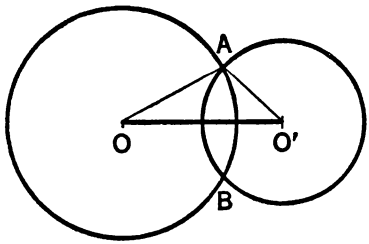


Fig. 135.

Le segment AB est appelé *corde commune* aux deux cercles. Il résulte des propriétés de la symétrie (n° 39) que la droite OO′ est la médiatrice du segment AB et la bissectrice des angles AOB et AO′B.

Dans le triangle AOO′, de côtés OO′ = d, OA = R et O′A = R′, on peut écrire, d'après le théorème n° 70 :

$$\boxed{R - R' < d < R + R'}$$

On peut d'autre part conclure que si deux cercles ont un seul point commun il est situé sur la droite des centres.

155. Cercles tangents. — *Lorsque deux cercles distincts ont un point commun situé sur la droite des centres, ils ont même tangente en ce point et n'ont pas d'autre point commun. Les deux cercles sont dits tangents.*

Le point commun A peut être situé entre O et O′ (fig. 136) ou au-delà de O′ (fig. 137). La droite TT′ perpendiculaire en A à OO′ est tangente à chacun des deux cercles et constitue leur *tangente commune en* A.

Les deux cercles ne peuvent avoir un second point commun B en dehors de OO′ sinon ils en auraient un troisième B′ symétrique de B par rapport à OO′ et seraient confondus. Ils ne peuvent avoir un autre point commun sur OO′ car ils auraient même diamètre et seraient encore confondus.

Le point commun unique A est le *point de contact* des deux cercles.

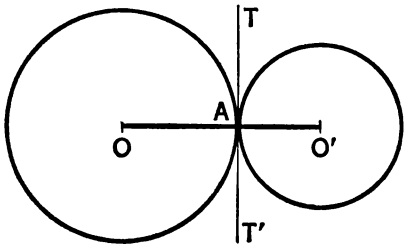


Fig. 136.

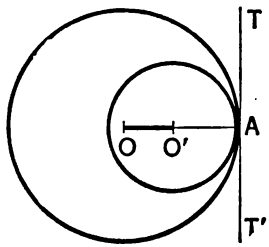


Fig. 137.

1° Si O et O′ sont de part et d'autre de A (fig. 136), les deux cercles sont *tangents extérieurement* et l'on a : OO′ = OA + O′A,

donc : $$\boxed{d = R + R'}$$

On peut voir (n° 152) que tout point M autre que A, du cercle O est tel que O′M > d — R = R′. Il est situé à l'extérieur du cercle O′. De même tout point M′ du cercle O′ est situé à l'extérieur du cercle O, car :

$$OM' > d - R' = R.$$

2° Si O et O′ sont d'un même côté de A (fig. 137), les deux cercles sont *tangents intérieurement* et l'on a : $OO' = OA - O'A$,

donc : $\boxed{d = R - R'}$

On peut voir cette fois que tout point M′ distinct de A, du cercle O′ est à l'intérieur du cercle O car $OM' < R' + d = R$.

156. Cercles extérieurs - Cercles intérieurs — On ne peut joindre un point intérieur à un point extérieur d'un cercle sans le couper. Il en résulte que si deux cercles n'ont pas de point commun, l'un d'eux est situé tout entier soit dans la région intérieure, soit dans la région extérieure à l'autre.

1° Deux cercles sont dits extérieurs si tous les points de chacun d'eux sont extérieurs à l'autre.

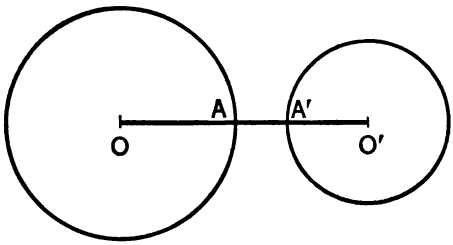


Fig. 138.

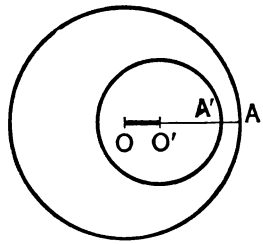


Fig. 139.

2° Deux cercles sont dits intérieurs si tous les points de l'un des cercles sont intérieurs à l'autre.

Dans le premier cas (fig. 138) on a : $OO' = OA + AA' + A'O'$

soit : $d = R + R' + AA'$ donc $\boxed{d > R + R'}$

Dans le second cas (fig. 139) on a : $OO' = OA - O'A' - AA'$

soit : $d = R - R' - AA'$ donc $\boxed{d < R - R'}$

En particulier si $d = 0$, les cercles sont dits *concentriques.*

157. Conclusion. — Chacune des relations trouvées aux n^{os} 154, 155 et 156 est caractéristique de la position correspondante des cercles O et O′. Par exemple, si : $R - R' < d < R + R'$, les cercles O et O′ ne peuvent être ni extérieurs, ni intérieurs, ni tangents car on aurait : $d > R + R'$; $d < R - R'$ ou $d = R \pm R'$. Ils sont donc sécants :

Pour que deux cercles soient sécants il faut et il suffit que la distance de leurs centres soit comprise entre la somme et la différence de leurs rayons.

Il en résulte les équivalences logiques du tableau suivant :

$d > R + R'$	$\Longleftrightarrow$	*Cercles extérieurs*
$d = R + R'$	$\Longleftrightarrow$	*Cercles tangents extérieurement*
$R - R' < d < R + R'$	$\Longleftrightarrow$	*Cercles sécants*
$d = R - R'$	$\Longleftrightarrow$	*Cercles tangents intérieurement*
$d < R - R'$	$\Longleftrightarrow$	*Cercles intérieurs*

MESURE DES ARCS

158. Définition. — Dans un même cercle, ou dans deux cercles égaux, on peut définir :

1° *deux arcs égaux :* ce sont deux arcs superposables. Ainsi (fig. 140) : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$;

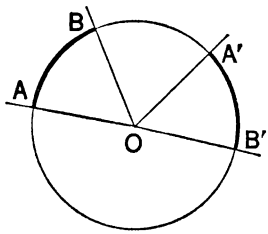


Fig. 140.

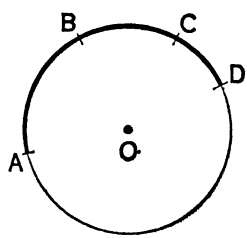


Fig. 141.

2° *la somme de deux ou plusieurs arcs.* Ainsi (fig. 141) :

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} \Longleftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC}$$

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$$

Notons que : $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} \Longrightarrow \overset{\frown}{AC} > \overset{\frown}{AB}$ ou $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AC}$

Les arcs d'un même cercle (ou de deux cercles égaux) sont donc des grandeurs mesurables, si on adopte comme unité d'arc un arc de ce cercle (ou de l'un de ces cercles).

159. Théorème. — ***Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux, deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux et réciproquement deux arcs égaux sont interceptés par des angles au centre égaux.***

1° Superposons les deux angles au centre égaux AOB et A'OB' (fig. 140). Les deux arcs AB et A'B' coïncident : ils sont donc égaux.

2° Si nous supposons égaux les deux arcs AB et A'B', leur superposition entraîne celle des angles au centre correspondants. Les deux angles au centre coïncident, ils sont donc égaux.

160. Théorème. — ***Le rapport de deux arcs d'un même cercle est égal au rapport des angles au centre qui les interceptent.***

Supposons que les deux arcs AB et CD (fig. 142) aient une commune mesure contenue 3 fois dans l'arc AB et 5 fois dans l'arc CD. Nous avons :

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = \frac{3}{5}$$

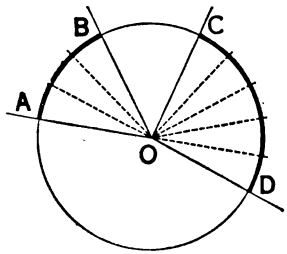


Fig. 142.

Joignons au centre les points de division des deux arcs. Les huit angles au centre ainsi formé sont égaux puisqu'ils interceptent des arcs égaux. On en déduit :

$$\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}} = \frac{3}{5}. \qquad \text{Donc} : \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}}.$$

161. Corollaire. — ***Si on prend pour unité d'arc l'arc intercepté par un angle au centre égal à l'unité d'angle, la mesure d'un arc est la même que celle de l'angle au centre correspondant.***

D'après la définition du n° 12, le rapport $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}}$ est la mesure de l'arc AB en prenant l'arc CD pour unité. De même le rapport $\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}}$ est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en prenant l'angle $\widehat{COD}$ pour unité. Ces deux rapports étant égaux les mesures de l'arc AB et de l'angle AOB sont donc égales.

Notons que : $\widehat{AOB} = \widehat{COD} \iff \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

et $\widehat{AOB} > \widehat{COD} \iff \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$

162. Mesure des arcs. — ***Par convention on prend toujours pour unité d'arc sur un cercle donné l'arc intercepté par l'angle au centre égal à l'unité d'angle.***

On appelle *quadrant* l'arc de cercle intercepté par un angle au centre égal à un droit.

Le quadrant se subdivise en 90 *degrés*, chaque degré en 60 *minutes* et chaque minute en 60 *secondes*.

Il résulte de ce qui précède qu'un arc de 53° 47′ 32″ d'un cercle donné est l'arc intercepté sur ce cercle par un angle au centre de 53° 47′ 32″.

Le quadrant se subdivise également en 100 *grades*, chaque *grade* en 10 décigrades ou 100 *centigrades* et la mesure d'un arc en grades est la même que celle de l'angle au centre correspondant.

Le rapporteur qui sert à mesurer les angles, permet ainsi en mesurant l'angle au centre, la mesure d'un arc donné.

Deux diamètres perpendiculaires divisent le cercle en quatre quadrants et par suite le cercle entier comprend 360° ou 400 grades.

REMARQUE. — Deux arcs égaux ont même mesure, mais inversement deux arcs de 60° par exemple ne seront égaux, c'est-à-dire superposables, que s'ils sont pris sur deux cercles de même rayon.

CORDES

163. Théorème. — ***Le diamètre perpendiculaire à une corde d'un cercle passe par le milieu de la corde et par les milieux des arcs qu'elle sous-tend.***

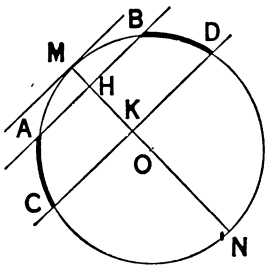


Fig. 143.

Soit MN le diamètre perpendiculaire en H à la corde AB (fig. 143). Ce diamètre est un axe de symétrie du cercle et les points A et B sont symétriques. On en déduit que

$$HA = HB, \quad \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$$

et

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}.$$

164. Corollaire. — ***Deux sécantes parallèles à un cercle interceptent entre elles des arcs égaux.***

Soit CD une corde parallèle à AB; elle est aussi perpendiculaire à MN et les arcs AC et BD sont symétriques par rapport à MN. Ils sont donc égaux.

REMARQUE. — L'énoncé subsiste si l'une des sécantes est remplacée par la tangente en M ou N qui lui est parallèle.

165. Cordes et arcs sous-tendus. — Une corde AB sous-tend deux arcs. Dans le théorème qui suit et dans sa réciproque, nous n'envisagerons que des arcs inférieurs à un demi-cercle.

THÉORÈME. — ***Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux :***

1° Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.

2° Deux arcs inégaux sont sous-tendus par des cordes inégales et le plus grand arc est sous-tendu par la plus grande corde.

1° Faisons coïncider les arcs égaux AB et A'B' (fig. 144). Les cordes AB et A'B' coïncident. Elles sont donc égales.

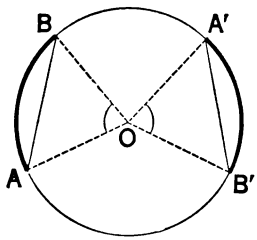


Fig. 144.

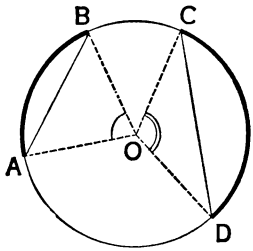


Fig. 145.

2° Si l'arc $\overset{\frown}{CD}$ est plus grand que l'arc AB (fig. 145) l'angle au centre COD est plus grand que l'angle au centre AOB. Les deux triangles COD et AOB ont donc un angle inégal compris entre deux côtés respectivement égaux. Leurs troisièmes côtés sont donc inégaux et CD opposé à l'angle COD est plus grand que AB opposé à l'angle AOB.

166. Réciproque. — ***Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux :***

1° Deux cordes égales sous-tendent des arcs égaux.

2° Deux cordes inégales sous-tendent des arcs inégaux; et la plus grande corde sous-tend le plus grand arc.

1° En effet, si les cordes AB et A'B' sont égales, les arcs AB et A'B' ne peuvent être inégaux car les cordes AB et A'B' seraient inégales.

2° Si la corde CD est plus grande que la corde AB, l'arc CD ne peut être égal ni être inférieur à l'arc AB, car on aurait CD = AB ou CD < AB. Donc $\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{AB}$.

167. Cordes et distances au centre.

THÉORÈME. — ***Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux :***

1° Deux cordes égales sont équidistantes du centre.

2° *Deux cordes inégales sont inégalement distantes du centre; la plus grande est la plus proche du centre.*

1° Si les cordes AB et A'B' sont égales (fig. 146), les deux triangles isocèles OAB et OA'B' ont leurs trois côtés respectivement égaux. Ils sont donc égaux (3e cas) et les hauteurs correspondantes OH et OH' sont égales.

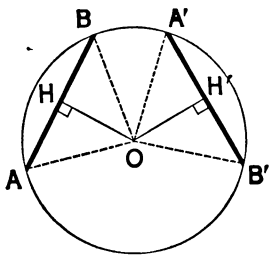


Fig. 146.

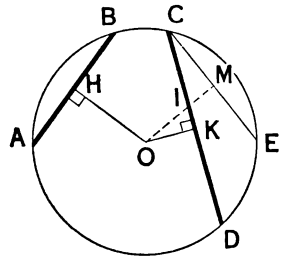


Fig. 147.

2° Si la corde CD est plus grande que la corde AB (fig. 147), l'arc CD est plus grand que l'arc AB. Nous pouvons donc transporter l'arc AB en CE de façon que le point E soit sur l'arc CD. On a CE = AB et par suite OM = OH.

Or les points O et E sont de part et d'autre de CD et il en est de même de O et M. Donc OM coupe CD en I. On en déduit :

$$OK < OI \text{ (n° 79)} \quad \text{et} \quad OI < OM \quad \text{donc} \quad OK < OM$$

soit finalement : $OK < OH$.

168. Réciproque. — *Dans un même cercle ou dans deux cercles égaux :*

1° *Deux cordes équidistantes du centre sont égales.*

2° *Deux cordes inégalement distantes du centre sont inégales; la plus proche du centre est la plus grande.*

1° En effet si les cordes AB et A'B' (fig. 146) sont équidistantes du centre, elles ne peuvent être inégales sinon elles seraient inégalement distantes du centre. On a donc AB = A'B'.

2° Si OK < OH (fig. 147) la corde CD ne peut être ni égale, ni inférieure à la corde AB sans quoi on aurait OK = OH ou OK > OH. Donc CD > AB

EXERCICES

105. On construit sur un cercle de centre O, des arcs de même sens égaux à 108° : AB, BC, CD, etc. Au bout de combien d'opérations retombera-t-on sur le point de départ A? Combien de fois aura-t-on parcouru le cercle?

106. On considère sur un cercle O et dans cet ordre les points A, B, C et D tels que les arcs AB et CD soient égaux.

1° Montrer que les angles AOD et BOC ont même bissectrice. En déduire que AD et BC sont parallèles et que AB = CD.

2° On suppose de plus que AB = BC. Montrer que AC est bissectrice de l'angle BAD.

107. Soient dans un cercle de centre O deux arcs égaux et de même sens AB et CD.

1° Montrer que AOB et BOC ont même bissectrice. Nature du quadrilatère ABCD?

2° Comparer les triangles ABD et ACD puis AC et BD.

3° On suppose de plus que BC = CD. Montrer que AC est bissectrice de BAD. Calculer les angles du quadrilatère ABCD en supposant de plus que l'angle ACD est droit.

108. On donne trois points A, B, C d'un demi-cercle de centre O et M désigne le milieu de l'arc BC.

1° Si A est extérieur à l'arc BC montrer que : $\overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC})$.

2° Si A appartient à l'arc BC, montrer que : $\overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2}|\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}|$

109. On donne un cercle O et un point P intérieur à ce cercle. Une droite variable passant par P coupe le cercle en A et B.

1° Montrer que le milieu de AB appartient à un cercle fixe.

2° Construire la plus grande corde puis la plus petite corde passant par P.

110. Soient deux cercles O et O′ extérieurs. La droite des centres coupe les cercles en MM′ et NN′ (M et N entre O et O′). On joint un point A de O à un point B de O′.

1° Comparer OO′ à la ligne brisée OABO′ puis AB à la ligne brisée AOO′B.

2° Montrer que AB est compris entre MN et M′N′.

111. Deux cordes AB et CD se coupent en P extérieur au cercle O. Soient H et K les milieux de AB et CD. On suppose AB > CD.

1° Comparer les angles HPO et KPO.

2° Comparer PH et PK.

112. Deux cercles se coupent en A et B. Une droite variable passant par A coupe le cercle O en C et le cercle O′ en D. Soient M et N les milieux de AC et AD.

1° Montrer que $MN = \frac{CD}{2}$ (deux cas de figure selon que A est entre C et D ou extérieur à CD).

2° Construire la droite CD de façon que CD ait une longueur donnée 2 *l*. Montrer qu'il existe en général deux droites répondant à la question et qu'elles font des angles égaux avec AB.

3° Soit I le milieu de MN. Montrer que la perpendiculaire en I à CD passe par un point fixe. Construire CD de façon que A soit le milieu de CD.

113. Soit un cercle O et un point P extérieur à ce cercle. On trace le cercle concentrique au premier et de rayon double. Il coupe le cercle de centre P, de rayon PO en C et D. Les droites OC et OD coupent le cercle donné en A et B. Montrer que PA et PB sont tangentes au cercle donné.

114. A quelle figure appartiennent les centres des cercles tangents à une droite donnée D, en un point donné A?

2° Construire celui de ces cercles qui a un rayon donné R ou qui passe par un point donné B.

115. 1° A quelle figure appartiennent les centres des cercles de rayon donné R tangents à une droite donnée D?

2° Construire parmi ces cercles ceux dont le centre appartient à une droite donnée ou à un cercle donné.

116. 1° A quelle figure appartiennent les centres des cercles tangents à deux droites données D et D'.

2° Construire ceux de ces cercles qui ont un rayon donné R.

117. 1° Soit un cercle O. A quelle figure appartiennent les milieux M des cordes de ce cercle ayant une longueur donnée l?

2° Construire celle de ces cordes qui passent par un point donné P.

118. On donne un cercle O et un point P. Une droite variable issue de P coupe le cercle en A et B.

1° A quelle figure appartiennent les milieux M des cordes AB?

2° Construire la sécante PAB pour que AB = l, longueur donnée.

119. On trace dans un triangle ABC les cercles de diamètres AB et AC, et on trace la droite qui joint les milieux M et N de AB et de AC et qui coupe le premier cercle en D et E et le second en F et G.

1° Montrer que BD et BE sont les bissectrices de l'angle B, CF et CG celles de l'angle C.

2° Les quatre points D, E, F et G sont les projections de A sur les bissectrices des angles B et C.

120. On construit sur la base BC du triangle ABC deux points D et E tels que BD = BA et CE = CA. (2 possibilités pour D et pour E.)

1° Montrer que le centre O du cercle ADE est sur une des bissectrices de l'angle A.

2° Que représente le point O pour le triangle ABC?

121. D'un point variable B d'un cercle de centre O, on mène la perpendiculaire BH à la tangente xy au point A.

1° Montrer que BA est bissectrice de l'angle OBH.

2° La bissectrice extérieure de l'angle OBH passe par un point fixe.

3° Quelle figure décrit le point M intersection de BH et de la bissectrice de l'angle AOB?

122. Deux cercles égaux de centres O et O' sont sécants en A et B. On mène les rayons OC et O'D parallèles et de même sens. Soient B' et D' les points diamétralement opposés à B et D dans le cercle O'.

1° Montrer que AB, OO' et CD' ont même milieu I.

2° Montrer que l'un des points A, B, C, D est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres.

3° Quel est l'angle de la tangente en A au cercle O et de la droite BB'?

ANGLE INSCRIT

169. Définition. — ***On appelle angle inscrit à un cercle, l'angle formé par deux cordes issues d'un même point de ce cercle.***

Ainsi l'angle BAC (fig. 148) est inscrit au cercle O. L'arc BC compris entre les côtés de l'angle inscrit est l'*arc intercepté* par cet angle. L'angle au centre BOC qui intercepte le même arc est l'*angle au centre correspondant* à l'angle inscrit BAC. Cet angle au centre peut être saillant, plat ou rentrant suivant que l'arc intercepté est inférieur, égal ou supérieur à un demi-cercle.

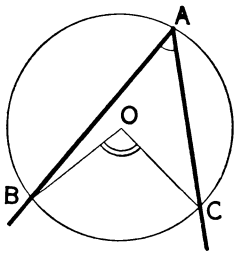


Fig. 148.

170. Théorème. — ***Un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre correspondant.***

1er Cas. — *Un des côtés de l'angle inscrit est un diamètre* (fig. 149).

Le triangle OAB est isocèle; donc $\widehat{A} = \widehat{B}$. L'angle extérieur BOC est égal à la somme des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ (no 95). D'où : $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{B} = 2\widehat{A}$.

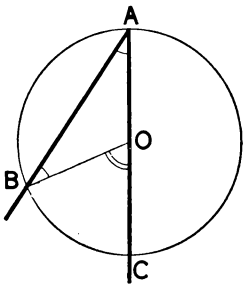


Fig. 149.

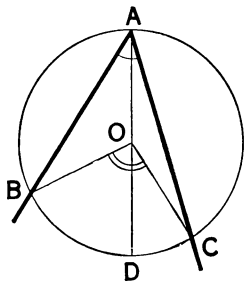


Fig. 150.

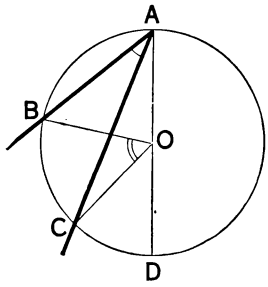


Fig. 151.

L'angle A est donc égal à la moitié de $\widehat{BOC}$. L'angle inscrit BAC est donc la moitié de l'angle au centre correspondant.

2e Cas. — *Le centre du cercle est intérieur à l'angle inscrit* (fig. 150).

Soit AD le diamètre passant par A. D'après ce qui précède :

$$\overset{\frown}{BOD} = 2\,\overset{\frown}{BAD} \qquad \overset{\frown}{DOC} = 2\,\overset{\frown}{DAC}.$$

D'où par addition :

$$\overset{\frown}{BOD} + \overset{\frown}{DOC} = 2(\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{DAC})$$

$$\overset{\frown}{BOC} = 2\,\overset{\frown}{BAC}.$$

3e Cas. — *Le centre du cercle est extérieur à l'angle inscrit* (fig. 151).

Soit AD le diamètre passant par A. On peut de même écrire :

$$\overset{\frown}{BOD} = 2\,\overset{\frown}{BAC} \qquad \overset{\frown}{COD} = 2\,\overset{\frown}{CAD}.$$

D'où par différence :

$$\overset{\frown}{BOD} - \overset{\frown}{COD} = 2(\overset{\frown}{BAD} - \overset{\frown}{CAD})$$

$$\overset{\frown}{BOC} = 2\,\overset{\frown}{BAC}.$$

Dans tous les cas, l'angle inscrit est donc égal à la moitié de l'angle au centre correspondant. On peut dire encore :

L'angle inscrit a même mesure que la moitié de l'arc qu'il intercepte.

Cet énoncé, équivalent au précédent, suppose la convention du n° 156.

171. Corollaires. — 1° *Deux angles inscrits qui interceptent le même arc (ou deux arcs égaux) sont égaux.*

Ils ont en effet même mesure. Ainsi (fig. 152) les angles AMB et AM'B sont égaux.

2° *Deux angles égaux inscrits dans un même cercle interceptent des arcs égaux.*

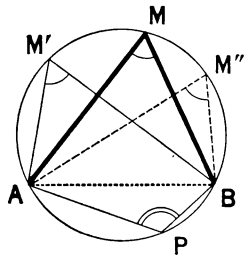


Fig. 152.

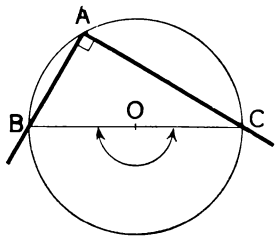


Fig. 153.

Ces arcs sont en effet interceptés par des angles au centre égaux.

En particulier :

La bissectrice d'un angle inscrit passe par le milieu de l'arc intercepté par cet angle.

3° *Tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit et réciproquement un angle droit inscrit intercepte un demi-cercle.*

En effet si l'angle au centre correspondant BOC (fig. 153) est un angle plat, sa moitié est un angle droit et réciproquement. Nous retrouvons la propriété déjà vue au n° 122.

4° *Deux angles inscrits qui interceptent les deux arcs sous-tendus par une même corde sont supplémentaires.*

Soient les deux angles inscrits AMB et APB dont les sommets sont de part et d'autre de la corde AB (fig. 152). Les deux angles interceptent respectivement les arcs APB et AMB dont la somme vaut 360°. La somme des deux angles est donc égale à 180°.

172. Angles formés par une tangente et une corde issue du point de contact.

Considérons (fig. 154) la tangente $x'Ax$ au point A et une corde AB issue du point. L'angle BAx est un angle inscrit particulier formé par la corde AB et la demi-tangente Ax. L'arc intercepté est l'arc AB compris entre les côtés de cet angle et l'angle au centre correspondant est l'angle AOB qui intercepte le même arc AB.

173. Théorème. — *L'angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact est égal à la moitié de l'angle au centre correspondant.*

Menons la bissectrice OI de l'angle au centre AOB correspondant à l'angle xAB. Cette bissectrice est la hauteur du triangle isocèle OAB. D'autre part OA est perpendiculaire à la tangente Ax. Les deux angles aigus IOA et BAx ont leurs côtés perpendiculaires, ils sont égaux. L'angle aigu BAx est donc égal à la moitié de l'angle saillant BOA.

On démontrerait de même que l'angle obtus BAx' est égal à la moitié de l'angle rentrant BOA. On peut aussi remarquer que BAx', supplément de BAx, est égal à JOA, supplément de IOA.

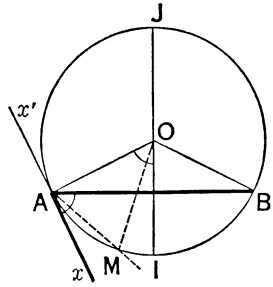


Fig. 154.

On peut en conclure :

Un angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact est égal à l'angle inscrit qui intercepte le même arc et il a même mesure que la moitié de l'arc intercepté.

174. Remarque. — Le théorème précédent peut d'ailleurs se déduire du théorème relatif à l'angle inscrit (n° 170). Considérons l'angle inscrit BAM (fig. 154). Il est égal à la moitié de l'angle au centre BOM. Si le point M vient se confondre avec le point A la droite AM vient se confondre avec la tangente Ax et l'angle BOM vient se confondre avec l'angle BOA. L'égalité

$$\widehat{BAM} = \frac{1}{2}\widehat{BOM} \quad \text{devient donc} \quad \widehat{BAx} = \frac{1}{2}\widehat{BOA}.$$

175. Angle intérieur. — *On appelle angle intérieur à un cercle, un angle dont le sommet est à l'intérieur du cercle.*

Il en est ainsi de l'angle BAC (fig. 155), dont les côtés coupent le cercle en deux points B et C. Désignons par B′ et C′ les points de rencontre des prolon-

gements de BA et CA avec le cercle. L'angle B'AC' est égal à l'angle BAC. Les deux arcs BC et B'C' compris l'un entre les côtés de BAC l'autre entre les côtés de B'AC' sont les arcs interceptés par les côtés de l'angle intérieur BAC (ou par les côtés de l'angle intérieur B'AC').

176. Théorème. — ***Un angle intérieur est égal à la somme des angles inscrits qui interceptent les mêmes arcs.***

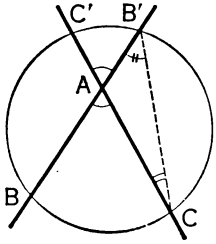


Fig. 155.

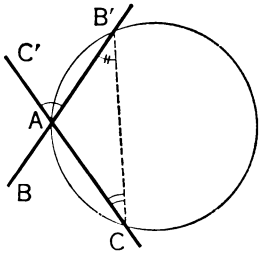


Fig. 156.

Menons la corde B'C. L'angle BAC extérieur au triangle AB'C est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents B' et C. Or ces deux angles sont des angles inscrits qui interceptent les arcs B'C' et BC. Ce sont précisément les arcs interceptés par les côtés de l'angle intérieur BAC.

Ce théorème peut aussi s'énoncer :

Un angle intérieur est égal à la demi-somme des angles au centre qui interceptent les mêmes arcs, et il a même mesure que la demi-somme des arcs interceptés.

177. Remarque. — Le théorème précédent est encore applicable quand le point A est sur le cercle (fig. 156). L'angle BAC est égal à la somme des angles inscrits B' et C qui interceptent les arcs B'A et AC. Ces deux arcs ont pour somme l'arc B'AC.

L'angle BAC est donc égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte l'arc B'AC, intercepté par l'angle BAC. Le théorème (n° 170) se généralise donc ainsi.

Un angle qui a son sommet sur un cercle est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

178. Angle extérieur. — ***On appelle angle extérieur à un cercle un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle et dont les côtés coupent le cercle.***

Il en est ainsi de l'angle A (fig. 157) dont l'un des côtés coupe le cercle en B et B' et l'autre en C et C'. Les deux arcs BC et B'C' compris entre les côtés de l'angle extérieur sont les arcs interceptés par cet angle.

179. Théorème. — ***Un angle extérieur est égal à la différence des angles inscrits qui interceptent les mêmes arcs.***

Menons la corde BC′. L'angle BC′C extérieur au triangle ABC′ est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents. D'où :

$$\widehat{BC'C} = \widehat{B'BC'} + \widehat{BAC}$$

et :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BC'C} - \widehat{B'BC'}.$$

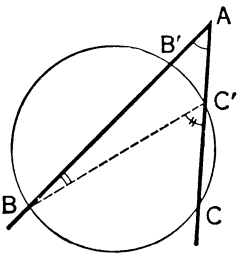


Fig. 157.

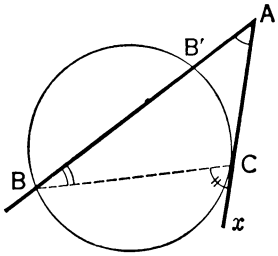


Fig. 158.

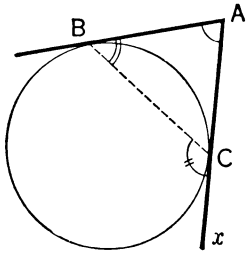


Fig. 159.

Les deux angles BC′C et B′BC′ sont les angles inscrits qui interceptent les arcs BC et B′C′. L'angle extérieur BAC est donc égal à leur différence.

Ce théorème peut s'énoncer :

Un angle extérieur est égal à la demi-différence des angles au centre qui interceptent les mêmes arcs et il a même mesure que la demi-différence des arcs interceptés.

180. Cas particulier. — Le théorème précédent subsiste si l'un des côtés ou si les deux côtés de l'angle extérieur deviennent tangents au cercle.

Ainsi (fig. 158) on a comme précédemment :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCx} - \widehat{ABC}$$

et l'angle BC*x* est égal à l'angle inscrit qui intercepte l'arc BC (n° 173). De même (fig. 159) on a :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCx} - \widehat{ABC}.$$

Les deux angles BC*x* et ABC sont égaux aux angles inscrits qui interceptent les arcs déterminés par la corde BC.

EXERCICES

123. On donne un triangle ABC inscrit dans un cercle O. Les bissectrices intérieures des angles B et C recoupent le cercle en D et E et la droite DE coupe AB et AC en F et G.

1° Montrer que D et E sont les milieux des arcs AB et AC.

2° Démontrer que le triangle AFG est isocèle.

124. Un triangle ABC est inscrit dans un cercle O. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe le cercle en M; D et E sont les projections de M sur AB et AC.

1° Montrer que BD = EC.

2° Prouver que $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

3° Évaluer l'angle AMO en fonction de la différence des angles B et C du triangle.

125. On donne un cercle de centre O, de diamètre AB et OC le rayon perpendiculaire à AB. La droite qui joint C à un point P du segment AB coupe le cercle en D et la tangente en D coupe AB en E.

1° Comparer les angles EPD et EDC.

2° En déduire que EP = ED.

126. Les hauteurs AA', BB' et CC' d'un triangle ABC se coupent en H.

1° Montrer que les points CA'HB' sont sur un même cercle, ainsi que les points BA' HC'. Démontrer que AA' et BC sont bissectrices de l'angle B'A'C'.

2° Que représentent les points A, B, C et H pour le triangle A'B'C'?

3° Soient P et Q les projections de A' sur AB et AC. Montrer que A, P, A', Q sont sur un même cercle et que PQ et B'C' sont parallèles.

127. Soient deux cercles sécants en A et B. Une droite passant par A coupe ces cercles en C et D.

1° Montrer que les angles du triangle BCD conservent une valeur constante quand CD tourne autour de A. Comparer l'angle B de ce triangle à l'angle des deux rayons aboutissant en B.

2° Que peut-on dire du triangle BCD quand les cercles O et O' sont égaux?

3° Le triangle BCD peut-il être rectangle en B?

128. Deux cercles O et O' se coupent en A et B. Deux sécantes passant par A coupent le cercle O en C et D et le cercle O' en C' et D'. Les droites CD et C'D' se coupent en P.

1° Montrer que l'angle CPC' a une valeur constante. Le comparer à l'angle CBC'.

2° Que devient la propriété précédente quand la sécante CC' vient se confondre avec la sécante DD'?

129. Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, I le point de rencontre des bissectrices intérieures des angles B et C et J le point de rencontre de leurs bissectrices extérieures. Montrer que :

1° A, I, J sont alignés et que AI coupe le cercle O en un point M milieu de l'arc BC.

2° Le triangle MBI est isocèle ainsi que le triangle MBJ.

3° Les quatre points B I C J sont sur un cercle de centre M.

130. Un triangle ABC est inscrit dans un cercle O. Les bissectrices intérieures des angles A, B et C se coupent en I et coupent le cercle O en A', B' et C'.

1° Montrer que les triangles B'AI et C'AI sont isocèles. Que représente la droite B'C' pour le segment AI et le point I pour le triangle A'B'C'?

2° Montrer que les angles B'AC et C'AA' sont complémentaires.

131. Un triangle équilatéral ABC est inscrit dans un cercle O. Soit M un point de l'arc BC. Sur MA on porte MD = MB.

1° Que peut-on dire du triangle MBD?

2° Comparer les triangles BDA et BMC.

3° Montrer que MA = MB + MC.

132. On donne un cercle fixe O et une droite fixe D, un point fixe A sur O et un point fixe B sur D. Un cercle variable passant par A et B recoupe le cercle O en C et la droite D en E.

1° Comparer les angles ACE et ABE.

2° Démontrer que la droite variable CE passe par un point fixe K du cercle O.

3° BA recoupe le cercle O en F. Comparer les directions de FK et de la droite D.

133. On donne un cercle O et un point fixe A de ce cercle. Un angle aigu xAy de grandeur constante tourne autour de A et ses côtés recoupent le cercle en B et C.

1° Montrer que la corde BC a une longueur constante.

2° Les hauteurs issues de B et C dans le triangle ABC se coupent en H et coupent le cercle en P et Q. Montrer que les points P et Q sont fixes et comparer les longueurs AH, AP et AQ.

3° Quelle figure décrit le point H ? Comparer l'angle aigu de BH et HC à l'angle xAy.

134. A et B sont deux points fixes d'un cercle O, M un point variable du cercle sur l'un des arcs AB de ce cercle. On porte sur MA et MB deux longueurs constantes MA' et MB'. Démontrer que :

1° Le triangle MA'B' reste égal à lui-même quand M décrit l'un des arcs AB.

2° La parallèle menée par M à A'B' passe par un point fixe et la droite A'B' reste tangente à un cercle fixe.

3° La hauteur MH du triangle MA'B' passe par un point fixe et la médiatrice de A'B' reste tangente à un cercle fixe.

135. Dans un triangle isocèle ABC on trace les cercles ayant pour diamètres les côtés égaux AB et AC qui coupent AC et AB en H et K et une droite Δ issue de A en D et E.

1° Montrer que BH et CK sont hauteurs du triangle et D et E les projections de B et C sur Δ.

2° Comparer les angles BAD et KCE, puis les segments BD et KE ainsi que CE et HD.

3° On désigne par I le milieu de BC. Montrer que le triangle IDE est isocèle et comparer ses angles à ceux du triangle ABC.

136. Un cercle variable passe par B et C et recoupe les côtés du triangle ABC en M et N.

1° Montrer que MN reste parallèle à la tangente en A au cercle ABC.

2° On mène par B la parallèle à MN coupant AC en D. Montrer que le cercle BCD est tangent à AB.

137. On mène dans un cercle de centre O, deux cordes rectangulaires AC et BD se coupant en P. On désigne par M, N, Q et R les milieux de AB, BC, CD et DA et par H, I, K et J les projections de P sur ces segments. Démontrer que :

1° Les points M, P et K sont alignés. Donner trois autres groupes analogues.

2° MN et QR sont égaux et ont même milieu ω que le segment OP.

3° Les huit points M, N, Q, R, H, I, J et K sont sur un même cercle de centre ω.

138. D'un point M d'un cercle, on mène la perpendiculaire MC au diamètre AB; puis on décrit les cercles de diamètres AC et BC qui coupent MA et MB en D et E.

1° Quelle est la nature du quadrilatère MDCE? Montrer que DE est tangent aux cercles ADC et BEC.

2° Démontrer que DE est parallèle à la tangente en M au cercle ABM.

139. On considère un triangle isocèle ABC de sommet A et une corde AM variable du cercle circonscrit.

Soient D la projection de B sur AM et P l'intersection de BD et CM.

1° Comparer les angles DMP et DMB aux angles B et C du triangle ABC.

2° Montrer que P est symétrique de B par rapport à AM.

3° Comparer AP et AB et en déduire la figure décrite par le point P.

140. Deux cercles O et O' sont tangents en A. On mène un diamètre MN du premier et la droite AN qui recoupe le second en P, puis les tangentes en M et P.

1° Comparer les directions de OM et O'P puis celles des tangentes en M et P.

2° On suppose que la tangente en M coupe le cercle O' en B et C. Montrer que AM et AN sont les bissectrices de l'angle BAC.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

181. Définition. — ***Un lieu géométrique est la figure formée par l'ensemble des points possédant une même propriété.***

Considérons le cercle de centre O et de rayon donné R (fig. 160). Tout point M de ce cercle est à une distance $d = R$ du centre O. Tout point intérieur A en est à une distance $d < R$ et tout point extérieur en est à une distance $d > R$.

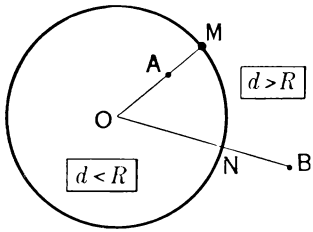


Fig. 160.

Les points du cercle sont donc les seuls points qui possèdent la propriété d'être à la distance R du centre O de ce cercle :

Le lieu géométrique des points situés à une distance donnée R *d'un point fixe* O, *est le cercle de centre* O *et de rayon* R.

On en déduit la définition suivante du cercle :

Le cercle est le lieu géométrique des points du plan situés à une distance donnée d'un point donné appelé centre du cercle.

182. Remarques — 1° Pour établir que l'ensemble de points E est le lieu géométrique des points M possédant la propriété $\mathcal{P}$, il faut montrer que tout point M possédant la propriété $\mathcal{P}$ appartient à l'ensemble E et que, réciproquement, tout point M appartenant à l'ensemble E possède la propriété $\mathcal{P}$, c'est-à-dire :

$$\text{M possède la propriété } \mathcal{P} \iff \text{M} \in \text{E}$$

On peut dire encore : la propriété $\mathcal{P}$ est une *propriété caractéristique* des points de l'ensemble E.

2° On peut aussi procéder de la façon suivante : Démontrer que tout point M de l'ensemble E possède la propriété $\mathcal{P}$, et que tout point N n'appartenant pas à l'ensemble E ne possède pas la propriété $\mathcal{P}$. Les exemples suivants illustrent ces deux méthodes :

183. Lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés.

Théorème. — *Le lieu géométrique des points équidistants des extrémités d'un segment est la médiatrice de ce segment.*

Nous avons en effet démontré (n° 50) l'équivalence suivante (fig. 161) :

$$MA = MB \iff M \in xy, \text{ médiatrice de AB}$$

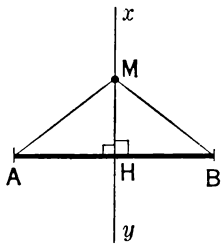


Fig. 161.

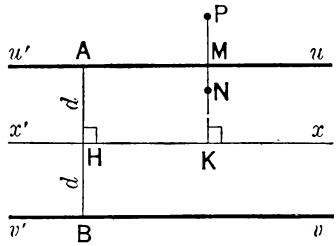


Fig. 162.

184. Lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une droite donnée.

Théorème. — *Le lieu géométrique des points situés à une distance d d'une droite donnée $x'x$ se compose de deux parallèles à cette droite.*

En un point quelconque H de la droite donnée $x'x$ menons les segments perpendiculaires à $x'x$: $HA = HB = d$ (longueur donnée). Puis par A et B, menons les droites $u'u$ et $v'v$ parallèles à $x'x$ (fig. 162).

1° Tout point M de $u'u$ (ou $v'v$) est à la distance $MK = d$ de $x'x$, car le quadrilatère MAHK est un rectangle et :

$$MK = AH = d.$$

2° Tout point N intérieur à la bande $(u'u, v'v)$ est à une distance de xy inférieure à d : $KN < MK$, et tout point P extérieur à cette bande est à une distance de xy supérieure à d : $PK > MK$.

185. Lieu géométrique des points équidistants de deux droites données.

1° ***Droites sécantes.*** — Pour qu'un point M (fig. 163) soit équidistant de deux droites concourantes $x'x$ et $y'y$ il faut et il suffit qu'il appartienne à l'une des droites $u'u$ ou $v'v$ formées par les bissectrices des angles déterminés par les droites données (n° 65) :

$$MA = MB \iff M \text{ sur } Ou \text{ ou } Ov$$

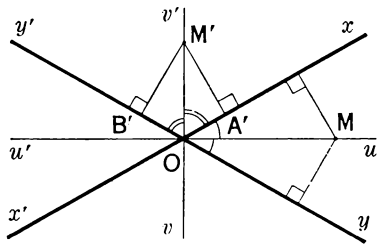


Fig. 163.

Ainsi :

Le lieu géométrique des points équidistants de deux droites concourantes se compose de deux droites perpendiculaires, bissectrices des angles formés par ces deux droites.

Le lieu se réduit à Ou, bissectrice de l'angle xOy lorsqu'on astreint le point M à être intérieur à l'angle xOy.

2° ***Droites parallèles.*** — 2 d désigne la distance des droites parallèles $u'u$ et $v'v$ (fig. 162). Pour qu'un point M soit équidistant de ces deux droites, il faut et il suffit qu'il soit à la distance d de chacune d'elles. Le lieu de ce point est la droite $x'x$, intérieure à la bande ($u'u$, $v'v$) et, à la distance d de l'une de ces droites. C'est l'axe de symétrie de la bande ($u'u$, $v'v$) :

Le lieu géométrique des points équidistants de deux droites parallèles est l'axe de la bande déterminée par ces deux droites.

ARC CAPABLE

186. Définition. — Soit un segment AB et un point M situé hors de la droite AB. Désignons par α la valeur de l'angle AMB. On dit que *du point* M *on voit le segment* AB *sous l'angle* α (fig. 164).

187. Théorème. — ***Le lieu géométrique des points du plan situés d'un même côté d'une droite, d'où l'on voit un segment*** AB ***de cette droite sous un angle donné*** α ***est un arc de cercle d'extrémités*** A ***et*** B ***appelé arc capable de l'angle*** α.

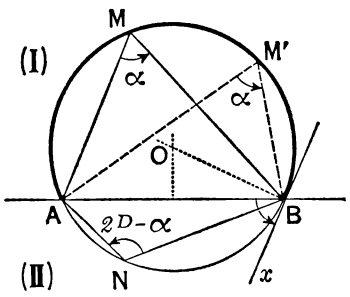


Fig. 164.

1° Soit M un point du lieu (fig. 164). Construisons le cercle de centre O circonscrit au triangle AMB, puis menons la demi-droite Bx tangente en B à ce cercle et située dans le demi-plan II qui ne contient pas M. L'angle ABx est égal à α et par conséquent la demi-droite Bx est indépendante du point M. Il en est de même du point O situé sur la perpendiculaire en B à Bx et sur la médiatrice de AB, et par suite du cercle AMB. Autrement dit tout point du lieu se trouve sur le cercle tracé.

2° Réciproquement, tout point M′ de l'arc AMB est un point du lieu car les angles inscrits AM′B et AMB sont égaux à α.

Il en résulte que l'arc AMB est le lieu des points du demi-plan I d'où l'on voit AB sous l'angle α. C'est l'arc capable de l'angle α décrit sur AB comme

corde. On démontrerait de même qu'il existe dans le demi-plan II un second arc capable symétrique du précédent par rapport à la droite AB.

188. Construction de l'arc capable. — Si le segment AB et l'angle α sont donnés, il suffit de construire dans le demi-plan II l'angle ABx égal à α. Puis mener la perpendiculaire en B à Bx et la médiatrice de AB. Ces deux droites, perpendiculaires aux côtés d'un angle, sont concourantes en un point O, qui est le centre de l'arc capable.

189. Remarque. — *L'arc* ANB *non utilisé du cercle* O *est l'arc capable de l'angle* $2^D - \alpha$ *situé dans le demi-plan* II. On sait en effet que les angles AMB et ANB sont supplémentaires (n° 171, 4°).

190. Corollaire. — ***Le lieu des points du plan d'où l'on voit un segment*** AB ***sous un angle droit est le cercle de diamètre*** AB (fig. 165)

En effet si l'angle AMB est égal à un droit, l'angle AOB est un angle plat et le point O est au milieu de AB (ce qui résulte d'ailleurs du n° 122).

Notons que c'est le seul cas où les deux arcs capables décrits sur AB comme corde appartiennent à un même cercle.

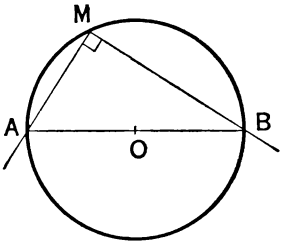


Fig. 165.

191. Régions limitées par l'arc capable.

1° Soit P un point du demi-plan I intérieur au cercle O (fig. 166). L'angle APB a même mesure que la demi-somme des arcs interceptés dont l'un ANB est égal à 2 α.

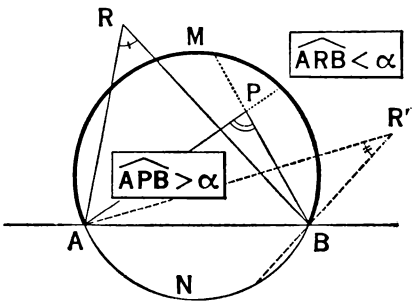


Fig. 166.

Donc $\widehat{APB} > \alpha$.

2° Soit R un point du demi-plan I extérieur au cercle O. L'angle ARB a même mesure que la demi-différence des arcs interceptés, dont le plus grand est selon le cas de figure soit l'arc ANB, soit un arc inférieur. Dans tous les cas :

$$\widehat{ARB} < \alpha.$$

192. Quadrilatère inscriptible. — Lorsque tous les sommets d'un polygone sont situés sur un cercle, le *cercle est circonscrit au polygone* et *le polygone est inscrit dans le cercle.*

193. Théorème I. — ***Pour qu'un quadrilatère croisé soit inscriptible dans un cercle il faut et il suffit que deux angles opposés soient égaux.***

Si le quadrilatère croisé ABCD est inscrit dans un cercle les angles inscrits A et C interceptent le même arc, ils sont donc égaux (fig. 167).

Si par hypothèse les angles A et C sont égaux, les points A et C situés d'un même côté de BD appartiennent au même arc capable décrit sur BD comme corde. Le quadrilatère ABCD est donc inscriptible.

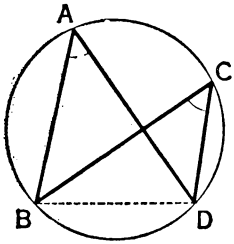


Fig. 167.

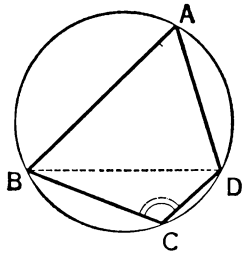


Fig. 168.

194. Théorème II. — ***Pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible il faut et il suffit que ses angles opposés soient supplémentaires.***

Si le quadrilatère convexe ABCD est inscrit dans un cercle on voit des points A et C la corde BD sous deux angles supplémentaires (fig. 168).

Supposons que dans le quadrilatère convexe ABCD les angles A et C soient supplémentaires et traçons le cercle ABD. L'arc BD qui ne contient pas A est capable de l'angle 2^D — A (n° 189). Il se trouve du même côté que C par rapport à BD. L'angle C étant le supplément de A son sommet appartient à cet arc et le quadrilatère est inscriptible.

195. Remarque. — ***Un quadrilatère convexe ou croisé qui a deux angles opposés droits est inscriptible.***

Cela résulte des théorèmes précédents. De plus le centre du cercle est le milieu de la diagonale qui joint les deux autres sommets (n° 190).

APPLICATIONS

196. Exemple de lieu géométrique. — *On considère un cercle* O *et un point fixe extérieur* A. *On mène par* A *une sécante variable qui coupe le cercle en* B *et* C. *Trouver le lieu géométrique du milieu* M *de la corde* BC (fig. 169).

1° Le milieu M de la corde est situé sur le diamètre perpendiculaire à BC. L'angle OMA étant droit, le point M appartient au cercle fixe de diamètre OA et plus précisément à l'arc DOE de ce cercle intérieur au cercle O donné.

2° Réciproquement tout point M de cet arc est intérieur au cercle O et tel que OMA = 1D. La droite AM coupe donc le cercle en B et C et M est milieu de BC.

— Le lieu demandé est l'arc DOE du cercle de diamètre OA, intérieur au cercle donné.

197. Constructions géométriques. — En général, une construction géométrique se ramène à la détermination d'un point inconnu soumis à deux conditions. Ce point appartient à chacun des lieux géométriques correspondant à l'une ou l'autre de ces conditions. *Il est donc situé à l'intersection de ces deux lieux géométriques.*

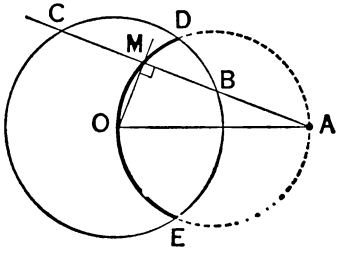


Fig. 169.

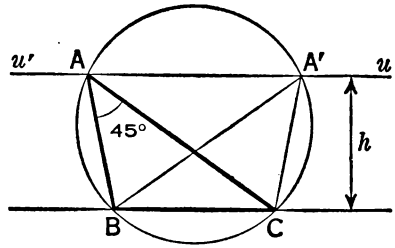


Fig. 170

198. Exemple. — *Construire un triangle* ABC *sachant que* BC = 6 cm, *l'angle* BAC = 45° *et que la hauteur h issue de* A *mesure 5 cm* (fig. 170).

Traçons un segment BC de 6 cm. Le sommet inconnu A appartient :

1° A l'arc de cercle d'extrémités B et C, capable de 45° (n° 187).

2° A la droite $u'u$, parallèle à BC et située à 5 cm de BC (n° 184).

Le point A est donc à l'intersection de cet arc BC et de $u'u$. Nous obtenons ainsi deux solutions : ABC et A'BC symétriques par rapport à la médiatrice de BC.

EXERCICES

141. Lieu géométrique du centre d'un cercle passant par deux points donnés.

142. Lieu géométrique du centre d'un cercle tangent à deux droites données. Examiner le cas où ces deux droites sont parallèles.

143. On considère deux points fixes O et A et une droite fixe Ax. Une droite mobile Oz tourne autour du point O.

1° Lieu du point M symétrique de A par rapport à Oz.

2° Soit My la droite symétrique de Ax par rapport à Oz. Lieu du point H projection orthogonale de O sur My.

144. Soient deux parallèles $x'x$, $y'y$ et d leur distance.

1° Trouver le lieu d'un point M dont la somme des distances aux deux droites $x'x$ et $y'y$ a une valeur donnée l. On suppose $l > d$.

2° Envisager le cas particulier où $l = d$.

145. Soit un angle droit xOy, un point A mobile sur Ox, un point B mobile sur Oy. Trouver le lieu du milieu M de AB, sachant que AB conserve une longueur constante $2a$.

146. On considère un angle xOy, un point fixe A de Ox et un point fixe B de Oy tels que $OA = OB = a$. Un point mobile C sur Ox et un point mobile D sur Oy varient de façon que $OC + OD = 2a$.

1° La parallèle à AB menée par C coupe Oy en E. Montrer que le milieu du segment DE est fixe.

2° Lieu du milieu M de CD.

147. Soit un cercle de centre O et la tangente en A à ce cercle. Par un point variable M de cette tangente on mène MB tangente au cercle.

1° Montrer que le quadrilatère OAMB est inscriptible. En déduire le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle MAB.

2° Soit H l'orthocentre du triangle MAB. Montrer que OAHB est un losange. En déduire le lieu du point H.

3° La droite OM recoupe le cercle en I et J. Que représentent ces deux points pour le triangle MAB?

148. Soit un triangle isocèle ABC de base BC.

1° Par un point M quelconque de BC on mène les parallèles aux côtés égaux AB et AC. Elles coupent AB en D et AC en E. Démontrer que MD + ME a une valeur constante quelle que soit la position de M sur le segment BC.

2° Soit un angle xOy. Trouver le lieu du point M sachant que les parallèles menées de M aux deux côtés de l'angle coupent ces côtés en deux points D et E, tels que : $MD + ME = l$, où l désigne une longueur donnée.

149. On donne un demi-cercle de diamètre AB; sur une corde variable AC on porte $AD = CB$ et sur la tangente en A on porte $AE = AB$.

1° Comparer les triangles ADE et ABC.

2° Lieu géométrique du point D.

150. On considère un demi-cercle de diamètre AB; sur un rayon variable OC on porte $OD = CH$, H désignant le pied de la perpendiculaire menée de C sur AB.

1° Comparer les triangles OCH et ODE, OE étant le rayon perpendiculaire à AB.

2° Trouver le lieu géométrique du point D.

151. On donne un cercle O et une corde AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle. Prenant comme centre un point variable C de l'arc AB inférieur à un demi-cercle on décrit un cercle tangent à AB; les tangentes à ce cercle menées de A et B se coupent en M.

1° Calculer la valeur de l'angle AMB.

2° Lieu géométrique du point M.

152. Soit un cercle de centre O et de diamètre MN; par un point variable A de la droite MN on mène AB tangente au cercle en B, puis la bissectrice de l'angle BAO. La perpendiculaire menée de O à cette bissectrice coupe la tangente AB en C.

1° Montrer que le triangle OAC est isocèle; comparer la hauteur de ce triangle, issue de C, au rayon du cercle.

2° Lieu géométrique du point C.

153. Dans un triangle ABC la base BC est fixe et le sommet A décrit un cercle passant par B et C.

1° Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Que peut-on dire du symétrique de H par rapport à BC?

2° Lieu géométrique du point H.

154. 1° Soit un cercle O et une corde variable AB de longueur constante. Trouver le lieu du milieu de AB.

2° Soit un cercle O et un point fixe P de ce cercle. Un angle de grandeur constante et de sommet P tourne autour de P. Les côtés recoupent le cercle en A et B. Lieu du milieu de AB.

155. Un cercle de rayon variable a pour centre le sommet O du triangle isocèle OAB. On mène à ce cercle deux tangentes AC et BD non symétriques par rapport à la hauteur OH du triangle OAB.

1° Trouver le lieu géométrique des points C et D.

2° Les droites AC et BD se coupent en M. Trouver la nature du quadrilatère OAMB et le lieu géométrique du point M.

3° Comparer les angles du triangle OCD à ceux du triangle OAB et montrer que la droite CD passe par un point fixe.

156. On considère un triangle isocèle OAB. Par le sommet O, on mène une droite variable Ox.

1° Lieu du point M symétrique de A par rapport à Ox.

2° BM coupe Ox en P. Comparer les angles AOB, AMB et APB. Lieu géométrique du point P.

157. Soit un cercle de diamètre AB. Une corde variable MN sous-tend un arc constamment égal au 1/6 du cercle.

1° Soit P l'intersection de AM et BN. Évaluer l'angle APB.

2° Lieu géométrique du point P.

158. Un angle xAy de grandeur constante tourne autour de son sommet A. D'un point fixe P on mène les perpendiculaires PM et PN à Ax et Ay.

1° Lieu des points M et N.

2° Montrer que MN conserve une longueur constante. Lieu du milieu de MN.

159. On considère un triangle ABC rectangle en A. On prolonge le côté CA d'une longueur AD = AB.

1° Évaluer l'angle BDC; montrer que A appartient à la médiatrice de BD.

2° Construire le triangle ABC connaissant l'hypoténuse et la somme des côtés de l'angle droit.

160. On considère un triangle ABC rectangle en A. Sur le côté AC on porte un segment AD = AB (on suppose AB < AC).

1° Évaluer l'angle BDC.

2° Construire le triangle ABC connaissant l'hypoténuse et la différence des côtés de l'angle droit.

161. Dans un triangle ABC on connaît la valeur de l'angle A, la longueur du côté BC et la longueur de la médiane issue de A.

1° Les points B et C étant donnés, montrer que A appartient à deux cercles (ou arcs de cercle) que l'on déterminera.

2° Construire le triangle ABC.

162. Démontrer que si deux triangles ont un côté égal et les angles opposés à ce côté égaux ou supplémentaires, leurs cercles circonscrits ont le même rayon.

163. Dans un triangle ABC, les sommets B et C sont fixes et le sommet A décrit un cercle passant par B et C.

1° Trouver le lieu de l'orthocentre H. Montrer que AH reste égal et parallèle à un segment fixe. Comparer les arcs décrits par A et H.

2° Soient I, J, K et L les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle. Évaluer en fonction de A les angles tels que BIC et BJC. Montrer que le lieu des quatre points I, J, K et L se compose de deux cercles. Préciser leurs centres et leurs points communs.

3° AB et AC recoupent l'un des lieux précédents en M et N. Comparer les triangles ABC et ANM. Conséquences?

164. On considère un cercle O et un point P. Une droite variable issue de P coupe le cercle en A et B. Soit I le milieu de AB.

1° Évaluer l'angle PIO. Lieu du point I. Le limiter quand P est extérieur au cercle.

2° On porte sur la droite OI de part et d'autre de I deux segments IM et IM' égaux à IP. Lieu des points M et M'.

165. Soit un cercle fixe de diamètre AB et une corde variable CD mais de longueur constante. AC et BD se coupent en M et AD et BC se coupent en N.

1° Lieux géométriques des points M et N. Montrer qu'ils sont symétriques par rapport à AB.

2° Montrer que le segment MN est égal à un vecteur fixe et que le quadrilatère MCND est inscriptible. Lieu du centre I du cercle circonscrit.

3° Démontrer que IC et ID sont tangents au cercle de diamètre AB.

166. Un trapèze isocèle ABCD est inscrit dans un cercle donné O. Le côté oblique AB est fixe et l'autre côté est mobile. Les diagonales AC et BD se coupent en M.

1° Comparer les angles AOB et AMB. Lieu géométrique du point M.

2° Montrer que la parallèle Mx à BC et AD passe par un point fixe I.

3° Montrer que IA et IB sont tangentes au cercle O et que la tangente en M au cercle AMB est parallèle à CD.

167. On considère dans un cercle fixe de centre O deux diamètres perpendiculaires AB et CD. D'un point mobile M de l'arc AC on mène MH perpendiculaire à AB.

1° Montrer que les bissectrices de l'angle OMH passent par C et D.

2° Soient I le centre du cercle inscrit au triangle OHM, et J, K et L les centres des cercles exinscrits dans les angles M, O et H. Évaluer les angles OID, OJD, OKC et OLC. Quelle est la nature des quadrilatères MIAK et MJBL?

3° Lieux des points I, J, K, L lorsque M décrit l'arc AC, puis lorsque M décrit le cercle entier.

168. On considère deux droites fixes $x'x$ et $y'y$ se coupant en O et un segment mobile AB de longueur constante dont l'extrémité A décrit $x'x$ et l'extrémité B décrit $y'y$.

1° Montrer que le cercle OAB a un rayon constant. Lieu de son centre?

2° Les perpendiculaires en A à Ox et en B à Oy se coupent en C. Lieu du point C?

3° On mène les hauteurs AA' et BB' du triangle OAB qui se coupent en H. Montrer que le quadrilatère AB'BA' est inscriptible et que A'B' a une longueur constante, puis déterminer le lieu du point H.

169. Deux cercles O et O' se coupent en A et B. Une sécante variable issue de A coupe le premier en C et le deuxième en D et les rayons CO et DO' se coupent en M.

1° Montrer que les angles CBD et OMO' sont constants et égaux à l'angle OBO'. Lieu du point M.

2° On construit le centre ω du cercle BCD. Comparer les angles OωO' et CBD et montrer que ω décrit le lieu précédent.

3° On mène une deuxième sécante C'AD'. CC' et DD' se coupent en E. Comparer les angles C et D du quadrilatère BCED à l'angle BAC'. En déduire que les cercles CDE et C'D'E passent par B et que leurs centres sont sur le cercle OBO'.

170. Soit un quadrilatère convexe ABCD. On mène les bissectrices intérieures des angles A et C qui coupent en M et N celle de l'angle B et en Q et P celle de l'angle D.

1° Évaluer les angles AMB et CPD en fonction de deux angles consécutifs du quadrilatère.

2° Montrer que le quadrilatère MNPQ est inscriptible.

3° Les trois droites AB, CD et NQ sont concourantes ainsi que AD, BC et MP.

171. On considère un cercle et une corde AB de ce cercle. Soit M le milieu de l'un des arcs sous-tendus par AB. Deux sécantes issues de M coupent le cercle en C et E et la droite AB en D et F. Montrer que :

1° Le quadrilatère CDFE est inscriptible.

2° Le cercle ACD est tangent en A à MA. En déduire le lieu du centre de ce cercle.

3° Montrer que les rayons des deux cercles ACD et BCD ont une somme constante quand C parcourt l'arc AB qui ne contient pas M.

172. Un triangle ABC est inscrit dans un cercle O. Le côté BC est fixe et le point A décrit le cercle. On mène les droites Bx et Cy symétriques de BC par rapport à AB et à AC et qui se coupent en M.

1° Évaluer en fonction de l'angle A l'angle BMC. Lieu du point M.

2° Montrer que le lieu précédent passe par O et par le point de rencontre T des tangentes en B et C.

3° Que se passe-t-il lorsque BC est un diamètre du cercle O?

173. On donne un segment AB et un point O de ce segment. On prend un point M variable de la médiatrice de OA et un point N de la médiatrice de OB tel que l'angle MON soit droit. AM et BN se coupent en P. Soient H et K les milieux de OA et OB.

1° Évaluer l'angle APB et trouver le lieu de P.

2° Les quatre points M N O P sont sur un cercle de centre ω milieu de MN. Montrer que ce cercle passe par le milieu I de AB. Lieu de ω : le limiter.

3° Les médiatrices de OA et OB recoupent le cercle ω en M' et N'. Montrer que MN' et M'N sont parallèles à AB. Comparer les angles OMH et IMN puis ONK et INM.

174. Sur les côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement les triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'. (On suppose chacun des angles du triangle inférieur à 120°.) Montrer que :

1° Les trois cercles BCA', CAB' et ABC' passent par un même point I intérieur au triangle ABC d'où l'on voit les trois côtés sous le même angle.

2° Les triangles ABB' et AC'C sont égaux, les segments AA', BB', CC' sont égaux et passent par le point I.

3° IB + IC = IA' et IA + IB + IC = AA'.

175. Soit un triangle ABC et M, N et P les milieux des côtés BC, CA, AB. On construit extérieurement au triangle les segments MA', NB' et PC' respectivement perpendiculaires aux côtés BC, CA et AB et égaux à leur moitié.

1° Comparer les triangles MNB' et MPC'. En déduire que le triangle B'MC' est rectangle et isocèle.

2° Montrer que les triangles MA'B' et MCC' sont égaux et que A'B' et CC' sont égaux et perpendiculaires. Donner d'autres segments analogues.

3° Montrer que les trois segments AA', BB' et CC' sont concourants.

176. On considère un triangle ABC et les cercles de diamètres AB et AC qui se recoupent en D. Une sécante variable issue de D coupe le premier cercle en E le second en F. Les droites BE et CF se coupent en M.

1° Comparer les angles ABE et ACF à l'un ou l'autre des angles ADE ou ADF.

2° Nature du quadrilatère BACM? Lieu géométrique du point M?

177. Une sécante variable issue du point D du côté BC du triangle ABC coupe les droites CA et AB en E et F. Soit M le second point commun aux cercles BDF et CDE.

1° Démontrer que les triangles MBF et MCE ont leurs trois angles respectivement égaux.

2° Nature des quadrilatères MBAC et MEAF? Déterminer le lieu du point M.

CONSTRUCTION DE TRIANGLES

199. On connaît un côté et les deux angles adjacents à ce côté.

Les données sont BC = a et les angles B et C (fig. 171). Construisons BC = a puis, en B, un angle CBx égal à l'angle B donné et en C un angle BCy égal à l'angle C donné de façon que les demi-droites Bx et Cy soient d'un même côté de BC. Si B + C < 2D, Bx et Cy se coupent en A (n° 99). Le triangle ABC est la solution cherchée. Tout autre triangle répondant à la question est égal à ABC (n° 57).

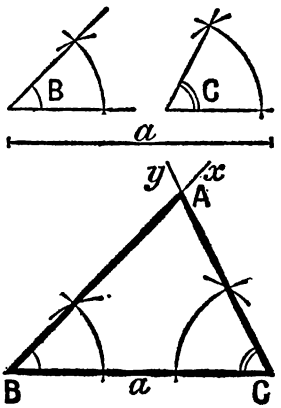


Fig. 171.

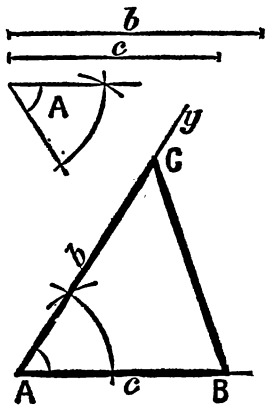


Fig. 172.

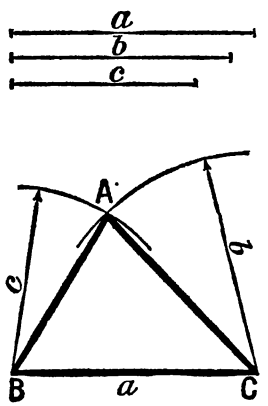


Fig. 173

200. On connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment.

Les données sont AB = c, AC = b et l'angle A (fig. 172). Construisons un angle xAy égal à l'angle A donné. Portons sur Ax un segment AB = c et sur Ay un segment AC = b. Le triangle ABC est le triangle demandé. Tout autre triangle répondant à la question est égal à ABC (n° 58). Ce problème est toujours possible pourvu que l'angle A soit inférieur à 2D.

201. On connaît les trois côtés.

Les données sont BC = a, AC = b, AB = c. Nous supposons $a > b > c$. Construisons un segment BC = a. Le sommet A appartient alors au cercle

de centre B, de rayon c et au cercle de centre C, de rayon b donc à leur intersection. Soit A l'un de ces points; le triangle ABC est la solution cherchée. Tout autre triangle répondant à la question est égal à ABC (n° 59).

DISCUSSION. — Pour que la construction soit possible il faut et il suffit que les cercles B et C soient sécants, ce qui nécessite (n° 162) :

$$b - c < a < b + c.$$

Or a est supérieur à b et à c, donc à $b - c$. La condition de possibilité se réduit à :

$$a < b + c.$$

Pour que trois segments soient les côtés d'un triangle, il faut et il suffit que le plus grand soit inférieur à la somme des deux autres.

202. On connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Les données sont l'angle A et les côtés BC = a et AB = c (fig. 174).

Construisons un angle xAy égal à A. Portons sur Ay un segment AB = c. Le point C doit être sur la demi-droite Ax et sur le cercle de centre B, de rayon a. Il y a donc autant de solutions que de points communs à ce cercle et à la demi-droite Ax. Désignons par d la distance BH de B à $x'x$.

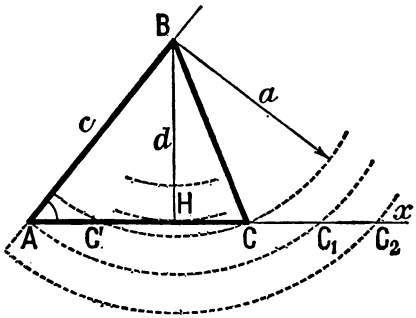


Fig. 174.

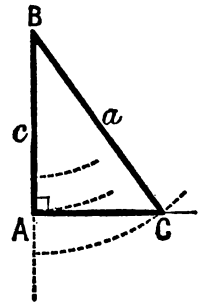


Fig. 175.

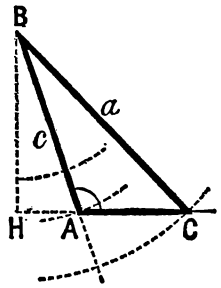


Fig. 176.

DISCUSSION. — 1° A ***aigu*** (fig. 174)

$a < d$: 0 *solution.*
$a = d$: 1 *solution* : ABH.
$d < a < c$: 2 *solutions* : ABC et ABC'.
$a = c$: 1 *solution* : ABC_1.
$a > c$: 1 *solution* : ABC_2.

2° A ***droit*** (fig. 175)

$a \leqslant c$: 0 *solution.*
$a > c$: 1 *solution.*

3° A ***obtus*** (fig. 176)

$a \leqslant c$: 0 *solution.*
$a > c$: 1 *solution.*

On constate que pour $a > c$, le problème admet toujours une solution unique quel que soit A. Donc :

Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux ainsi que l'angle opposé au plus grand d'entre eux, ils sont égaux.

203. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et un angle aigu. — Les données sont A = 1D, BC = a et l'angle aigu B (fig. 177).

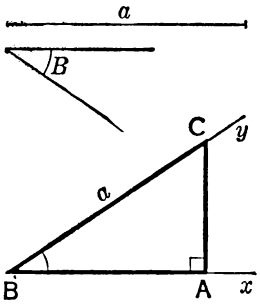


Fig. 177.

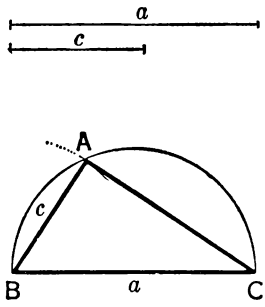


Fig. 178.

Construisons un angle xBy égal à l'angle B donné. Portons sur By un segment BC = a et menons CA perpendiculaire à Bx. Le problème admet toujours une solution et une seule.

204. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et un côté. — Les données sont A = 1D, BC = a et AB = c. C'est le problème du nº 202 pour A = 1D. Une solution et une seule si $a > c$ (fig. 175).

Si BC est donné en position, A se trouve sur le demi-cercle de diamètre BC et sur le cercle de centre B et de rayon c (fig. 178).

PROBLÈMES RELATIFS AUX TANGENTES

205. Tangentes parallèles à une direction donnée. — Soit un cercle de centre O et une direction Δ (fig. 179). Si la tangente AT est parallèle à Δ, le rayon OA est perpendiculaire à Δ et réciproquement.

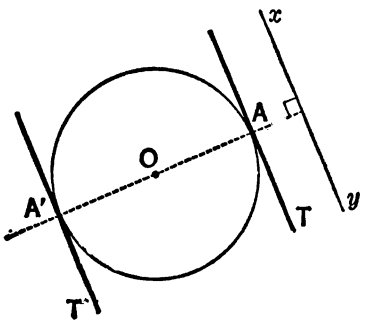


Fig. 179.

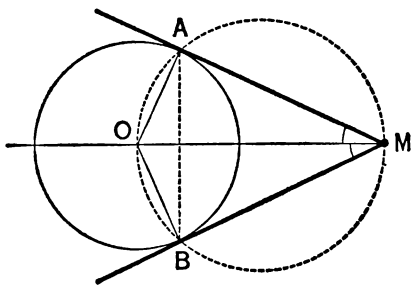


Fig. 180.

Menons le diamètre AA' perpendiculaire à Δ. Les tangentes en A et A' répondent à la question. Toujours deux solutions.

206. Tangentes issues d'un point donné. — Soit à construire une tangente au cercle O issue du point M (fig. 180). Le problème n'est possible que si M est extérieur au cercle (n° 149). Soit A le point de contact : l'angle OAM est droit. Le point A appartient au cercle de diamètre OM, qui coupe le cercle O en A et B. Le problème admet deux solutions MA et MB symétriques par rapport à OM. *Les segments* MA et MB *sont égaux* et OM *est bissectrice des angles* AMB *et* AOB :

Deux tangentes à un cercle issues d'un même point sont égales.

207. Tangentes communes extérieures. — Soient deux cercles O et O' de rayons R et R' (R > R') (fig. 181). Il s'agit de construire une droite tangente en A au premier et en A' au second de façon que O et O' soient d'un même côté de AA'. La droite AA' est une *tangente commune extérieure aux deux cercles.* Les rayons OA et O'A' sont perpendiculaires à AA'. Achevons le rectangle AA'O'C :

$$OC = OA - CA = OA - O'A' = R - R'.$$

Le cercle de centre O et de rayon R — R' est tangent en C à O'C.

CONSTRUCTION. — Mener la tangente O'C au cercle de centre O et de

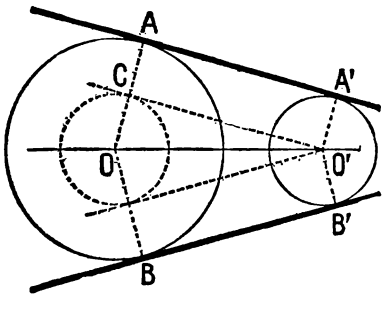


Fig. 181.

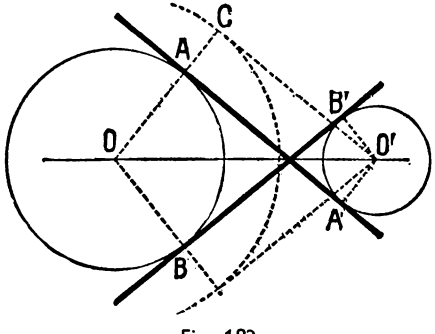


Fig. 182.

rayon R — R', puis OC qui coupe le cercle O donné en A et achever le rectangle ACO'A'.

La construction de O'C' nécessite : OO' > R — R'. Cette condition exprime que les *cercles* O *et* O' *sont extérieurs, tangents extérieurement* ou *sécants.* Le problème admet alors deux solutions AA' et BB' symétriques par rapport à OO'.

Si OO' = R — R'. Les deux cercles sont tangents intérieurement : une seule solution, la tangente au point de contact (n° 155).

208. Tangentes communes intérieures. — Soient deux cercles O et O' (fig. 182). Il s'agit cette fois de construire une tangente AA' telle que O et O'

soient de part et d'autre de AA'. *La droite* AA' *est une tangente commune intérieure.* Construisons encore le rectangle AA'O'C :

$$OC = OA + AC = OA + A'O' = R + R'.$$

O'C est tangente en C au cercle de centre O et de rayon R + R'.

CONSTRUCTION. — Mener la tangente O'C au cercle de centre O et de rayon R + R', puis OC qui coupe le cercle O donné en A et achever le rectangle ACO'A'. Il faut que l'on ait OO' > R + R', donc que *les cercles* O *et* O' *soient extérieurs :* Deux solutions AA' et BB' symétriques par rapport à OO'.

Si OO' = R + R' les cercles sont tangents extérieurement : une solution, la tangente au point de contact (n° 155).

209. Résumé. — La figure 183 montre, suivant les différentes positions, le nombre des tangentes communes à deux cercles.

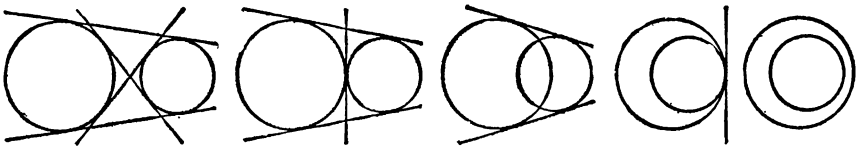


Fig. 183.

210. Cercle défini par deux points et la tangente en l'un d'eux. — Il s'agit de construire (fig. 184) un cercle passant par A et tangent en B à la droite $x'x$. Son centre O est sur la médiatrice de AB et sur la perpendiculaire en B à $x'x$. Une solution unique.

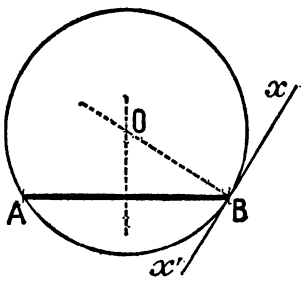


Fig. 184.

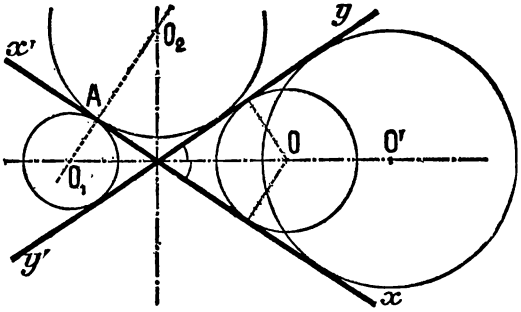


Fig. 185.

211. Cercles tangents à deux droites. — Pour qu'un cercle soit tangent à deux droites $x'x$ et $y'y$ (fig. 185) il faut que son centre O soit équidistant de $x'x$ et de $y'y$. Le lieu du point O se compose des deux bissectrices des angles formés par les deux droites (n° 185).

Si on se donne le point A de contact sur $x'x$, le problème admet deux solutions : O_1 et O_2 sont situés sur la perpendiculaire en A à $x'x$.

212. Cercles tangents à trois droites. — Pour obtenir le centre d'un cercle tangent aux trois droites AB, BC et CA (fig. 186) il suffit de construire un point équidistant des trois côtés du triangle ABC. Ce *problème admet* (n° 145) *quatre solutions :* I *centre du cercle inscrit au triangle* ABC, J, K *et* L *centres des cercles exinscrits au triangle.*

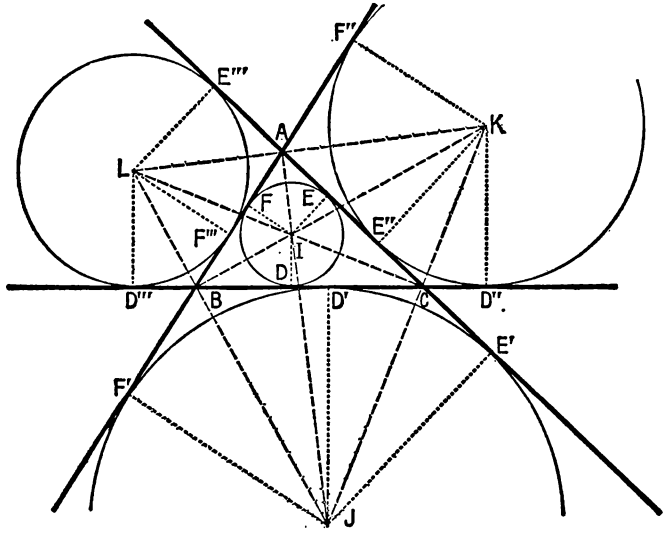


Fig. 186.

213. Calcul des segments déterminés sur les côtés.

Posons BC = a, CA = b, AB = c et $a + b + c = 2p$.

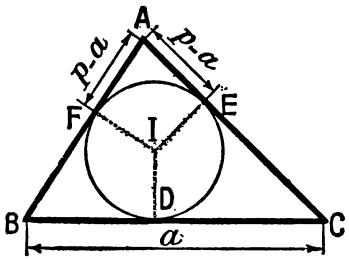


Fig. 187.

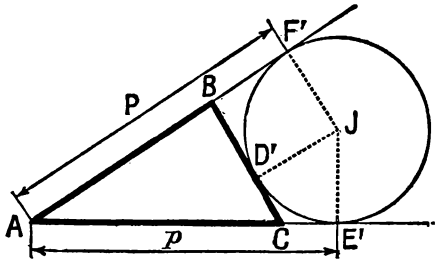


Fig. 188

1° Le cercle inscrit touche les côtés en D, E et F (fig. 187). Et (n° 206) :

$$AE = AF, \quad BD = BF, \quad CD = CE.$$

D'où $AE + BD + CD = AE + a = p.$

Soit $\boxed{AE = AF = p - a.}$

Et de même : $BD = BF = p - b$; $CD = CE = p - c$.

2° Le cercle exinscrit dans l'angle A touche les côtés en D', E' et F' (fig. 188)

$$AE' = AF', \quad BD' = BF', \quad CD' = CE'$$

D'où $AE' + AF' = (AC + CD') + (AB + BD') = AB + AC + BC = 2p$

Soit $\boxed{AE' = AF' = p.}$

Et de même (fig. 186) : $BD'' = BF'' = CD''' = CE''' = p$.

3° On en déduit tout autre segment. Ainsi :

$$CD' = CE' = AE' - AC = p - b, \quad BD' = BF' = AF' - AB = p - c.$$

$$EE' = FF' = AE' - AE = p - (p - a) = a.$$

Donc $BD = CD' = p - b$ et $BD''' = CD'' = p - a$. Les trois segments BD, DD' et D''D''' ont même milieu. D'autre part :

$$DD' = |\, b - c \,| \quad \text{et} \quad D''D''' = b + c.$$

EXERCICES

Dans les exercices suivants on désigne les angles du triangle ABC *par* A, B, C, *les côtés opposés par* a, b, c, *les hauteurs par* h_a, h_b, h_c, *les médianes par* m_a, m_b, m_c, *les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* A *par* β_a, *et* β'_a, *le rayon du cercle circonscrit par* R, *celui du cercle inscrit par* r, *ceux des cercles exinscrits par* r_a, r_b, r_c *et le périmètre par* $2p$.

— Construire un triangle rectangle en A connaissant :

178. a, h_a. **179.** b, h_a. **180.** a, $b + c$ (ou $b - c$).

181. a, r. **182.** p, r. **183.** B, $b + c$ (ou $b - c$).

— Construire un triangle isocèle de sommet A connaissant :

184. A, h_a. **185.** B, h_b. **186.** a, h_a (ou h_b).

187. a, m_b. **188.** a, r (ou r_a). **189.** r, r_a.

— Construire un triangle connaissant :

190. B, C, h_a. **191.** B, C, m_a. **192.** B, C, β_a (ou β'_a).

193. B, C, $b + c$. **194.** B, C, $b - c$. **195.** B, C, R.

196. A, a, $b + c$. **197.** A, a, $b - c$. **198.** A, a, h_a.

199. A, h_a, R. **200.** A, m_a, R. **201.** A, r, R.

202. A, b, h_a. **203.** A, h_a, h_b. **204.** A, h_b, m_c.

205. A, b, r. **206.** A, b, R. **207.** A, h_a, β_a (ou β'_a).

208. a, b, m_a.
209. a, b, m_c.
210. a, m_b, m_c.
211. a, m_a, m_b.
212. a, m_a, R.
213. a, m_b, R.
214. a, h_a, m_a.
215. a, h_a, m_b.
216. h_a, m_a, β_a (ou β'_a).
217. h_a, m_a, m_b.
218. h_a, m_a, R.
219. m_a, m_b, m_c.
220. a, b, h_a.
221. a, b, h_c.
222. a, b, R.
223. B, C, p.
224. B, C, $p - a$.
225. B, C, r (ou r_a).
226. A, h_a, r.
227. A, ha, r_a.
228. A, h_a, r_b.
229. A, a, r.
230. A, a, r_a.
231. A, a, r_b.
232. A, p, r.
233. A, $p - a$, r_a.
234. A, r, r_b.
235. a, r, r_a.
236. $b - c$, r, r_a.
237. $b + c$, r_b, r_c.

238. Construire un cercle de rayon donné passant par un point donné et tangent : 1° à une droite donnée; 2° à un cercle donné.

239. Construire un cercle de rayon donné et tangent : 1° à deux droites données; 2° à une droite et à un cercle; 3° à deux cercles.

240. Construire un cercle tangent à une droite et à un cercle donnés connaissant le point de contact : 1° sur le cercle; 2° sur la droite.
(Montrer d'abord que la droite joignant les deux points de contact passe par un point remarquable du cercle.)

241. Déterminer l'enveloppe des cordes de longueur donnée d'un cercle donné. En déduire la construction d'une telle corde : 1° passant par un point donné; 2° parallèle à une direction donnée; 3° tangente à un cercle donné.

242. Construire une droite déterminant dans deux cercles donnés des cordes de longueurs respectivement données.

243. 1° Construire un quadrilatère inscriptible connaissant les diagonales, leur angle et le rayon du cercle circonscrit.
2° Construire un cercle de rayon donné découpant sur deux droites données des segments de longueurs respectivement données.
3° Montrer que les deux problèmes précédents sont équivalents.

244. Construire un quadrilatère connaissant les diagonales, leur angle et deux côtés consécutifs (ou non). On utilisera le parallélogramme dont les côtés sont respectivement parallèles et égaux aux diagonales.

245. On donne un cercle de centre O et une droite D.
1° Trouver le lieu des points M d'où l'on voit le cercle O sous un angle donné α. (Les tangentes issues de M doivent faire entre elles l'angle α.)
2° Construire un point M de la droite D tel que la tangente menée de M au cercle O ait une longueur donnée l.
3° Construire un point P de la droite D tel que les tangentes menées de P soient égales à la corde de contact.

246. Construire un cercle passant par deux points A et B et tangent : 1° à une parallèle à AB donnée; 2° à un cercle donné dont le centre est sur la médiatrice de AB.

247. Soient deux cercles donnés de centres O et O'. Un cercle quelconque de centre I coupe le premier en A et A', le second en B et B'. Construire le cercle I connaissant son rayon et les angles $OAI = \alpha$ et $OBI = \beta$.

248. On considère un cercle O, un point P, et une sécante variable issue de P qui coupe le cercle en A et B.

1° Trouver le lieu du milieu M de AB. Construire la sécante PAB de façon que M appartienne à une droite ou à un cercle donné.

2° Construire la sécante PAB de façon que la somme des distances de A et B à une droite donnée ait une valeur donnée l.

249. On donne deux points A et B, une droite D passant par A et un cercle variable O passant par A et B et coupant la droite D en C. Soit CT la tangente en C.

1° Comparer les angles BAC et BCT.

2° Construire le cercle O de façon que CT passe par un point donné P.

250. On considère un cercle O et deux tangentes fixes en A et B. Une tangente mobile coupe la première en M et la seconde en N.

1° Comparer l'angle MON à l'angle AOB.

2° Étudier le cas où les points A et B, sont diamétralement opposés.

251. Soit un angle xOy, un point B de Ox et un point C de Oy. B et C varient de façon que le périmètre du triangle OBC ait une valeur donnée $2p$.

1° Trouver l'enveloppe de la droite BC.

2° Construire B et C de façon que BC passe par un point P donné.

252. Un triangle ABC est inscrit dans un cercle fixe. Le côté BC est fixe et le point A décrit le cercle. Les tangentes issues de B et C au cercle de centre A et tangent à BC, se coupent en M.

1° Trouver le lieu du point M.

2° Trouver les lieux des centres des cercles exinscrits au triangle MBC.

253. Soit un cercle O et AB un diamètre. Une tangente variable en M coupe en I la médiatrice de AB et en C et D le cercle de centre I tangent en O à AB (A et C sont d'un même côté de IO).

1° Montrer que OC et OD sont les bissectrices des angles AOM et BOM.

2° Comparer les triangles OMC et OAC et en déduire les lieux géométriques des points C et D.

254. 1° Montrer que dans un quadrilatère convexe circonscrit à un cercle la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.

2° On considère un quadrilatère convexe ABCD. AB et CD se coupent en E (on suppose A entre E et B). Soit I le centre du cercle exinscrit dans l'angle E du triangle EAD et J le centre du cercle inscrit du triangle EBC. Montrer que les projections de IJ sur AB et CD sont égales à demi-différence de AB + CD et de AD + BC. Que se passe-t-il lorsque AB + CD = AD + BC? En déduire la réciproque du 1°.

255. On considère un carré ABCD. Un angle droit xAy tourne autour de son sommet A, Ax coupe BC en M et Ay coupe CD en N. La bissectrice intérieure de xAy coupe CD en P.

1° Comparer les triangles ABM et ADN, puis les triangles AMP et ANP.

2° Montrer que lorsque M est entre B et C, on a : MP = BM + DP et que le périmètre du triangle CMP est constant.

3° Trouver l'enveloppe de MP.

256. Deux cercles de centres O et O′ sont tangents extérieurement en A. On mène une tangente commune extérieure BB′ qui coupe la tangente en A en I. Démontrer que :

1° Le point I est milieu de BB′.

2° Les triangles OIO′ et BAB′ sont rectangles.

3° Le cercle de diamètre OO′ est tangent en I à BB′.

257. On considère deux cercles extérieurs O et O′ et leurs tangentes communes : AA′ et BB′ extérieures, CC′ et DD′ intérieures (on suppose A, C, D et B dans cet ordre sur le cercle O). AA′ coupe CC′ et DD′ en M et N et BB′ les coupe en P et Q. On désigne d'autre part par E, F, G et H les projections du milieu I de OO′ sur AA′, BB′, CC′ et DD′.

1° Montrer que les quatre points MNPQ sont sur le cercle de diamètre OO′.

2° Démontrer que E est milieu de AA′ et de MN. Donner les conclusions analogues et en déduire que les quatre points E, F, G, H sont alignés.

3° Monter que MN = CC′ et AA′ = MP, et comparer les divisions AMNA′ et MCC′P.

258. On donne un angle xOy et un point I de sa bissectrice intérieure. On désigne par A et B les projections de I sur Ox et Oy. Un cercle variable de centre I coupe Ox en M et Oy en N, non symétriques par rapport à OI.

1° Comparer les triangles IAM et IBN, trouver le lieu du centre du cercle OMN et montrer que $\overline{OM} + \overline{ON}$ est constant.

2° Les perpendiculaires à Ox en M et à Oy en N se coupent en P. Trouver le lieu de P.

3° On mène par O la parallèle à MN qui coupe en D le cercle OMN. Quelle est la nature du quadrilatère MNOD? Trouver le lieu du point D.

259. Soit un segment fixe AB et les demi-droites variables Ax et By parallèles entre elles. On construit un cercle de centre I tangent en M à AB, en C à Ax et en D à By.

1° Montrer que AC + BD est constant et que les trois points I, C et D sont alignés.

2° Montrer que les triangles MCD et IAB sont rectangles. En déduire le lieu du point I.

3° Trouver l'enveloppe de la droite CD.

RAPPORT DE DEUX SEGMENTS

214. Rapport de deux segments non orientés. — Si les segments AB et CD sont respectivement la somme de 3 et de 5 segments égaux au segment EF (fig. 189), on dit que le *rapport* du segment AB au segment CD est $\frac{3}{5}$.

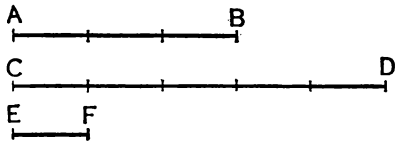


Fig. 189.

On écrit (n° 12) :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5} \iff AB = \frac{3}{5}\,CD.$$

Il en résulte que $\frac{3}{5}$ est la mesure de AB avec CD pour unité.

Le rapport de deux segments est le quotient exact de leurs mesures effectuées avec la même unité.

Soit a la mesure du segment EF avec une unité donnée. Les mesures respectives de AB et CD sont $3a$ et $5a$ et le quotient exact de ces mesures est :

$$\frac{3a}{5a} = \frac{3}{5} = \frac{AB}{CD}.$$

C'est pourquoi, dorénavant, nous admettrons que le symbole $\frac{AB}{CD}$ représente le rapport des longueurs AB et CD.

215. Eléments orientés. — Rappelons les définitions suivantes déjà vues en Algèbre (5e leçon).

1° ***Un axe est une droite orientée.*** — C'est une droite sur laquelle on a fixé un sens de parcours indiqué par une flèche (fig. 190) et appelé *sens de l'axe*. A toute droite $x'x$ correspondent deux axes de sens opposés : $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{xx'}$.

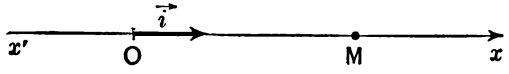


Fig. 190.



Fig. 191.

2° ***Un vecteur est un segment de droite orienté.*** — Le symbole $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur d'*origine* A, *d'extrémité* B orienté de A vers B (fig. 191). La longueur AB est la longueur ou le *module* du vecteur.

La droite AB est le support du vecteur et définit sa *direction.*

On appelle *vecteur unitaire* d'un axe tout vecteur $\vec{i}$ porté par cet axe, de module 1 et de même sens que l'axe (fig. 190).

216. Rapport de deux vecteurs de même support. — *C'est le nombre relatif dont la valeur absolue est le rapport des longueurs des deux vecteurs et dont le signe est + ou — selon que ces vecteurs sont de même sens ou non.*

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant portés par l'axe $x'x$ (fig. 192), on obtient :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{3}{5} \iff \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$$

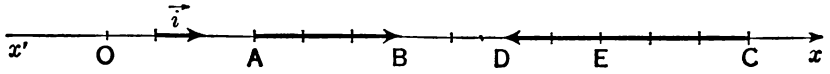


Fig. 192.

De même : $$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{DE}} = +\frac{3}{2} \iff \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$$

Deux vecteurs égaux ont pour rapport + 1. *Deux vecteurs opposés ont pour rapport* — 1. Ainsi (fig. 192) :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EC}} = +1 \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$$

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{CD}} = -1 \iff \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CD}$$

En particulier : $$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

217. Mesure algébrique d'un vecteur sur un axe. — *On appelle mesure algébrique d'un vecteur sur un axe le rapport de ce vecteur et du vecteur unitaire de l'axe.*

La mesure algébrique $\overline{AB}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe $x'x$ (fig. 192) est donc le nombre relatif qui a pour valeur absolue la longueur AB et pour signe + ou — suivant que le vecteur et l'axe sont de même sens ou non.

$$\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} \iff \overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}.$$

Deux vecteurs égaux correspondent à des mesures algébriques égales, deux vecteurs opposés correspondent à des mesures algébriques opposées.

Choisissons sur l'axe $x'x$ un point fixe O *(origine)* et soit M un point quelconque de cet axe.

La mesure algébrique $\overline{OM}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelée l'*abscisse* du point M sur l'axe Ox. Rappelons que :

1° Étant donnés trois points A, B, C de l'axe $x'x$, on peut écrire la *relation de Chasles :*

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \iff \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

2° *La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité diminuée de l'abscisse de son origine.*

En effet : $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \iff \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

Il en résulte que : $AB = |\overline{OB} - \overline{OA}|$

218. Théorème. — ***Le rapport de deux vecteurs d'un même axe est égal au rapport de leurs mesures algébriques.***

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

En effet ces deux rapports ont tous deux pour valeur absolue le rapport des longueurs AB et CD. Ils ont tous deux le signe + si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens, le signe — si ces vecteurs sont de sens contraire. Ils sont donc égaux. Ainsi (fig. 192) :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}.$$

Donc : $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD} \iff \overline{AB} = -\frac{3}{5}\overline{CD}$

Notons que le rapport des mesures algébriques de deux vecteurs de même support est indépendant du sens dans lequel est orienté ce support, puisqu'il est toujours égal au rapport des deux vecteurs. C'est pourquoi il est souvent inutile de préciser l'orientation du support de ces vecteurs.

POINTS QUI DIVISENT UN SEGMENT DANS UN RAPPORT DONNÉ

219. Définition. — ***On dit qu'un point*** M ***d'une droite divise un segment*** AB ***de cette droite dans le rapport arithmétique*** k ***si*** $\frac{MA}{MB} = k$ ***ou*** $MA = k\,MB$.

Si le point M est entre A et B, on dit qu'il divise *intérieurement* AB ou qu'il divise AB en *segments additifs*. Si le point M′ est à l'extérieur de AB on dit qu'il divise *extérieurement* AB ou qu'il divise AB en *segments soustractifs* (fig. 193).

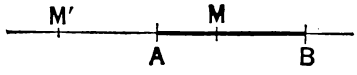


Fig. 193.

220. Problème. — *Construire les points qui divisent un segment* AB *dans le rapport* $\frac{2}{5}$.

1° Si M est entre A et B (fig. 194), on a : $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{5}$ et $MA + MB = AB$.

Soit $$\frac{MA}{2} = \frac{MB}{5} = \frac{MA + MB}{2 + 5} = \frac{AB}{7}.$$

Donc $$MA = \frac{2}{7} AB \qquad \text{et} \qquad MB = \frac{5}{7} AB$$

Il suffit pour obtenir le point M de partager AB en 7 parties égales et de compter à partir de A deux de ces parties.

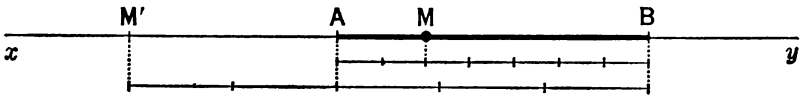


Fig. 194.

2° Si M est à l'extérieur de AB, il ne peut être sur By car on aurait MA > MB et on doit avoir $MA = \frac{2}{5} MB$ donc MA < MB. Si M est sur Ax on a :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad MB - MA = AB.$$

Soit $$\frac{MA}{2} = \frac{MB}{5} = \frac{MB - MA}{5 - 2} = \frac{AB}{3}.$$

Donc $$MA = \frac{2}{3} AB \qquad \text{et} \qquad MB = \frac{5}{3} AB.$$

Il suffit de partager AB en 3 parties égales et de prolonger BA d'un segment AM′ égal à deux de ces parties (fig. 194).

221. Théorème. — ***Il existe deux points*** M ***et*** M′ ***divisant un segment donné*** AB ***dans un rapport arithmétique donné différent de l'unité.*** M ***est entre*** A ***et*** B ***et*** M′ ***à l'extérieur de*** AB.

On peut en effet reprendre le calcul précédent pour tout rapport égal à une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ si α et β sont distincts. Nous serons amenés à partager AB en $\alpha + \beta$

parties égales, puis en $|\alpha - \beta|$ parties égales et à prendre, à chaque fois, à partir de A, α de ces parties (ou à partir de B, β de ces parties).

Si $\alpha = \beta$ le rapport donné est égal à 1. Le point M est au milieu de AB. Le point M′ extérieur à AB n'existe plus car sur les prolongements de AB on ne peut avoir M′A = M′B.

222. Point divisant un vecteur dans un rapport algébrique donné. On dit de même que :

Un point* M *d'une droite divise un vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *de cette droite dans un rapport algébrique* k *si l'on a :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k \quad \text{ou} \quad \overline{MA} = k\,\overline{MB}.$$

La droite $x'x$ est supposée orientée, mais (n° 218) le sens adopté est indifférent.

Ainsi (fig. 194) :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = +\frac{2}{5}.$$

Le rapport algébrique k est négatif si M est entre A et B et positif si M est extérieur à AB.

223. Théorème. — ***Il existe un point et un seul divisant un vecteur dans un rapport algébrique donné*** k ***différent de*** $+1$

Cela résulte du n° 221. On peut faire le raisonnement direct suivant :

Prenons sur la droite AB une origine O (fig. 195). La relation : $\overline{MA} = k\,.\,\overline{MB}$

s'écrit (n° 217) $\quad \overline{OA} - \overline{OM} = k\,(\overline{OB} - \overline{OM}).$

Soit $\quad (k-1)\,\overline{OM} = k\overline{OB} - \overline{OA}.$

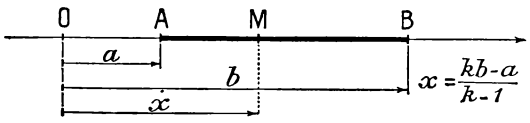


Fig. 195.

1° Si $k \neq +1$ on obtient :

$$\overline{OM} = \frac{\overline{kOB} - \overline{OA}}{k-1}.$$

Il existe un point M et un seul répondant à la question.

2° Si $k = +1$, le problème est impossible.

224. Corollaire. — ***Si deux points divisent un vecteur donné dans le même rapport algébrique, ils sont confondus.***

Soient M et N ces deux points et k la valeur des deux rapports $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ et $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$.

D'après ce qui précède $\overline{OM} = \overline{ON}$ et M et N sont confondus.

Le rapport algébrique $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ *détermine donc la position d'un point* M *de la droite* AB *aussi bien que son abscisse.*

DIVISION HARMONIQUE

225. Définition. — ***Deux points*** C ***et*** D ***sont conjugués harmoniques par rapport aux points*** A ***et*** B ***s'ils divisent le segment*** AB ***dans le même rapport arithmétique.***

Par suite si (fig. 196) : $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

Or la proportion précédente s'écrit aussi : $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$.

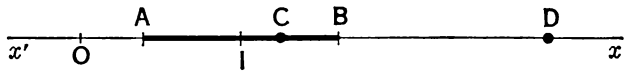


Fig. 196.

Inversement A ***et*** B ***sont conjugués harmoniques par rapport à*** C ***et*** D ***L'ensemble des quatre points*** A, B, C ***et*** D, ***pris dans cet ordre, constitue la division harmonique*** (ABCD).

Algébriquement la condition pour que la division (ABCD) soit harmonique s'écrit :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AC}\cdot\overline{BD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = 0. \qquad (1)$$

Il en résulte que la donnée des trois points A, B et C détermine la position du point D conjugué de C par rapport à A et B.

226. Relation entre les abscisses.

Prenons sur la droite $x'x$ une origine O quelconque et désignons par a, b c et d les abscisses de A, B, C et D. La relation (1) s'écrit (n° 217) :

$$(c - a)(d - b) + (d - a)(c - b) = 0.$$

D'où : $$2(ab + cd) = ac + ad + bc + bd.$$

Soit $$\boxed{(a + b)(c + d) = 2(ab + cd).} \qquad (2)$$

(Se rappeler : *produit des deux sommes = deux fois la somme des produits.*)

227. Formes remarquables de la relation précédente.

1° Prenons l'origine O en A, on a $a = 0$, la relation (2) devient :

$$b(c + d) = 2cd$$

et en divisant par bcd :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}.$$

Or : $b = \overline{AB}$, $c = \overline{AC}$ et $d = \overline{AD}$. On obtient :

$$\boxed{\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.} \qquad (3)$$

Cette relation équivaut à la relation (1) et se transforme en permutant A et B entre eux ou en échangeant A et B avec C et D :

$$\frac{2}{\overline{BA}} = \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{BD}}; \quad \frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\overline{DC}} = \frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}}. \qquad (3')$$

2° Prenons l'origine O en I milieu de AB. On a alors : $b = -a$ d'où : $a + b = 0$ et la relation (2) devient :

$$0 = 2(-a^2 + cd).$$

Soit $$a^2 = cd.$$

Or $$a = \overline{IA} = -\overline{IB}, \quad c = \overline{IC} \quad \text{et} \quad d = \overline{ID}.$$

D'où :

$$\boxed{\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.} \qquad (4)$$

Cette relation montre que $\overline{IC} \cdot \overline{ID}$ est positif, donc que C et D sont d'un même côté du milieu I de AB.

D'autre part si C se rapproche de A (ou de B) il en est de même de D. Si C se rapproche de I, $\overline{IC}$ devient aussi voisin de zéro que l'on veut, tandis que ID dépasse en valeur absolue tout nombre fixé à l'avance.

Quand le point C est en I, le point D n'existe plus. Autrement dit, le milieu d'un segment n'a pas de conjugué harmonique par rapport aux extrémités de ce segment.

228. Remarque. — Les relations (2), (3) et (4) équivalent à la relation (1) et sont par suite suffisantes pour que la division (ABCD) soit harmonique.

Signalons aussi les relations :

$$\overline{CD} \cdot \overline{CI} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} \quad \text{et} \quad \overline{DC} \cdot \overline{DI} = \overline{DA} \cdot \overline{DB} \qquad (5)$$

qui se ramènent immédiatement aux deux dernières relations (3') et qui se rencontrent fréquemment dans les applications.

EXERCICES

260. On donne sur un axe deux points A et B d'abscisses a et b.

1° Calculer les abscisses des points qui divisent AB en 2, 3 ou 4 parties égales.

2° Calculer en général les abscisses des points qui partagent AB en n parties égales

261. Soient quatre points A, B, C, D d'un axe d'abscisses respectives a, b, c et d. Démontrer les relations suivantes :

1° $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0.$

2° $\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0.$

3° $\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0,$

262. Soient trois points A, B, C d'un axe et M le milieu de BC. Démontrer les relations suivantes :

1° $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\,\overline{AM}.$ 2° $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AM}^2 - \overline{BM}^2.$

3° $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2.$ 4° $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\,\overline{BC} \cdot \overline{MA}.$

263. M et M′ sont les points qui divisent le segment AB dans le rapport arithmétique $k > 1$. On pose $AB = a$.

1° Calculer en fonction de a et k les longueurs des segments MA, MB, M′A, M′B, MM′

2° Déterminer en fonction de k le rapport $\dfrac{OM}{OB}$ où O désigne le milieu de MM′ en appliquant les résultats précédents, puis directement.

3° Application numérique : $a = 12$; $k = \dfrac{3}{2}$.

264. Soient M et M′ les points qui divisent AB dans le rapport arithmétique $\dfrac{m}{n}$. On pose $\overline{AB} = a$ et on suppose M entre A et B.

1° Calculer en fonction de a, m et n les mesures $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{M'A}$, $\overline{M'B}$ et $\overline{MM'}$.

2° Soit O le milieu de MM′. En déduire que :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

3° Retrouver le résultat précédent en montrant directement que :

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = -\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}.$$

265. On considère 4 points A, B, C et D alignés.

1° Montrer que $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$. Quelle est la valeur des deux membres si AB et CD ont même milieu?

2° Si la division (ABCD) est harmonique : $\dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{BD}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} + \dfrac{1}{\overline{BC}} = 0.$

3° Étudier la disposition des 4 points lorsque la relation précédente est vérifiée en la ramenant d'abord à :

$$(\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC})\,(\overline{AC} + \overline{BD}) = 0.$$

266. Soient sur un axe d'origine O deux points A et B d'abscisses a et b et soient deux nombres relatifs α et β, tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

1° Déterminer l'abscisse x du point G tel que $\alpha\overline{GA} + \beta\overline{GB} = 0$. Montrer que pour tout point M de l'axe on a :

$$\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} = (\alpha + \beta)\,\overline{MG}.$$

2° Démontrer la relation :

$$\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2 = (\alpha + \beta)\,\overline{MG}^2 + \alpha\overline{GA}^2 + \beta\overline{GB}^2.$$

3° Déterminer les points M tels que $\alpha\overline{MA}^2 + \beta\overline{MB}^2$ ait une valeur donnée k.
Application numérique : $a = -5$, $b = +10$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $k = 297$.

267. 1° Étant donnés quatre points A, B, C et D alignés démontrer que :

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AC}\cdot\overline{DB} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = 0.$$

2° En déduire que si la division (ABCD) est harmonique

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = 2\,\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}.$$

Étudier la réciproque.

268. On prend un point fixe B sur un axe Ax et un point fixe C sur un axe Ay, puis on construit les points I et J qui divisent les segments AB et AC dans un même rapport algébrique k. Un point M se déplace sur Ax et un point N sur Ay de façon que

$$\overline{IM}\cdot\overline{JN} = \overline{IA}\cdot\overline{JC} = \overline{IB}\cdot\overline{JA}.$$

1° Démontrer les relations : $\overline{IM}\cdot\overline{CN} = \overline{MA}\cdot\overline{JC}$ et $\overline{IM}\cdot\overline{AN} = \overline{MB}\cdot\overline{JA}$.

2° En déduire la relation : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k\,\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$.

3° Soient M′ et N′ deux positions correspondantes de M et N. Montrer que si la division (ABMM′) est harmonique il en est de même de la division (ACNN′).

269. Soient quatre points A, B, C et D alignés. On désigne par I et J les milieux respectifs de AB et CD.

1° Montrer que si la division (ABCD) est harmonique on a :

$$\overline{AB}\cdot\overline{AJ} = \overline{AC}\cdot\overline{AD} \quad \text{et} \quad \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\,\overline{IJ}^2.$$

2° Étudier les deux réciproques.

270. On considère la division harmonique (ABMN) et on construit A′ conjugué harmonique de M par rapport à A et N puis B′ conjugué harmonique de M par rapport à B et N. Montrer que la division (A′B′MN) est harmonique (Prendre N pour origine).

THÉORÈME DE THALÈS

229. Théorème. — ***Lorsque des droites sont parallèles, elles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.***

Soient AB et CD deux segments déterminés sur la sécante Δ, et A'B', C'D' les segments correspondants déterminés sur Δ' par les parallèles AA', BB', CC', DD' (fig. 197). Supposons que $\frac{AB}{CD}$ soit égal à $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire que l'on puisse partager AB en 3 segments et CD en 5 segments de telle sorte que les 8 segments ainsi obtenus soient égaux. Par les points de division menons les parallèles à AA'. On obtient ainsi une série de droites parallèles qui partagent A'B' et C'D' en 8 *segments égaux* (n° 136). Il existe 3 de ces segments sur A'B' et 5 sur C'D', de sorte que

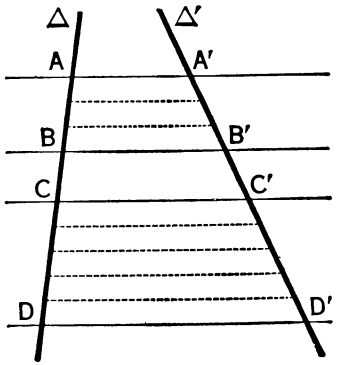


Fig. 197.

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3}{5}; \text{ donc } \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$

soit, en échangeant les moyens :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}.$$

On démontrerait de même :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'C'}{AC} = \dots$$

ce qui exprime que les segments déterminés sur Δ sont proportionnels aux segments correspondants déterminés sur Δ'.

230. Remarque. — Si les droites Δ et Δ' sont orientées, les mesures algébriques $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$... sont de même signe et celles de $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$... le sont aussi. Les rapports $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ égaux en valeur absolue d'après le

théorème précédent ont aussi le même signe, *quel que soit le sens positif adopté sur* Δ *ou* Δ', et nous avons :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \dots$$

231. Divisions semblables. — ***Les divisions*** (ABCD) ***de*** Δ ***et*** (A'B'C'D') ***de*** Δ' ***sont dites semblables lorsque les différents segments de l'une sont proportionnels aux segments correspondants de l'autre.***

Deux points correspondants tels que A et A' sont dits *homologues*.

Il est clair que les divisions obtenues dans le théorème de Thalès sont semblables, et que le point de rencontre de Δ et Δ' est à lui-même son homologue. Le théorème peut donc s'énoncer ainsi :

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes concourantes des divisions semblables ayant un point homologue commun.

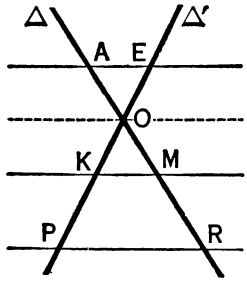


Fig. 198.

Pour obtenir les relations résultant du théorème de Thalès (fig. 198) il est commode d'écrire

$$\left\{\begin{matrix} \text{AOMR} \\ \text{EOKP} \end{matrix}\right.$$

en mettant sur une ligne les points de Δ et au-dessous les points homologues de Δ'. Les segments homologues se correspondent ainsi verticalement et on peut écrire sans se reporter à la figure :

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{EK}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{KP}}.$$

232. Remarque. — Pour pouvoir affirmer que deux divisions sont semblables il n'est pas nécessaire de savoir que tous les segments de l'une sont proportionnels aux segments correspondants de l'autre. Ainsi la relation :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$$

permet d'écrire :

$$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'B'} - \overline{C'A'}}{\overline{CA} - \overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

et montre que les divisions (ABC) et (A'B'C') sont semblables.

De même les relations :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}$$

suffisent pour affirmer que les divisions (ABCD) et (A'B'C'D') sont semblables. Si on ne considère que des rapports arithmétiques il faut de plus vérifier que les points A, B C et D et les points A', B', C' et D' ont même disposition.

233. Application au trapèze. — ***Toute parallèle aux bases d'un trapèze détermine sur les côtés non parallèles des segments proportionnels.***

Les parallèles MN, AB et DC (fig. 199 et 200) donnent sur les sécantes $\left\{\begin{matrix}\text{MAD}\\\text{NBC}\end{matrix}\right.$

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}.$$

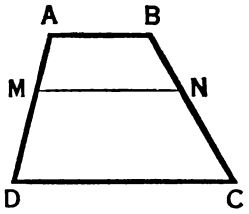


Fig. 199.

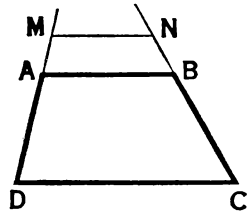


Fig. 200.

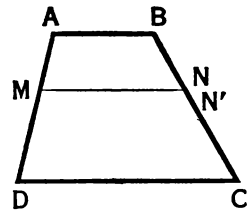


Fig. 201.

234. Réciproque. — ***Lorsqu'une droite détermine sur les côtés non parallèles d'un trapèze des segments proportionnels, elle est parallèle aux bases.***

Supposons que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{NC}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \text{ (fig. 201).}$$

Menons par M la parallèle MN' aux bases. On a (th. direct) :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{N'B}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{N'C}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{N'B}}{\overline{N'C}}.$$

Il en résulte que

$$\frac{\overline{N'B}}{\overline{N'C}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.$$

Les deux points N' et N divisent le segment BC dans le même rapport algébrique. Ils sont donc confondus (n° 224) et MN est parallèle aux bases.

235. Application au triangle. — ***Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels.***

Nous obtenons (fig. 202 à 204) sur les sécantes $\left\{\begin{matrix}\text{ABD}\\\text{ACE}\end{matrix}\right.$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}.$$

236. Réciproque. — ***Lorsqu'une droite détermine des segments proportionnels sur deux côtés d'un triangle, elle est parallèle au troisième côté.***

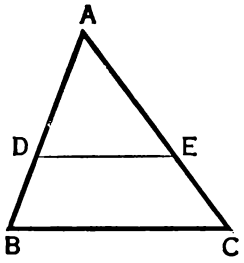


Fig. 202.

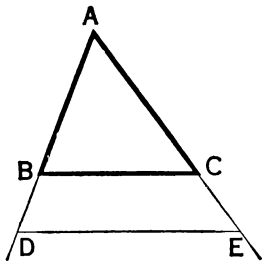


Fig. 203.

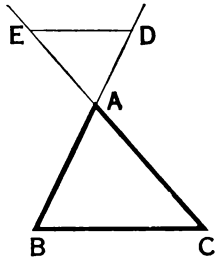


Fig. 204.

Si deux des rapports du théorème direct sont égaux, les deux divisions ABD et ACE sont semblables et les trois rapports sont égaux. On en déduit

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

et la démonstration s'achève comme pour le trapèze.

237. Généralisations. — Les réciproques n^{os} 234 et 236 se généralisent ainsi :

1° *Si plusieurs droites déterminent des divisions semblables sur deux sécantes et si deux d'entre elles sont parallèles, toutes ces droites sont parallèles.*

2° *Si deux divisions semblables ont un point homologue commun les droites joignant les points homologues sont parallèles.*

APPLICATIONS

238. Partage d'un segment en parties proportionnelles à plusieurs segments.

Soit à partager le segment AB en parties proportionnelles aux segments donnés m, n et p (fig. 205). Sur la demi-droite Ax, portons successivement les segments AC, CD et DE respectivement égaux à m, n et p et menons par C et D les parallèles à EB. Elles coupent AB en M et N. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{CD} = \frac{NB}{DE} \quad \text{soit} \quad \frac{AM}{m} = \frac{MN}{n} = \frac{NB}{p}.$$

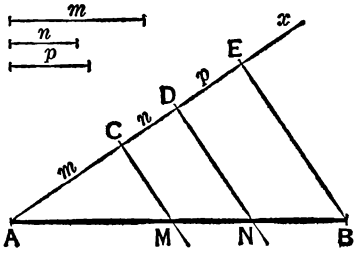


Fig. 205.

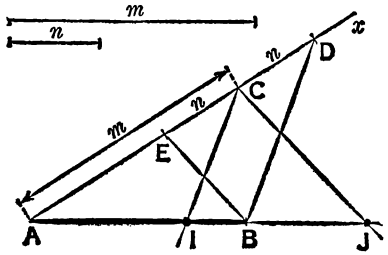


Fig. 206.

239. Contruire les points qui divisent un segment dans un rapport donné.

Soit à construire les points I et J qui divisent le segment AB dans le rapport de deux segments m et n donnés (fig. 206). Sur Ax portons $AC = m$ puis $CD = CE = n$ et menons par C les parallèles à BD et BE. Elles coupent AB en I et J. On a :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{CA}{CD} = \frac{m}{n} \quad \text{et} \quad \frac{JA}{JB} = \frac{CA}{CE} = \frac{m}{n}.$$

240. Construire la quatrième proportionnelle à trois longueurs données.

Soient trois segments donnés de longueurs a, b et c. Il s'agit de construire un segment de longueur x tel que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

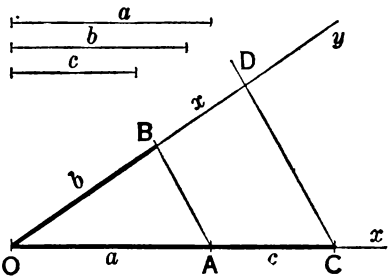


Fig. 207.

Sur les côtés d'un angle portons $OA = a$ et $OB = b$, puis sur le côté OA, un segment $AC = c$ (fig. 207). Par C menons la parallèle à AB. Elle coupe OB en D. On a :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{BD}$$

Donc $BD = x$.

On peut porter c dans le même sens que OA ou dans le sens opposé. On peut aussi porter $OC = c$. C'est alors le segment OD qui est égal à x.

EXERCICES

271. Soit un triangle ABC. Par un point D de BC on mène les parallèles à AB et AC qui coupent AC en E et AB en F.

1° Comparer les rapports $\frac{AF}{AB}$ et $\frac{CD}{CB}$ puis $\frac{AE}{AC}$ et $\frac{BD}{BC}$.

2° Comment faut-il choisir D pour que EF soit parallèle à BC?

272. Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. On mène par G les parallèles à AB et AC qui coupent BC en D et E.

1° Évaluer les rapports $\frac{BD}{BC}$ et $\frac{EC}{BC}$.

2° Comparer les trois segments BD, DE et EC.

273. Soit un triangle ABC :

1° Construire le point D de BC tel que $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{1}{2}$.

2° Les parallèles menées de D à AB et AC coupent AC en E et AB en F. Évaluer les rapports $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ et $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.

3° Montrer que EF est parallèle à la médiane issue de B du triangle ABC.

274. Par le point O intersection des diagonales du quadrilatère ABCD on mène la parallèle à BC qui coupe AB en E, la parallèle à CD qui coupe AD en F, la parallèle à AB qui coupe BC en H et la parallèle à AD qui coupe CD en G.

1° Montrer que EF et GH sont parallèles à BD.

2° Que peut-on dire du quadrilatère EFGH quand O est au milieu de AC?

275. Soit un triangle ABC. On prolonge BC de deux segments BD et CE égaux à BC. On mène par D la parallèle à AB et par E la parallèle à AC; elles se coupent en F et FA coupe BC en M.

1° Démontrer l'égalité $\frac{MB}{BD} = \frac{MC}{CE}$.

2° Comparer MB et MC. Que représente A pour le triangle DEF?

276. On mène les hauteurs BD et CE du triangle ABC, puis les hauteurs DF et EG du triangle ADE.

1° Démontrer les relations : $AD.AE = AB.AG = AC.AF$.

2° Montrer que FG et BC sont parallèles.

277. Soit un angle xOy et un point A sur Ox, un point B sur Oy. On pose $\overline{OA} = a$ et $\overline{OB} = b$.

1° M étant un point variable de AB, on mène par ce point la parallèle à Oy qui coupe Ox en P et la parallèle à Ox qui coupe Oy en Q. Démontrer la relation :

$$\frac{\overline{OP}}{a} + \frac{\overline{OQ}}{b} = 1,$$

2° Réciproquement si les points P et Q sont tels que la relation précédente soit vérifiée, montrer que le sommet M du parallélogramme POQM décrit la droite AB.

278. Une parallèle au côté BC d'un triangle ABC coupe AB en D et AC en E. La parallèle menée par C à BE coupe AB en F.

1° Démontrer la relation $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AF}$.

2° Étant donné deux segments de longueurs a et b construire un segment de longueur x tel que $a^2 = bx$.

279. Soit un triangle ABC. On prend un point D de AB entre A et B et on prolonge AC d'un segment CE = BD. DE coupe BC en M. Soit F l'intersection de AC et de la parallèle DF à BC.

1° Comparer les rapports $\frac{BD}{FC}$ et $\frac{AB}{AC}$.

2° Démontrer l'égalité : $\frac{DM}{ME} = \frac{AC}{AB}$.

280. Dans un parallélogramme ABCD, une sécante variable issue de D coupe AB en M, BC en N et AC en I.

1° Comparer les rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{CB}{CN}$ et $\frac{DM}{DN}$. Montrer que le produit $\overline{AM}.\overline{CN}$ est constant.

2° Comparer les rapports $\frac{IM}{ID}$, $\frac{ID}{IN}$ et $\frac{IA}{IC}$. Démontrer que : $\overline{ID}^2 = \overline{IM}.\overline{IN}$.

3° La parallèle Bx à AC coupe MN en E. Montrer que la division (DEMN) est harmonique.

281. Soit un triangle ABC. Par deux points M et M' de BC on trace les parallèles à AB qui coupent AC en P et P' puis les parallèles à AC qui coupent AB en Q et Q'.
Démontrer l'égalité : PP'. AB = QQ'. AC.

282. Étant donné un rectangle ABCD on place sur les côtés AB, BC, CD et DA les points E, F, G, H tels que $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = k$.

1° Prouver que EFGH est un parallélogramme.
2° Si l'on fait varier le rapport k, montrer que le périmètre de ce parallélogramme est constant.
3° Comment faut-il choisir ABCD pour que EFGH soit un rectangle?

283. Soit un segment AB de milieu M. On projette orthogonalement A, B, M en A', B', M' sur un axe xy.
1° Montrer que M' est le milieu de A'B'. Calculer l'abscisse de M' connaissant les abscisses de A' et B'.
2° Soient C et D deux points qui divisent AB dans le même rapport, C' et D' leur projections sur xy. Prouver que la division (A'B'C'D') est harmonique.

284. 1° Une sécante Δ coupe en α, β et γ respectivement les côtés BC, CA et AB du triangle ABC. La parallèle menée par C à Δ coupe AB en D. Évaluer en fonction des segments déterminés sur AB les rapports $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ et $\frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}}$. En déduire la relation dite de Ménélaüs : $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$.

2° Montrer que réciproquement si 3 points α, β et γ pris respectivement sur BC, CA et AB vérifient la relation précédente ces points sont alignés (Identifier γ avec γ' intersection de αβ et de AB).

II. GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

13e Leçon

GÉNÉRALITÉS SUR LE PLAN

241. Le plan. — La surface d'une nappe d'eau au repos, celle du tableau donnent la *notion de plan.* Plaçons les extrémités de l'arête rectiligne d'une règle sur la surface du tableau. Nous constatons que tous les points de cette arête sont en contact avec le tableau et ceci, quelle que soit la position de cette arête. Cette propriété est dite *caractéristique* du plan (fig. 208).

Le plan est une surface telle que toute droite joignant deux points de cette surface y soit contenue tout entière.

Le menuisier, l'ajusteur utilisent cette propriété pour reconnaître qu'une surface est plane (fig. 208).

La droite AB (fig. 209) est illimitée. Il en est de même de tout plan qui la contient. Pratiquement, on ne dessine que des *portions de plan,* le plus

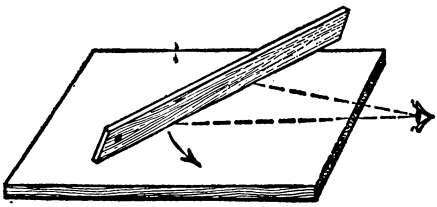


Fig. 208.

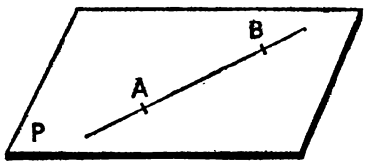


Fig. 209.

souvent limitées à la région intérieure à un rectangle représenté en perspective conventionnelle par un parallélogramme. Une lettre placée dans l'un de ses angles suffit à nommer le plan considéré : on dit « le plan P ».

Certains solides usuels (cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide) sont limités par des portions de plan. D'autres, appelés corps ronds, tels que cylindre, cône, sphère ne sont pas entièrement limités par des portions de plan.

242. Positions relatives d'une droite et d'un plan.

1° Si une droite Δ a deux points dans un plan, elle y est contenue tout entière (n° 241). Elle partage alors le plan en deux régions appelées *demi-plans*. On sait que toute ligne joignant, dans le plan, un point M de l'un de ces demi-plans à un point N de l'autre coupe au moins une fois Δ.

2° Une droite, non contenue dans un plan, a au plus un point commun avec ce plan.

En effet, si elle en avait deux, elle serait contenue dans le plan. Si Δ a un seul point A commun avec le plan P (fig. 210), on dit que Δ coupe ou perce le plan P en A, ou encore que A est l'*intersection* de Δ et de P ou le *pied* de Δ dans P. La droite Δ est une *sécante* pour le plan P.

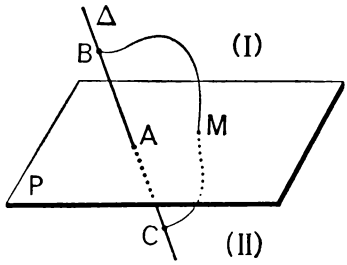


Fig. 210.

3° Nous verrons (14e leçon) qu'une droite et un plan peuvent ne pas avoir de point commun. On dira que la droite est parallèle au plan.

En définitive, une droite peut être contenue dans un plan, sécante ou parallèle à ce plan.

243. Postulats relatifs au plan.

1° Tout plan partage l'espace en deux régions appelées demi-espaces.

On constate qu'il est impossible de joindre par une ligne quelconque un point M du demi-espace (I) à un point N du demi-espace (II) (fig. 210), sans traverser le plan P qui sépare ces deux demi-espaces.

2° Par trois points non alignés on peut faire passer un plan.

Trois points A, B et C étant matérialisés par les extrémités de trois pointes, on constate que l'on peut amener une plaque de carton à reposer sur ces trois pointes. Bien que l'on puisse encore faire glisser la plaque latéralement sur les trois pointes, le plan déterminé est unique comme le montre le théorème suivant :

244. Théorème. — *Par trois points non alignés on ne peut faire passer qu'un seul plan.*

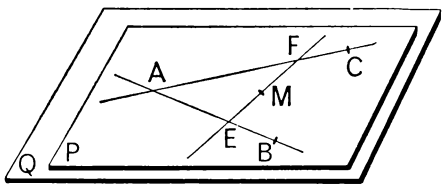


Fig. 211.

Supposons qu'il existe deux plans P et Q contenant les trois points non alignés A, B et C (fig. 211). Il s'agit de démontrer que les plans P et Q sont confondus. Ils contiennent tous deux les droites AB et AC (n° 241). Soit

M un point *quelconque* de P. On peut, dans ce plan, construire une droite passant par M qui coupe respectivement AB et AC en E et F. Ces points, situés sur les droites AB et AC du plan Q appartiennent à ce plan; il en est de même de la droite EF tout entière, donc du point M. Tout point du plan P appartient donc au plan Q; on démontrerait de même que tout point du plan Q appartient au plan P. Ces deux plans sont donc confondus.

245. Conséquences.

1° ***Deux plans sont superposables.*** — Il suffit d'amener un plan P à passer par trois points non alignés d'un plan Q pour que ces deux plans coïncident.

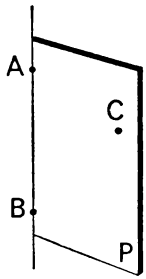


Fig. 212.

2° Les plans P et Q étant superposés, on peut les faire glisser l'un sur l'autre sans qu'ils cessent de coïncider et ceci, même après retournement du plan P, par exemple. On peut en particulier amener une demi-droite de l'un à coïncider avec une demi-droite donnée de l'autre. Autrement dit :

Un plan peut glisser sur lui-même, même après avoir été retourné face pour face.

3° ***Par deux points donnés, on peut faire passer une infinité de plans.*** — Tous les plans passant par A et B (fig. 212), contiennent la droite AB et il en passe un et un seul par un point quelconque C de l'espace non situé sur AB. Lorsqu'un demi-plan P limité à la droite AB tourne toujours dans le même sens autour de AB et revient à sa position initiale, il a balayé ou engendré tout l'espace. On dit qu'il a subi une *révolution* autour de AB.

246. Détermination d'un plan. — *Un plan est déterminé:*

1° Par trois points non alignés.
2° Par une droite et un point extérieur à cette droite.
3° Par deux droites concourantes.

1° Il résulte des n^{os} 243 et 244 que par trois points non alignés passe un plan et un seul.

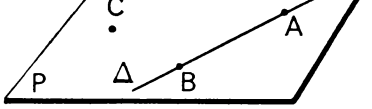


Fig. 213.

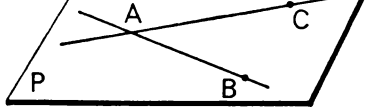


Fig. 214.

2° Le plan déterminé par C et deux points A et B de la droite Δ (fig. 213), contient cette droite (n° 241). Tout autre plan contenant C et Δ contient les points A, B et C et coïncide avec le précédent.

3° Le plan déterminé par A, B et C (fig. 214), contient les droites concourantes AB et AC. Tout plan contenant les droites AB et AC contient les points A, B, C non alignés et coïncide avec le précédent.

247. Génération du plan.

Une ligne mobile engendre une surface; une droite mobile engendre donc une surface, à moins qu'elle ne glisse sur elle-même.

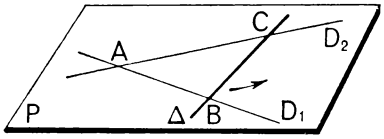


Fig. 215.

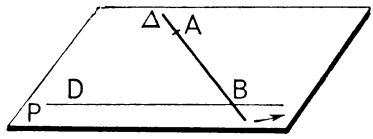


Fig. 216.

1° Toute droite variable Δ rencontrant deux droites concourantes D_1 et D_2 (fig. 215) en des points B et C distincts de leur intersection A appartient au plan P déterminé par D_1 et D_2. Réciproquement, par tout point M de P on peut construire une droite Δ coupant D_1 et D_2 respectivement, en deux points distincts B et C. La droite variable Δ engendre le plan P ou encore :

Le lieu géométrique d'une droite variable qui rencontre deux droites concourantes données en deux points distincts est le plan déterminé par ces deux droites.

2° Toute droite variable Δ passant par A (fig. 216), et rencontrant la droite D en B appartient au plan P déterminé par A et D. Réciproquement, par tout point M de P, n'appartenant pas à la parallèle à D menée par A dans le plan P, on peut mener une droite Δ qui coupe D en B. La droite variable Δ engendre le plan P :

Le lieu géométrique d'une droite variable qui rencontre une droite donnée et qui passe par un point donné extérieur à cette droite est le plan déterminé par la droite et le point donnés.

248. Intersection de deux plans.

THÉORÈME. — ***Lorsque deux plans distincts ont un point commun, ils se coupent suivant une droite passant par ce point.***

Soient deux plans distincts P et Q qui ont un point commun A (fig. 217). Traçons par A dans le plan Q une droite *xy* qui perce le plan P en A. Le plan P partage l'espace en deux demi-espaces (I) et (II). Soient M et N deux points de *xy* appartenant l'un à la région (I), l'autre à la région

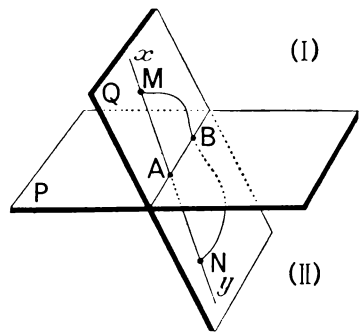


Fig. 217.

(II). Une courbe quelconque du plan Q joignant M à N sans passer par A coupe le plan P en B (n° 243) point commun aux deux plans P et Q. La droite AB est donc commune aux deux plans (n° 241). Les deux plans P et Q n'ont pas d'autre point commun en dehors de cette droite, car s'ils en avaient un, ils coïncideraient (n° 246).

On dit que les plans P *et* Q *sont sécants. La droite* AB *est leur intersection.*

249. Positions relatives de deux plans. — Deux plans peuvent être :

1° *Confondus :* il suffit pour cela qu'ils aient en commun trois points non alignés;

2° *sécants :* il suffit pour cela qu'ils soient distincts et aient un point commun;

3° *parallèles :* nous montrerons (15e leçon), que deux plans peuvent n'avoir aucun point commun; ils sont dits parallèles.

250. Positions relatives de deux droites de l'espace.

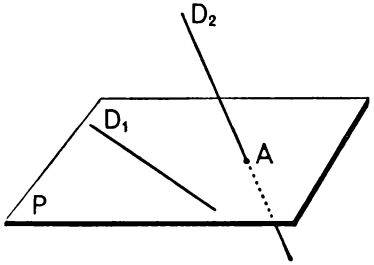


Fig. 218.

Soient deux droites D_1 et D_2. Considérons le plan P déterminé par D_1 et un point A de D_2, non situé sur D_1. Deux cas sont possibles :

1° Si P contient D_2, les droites D_1 et D_2, sont dans un même plan et sont *concourantes* ou *parallèles.*

2° Si P ne contient pas D_2 mais la coupe en A (fig. 218), les droites D_1 et D_2 ne peuvent être ni concourantes, ni parallèles, sans quoi elles détermineraient un plan qui, contenant A et D_1, serait confondu avec P, ce qui est impossible puisque P coupe D_2 en A. En général, deux droites quelconques de l'espace ne sont pas *situées dans un même plan* et ne sont donc ni concourantes, ni parallèles.

251. Applications

1° Pour démontrer que trois points de l'espace sont alignés, il suffit de montrer qu'ils appartiennent à deux plans distincts.

Ils appartiennent en effet à l'intersection de ces deux plans.

2° Pour démontrer que trois plans distincts ont une droite commune, il suffit de démontrer qu'ils ont deux points communs.

Ils ont en effet en commun la droite Δ joignant les deux points. Il est clair que tout plan coupant Δ en O coupe ces trois plans suivant trois droites concourantes en O.

3° Pour démontrer que trois droites de l'espace n'appartenant pas à un même plan sont concourantes, il suffit de démontrer qu'elles se coupent deux à deux.

D_1 et D_2 se coupent en O (fig. 219), et déterminent un plan P. Si D_3 non située dans P coupe D_1 et D_2 elle ne peut les couper en deux points distincts, sans quoi elle appartiendrait à P. Elle les coupe donc en O et les trois droites sont concourantes.

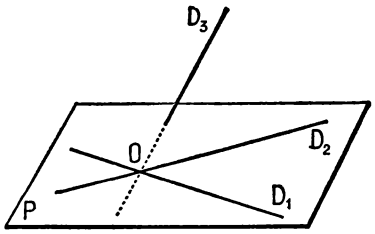


Fig. 219.

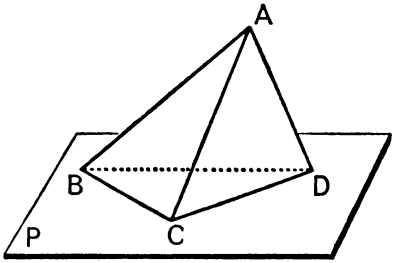


Fig. 220.

On peut également dire que si D_3 coupe D_1 et D_2, le point O appartient aux deux plans distincts (D_1D_3) et (D_2D_3), donc à leur intersection D_3.

252. Tétraèdre — Soient quatre points A, B, C et D (fig. 220), non situés dans un même plan. On appelle *tétraèdre* le solide limité par les quatre triangles ABC, BCD, CDA et DAB. Ces triangles sont les *faces* du tétraèdre; les points A, B, C et D en sont les *sommets* et les segments tels que AB en sont les *arêtes*. Deux arêtes non concourantes telles que AB et CD sont dites *opposées*. Le tétraèdre possède 4 sommets, 4 faces et 6 arêtes.

EXERCICES

285. On donne trois demi-droites concourantes Ox, Oy, Oz n'appartenant pas à un même plan.

1° Dénombrer les plans qui contiennent deux de ces droites. Ont-ils un point commun?

2° Un plan P coupe les demi-droites Ox, Oy, Oz respectivement en A, B et C. Nature de la figure OABC? Montrer que quatre plans donnés déterminent en général un tétraèdre.

286. Quatre demi-droites Ox, Oy, Oz, Ot issues de O sont telles que trois d'entre elles n'appartiennent pas à un même plan. Un plan P les coupe respectivement en A, B, C et D.

1° Construire l'intersection des plans xOy et yOt, puis celle des plans xOt et yOz, enfin celle des plans xOy et zOt.

2° Montrer que les trois droites obtenues sont concourantes.

287. Soient trois droites concourantes Ox, Oy, Oz. On prend deux points A et A′ sur Ox puis deux points B et B′ sur Oy, enfin deux points C et C′ sur Oz.

1° Montrer que les droites BC et B'C' se coupent en général en un point α, CA et C'A' en un point β et AB et A'B' en un point γ.

2° Montrer que les trois points α, β, γ sont alignés.

288. On donne deux droites quelconques ainsi qu'un point A extérieur à ces droites. Le point A et la droite D_1 déterminent un plan P; de même A et D_2 déterminent un plan Q.

1° Montrer que P et Q se coupent suivant une droite passant par A et rencontrant en général D_1 et D_2.

2° En déduire que par le point donné A on peut, en général, mener une droite et une seule s'appuyant sur les droites données D_1 et D_2.

289. Trois plans P, Q, R concourent suivant une droite Δ. Un plan S coupe Δ en O.

1° Montrer que les droites d'intersection de S avec les plans P, Q et R sont concourantes.

2° On suppose que le plan S tourne autour d'une droite fixe D coupant P, Q, R respectivement en A, B et C. Le point O décrivant Δ quel est le lieu géométrique des droites OA, OB et OC?

290. Deux droites D_1 et D_2 se coupent en O :

1° Soit M un point quelconque. Quelle est l'intersection Δ des plans déterminés par M et D_1 d'une part et par M et D_2 d'autre part?

2° Si M décrit une droite D ne passant pas par O quel est le lieu géométrique de la droite Δ?

291. Deux plans P et Q se coupent suivant une droite Δ. Deux points A et B de P sont tels que AB coupe Δ en L. On joint un point O extérieur à P et à Q aux points A et B. Les droites OA et OB coupent respectivement le plan Q en A' et B' :

1° Montrer que les points L, A', B' sont alignés.

2° Soit ABC un triangle du plan P, A', B' et C' les intersections de OA, OB et OC avec le plan Q. Montrer que les intersections de AB et A'B', de AC et A'C' et de BC et B'C' sont trois points alignés.

292. Deux triangles ABC et A'B'C' appartiennent respectivement aux plans P et Q dont Δ est la droite d'intersection. On suppose que BC et B'C' se coupent en α, AC et A'C' se coupent en β et que AB et A'B' se coupent en γ.

1° Que peut-on dire des points α, β et γ?

2° Montrer que AA' et BB' sont dans un même plan. En déduire qu'elles sont en général concourantes.

3° Montrer que AA', BB', CC' sont en général concourantes.

293. On donne un tétraèdre ABCD, un point E sur AB, un point F sur AC et un point G sur BD. On suppose que EF et BC ne sont pas parallèles.

1° Construire l'intersection des plans EFG et BCD.

2° Construire les intersections des droites AD et CD avec le plan EFG.

294. Soit un tétraèdre ABCD. Démontrer que :

1° Les plans déterminés par A et chaque médiane du triangle BCD sont concourants.

2° Les plans déterminés par A et chaque hauteur du triangle BCD sont concourants.

3° Les plans déterminés par A et chaque bissectrice intérieure de BCD sont concourants.

295. On désigne par A' et B' les centres de gravité des faces BCD et ACD du tétraèdre ABCD, par I le milieu de AB et par J le milieu de CD.

1° Montrer que les droites AA' et BB' se coupent en un point G. En déduire que les quatre droites qui joignent un sommet du tétraèdre au centre de gravité de la face opposée sont concourantes.

2° Montrer que AB et A'B' sont parallèles. En déduire que G partage les quatre segments tels que AA' dans le même rapport.

3° Montrer que le point G appartient aux six plans tels que ABJ ou CDI. En déduire que les trois segments qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourants. Démontrer que le point G est le milieu de chacun de ces trois segments.

296. On donne deux droites quelconques D_1 et D_2, deux points A et B de la première et deux points E et F de la seconde.

1° Montrer que les points A, B, E et F n'appartiennent pas à un même plan.

2° On suppose que A et B restant fixes, E décrit D_2. Trouver le lieu géométrique des milieux de EA et EB et du centre de gravité du triangle EAB.

297. Deux plans P et Q se coupent suivant une droite Δ et C désigne un cercle du plan Q.

1° Montrer que les points communs au plan P et au cercle C sont aussi communs à C et Δ et réciproquement. En déduire la construction des points communs au plan P et au cercle C. Discuter.

2° Construire une droite passant par un point donné A, rencontrant une droite donnée Δ et un cercle donné C.

3° On donne un cercle C dans un plan P et deux points A et B tels que la droite AB coupe P en I. Construire un plan passant par les points A et B et coupant P suivant une droite tangente au cercle C.

DROITES PARALLÈLES

253. Définition. — ***Deux droites de l'espace sont parallèles lorsqu'elles sont dans un même plan et n'ont aucun point commun.***

L'absence de point commun ne suffit pas à caractériser le parallélisme de deux droites de l'espace, car deux droites quelconques n'ont en général aucun point commun (n° 250). Pour démontrer que deux droites D_1 et D_2 sont parallèles (fig. 221), il faut donc montrer :

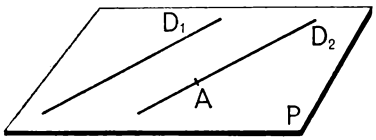


Fig. 221.

1° Qu'elles sont dans un même plan.
2° Qu'elles n'ont pas de point commun.

Il résulte de la définition que *deux droites parallèles déterminent un plan :* le plan défini par la droite D_1 et un point quelconque A de D_2 par exemple.

254. Théorème I. — ***Par un point extérieur à une droite, on peut mener à cette droite une parallèle et une seule.***

Toute parallèle à D_1 passant par A (fig. 221), doit être contenue dans le *plan unique* P déterminé par la droite D_1 et le point A. Dans ce plan P, il existe une parallèle D_2 à D_1 passant par A et d'après le postulat d'Euclide, il en existe une seule.

255. Théorème II. — ***Quand deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.***

Soient les droites parallèles D_1 et D_2 (fig. 222), et supposons que le plan P coupe D_1 en A. Il s'agit de démontrer que D_2 coupe le plan P.

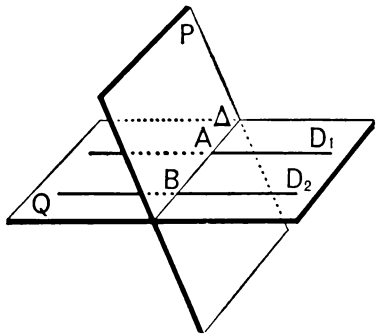


Fig. 222.

Les droites D_1 et D_2 déterminent un plan Q (n° 253). Les plans P et Q ont en commun le point A et sont distincts puisque D_1 n'est pas dans P. Ces deux plans se coupent suivant une droite Δ passant par A et distincte de D_1. Dans

le plan Q, la droite Δ coupant D_1 en A coupe sa parallèle D_2 en B, point commun à D_2 et au plan P. C'est d'ailleurs le seul, car si D_2 était dans P il en serait de même de sa parallèle D_1 menée par A. Donc D_2 coupe P en B.

256. Théorème III. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Soient D_1 et D_2 parallèles à D_3 (fig. 223). Il faut montrer que D_1 et D_2 sont parallèles :

1° D_1 *et* D_2 *sont dans un même plan.*

Si le plan P déterminé par D_1 et un point A de D_2 coupait D_2 en A il couperait D_3 en B (n° 255). Il devrait donc couper D_1 parallèle à D_3, ce qui est contraire à l'hypothèse (D_1 dans P). Ce plan P ne coupant pas D_2 et contenant un point de D_2 contient donc D_2; ainsi D_1 et D_2 sont dans un même plan.

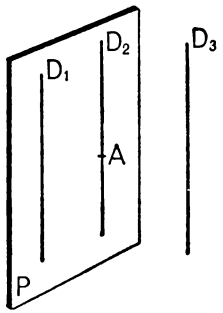


Fig. 223.

2° D_1 et D_2 *n'ont pas de point commun.*

Si elles en avaient un O on pourrait mener par O deux parallèles à D_3, ce qui est impossible (n° 254).

Les droites D_1 et D_2 sont donc parallèles.

On dit que les droites D_1, D_2, D_3 ont même *direction.*

ANGLE DE DEUX DROITES

257. Théorème. — *Deux angles de l'espace qui ont leurs côtés parallèles et de même sens sont égaux.*

Soient les angles xOy et $x'O'y'$ tels que $O'x'$ et $O'y'$ soient respectivement parallèles à Ox et Oy et de même sens (fig. 224). Portons sur Ox et $O'x'$ deux

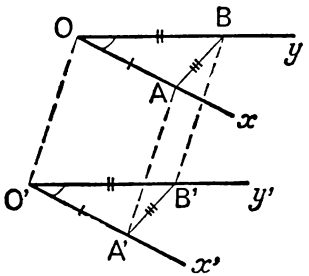


Fig. 224.

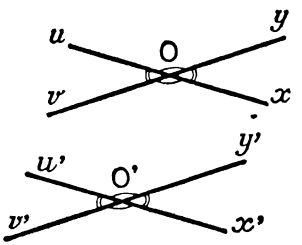


Fig. 225.

segments égaux OA = O'A' et sur Oy et $O'y'$ deux segments égaux OB = O'B'. Les segments OA et O'A' étant parallèles, égaux et de même sens, le quadri-

latère OAA'O' est un parallélogramme. Il en est de même du quadrilatère OBB'O'. Il en résulte que les segments AA' et BB' respectivement parallèles et égaux à OO', sont parallèles et égaux entre eux (n° 256). Le quadrilatère ABB'A' est donc un parallélogramme et AB = A'B'. Les deux triangles OAB et O'A'B' ayant leurs trois côtés respectivement égaux sont égaux (3e cas d'égalité). Il en résulte que les angles AOB et A'O'B' sont égaux.

258. Corollaires.

1° *Lorsque deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles et de sens contraires, ils sont égaux.*

2° *Lorsque deux angles ont deux côtés parallèles et de même sens, et les deux autres parallèles et de sens contraires, ils sont supplémentaires.*

En effet, si on considère deux droites ux et vy se coupant en O, et leurs parallèles $u'x'$ et $v'y'$ se coupant en O' (fig. 225), l'égalité des angles xOy et $x'O'y'$ montre que les huit angles formés en O et O' sont deux à deux égaux ou supplémentaires.

259. Définition. — *On appelle angle de deux droites de l'espace l'un des angles obtenus en menant par un point quelconque les parallèles à ces deux droites.*

Menons par O les parallèles d_1 et d_2, à D_1 et D_2 (fig. 226). La valeur des quatre angles formés en O, deux à deux égaux ou supplémentaires, est indépendante du sommet O choisi (n° 258). L'un d'eux mesurera, par définition, l'angle des droites D_1 et D_2. Nous prendrons de préférence l'angle aigu.

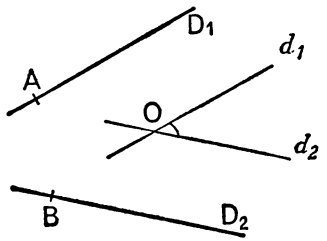


Fig. 226.

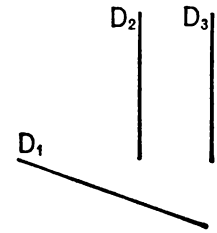


Fig. 227.

Si l'on considère deux demi-droites AD_1 et BD_2, et les demi-droites Od_1 et Od_2 respectivement parallèles aux premières et de même sens, l'angle d_1Od_2 définit de la même façon, et sans ambiguïté celui des demi-droites D_1 et D_2.

Notons que :

1° Le sommet O étant arbitraire peut être choisi sur l'une des droites D_1 ou D_2.

2° On ne change pas la valeur de l'angle de deux droites en remplaçant l'une d'entre elles par une de ses parallèles.

260. Droites orthogonales.

On dit que deux droites sont orthogonales lorsque leur angle est droit.

Dans ce cas (fig. 226) les parallèles d_1 et d_2 à D_1 et D_2 forment en O quatre angles droits.

Nous conviendrons d'appeler *droites perpendiculaires* deux droites à la fois concourantes et orthogonales.

261. Théorème. — *Lorsque deux droites sont parallèles toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.*

Les parallèles D_2 et D_3 forment avec D_1 le même angle (fig. 227). Si D_1 et D_2 sont orthogonales, il en est donc de même de D_1 et D_3.

DROITE ET PLAN PARALLÈLES

262. Définition. — *Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun.*

Le théorème suivant établit l'existence de droites parallèles à un plan.

263. Théorème. — *Pour qu'une droite non contenue dans un plan soit parallèle à ce plan, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.*

1° La condition est suffisante. — Par le point A extérieur au plan P menons la parallèle Δ à la droite D du plan P (fig. 228). Si le plan P coupait Δ il couperait aussi sa parallèle D (n° 255), ce qui est contraire à l'hypothèse, puisque P contient D. La droite D est donc parallèle au plan P. Il en résulte que :

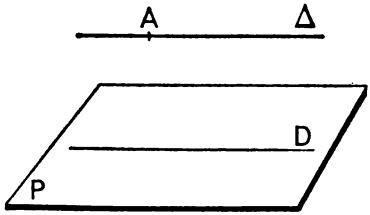


Fig. 228.

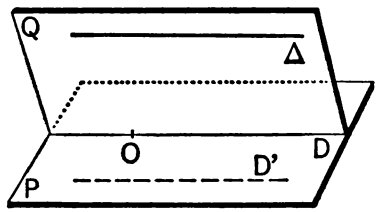


Fig. 229.

a) Pour construire par A une parallèle au plan P, on construira dans P une droite arbitraire D et on mènera par A la parallèle à D.

b) On peut mener par A une infinité de parallèles au plan P.

c) Si A est dans le plan P, il en est de même de Δ. Une droite appartenant à un plan apparaît donc comme un cas particulier d'une parallèle à ce plan lorsque l'un des points de cette parallèle vient se placer dans P.

2° La condition est nécessaire. — Supposons que la droite Δ et le plan P n'aient aucun point commun (fig. 229). Il faut montrer qu'il existe dans P au moins une parallèle à Δ.

Soit Q le plan déterminé par Δ et un point arbitraire O de P. Ce plan Q coupe P suivant une droite D. Les droites D et Δ sont dans un même plan Q et ne peuvent se couper, sinon leur intersection appartiendrait à la fois à Δ et à P, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Notons que toutes les droites de P telles que D′ parallèles à D sont aussi parallèles à Δ (n° 256).

264. Corollaires.

1° Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle aux intersections de ce plan avec tous ceux qui la contiennent.

La droite Δ est parallèle à l'intersection de P avec le plan Q passant par Δ (fig. 229). Il y a exception pour le plan passant par Δ et parallèle au plan P (voir 15e leçon).

2° Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, la parallèle à cette droite menée par un point quelconque du plan appartient à ce plan.

Il n'existe qu'une parallèle à Δ passant par O; nous avons vu que c'était l'intersection de P avec le plan Q déterminé par O et Δ. On utilise ce théorème pour démontrer qu'une droite appartient à un plan.

265. Droite parallèle à deux plans sécants.

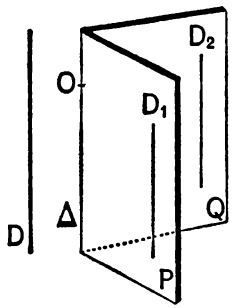


Fig. 230.

Théorème. — ***Lorsqu'une droite est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur intersection.***

Soient les plans P et Q parallèles à la droite D (fig. 230). Si, par un point O de l'intersection Δ des plans P et Q, on mène la parallèle à D, elle est contenue à la fois dans les plans P et Q (n° 264). C'est donc leur intersection.

De même, si par deux droites parallèles D_1 et D_2 (fig. 230), on mène deux plans sécants P et Q, ces deux plans sont parallèles à une même direction D; il en est de même de leur intersection Δ.

266. Plans parallèles à deux droites.

Théorème. — ***Par un point donné*** O ***on peut mener un plan et un seul parallèle à deux droites données*** D_1 ***et*** D_2 ***non parallèles entre elles.***

Menons par O (fig. 231), les droites D'_1 et D'_2 respectivement parallèles à D_1 et D_2. Pour qu'un plan passant par O soit parallèle à D_1 et à D_2 il faut et il suffit qu'il contienne D'_1 et D'_2. Le plan P déterminé par D'_1 et D'_2 est le seul plan répondant à la question.

Si D_1 et D_2 sont parallèles, D'_1 et D'_2 sont confondues. Tout plan passant par D'_1 répond à la question.

Une droite D_3 coupe en général le plan P. Donc, trois droites quelconques de l'espace ne sont pas, en général, parallèles à un même plan.

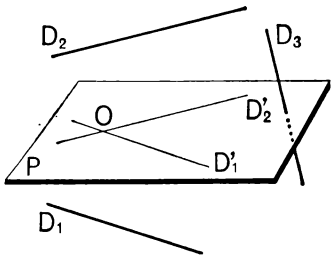


Fig. 231.

267. Théorème. — ***Par une droite donnée*** D_1 ***on peut mener un plan et un seul parallèle à une seconde droite*** D_2 ***non parallèle à*** D_1.

Menons par le point O de D_1 la parallèle D'_2 à D_2 (fig. 232). Tout plan passant par D_1 et parallèle à D_2 contient D'_2. Ce plan est donc confondu avec le plan P déterminé par D_1 et D'_2 qui est le seul répondant à la question.

Toute droite Δ parallèle à D_2 et rencontrant D_1 est contenue dans le plan P et réciproquement, par tout point M du plan P, passe une droite Δ. Donc :

Le lieu géométrique d'une droite variable Δ ***parallèle à une direction fixe et rencontrant une droite donnée*** D_1 ***est le plan mené par*** D_1 ***et parallèle à la direction donnée.***

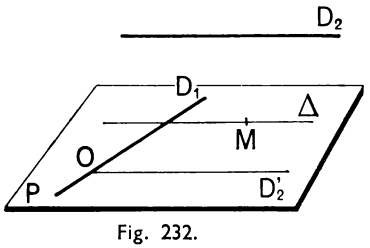


Fig. 232.

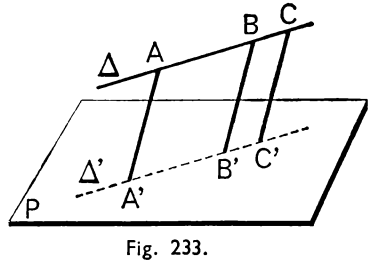


Fig. 233.

On obtient ainsi un nouveau procédé de génération d'un plan.

268. Théorème. — ***Les portions de parallèles comprises entre une droite et un plan parallèles sont des segments égaux.***

Soit la droite Δ parallèle au plan P (fig. 233), et deux segments parallèles AA' et BB' rencontrant respectivement la droite Δ en A et B et le plan P en A' et B'. Ces segments déterminent un plan qui coupe le plan P suivant A'B'

parallèle à AB (n° 264). Le quadrilatère AA'B'B est un parallélogramme. Donc AA' = BB'.

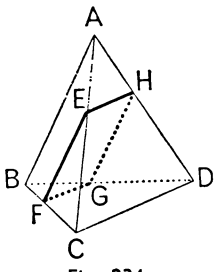


Fig. 234.

269. Exercice. — ***Démontrer que la section d'un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées est un parallélogramme.***

Le plan P parallèle à la fois à AB et à CD (fig. 234), coupe les autres arêtes du tétraèdre ABCD en E, F, G et H. La droite AB étant parallèle à P les plans ABC et ABD coupent P suivant EF et HG parallèles à AB, donc parallèles entre elles. De même les plans CAD et CBD coupent P suivant EH et FG parallèles entre elles. EFGH est donc un parallélogramme. C'est en particulier un rectangle si l'angle FEH est droit, c'est-à-dire si AB et CD sont orthogonales.

EXERCICES

298. On donne trois droites D_1, D_2, D_3 n'appartenant pas à un même plan.

1° On suppose que deux d'entre elles ne sont pas parallèles. Montrer qu'il existe une infinité de droites rencontrant les trois droites données.

2° On suppose que D_1, D_2, D_3 sont parallèles entre elles. Montrer qu'il n'existe aucune droite rencontrant les trois droites données.

299. On donne deux parallèles D_1 et D_2 et deux droites quelconques D_3 et D_4. Construire une droite rencontrant ces quatre droites données.

300. Deux droites D_1 et D_2 sont quelconques. Peut-on construire deux droites D_3 et D_4 rencontrant les premières et parallèles entre elles?

301. Soient deux droites D_1 et D_2 et un point O. Que peut-on dire de l'intersection des plans déterminés respectivement par O et chacune des droites D_1 et D_2? Qu'advient-il lorsque D_1 et D_2 sont concourantes ou lorsqu'elles sont parallèles?

302. On donne deux plans sécants P et Q et un point O.

1° Mener par O une droite parallèle à la fois aux plans P et Q.

2° Est il possible, en général de mener par O une droite parallèle à trois plans donnés P, Q et R?

303. Deux plans P et Q se coupent suivant une droite Δ; une droite D les rencontre respectivement en A et B. Un plan R passant par D coupe les plans P et Q respectivement suivant les droites D_1 et D_2.

1° Si R est parallèle à Δ, que peut-on dire de D_1 et D_2?

2° Si D_1 est parallèle à D_2 montrer qu'il en est de même de Δ.

3° En déduire la construction d'un plan R passant par une droite donnée D et rencontrant deux plans sécants P et Q suivant deux droites parallèles.

304. Soient trois droites quelconques D_1, D_2 et Δ.

1° Construire le plan P passant par D_1 et parallèle à Δ puis le plan Q passant par D_2 et parallèle à Δ.

2° Montrer que l'intersection des plans P et Q lorsqu'elle existe est une parallèle à Δ qui rencontre D_1 et D_2.

305. On donne deux plans sécants P et Q et deux droites quelconques D_1 et D_2. Construire une droite parallèle à la fois aux plans P et Q et rencontrant les droites D_1 et D_2.

306. Soient trois droites quelconques D_1, D_2 et Δ. Construire deux plans P et Q passant respectivement par D_1 et D_2 et tels que leur intersection soit parallèle à Δ.

307. On donne un plan P et deux droites quelconques D_1 et D_2 qui coupent P respectivement en A et B. Une droite variable MN reste parallèle au plan P, elle coupe D_1 en M et D_2 en N.

1° La parallèle à D_1 menée par N coupe le plan P en N'. Quel est le lieu de N' lorsque N décrit D_2?

2° Que peut-on dire du quadrilatère MNN'A?

3° Construire une droite MN parallèle à P, coupant D_1 en M et D_2 en N de façon que MN ait une longueur donnée l.

308. Dans un tétraèdre ABCD on désigne par I, J et K les milieux respectifs des arêtes BC, AD et AC.

1° Construire en I comme sommet l'angle des droites IJ et AB puis en J comme sommet l'angle des droites IJ et CD.

2° Démontrer que pour que ces angles soient égaux, il faut et il suffit que AB = CD.

309. On donne deux demi-droites fixes D_1 et D_2 d'origines respectives A et B. Deux points variables M et N décrivent respectivement D_1 et D_2.

1° Construire le plan P passant par D_2 et parallèle à D_1. La parallèle menée par M à AB coupe ce plan en M'. Quel est le lieu de M'?

2° Soit I le milieu de MN et J celui de M'N. Comparer les segments IJ et AB.

3° Trouver le lieu de J, puis celui de I dans les deux cas suivants :

a) AM = BN.

b) AM + BN = 2 l où l désigne une longueur donnée.

310. Soit un tétraèdre ABCD dans lequel les arêtes opposées AB et CD sont orthogonales. On donne de plus AB = CD = AC = a.

1° Par un point M de AC tel que AM = x on mène le plan parallèle à la fois aux arêtes AB et CD. Démontrer que la section du tétraèdre par le plan est un rectangle.

2° Évaluer l'aire de ce rectangle en fonction de a et x.

311. On considère un quadrilatère gauche ABCD (dont les sommets n'appartiennent pas à un même plan).

1° Montrer que les milieux de ses côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

2° En est-il de même pour le quadrilatère gauche ABDC? En déduire que les segments qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourants et se coupent en leur milieu O.

3° On suppose que les sommets B, C, D restent fixes et que A décrit une droite fixe Δ. Trouver le lieu du milieu des arêtes AB, AC, AD puis celui de O.

PLANS PARALLÈLES

270. Définition. — ***Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun.***

Le théorème suivant établit l'existence de plans parallèles.

271. Théorème. — ***Pour que deux plans distincts soient parallèles il faut et il suffit que deux droites concourantes de l'un soient parallèles à l'autre.***

1° La condition est suffisante. — Considérons deux droites D et Δ du plan P sécantes en O (fig. 235). Par O′ extérieur au plan P, menons les droites D′ et Δ′ respectivement parallèles à D et Δ. Elles sont sécantes, sans quoi D et Δ seraient confondues; elles sont parallèles à P (n° 263), et déterminent un plan P′. Il faut montrer que P et P′ n'ont aucun point commun.

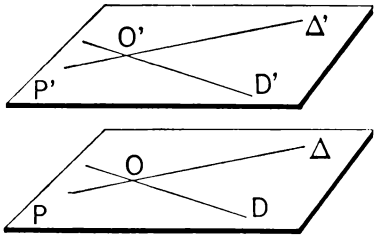


Fig. 235.

En effet, si le plan P′ coupait le plan P, la droite d'intersection serait parallèle à D′ et à Δ′ (n° 264), ce qui est impossible puisque D′ et Δ′ sont concourantes. Le plan P′ est donc parallèle au plan P.

2° La condition est nécessaire. — En effet, si P et P′ n'ont aucun point commun, une droite quelconque D′ de P′ ne peut couper le plan P, car le point d'intersection de D′ et P serait commun à P et P′. Toutes les droites de P′, et en particulier deux droites concourantes de P′, sont donc parallèles à P (fig. 235).

272. Théorème. — ***Par un point extérieur à un plan, on peut construire un plan parallèle au premier et un seul.***

1° Il résulte de la condition suffisante que pour mener par O′ un plan P′ parallèle au plan P (fig. 235), il suffit de construire les droites D′ et Δ′ passant par O′ et respectivement parallèles aux droites concourantes D et Δ de P.

2° Ce plan est unique : Supposons qu'il en existe un second P″. Ce plan P″ contient D′ car s'il la coupait en O′, il couperait aussi sa parallèle D (n° 255), dont il couperait le plan P. De même, P″ contient Δ′. Il est donc confondu avec P′.

273. Corollaires. — ***Lorsque deux plans sont parallèles :***

1° Tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

2° Tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Soient P et Q deux plans parallèles.

1° Si le plan R est parallèle à P (fig. 236), il l'est aussi à Q. En effet, si les plans Q et R se coupaient, on pourrait par un de leurs points communs O mener deux plans Q et R parallèles à P, ce qui est impossible (n° 272).

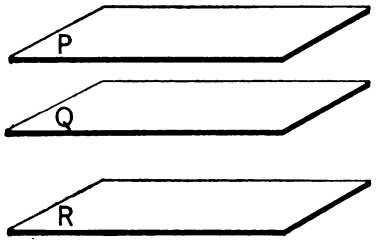


Fig. 236.

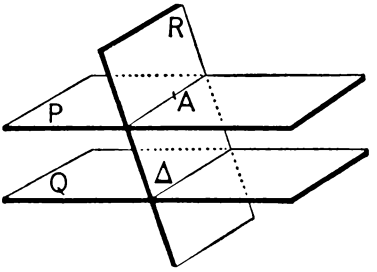


Fig. 237.

On dit que les plans P, Q et R ont même *direction.*

2° Si le plan R coupe P en A (fig. 237), il coupe aussi le plan Q sans quoi il serait confondu avec le plan mené par A et parallèle à Q, c'est-à-dire avec le plan P, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il n'est pas confondu avec Q puisqu'il contient A extérieur à Q. Donc il coupe Q.

Les intersections D et Δ de R avec P et Q sont deux droites d'un même plan qui n'ont aucun point commun car ce point appartiendrait à la fois aux plans P et Q parallèles par hypothèse. Les droites D et Δ sont donc parallèles.

274. Théorème. — ***Le lieu géométrique des droites parallèles à un plan donné et passant par un point donné extérieur à ce plan est le plan parallèle au premier passant par le point donné.***

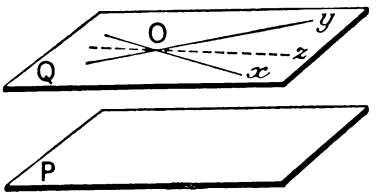


Fig. 238.

1° Deux parallèles distinctes Ox et Oy menées par O à P (fig. 238), déterminent un plan parallèle au plan P (n° 271). Elles appartiennent donc au plan unique Q, parallèle à P, mené par O (n° 272).

2° Réciproquement, toute droite Oz de Q passant par O est parallèle à P car si elle le coupait, le point d'intersection appartiendrait à P et à Q, ce qui est impossible puisque ces plans sont parallèles.

275. Corollaires. — *Lorsque deux plans sont parallèles :*
1° Toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.
2° Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

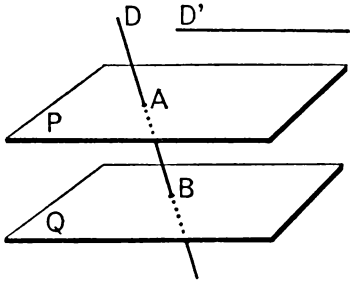


Fig. 239.

Soient deux plans parallèles P et Q :

1° Si la droite D coupe P en A (fig. 239), cette droite passant par A extérieur à Q n'est pas contenue dans Q. Elle n'est pas non plus parallèle à Q car elle appartiendrait au plan P d'après le théorème précédent. Donc D coupe le plan Q en un point B.

2° Si D' est parallèle à P (fig. 239), elle ne peut couper le plan Q sans quoi elle couperait aussi P, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc D' est parallèle à Q (ou contenue dans Q).

276. Figure formée par trois plans.

Examinons la figure formée par trois plans distincts P, Q et R.

1° *Cas général : Deux de ces plans ne sont pas parallèles.* — P et Q se coupent alors suivant une droite Δ et trois cas sont possibles :

a) R coupe Δ (fig. 240). Les plans P, Q, R ont un seul point commun A intersection de R et Δ.

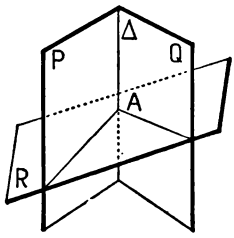


Fig. 240.

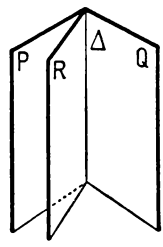


Fig. 241.

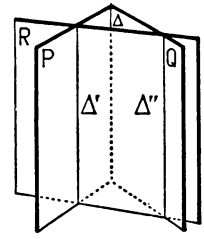


Fig. 242.

b) R contient Δ. Les trois plans ont une droite commune Δ et sont dits concourants suivant Δ (fig. 241).

c) R est parallèle à Δ. Les plans P et Q coupent alors R suivant les droites Δ' et Δ'' parallèles à Δ (n° 264). Les trois plans n'ont pas de point commun mais sont parallèles à une même direction de droite (fig. 242).

2° *Deux plans sont parallèles.* — Si P et Q sont parallèles, deux cas sont possibles :

a) Si R est parallèle à P, il est aussi parallèle à Q. Les trois plans sont parallèles à une même direction de plan (fig. 236).

b) Si R coupe P, il coupe aussi Q et les intersections sont parallèles (fig. 237).

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES PLANS PARALLÈLES

277. Théorème. — ***Les portions de droites parallèles comprises entre deux plans parallèles sont des segments égaux.***

Les plans P et Q sont parallèles (fig. 243), et découpent sur des parallèles les segments AA′, BB′ et CC′. Le plan déterminé par AA′ et BB′ coupe P et Q suivant deux parallèles AB et A′B′ (n° 273). Le quadrilatère ABB′A′ est donc un parallélogramme. Il en est de même de BCC′B′ et

$$AA' = BB' = CC'.$$

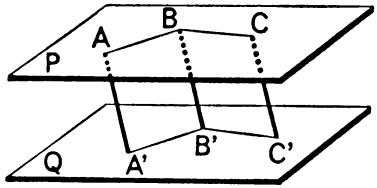


Fig. 243.

278. Théorème de Thalès dans l'espace. — ***Plusieurs plans parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.***

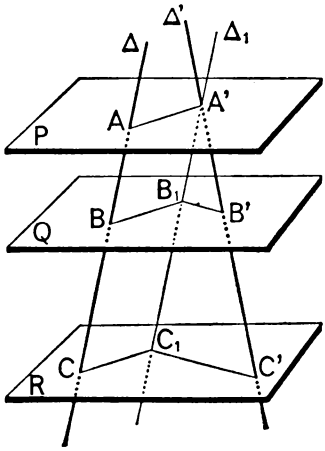


Fig. 244.

Les plans P, Q et R sont parallèles. Δ coupe P en A, donc Q en B et R en C (fig. 244). De même Δ′ coupe P en A′, donc Q en B′ et R en C′. Menons par A′ la parallèle Δ_1 à Δ. Elle coupe Q et R en B_1 et C_1 et d'après le théorème précédent on a :

$$AB = A'B_1, \quad BC = B_1C_1 \quad \text{et} \quad AC = A'C_1.$$

Δ′ et Δ_1 déterminent un plan qui coupe Q et R suivant les droites $B'B_1$ et $C'C_1$ parallèles entre elles (n° 273).

Appliquons le théorème de Thalès aux sécantes Δ′ et Δ_1 et aux parallèles $B'B_1$ et $C'C_1$:

$$\frac{A'B'}{A'B_1} = \frac{B'C'}{B_1C_1} = \frac{A'C'}{A'C_1}$$

$$\text{donc : } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Le théorème subsiste pour les mesures algébriques des vecteurs portés par Δ et Δ′ lorsque ces droites sont orientées dans un sens quelconque; ainsi :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

car les nombres $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ sont de même signe et il en est de même des nombres $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ et $\overline{A'C'}$.

Le théorème subsiste également si Δ' est parallèle à Δ puisqu'on a alors $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$.

279. Réciproque. — ***Si trois droites déterminent sur deux sécantes non situées dans un même plan des segments correspondants proportionnels, ces trois droites sont parallèles à un même plan.***

Soient trois droites coupant respectivement Δ en A, B, C et Δ' en A', B', C' (fig. 245), de façon que :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}. \qquad (1)$$

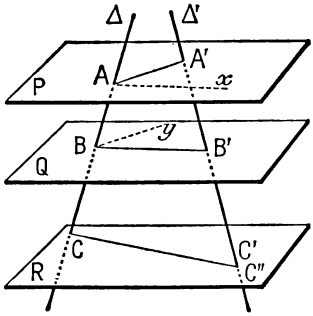


Fig. 245.

Δ et Δ' n'étant pas dans un même plan, AA' et BB' ne sont pas parallèles. Menons Ax parallèle à BB' et By parallèle à AA'. Nous déterminons ainsi deux plans P (A'Ax) et Q (B'By) parallèles. Menons par C le plan R parallèle à P et qui coupe Δ' en C''. Nous avons (théorème précédent) :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C''}}{\overline{BC}}$$

et, tenant compte de (1) : $\overline{B'C'} = \overline{B'C''}$.

Le point C'' est confondu avec C' et les droites AA', BB', CC' sont parallèles au plan P.

280. Problèmes de construction.

1° Construire une droite passant par un point donné et rencontrant deux droites données

A est le point donné; D_1 et D_2 les droites données, Δ la droite cherchée qui doit couper D_1 en B, D_2 en C et passer par A; cette droite appartient aux plans déterminés par A et D_1 d'une part, par A et D_2 d'autre part. C'est donc leur intersection (fig. 246).

Discussion : A étant supposé extérieur à D_1 et D_2, les plans précédents existent toujours et ne peuvent être que confondus ou sécants.

a) S'ils sont confondus, il y a une infinité de solutions.

b) S'ils sont sécants, une solution unique à moins que l'intersection Δ soit parallèle à D_1 ou à D_2, auquel cas le problème est impossible.

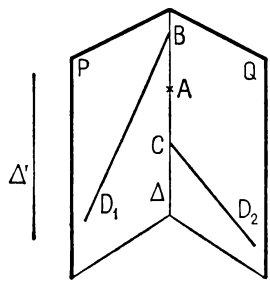


Fig. 246.

Il en résulte qu'il existe une infinité de droites rencontrant trois droites données de l'espace puisque A étant pris arbitrairement sur D_3 il existe en général une droite passant par ce point et rencontrant D_1 et D_2.

2° Construire une droite de direction donnée et rencontrant deux droites données.

Soient D_1 et D_2 les droites données, Δ' la direction donnée que nous supposons n'être parallèle ni à D_1, ni à D_2, Δ la droite cherchée qui coupe D_1 en B et D_2 en C (fig. 246). Δ et D_1 déterminent le plan unique P passant par D_1 et parallèle à Δ' (n° 267). De même, Δ et D_2 déterminent le plan Q passant par D_2 et parallèle à Δ'. La droite cherchée est leur intersection.

Discussion : a) Si P et Q sont confondus, une infinité de solutions.

b) Si P et Q sont parallèles, pas de solution.

c) Si P et Q sont sécants, une solution unique car la droite Δ intersection de P et Q coupe D_1 et D_2 puisque Δ' n'est parallèle ni à D_1 ni à D_2.

EXERCICES

312. Soient trois droites concourantes Ox, Oy, Oz. Un plan fixe P les coupe respectivement en A, B et C. Un plan variable Q parallèle à P les coupe respectivement en A', B' et C'. Montrer que les triangles ABC et A'B'C' ont leurs côtés parallèles et leurs angles égaux.

313. On donne un plan P et un point O. On joint O à un point variable M du plan P :

1° Trouver le lieu du milieu de OM.

2° Trouver de même le lieu de point M' qui partage le segment OM dans un rapport donné k.

314. On donne un point O, une droite Δ et un plan P. Construire une droite passant par O, coupant Δ et parallèle à P.

315. Soient deux plans P et Q se coupant suivant une droite Δ. Par un point A on construit les plans P' et Q' respectivement parallèles à P et Q.

1° Montrer que l'intersection Δ' des plans P' et Q' est parallèles à Δ.

2° Lorsque A décrit une droite donnée D, quel est le lieu géométrique de la droite Δ'?

316. On donne deux plans parallèles P et Q. Soit ABC un triangle du plan P et DEF un triangle du plan Q.

1° Construire l'intersection des plans P et ADF puis celle des plans Q et BCE.

2° Construire l'intersection des plans ADF et BCE.

317. 1° Soient deux droites D_1 et D_2. Construire deux plans parallèles P_1 et P_2 passant respectivement par D_1 et D_2. Discuter.

2° Est-il possible, en général, de construire trois plans parallèles passant par trois droites quelconques données?

318. Construire un plan P passant par une droite donnée Δ sachant que ce plan P coupe un plan donné Q suivant une parallèle à un plan donné R.

319. On donne un parallélogramme ABCD et un plan P. Les parallèles menées par A, B, C et D a une direction Δ coupent P respectivement en A' B' C' et D'. (Le quadrilatère A'B'C'D' se nomme projection de ABCD sur le plan P parallèlement à la direction Δ.)

1° Que peut-on dire des plans ABA'B' et CDC'D'?

2° Montrer que A'B'C'D' est un parallélogramme.

320. Soient trois demi-droites parallèles Ax, By et Cz. On porte sur chacune d'elles des segments égaux AP = BQ = CR mais de longueur variable.

1° Montrer que le plan PQR reste parallèle à un plan fixe.

2° Trouver le lieu géométrique des milieux des côtés et du centre de gravité du triangle PQR.

321. On donne un quadrilatère plan ABCD; ses côtés AB et CD se coupent en E; AD et BC se coupent en F. On joint un point S, extérieur au plan ABCD, à chacun des sommets de ce quadrilatère. Un plan P coupe les droites SA, SB, SC et SD respectivement en I, J, K et L.

1° Pour que IJ soit parallèle à KL il faut et il suffit que le plan P soit parallèle à SE. Énoncer de même la condition nécessaire et suffisante pour que IL soit parallèle à JK.

2° Montrer qu'il existe une infinité de plans P tels que IJKL soit un parallélogramme. Construire celui qui passe par un point donné O.

322. Quatre points alignés A, B, C, D sont tels que la division ABCD est harmonique On fait passer par ces quatre points, quatre plans parallèles. Montrer qu'ils déterminent sur une sécante quelconque une division harmonique.

323. On considère deux droites fixes D_1 et D_2. Une droite variable Δ les coupe respectivement en M et N.

1° Construire le plan P passant par D_1 et parallèle à D_2 puis le plan Q passant par D_2 et parallèle à D_1.

2° Trouver le lieu du point I qui partage MN dans un rapport donné k.

324. On donne deux demi-droites D_1 et D_2 d'origines respectives A et B; on mène par B la demi-droite D'_1 parallèle à D_1 et de même sens et on porte sur D_1, D'_1 et D_2 trois segments variables mais égaux AM = BM' = BN.

1° Montrer que le plan MM'N reste parallèle à un plan fixe.

2° Soient O, I et I' les points qui partagent les segments AB, MN et MM' dans un rapport donné k. Trouver le lieu du point I', puis celui du point I.

325. On considère un tétraèdre SABC dans lequel SA = SB = SC. On construit les bissectrices extérieures des angles en S des triangles SAB, SAC et SBC.

Montrer que les trois droites obtenues sont dans un même plan.

326. On donne un cercle O dans un plan P et deux droites quelconques D_1 et D_2. Construire un plan parallèle à la fois à D_1 et D_2 et contenant une tangente au cercle O.

327. On donne deux plans P et P' sécants suivant une droite Δ et un point S extérieur à ces deux plans. La droite qui joint S à un point quelconque M de P coupe P' en M' qu'on nomme perspective de M sur le plan P'.

1° Le lieu des points M de P qui n'ont pas de perspective dans P' est une droite D.

2° Montrer que deux droites de P se coupant sur D ont pour perspectives deux droites parallèles de P'. Réciproque.

3° Le lieu des points M' de P' qui n'ont pas de perspective dans P est une droite D'.

4° Montrer que deux droites parallèles de P ont pour perspectives dans P' deux droites se coupant sur D'. Réciproque.

328. Soient deux droites fixes D_1, D_2 et un plan fixe P.

1° Montrer qu'il existe une infinité de droites parallèles à P et rencontrant D_1 en M et D_2 en N. Soient AB et CD deux d'entre elles que l'on suppose fixes (A et C sur D_1, B et D sur D_2).

2° Comparer les rapports $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}$ et $\frac{\overline{BN}}{\overline{BD}}$. En déduire que le rapport $\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}$ est constant.

3° Montrer que le lieu du point L qui partage MN dans un rapport constant k est une droite coupant AB et CD en I et J.

4° En déduire qu'il existe une infinité de droites parallèles à une même direction de plan P' et rencontrant toutes les droites MN.

5° Dans un quadrilatère gauche ABCD on choisit les points M sur AC, N sur BD, I sur AB et J sur CD de façon que :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{ND}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{JD}},$$

Montrer que les droites MN et IJ sont concourantes.

DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES

281. Problème préliminaire. — *Construire en un point d'une droite les perpendiculaires à cette droite.*

Soit un demi-plan Q limité à la droite Δ (fig. 247). Il existe dans Q une seule demi-droite Ox perpendiculaire à Δ en O. Puisqu'il existe une infinité de demi-plans passant par Δ, il existe une infinité de perpendiculaires à Δ en O. Nous les obtiendrons toutes en faisant subir au demi-plan Q une révolution autour de Δ. Deux d'entre elles, Ox et Oy, concourantes en O, déterminent un plan P qui coupe Δ en O car une droite de P ne peut être à la fois perpendiculaire à deux droites concourantes de P. Le théorème suivant prouve que Δ est perpendiculaire à toute droite du plan P passant par O.

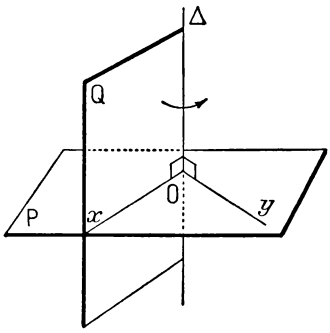


Fig. 247.

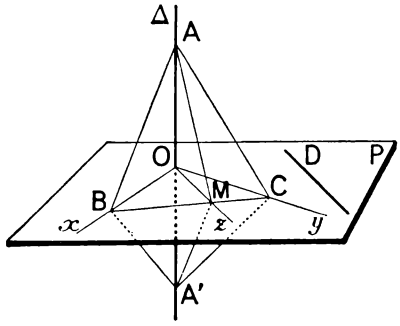


Fig. 248.

282. Théorème. — *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à toute droite passant par son pied dans ce plan.*

Soit une droite Δ perpendiculaire en O aux droites concourantes Ox et Oy du plan P (fig. 248), et soit Oz une droite quelconque issue de O dans le plan P.

Prenons sur Δ deux segments égaux OA = OA′ et menons dans le plan P une sécante coupant Ox en B, Oy en C et Oz en M. Les droites Ox et Oy sont toutes deux médiatrices de AA′. Donc : BA = BA′ et CA = CA′. Les deux triangles ABC et A′BC, ayant BC commun, ont leurs trois côtés respectivement

égaux. Ils sont donc égaux (3e cas d'égalité). On peut les amener en coïncidence en faisant tourner le demi-plan A'BC autour de BC pour l'amener sur le demi-plan ABC. Les points B, C, M restent fixes; A' vient en A; MA' vient sur MA; donc MA' = MA. La droite OM, médiane du triangle isocèle MAA' est aussi hauteur. Donc Δ est perpendiculaire à Oz.

283. Définition. — Soit D une droite quelconque de P (fig. 248). La parallèle Oz à D menée par O est contenue dans P et est perpendiculaire à Δ (n° 282). Les droites Δ et D sont orthogonales. Ainsi Δ est orthogonale à toutes les droites de P. La droite Δ et le plan P sont dits perpendiculaires; d'où la définition suivante :

Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Il résulte de ce qui précède que :

Pour qu'une droite Δ *soit perpendiculaire en* O *à un plan* P *il suffit qu'elle soit perpendiculaire en ce point à deux droites distinctes* Ox *et* Oy *de ce plan.*

D'autre part, il résulte du n° 263 qu'une droite perpendiculaire à un plan est orthogonale à toute droite parallèle à ce plan.

284. Théorème. — ***Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites concourantes de ce plan.***

1° La condition est nécessaire, car si Δ est orthogonale à toutes les droites du plan P, elle l'est évidemment à deux d'entre elles, D_1 et D_2, menées par O dans P (fig. 249).

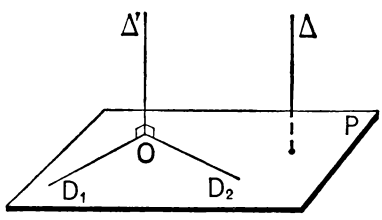


Fig. 249.

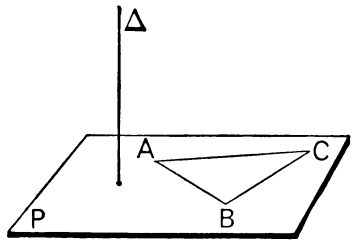


Fig. 250.

2° La condition suffisante : Si Δ est orthogonale à deux droites D_1 et D_2 de P concourantes en O, la parallèle Δ' à Δ menée par O est perpendiculaire à D_1 et à D_2 (n° 261). Δ' coupe P en O (n° 281) et est orthogonale à toute droite de P (n° 283). Il en résulte que Δ coupe P (n° 255), et est orthogonale à toute droite de P (n° 261). Donc Δ est perpendiculaire à P.

Notons que si Δ est orthogonale à deux droites parallèles à P et non parallèles entre elles, Δ est aussi perpendiculaire au plan P.

285. Corollaires.

1° Si Δ est orthogonale aux côtés AB et AC du triangle ABC (fig. 250), Δ est perpendiculaire au plan du triangle, donc orthogonale au troisième côté BC :

Lorsqu'une droite est orthogonale à deux côtés d'un triangle, elle est orthogonale au troisième.

2° Si P est perpendiculaire à Δ' (fig. 249), il l'est aussi à sa parallèle Δ :

Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

3° Soient deux plans P et P' parallèles (fig. 251), et deux droites concourantes D_1 et D_2 de P parallèles à deux droites D'_1 et D'_2 de P'. Si Δ est perpendiculaire à P, elle est orthogonale à D_1 et à D_2, donc à D'_1 et D'_2. Elle est donc perpendiculaire à P' :

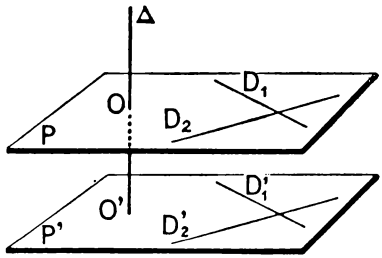


Fig. 251.

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

PLANS PERPENDICULAIRES A UNE DROITE DONNÉE

286. Théorème. — ***Par un point donné on peut mener à une droite donnée un plan perpendiculaire et un seul.***

1er Cas : Le point est sur la droite. — Pour mener un plan perpendiculaire en O à la droite Δ (fig. 252), il suffit de construire dans deux plans distincts Q et R issus de Δ, les perpendiculaires O*x* et O*y* à Δ. Le plan P défini par O*x* et O*y* est perpendiculaire à Δ (n° 284).

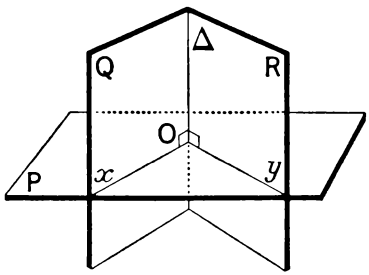


Fig. 252.

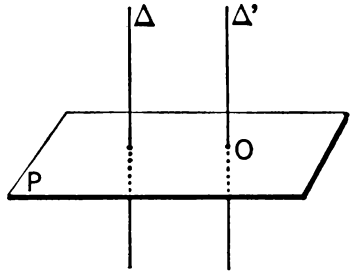


Fig. 253.

Tout autre plan P' perpendiculaire en O à Δ couperait le plan Q suivant une perpendiculaire à Δ, donc suivant O*x*. Il couperait de même le plan R suivant O*y* et serait confondu avec P.

2e Cas : Le point est en dehors de la droite. — Menons par le point O la parallèle Δ′ à la droite donnée Δ (fig. 253). Tout plan perpendiculaire à Δ est perpendiculaire à Δ′ et réciproquement (n° 285, 2°). Le plan unique P perpendiculaire en O à Δ′ est le seul plan qui réponde à la question.

287. Corollaire. — *Deux plans distincts perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

En effet s'ils avaient un point commun O, on pourrait par ce point mener deux plans perpendiculaires à une même droite, ce qui est impossible. Ce corollaire est la réciproque du 3e corollaire du n° 285.

DROITES PERPENDICULAIRES A UN PLAN DONNÉ

288. Théorème. — *Par un point donné on peut mener à un plan donné une perpendiculaire et une seule.*

1er Cas : Le point est dans le plan. — Menons par le point O du plan P une droite quelconque O*x* située dans ce plan (fig. 254), puis le plan Q perpendiculaire en O à O*x*. Ce plan coupe le plan P suivant O*y*. Enfin dans le plan Q menons la perpendiculaire Δ à O*y* au point O. La droite Δ est perpendiculaire à O*y* par construction et à O*x* puisqu'elle est située dans le plan Q perpendiculaire à O*x*. Elle est donc perpendiculaire au plan P (n° 283).

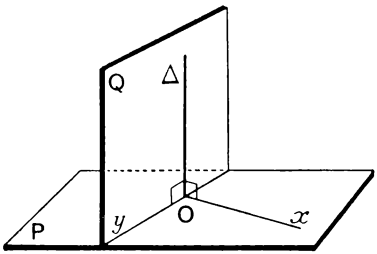


Fig. 254.

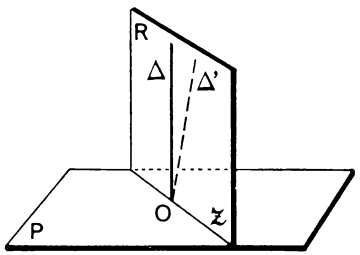


Fig. 255.

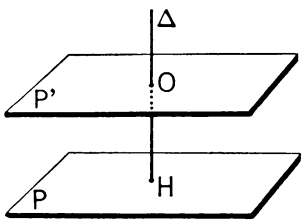


Fig. 256.

Toute autre droite Δ′ perpendiculaire en O au plan P et distincte de Δ déterminerait avec Δ un plan R coupant le plan P suivant une droite O*z* (fig. 255). Cette droite du plan R serait perpendiculaire à deux droites Δ et Δ′ concourantes de ce plan, ce qui est impossible. La droite Δ est donc unique.

2e Cas : Le point est en dehors du plan. — Menons par le point O le plan P′ parallèle au plan P (fig. 256). Toute droite Δ perpendiculaire à P est perpendiculaire à P′ (n° 285, 2°), et réciproquement. Nous sommes ramenés au cas précédent. La perpendiculaire unique en O à P′ est la seule droite qui réponde à la question.

289. Corollaire. — ***Deux perpendiculaires à un même plan sont parallèles.***

Soient deux droites Δ et Δ′ perpendiculaires au plan P (fig. 253). Menons par le point O de Δ′ la parallèle à Δ. Nous obtenons (n° 285, 2°), une perpendiculaire au plan P, donc confondue avec la droite Δ′. Autrement dit, Δ et Δ′ sont parallèles.

Ce corollaire est la réciproque du 2e corollaire du n° 285.

DROITES ORTHOGONALES A UNE DROITE DONNÉE

290. Théorème. — ***Le lieu géométrique des perpendiculaires à une droite donnée en un point de cette droite est le plan perpendiculaire à la droite en ce point.***

D'après la définition (n° 286), toute droite Ox du plan P perpendiculaire en O à la droite donnée Δ, est perpendiculaire à Δ (fig. 257). Toute autre droite Oy perpendiculaire en O à Δ détermine avec Ox un plan perpendiculaire à Δ (n° 283), donc confondu avec le plan P. La droite Oy est donc dans ce plan.

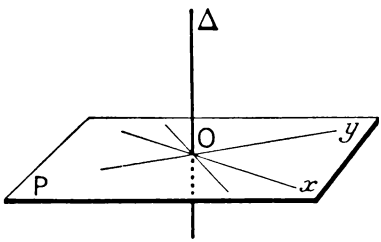


Fig. 257.

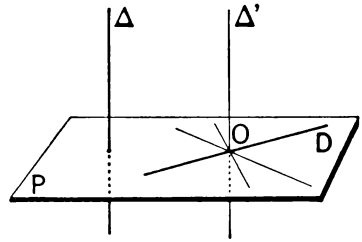


Fig. 258.

Il en résulte que lorsque le demi-plan Q issu de Δ et contenant Ox effectue une révolution autour de Δ (n° 281, fig. 247), la demi-droite Ox engendre le plan P perpendiculaire en O à Δ.

291. Corollaire. — ***Le lieu géométrique des droites passant par un point donné et orthogonales à une droite donnée est le plan passant par ce point et perpendiculaire à la droite donnée.***

En effet (fig. 258), toute droite D passant par O et orthogonale à Δ est perpendiculaire à sa parallèle Δ′ menée par O et réciproquement. Le lieu cherché est donc le plan P passant par O et perpendiculaire à Δ′ donc perpendiculaire à Δ (n° 285).

292. Conditions nécessaires et suffisantes. — ***1° Pour que deux droites soient orthogonales, il faut et il suffit que par l'une d'elles on puisse mener un plan perpendiculaire à l'autre.***

Soient deux droites Δ et D (fig. 258), et un point quelconque O de la droite D. Pour que la droite D soit orthogonale à Δ il faut et il suffit qu'elle appartienne

au lieu des droites passant par O et orthogonale à Δ, c'est-à-dire au plan P mené par le point O et perpendiculaire à Δ.

2° Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à une perpendiculaire à ce plan.

Soient un plan P et une droite Δ perpendiculaire à ce plan (fig. 259). Pour qu'une droite D soit parallèle au plan P, il faut et il suffit que sa parallèle D′ menée par un point O du plan P soit contenue dans le plan P, donc que D′ soit orthogonale à Δ (n° 291). Cela revient à dire que la droite D doit être orthogonale à Δ.

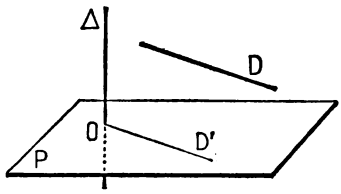


Fig. 259.

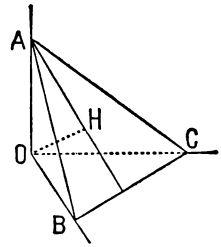


Fig. 260.

293. Application. — *Trois demi-droites* OA, OB *et* OC *sont perpendiculaires deux à deux. Démontrer que le pied* H *de la perpendiculaire menée de* O *au plan* ABC *est l'orthocentre du triangle* ABC.

Pour démontrer que AH et BC sont perpendiculaires (fig. 260), il suffit de montrer que BC est perpendiculaire à un plan contenant AH. Or BC est orthogonale à OH car le plan ABC est perpendiculaire à OH. De même BC est orthogonale à OA car OB et OC étant perpendiculaires à OA, le plan OBC est perpendiculaire à OA. Ainsi BC, orthogonale à OH et OA est perpendiculaire au plan OHA, donc à la droite AH de ce plan. On démontrerait de même que AB et AC sont respectivement perpendiculaires à CH et BH.

EXERCICES

329. On donne un plan P, un point O de ce plan et une droite quelconque Δ. Construire dans P une droite passant par O et orthogonale à Δ.

330. On donne un plan P et deux droites quelconques D_1 et D_2. Construire une droite Δ en rencontrant D_1 et D_2, et perpendiculaire au plan P.

331. Deux plans P et Q se coupent suivant une droite Δ. Une droite D de P coupe Δ en O. Construire dans Q une droite passant par O et perpendiculaire à D.

332. On donne un plan P, un point O extérieur à P et une droite quelconque Δ. Construire une droite passant par O, parallèle au plan P et orthogonale à la droite Δ.

333. 1° Soient trois droites concourantes OA, OB et OC. Par O on mène successivement OM perpendiculaire au plan AOB, puis OR perpendiculaire au plan MOC, enfin OS perpendiculaire au plan MOR. Montrer que les quatre droites OA, OB, OR et OS sont dans un même plan et que les plans OAB et OCM se coupent suivant OS.

2° Soient quatre droites concourantes OA, OB, OC, OD. On mène par O les droites OM perpendiculaire au plan AOC, puis ON perpendiculaire au plan BOD, enfin OR perpendiculaire au plan MON. Montrer que les plans OAC et OBD se coupent suivant OR.

334. Deux droites D_1 et D_2 d'un plan P sont orthogonales à une droite Δ non perpendiculaire au plan P. Démontrer que D_1 et D_2 sont parallèles.

335. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient orthogonales est que les plans menés par deux points quelconques de l'une perpendiculairement à l'autre soient confondus.

336. Deux droites D_1 et D_2 d'un plan P sont concourantes en O; on construit deux plans Q et R respectivement perpendiculaires à D_1 et D_2 :

1° Montrer que les plans Q et R sont sécants.

2° Démontrer que leur intersection Δ est perpendiculaire au plan P.

337. On donne une droite Δ et un point extérieur O; un plan variable P passe par Δ et on construit la droite OH perpendiculaire en H au plan P :

1° Lieu géométrique de la droite OH.

2° Lieu du point H.

3° Construire le plan P connaissant la longueur du segment OH.

338. On considère un point O extérieur à un plan P. On mène OH perpendiculaire en H au plan P. Soient deux droites Ax et Ay du plan P ne passant pas par H.

1° Montrer que les perpendiculaires en O aux plans OAx et OAy coupent le plan P en M et N et que OA est perpendiculaire au plan OMN.

2° Montrer que AH est perpendiculaire en A′ à la droite MN.

3° MH coupe Ay en B et NH coupe Ax en C. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que BC est parallèle à MN.

339. 1° On considère un tétraèdre ABCD dans lequel AB = CD et AC = BD. Comparer les triangles ABC et BCD ainsi que les triangles ABD et ACD. I étant le milieu de AD et J le milieu de BC, que peut-on dire de chacun des triangles BCI et ADJ? Quel angle fait IJ avec AD et BC?

2° Réciproquement, étant donné un segment IJ, on porte sur une perpendiculaire en I, de part et d'autre de ce point, deux longueurs égales IA et ID, et sur une perpendiculaire en J, non parallèle à la première, deux autres longueurs égales JB et JC. Démontrer que AB = CD et AC = BD.

3° On suppose AB = AC = BD = CD; qu'en résulte-t-il pour les directions AD et BC? On coupe le tétraèdre par un plan perpendiculaire à IJ en un point M; quelle est la forme de la section obtenue?

340. On donne un tétraèdre ABCD, où les couples d'arêtes opposées (AB, CD), (BC, AD) sont respectivement formés de droites rectangulaires.

1° On projette orthogonalement B en H_B sur la face ACD. Quelle est la position caractéristique du point H_B par rapport au triangle ACD?

2° Montrer que les arêtes BD et AC sont rectangulaires.

3° On considère les hauteurs AH_A et BH_B, issues de A et B, perpendiculaires respectivement aux faces BCD et ACD. Elles se coupent en un point I.

4° En déduire que les quatre hauteurs du tétraèdre concourent au point I.

5° Montrer que les droites joignant les milieux des arêtes opposées concourent en un point J

PERPENDICULAIRE ET OBLIQUES

294. Théorème. — ***Si d'un point extérieur à un plan on mène à ce plan la perpendiculaire et diverses obliques :***

1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique.

2° Si deux obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire, elles sont égales.

3° Si deux obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus longue.

Menons OH perpendiculaire au plan P (fig. 261). Les droites qui joignent O à divers points A, B, C, du plan P autres que H sont dites *obliques* à ce plan P et les triangles OHA, OHB, OHC sont rectangles en H (n° 283).

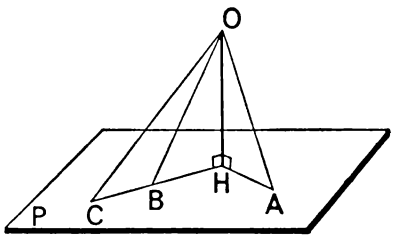


Fig. 261.

1° Dans le triangle OHA le côté OH est inférieur à l'hypoténuse OA. Donc $OH < OA$.

2° Si HA = HB, les triangles rectangles OHA et OHB sont égaux d'après le second cas d'égalité des triangles quelconques (HA = HB; OH commun; $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = 1^D$). Donc : OA = OB.

3° Si HC > HA, construisons le point B de HC tel que HB = HA. D'après ce qui précède : OB = OA. Or, dans le plan OHC, l'oblique OC s'écarte plus que OB du pied H de la perpendiculaire; on a donc OC > OB et par conséquent : OC > OA.

295. Réciproque. — ***Lorsqu'on joint un point extérieur à un plan aux différents points de ce plan :***

1° Si deux obliques sont égales, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire.

2° Si deux obliques sont inégales, la plus grande s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.

1° Si OA = OB, on ne peut avoir HA ≠ HB puisque cette condition entraînerait OA ≠ OB (n° 294). Donc HA = HB.

2° Si OC > OA, on ne peut avoir HC ⩽ HA car cette condition entraînerait OC ⩽ OA (n° 294). Donc HC > HA.

296. Définitions.

1° Distance d'un point à un plan. — ***On appelle distance d'un point à un plan la longueur du segment de perpendiculaire au plan compris entre ce point et le plan.***

C'est la longueur de OH, plus court segment joignant O à un point de P (fig. 261). Le pied H de la perpendiculaire OH est la *projection orthogonale* de O sur le plan P.

2° Distance d'une droite et d'un plan parallèles. — ***C'est la longueur du segment découpé par la droite et le plan sur une perpendiculaire commune.***

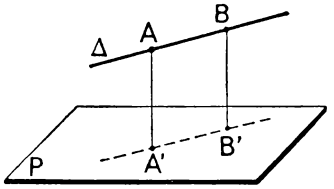


Fig. 262.

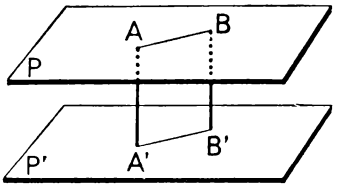


Fig. 263.

Si Δ est parallèle à P (fig. 262), les segments AA′ et BB′ perpendiculaires à P et coupant Δ en A et B sont égaux (n° 268). La distance de Δ à P est donc égale à la distance d'un point quelconque de Δ au plan P.

3° Distance de deux plans parallèles. — ***C'est la longueur du segment découpé par ces plans sur une perpendiculaire commune.***

Les segments tels que AA′ et BB′ perpendiculaires aux plans parallèles P et P′ sont égaux (n° 277). La distance de deux plans est donc égale à celle d'un point quelconque de l'un des plans à l'autre plan (fig. 263).

APPLICATIONS

297. Définition. — ***On appelle plan médiateur d'un segment, le plan perpendiculaire à ce segment en son milieu.***

Le plan P perpendiculaire à AB en son milieu O est le plan médiateur de AB (fig. 264). C'est aussi le lieu des médiatrices de AB (n° 290).

298. Lieu géométrique. — ***Le lieu des points équidistants de deux points donnés est le plan médiateur du segment joignant ces deux points.***

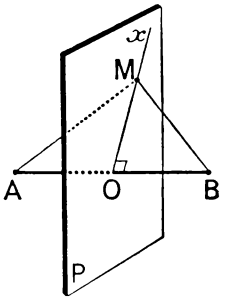


Fig. 264.

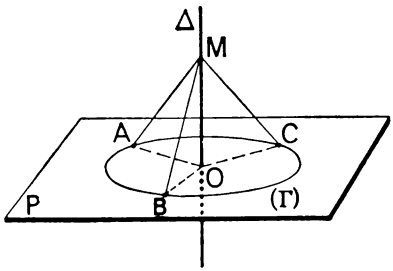


Fig. 265.

Soient A et B les points donnés. Pour que le triangle MAB soit isocèle (MA = MB), il faut et il suffit que la droite OM soit médiatrice de AB, c'est-à-dire que OM, donc M, appartienne au plan P médiateur de AB (fig. 264). Donc : $MA = MB \iff M \in P$.

299. Définition. — ***On appelle axe d'un cercle, la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.***

La droite Δ perpendiculaire en O au plan P du cercle (O, R) est l'axe de ce cercle (fig. 265).

300. Lieu géométrique. — ***Le lieu des points équidistants de trois points non alignés est l'axe du cercle passant par les trois points donnés.***

Soient A, B et C les trois points donnés. Ils déterminent un plan P (fig. 265).

Pour que les trois obliques MA, MB, MC soient égales il faut et il suffit, en désignant par O la projection orthogonale de M sur le plan P, que l'on ait OA = OB = OC. Le point O est donc le centre du cercle ABC et MO coïncide avec l'axe Δ du cercle ABC.

Donc : $MA = MB = MC \iff M \in \Delta$

Tout point M de Δ étant équidistant de A et B appartient au plan médiateur de AB. On voit donc que les plans médiateurs des trois segments AB, BC et CA concourent suivant la droite Δ.

301. Points équidistants de deux plans parallèles. — ***Le lieu des points équidistants de deux plans parallèles*** P ***et*** Q ***est le plan parallèle*** R ***équidistant de ces deux plans.***

Soit IJ = d une perpendiculaire aux plans parallèles P et Q (fig. 266) et R le plan médiateur de IJ : Tout point M de ce plan est à la même distance $d/2$ des plans P et Q.

Réciproquement tout point M, équidistant de P et Q, est le milieu du segment HK mené par M perpendiculairement à P. Il coïncide donc avec l'intersection de HK par le plan R, et appartient à ce plan. En définitive :

$$MH = MK \iff M \in R$$

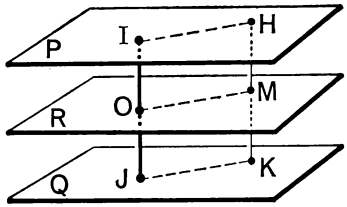


Fig. 266.

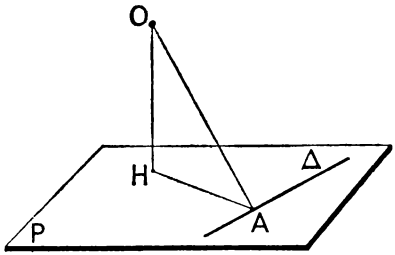


Fig. 267.

302. Théorème des trois perpendiculaires.

Si d'un point extérieur à un plan on mène la perpendiculaire à ce plan et la perpendiculaire à une droite Δ de ce plan, la droite qui joint les pieds de ces deux perpendiculaires est perpendiculaire à Δ.

Soit OH perpendiculaire au plan P (fig. 267) et OA perpendiculaire à une droite Δ de ce plan ne passant par H; Δ est orthogonale à OH (n° 283), et perpendiculaire à OA, donc perpendiculaire au plan OAH (n° 284). Elle est donc perpendiculaire à HA (n° 283).

303. Réciproque. — ***Si par un point d'un plan on mène la perpendiculaire au plan et la perpendiculaire à une droite Δ de ce plan, la droite qui joint le pied de cette seconde perpendiculaire à un point quelconque de la première est perpendiculaire à Δ.***

Soit OH perpendiculaire à P et HA perpendiculaire à la droite Δ de P (fig. 267) Δ est orthogonale à OH (n° 283), et perpendiculaire à HA, donc perpendiculaire au plan OHA (n° 284). Donc Δ est perpendiculaire à OA.

EXERCICES

341. On donne un plan P et un point O extérieur, soit OH = *d* la distance de O au plan P. Montrer que le lieu des extrémités M des obliques OM de longueur donnée *l* est un cercle.

342. Un point O se projette orthogonalement en H sur le plan P et une droite variable Δ du plan P passe par un point fixe A.

1° Lieu géométrique de la projection M de O sur la droite Δ.

2° Déterminer la droite Δ de façon que le segment OM soit maximum ou minimum.

343. Déterminer un triangle isocèle MAB (MA = MB) connaissant les sommets A et B, et sachant que M appartient soit à une droite donnée Δ, soit à un cercle donné C.

344. Soit un plan P et deux points extérieurs A et B. Quel est le lieu des points du plan P équidistants de A et B?

345. 1° Lieu géométrique des points M situés à une distance donnée d d'un plan donné P.

2° Étant donnés deux plans P et P′ et deux longueurs d et d', trouver le lieu des points situés à la distance d du plan P et à la distance d' du plan P′.

346. Lieu des points équidistants de deux plans parallèles donnés P et P′ et équidistants de deux points donnés A et B.

347. On donne un plan P, un point A de ce plan et un point O extérieur à P. Trouver le lieu géométrique des points M du plan P dans chacune des conditions suivantes :

1° Le triangle AOM est rectangle en A.

2° Le triangle AOM est rectangle en O.

3° Le triangle AOM est rectangle en M.

348. On considère un plan P, une droite D de ce plan, et une droite Δ perpendiculaire à ce plan en A; soit B la projection orthogonale de A sur D. Un segment IJ de longueur constante $2l$ varie de façon que I décrive Δ et que J décrive D. Soit O le milieu de IJ.

1° Que peut-on dire des triangles IAJ, IBJ et des segments OA et OB?

2° Montrer que le lieu du point O est un cercle centré au milieu de AB.

349. 1° Étant donnés un plan P et un point extérieur O, trouver le lieu des points M du plan P tels que le segment OM ait une longueur donnée l.

2° A et B désignant deux points fixes extérieurs au plan P, trouver le lieu des points M du plan P tels que l'angle AMB soit droit.

350. 1° Les plans équidistants de deux points donnés, distincts, A et B, se répartissent en deux familles : les plans (P) tels que, par rapport à chacun deux, A et B sont dans une même région et les plans (Q) tels que A et B sont de part et d'autre de chacun d'eux. Caractériser de façon simple les plans de chacune des deux familles.

2° Étudier et caractériser les plans équidistants de trois points donnés non alignés A, B, C.

3° Trouver les plans équidistants de quatre points donnés non situés dans un même plan, A, B, C, D.

4° Lieu des projections A′ et B′ des points A et B sur chacun des plans équidistants de A et de B et qui passent par un point donné M non situé sur AB.

351. On donne, dans un plan horizontal P, un carré ABCD, de côté k, et l'on mène à partir de ses sommets quatre demi-droites verticales vers le haut. On les coupe par un plan P′, qui les rencontre respectivement en A′ B′ C′ D′, et on désigne par a, b, c, d les distances de ces quatre points au plan P.

1° Quelle est la nature du quadrilatère A′B′C′D′? Quelle propriété possèdent alors ses diagonales? Utilisant cette propriété, calculer d, en supposant a, b et c, donnés.

2° Démontrer que, pour le quadrilatère A′B′C′D′ soit un losange, il faut et il suffit qu'il ait deux sommets opposés situés à la même distance du plan P.

3° Démontrer que, si les sommets A′ et B′ sont situés à la même distance du plan P, le quadrilatère A′B′C′ D′ est un rectangle. La réciproque est-elle vraie?

ANGLES DIÈDRES

304. Définitions. — ***On appelle angle dièdre (ou dièdre), la figure formée par deux demi-plans issus d'une même droite.***

Cette droite AB est l'arête du *dièdre* (fig. 268), et les demi-plans P et Q sont les faces du dièdre. Ce dièdre se désigne par la notation (P, AB, Q) ou si cela suffit par (P, Q) ou même (AB).

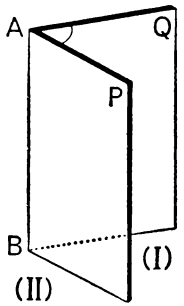


Fig. 268.

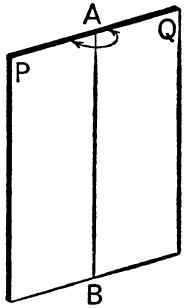


Fig. 269.

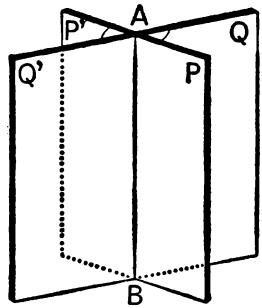


Fig. 270.

Un dièdre partage l'espace en deux régions (I) et (II) appelées respectivement l'*intérieur et l'extérieur du dièdre*. Sauf indication contraire, nous ne considérerons que des dièdres *saillants*, pour lesquels la région intérieure est tout entière d'un même côté du plan de l'une des faces.

Un *dièdre plat* a ses faces dans un même plan (fig. 269), un *dièdre nul* a ses faces confondues, et deux dièdres sont opposés par l'arête si les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre (fig. 270).

305. Rectiligne d'un dièdre. — ***On appelle rectiligne (ou angle plan) d'un dièdre, l'angle obtenu en coupant ce dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête.***

Le sommet O d'un rectiligne est donc un point de l'arête et (n° 283), ses côtés Ox et Oy sont les demi-droites menées dans chacune des faces, perpendiculairement à l'arête (fig. 271).

306. Théorème. — *Tous les rectilignes d'un dièdre sont égaux.*

Soient xOy $x'O'y'$ deux rectilignes du dièdre AB (fig. 271). Il est clair que les demi-droites Ox et $O'x'$, situées dans un même demi-plan (P) et perpendiculaires à la même droite AB qui limite ce demi-plan, sont parallèles et de même sens. Il en est de même de Oy et $O'y'$. Les deux rectilignes sont donc égaux (n° 258).

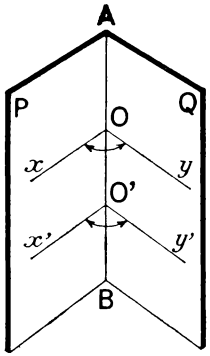


Fig. 271.

Un dièdre est parfaitement déterminé par la donnée en position de l'un quelconque de ses rectilignes xOy car l'arête AB est la perpendiculaire en O au plan xOy.

307. Dièdres égaux. — *Deux dièdres sont égaux s'ils sont superposables.*

La superposition de deux dièdres égaux entraînant celle de leurs rectilignes, ceux-ci sont donc égaux. Inversement, si deux dièdres ont des rectilignes égaux, la superposition de deux rectilignes entraîne celle des arêtes (n° 306), et par suite celle des deux dièdres. Il en résulte le théorème suivant :

308. Théorème. — *Pour que deux dièdres soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même rectiligne.*

Remarquons que la superposition de deux dièdres reste réalisée si on fait coïncider successivement un rectiligne du premier avec chacun des rectilignes de l'autre. Dans ce mouvement, l'arête et les faces du premier glissent respectivement sur l'arête et les faces du second. Autrement dit :

Un dièdre peut glisser sur lui-même.

309. Addition des dièdres. — *Deux dièdres sont adjacents, s'ils ont même arête, une face commune et s'ils sont situés de part et d'autre de la face commune.*

Les dièdres (P, Q) et (Q, R) (fig. 272), sont adjacents.

Le dièdre (P, R) formé par les faces non communes est, par définition, la **somme** des dièdres (P, Q) et (Q, R). Le dièdre (Q, R) est la **différence** des dièdres (P, R) et (P, Q) et le dièdre (P, R) est **supérieur** au dièdre (P, Q). Pour effectuer la somme de plusieurs dièdres, on additionne les deux premiers en les rendant adjacents, puis le dièdre obtenu au troisième et ainsi de suite jusqu'au dernier.

Nous avons défini l'égalité et l'addition des dièdres. Ceux-ci sont donc des grandeurs mesurables. Le théorème suivant permet de ramener la mesure d'un dièdre à celle de son rectiligne.

310. Théorème. — ***Le rapport de deux dièdres est égal au rapport de leurs rectilignes.***

Soient deux dièdres (P, Q) et (P′, Q′) ayant respectivement pour rectilignes xOy et $x'O'y'$ (fig. 273). Supposons par exemple que $xOy = \frac{4}{3}\, x'O'y'$. Nous

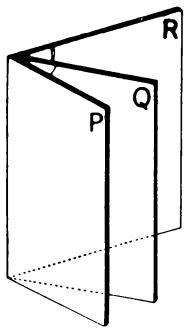


Fig. 272.

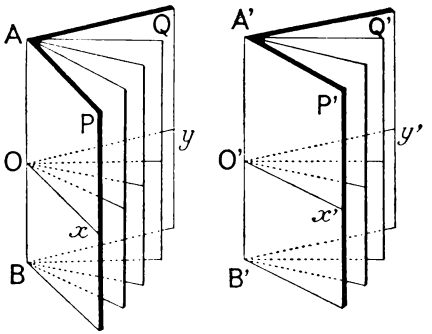


Fig. 273.

pouvons partager l'angle xOy en quatre partie égales et l'angle $x'O'y'$ en trois parties égales. Les sept angles ainsi obtenus sont égaux. A chacun de ces angles correspond un dièdre visiblement contenu quatre fois dans le dièdre (P, Q) et trois fois dans le dièdre (P′, Q′). Le rapport de ces deux dièdres est donc $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire le rapport de leurs rectilignes.

311. Mesure des dièdres. — ***Par convention on adopte pour unité de dièdre le dièdre qui a pour rectiligne l'unité d'angle. Dans ces conditions, la mesure d'un dièdre est égale à celle de son rectiligne.***

Ainsi si l'angle $x'O'y'$ est l'unité d'angle, le dièdre (P′, Q′) est l'unité correspondante de dièdre et le nombre $\frac{4}{3}$, mesure de l'angle xOy, est aussi la mesure du dièdre (P, Q).

312. Unités de dièdres. — Comme cela a déjà été fait pour les arcs, on donne aux différentes unités de dièdres le même nom que l'unité correspondante d'angle plan. L'unité d'angle étant l'angle droit, l'unité fondamentale de dièdre sera celui dont le rectiligne est un angle droit, que nous nommerons dièdre droit :

On appelle dièdre droit tout dièdre dont le rectiligne est droit.

Un dièdre plat a pour rectiligne un angle plat, soit deux angles droits. Ce dièdre vaut donc deux dièdres droits ou :

Un dièdre droit est la moitié d'un dièdre plat.

De même, on nommera dièdres de 1°, 1′, 1″, 1 gr, ceux dont le rectiligne vaut 1°, 1′, 1″, 1 gr. Il en résulte qu'un drièdre de 53°47′32″ par exemple a pour rectiligne un angle de 53°47′32″, et réciproquement.

313. Bissecteur d'un dièdre. — *C'est le demi-plan issu de l'arête qui partage le dièdre en deux dièdres adjacents égaux.*

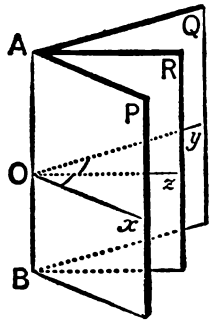


Fig. 274.

Remarquons que le bissecteur du dièdre (P, Q) est le demi-plan R défini par l'arête AB et la bissectrice Oz de l'un quelconque de ses rectilignes (fig. 274), et est engendré par cette bissectrice lorsque le point O décrit l'arête.

314. Généralisation — L'analogie entre les dièdres et les angles se poursuit dans les définitions et propriétés suivantes que nous nous bornerons à énoncer :

Un dièdre saillant est aigu ou obtus suivant qu'il est inférieur ou supérieur à un dièdre droit.

Deux dièdres sont complémentaires si leur somme vaut un dièdre droit, supplémentaires si leur somme vaut un dièdre plat.

Les bissecteurs de deux dièdres adjacents supplémentaires forment un dièdre droit. Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux et leurs bissecteurs forment un dièdre plat.

Si deux plans parallèles sont coupés par un plan sécant, deux dièdres alternes internes ou deux dièdres correspondants sont égaux, etc.

315. Théorème. — *Le lieu des points intérieurs à un dièdre et équidistants des faces de ce dièdre est le bissecteur de ce dièdre.*

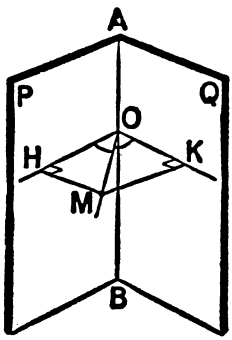


Fig. 275.

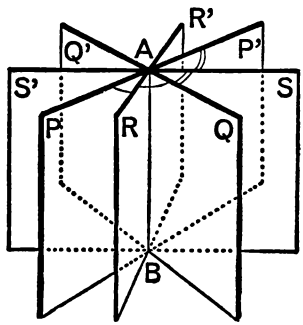


Fig. 276.

Soient MH et MK les distances d'un point quelconque M aux faces du dièdre (AB) (fig. 275). Les droites MH et MK étant perpendiculaires aux

faces sont orthogonales à l'arête AB et le plan HMK est perpendiculaire en O à cette arête (n° 284). L'angle HOK est un rectiligne du dièdre et MH et MK sont les distances de M aux côtés de ce rectiligne. Pour que MH soit égal à MK, il faut et il suffit que M appartienne à la bissectrice Oz de ce rectiligne, donc qu'il soit situé dans le bissecteur du dièdre.

316. Points équidistants de deux plans sécants. — ***Le lieu géométrique des points équidistants de deux plans sécants se compose de deux plans rectangulaires bissecteurs des quatre dièdres formés par ces deux plans.***

Deux plans sécants PP′ et QQ′ (fig. 276) forment quatre dièdres et, d'après ce qui précède, le lieu envisagé est formé des bissecteurs R, S, R′ et S′ de ces quatre dièdres.

Or les dièdres adjacents (P, Q) et (Q, P′) étant supplémentaires, leurs moitiés (R, Q) et (Q, S) sont complémentaires et ont pour somme le dièdre droit (R, S). On en déduit aisément que les quatre bissecteurs forment deux plans perpendiculaires RR′ et SS′.

317. Angle de deux plans. — Deux plans sécants P et Q (fig. 277), forment quatre dièdres deux à deux égaux ou supplémentaires :

On appelle angle de deux plans, l'un des angles dièdres qu'ils déterminent.

En particulier, l'angle aigu de deux plans est égal au rectiligne de l'un des dièdres aigus qu'ils déterminent.

318. Théorème. — ***L'angle aigu de deux plans est égal à l'angle aigu de deux de leurs perpendiculaires.***

Menons d'un point M les perpendiculaires MA et MB aux faces du dièdre aigu formé par les plans P et Q (fig. 277). Les droites MA et MB sont orthogonales à l'arête Δ du dièdre et déterminent un plan R perpendiculaire en O à l'arête Δ (n° 284). L'angle AOB est donc un rectiligne du dièdre (P, Q) et comme ses côtés sont respectivement perpendiculaires aux droites MA et MB de son plan, il est égal à l'angle aigu de ces deux droites. Il est par suite égal à l'angle aigu de deux perpendiculaires quelconques aux plans P et Q.

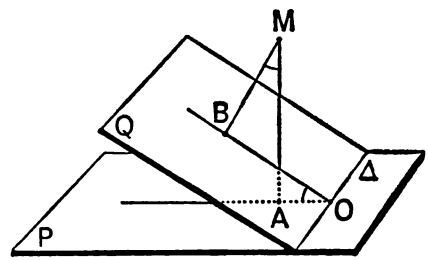


Fig. 277.

PLANS PERPENDICULAIRES

319. Définition. — ***Deux plans sécants sont perpendiculaires lorsque l'un des quatre dièdres qu'ils forment est droit.***

En coupant les deux plans P et Q par un plan perpendiculaire à leur intersection (fig. 278), on fait apparaître les rectilignes des quatre dièdres formés. Si l'un de ces rectilignes est droit, les droites Ox et Oy sont perpendiculaires et les quatre rectilignes sont droits :

Deux plans perpendiculaires forment quatre dièdres droits.

Deux plans perpendiculaires sont parfois appelés rectangulaires.

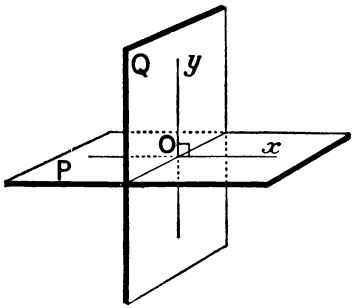


Fig. 278.

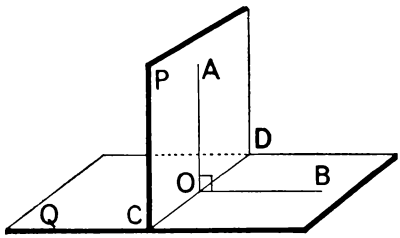


Fig. 279.

320. Théorème. — ***Pour que deux plans soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'un d'eux contienne une perpendiculaire à l'autre (ou que l'un d'eux soit perpendiculaire à une droite de l'autre).***

1° **La condition est nécessaire.** — Soient deux plans perpendiculaires P et Q (fig. 279). En un point quelconque O de leur intersection CD construisons le rectiligne du dièdre (P, Q). L'angle AOB ainsi obtenu est droit. Comme d'autre part OA et OB sont perpendiculaires à CD (n° 305), on voit que OA, perpendiculaire à OB et OC, est perpendiculaire au plan Q (n° 284). On voit de même que OB est perpendiculaire au plan P. Comme le point O est arbitraire, il en résulte que :

Lorsque deux plans sont perpendiculaires, il existe dans chacun d'eux une infinité de perpendiculaires à l'autre, à savoir les perpendiculaires à l'intersection de ces deux plans.

2° **La condition est suffisante.** — Soit une droite OA perpendiculaire en O au plan Q (fig. 279). Tout plan P contenant OA coupe le plan Q. Achevons

le rectiligne AOB du dièdre (P, Q). AO étant perpendiculaire au plan (Q) est perpendiculaire à OB. Le dièdre (P,Q) est droit et le plan P est perpendiculaire au plan Q. Autrement dit :

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan passant par cette droite est perpendiculaire au premier.

321. Corollaire I. — ***Lorsque deux plans sont perpendiculaires, toute droite menée d'un point de l'un perpendiculairement à l'autre est contenue dans le premier.***

En effet, si les plans P et Q sont perpendiculaires et si par un point A du plan P on mène la perpendiculaire à l'intersection CD, on obtient une droite AO perpendiculaire au plan Q (n° 320, 1°). Comme on ne peut mener par A qu'une seule perpendiculaire au plan Q (n° 288), cette perpendiculaire est la droite AO contenue dans le plan P.

322. Corollaire II. — ***Lorsque deux plans sécants sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième.***

Soit A un point de l'intersection des plans P et Q, tous deux perpendiculaires au plan R (fig. 280). La perpendiculaire au plan R menée par le point A est contenue dans chacun des plans P et Q. Elle est donc confondue avec leur intersection. Notons que ce théorème peut aussi s'énoncer ainsi :

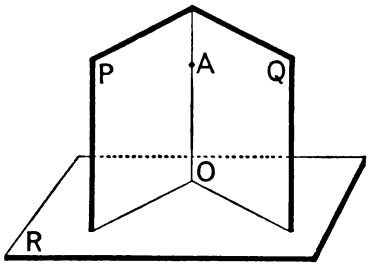


Fig. 280.

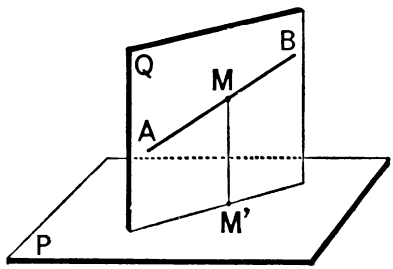


Fig. 281.

Lorsqu'un plan est perpendiculaire à deux plans sécants, il est perpendiculaire à leur intersection.

323. Corollaire III. — ***Par une droite non perpendiculaire à un plan, on peut mener à ce plan un plan perpendiculaire et un seul.***

D'un point M de la droite AB, menons la perpendiculaire MM' au plan P (fig. 281). Le plan Q défini par AB et MM' est perpendiculaire au plan P. Tout autre plan passant par AB et perpendiculaire au plan P contiendrait MM' (n° 321) et serait confondu avec le précédent.

CONSÉQUENCES

324. Théorème I. — ***Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.***

Soient deux plans parallèles P et Q et un plan R perpendiculaire à P (fig. 282). Menons dans le plan R une perpendiculaire Δ au plan P. Elle est aussi perpendiculaire au plan Q (n° 285). Le plan R contenant une perpendiculaire au plan Q est donc perpendiculaire au plan Q (n° 320).

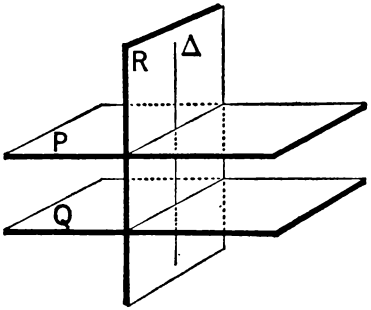


Fig. 282.

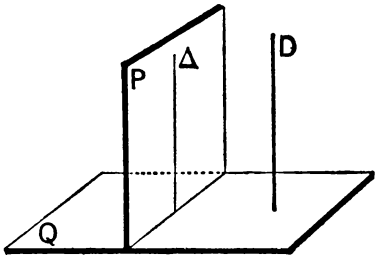


Fig. 283.

325. Théorème II. — ***Lorsqu'une droite*** D ***et un plan*** P ***sont perpendiculaires à un même plan*** Q, ***ils sont parallèles.***

Menons dans le plan P une perpendiculaire Δ au plan Q (fig. 283). Les droites D et Δ perpendiculaires au même plan Q sont parallèles (n° 289). La droite D, parallèle à une droite Δ du plan P, lui est donc parallèle (n° 263).

326. Théorème III. — ***Lorsqu'une droite*** D ***est parallèle à un plan*** P ***et perpendiculaire à un plan*** Q ***les deux plans*** P ***et*** Q ***sont perpendiculaires.***

Menons dans le plan P une droite Δ parallèle à la droite D (fig. 283). Le plan Q, perpendiculaire à la droite D, est perpendiculaire à sa parallèle Δ et par suite au plan P (n° 320).

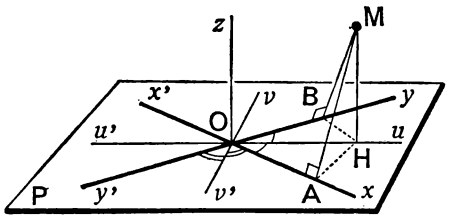


Fig. 284.

On peut rassembler les nos 325 et 326 de la façon suivante :

Pour que deux plans soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'un d'eux soit parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre.

327. Points équidistants de deux droites concourantes. — Soient, dans un plan P, deux droites concourantes

$x'x$ et $y'y$ se coupant en O. Menons d'un point M de l'espace les perpendiculaires MA et MB à ces deux droites et la perpendiculaire MH au plan P. D'après le théorème des trois perpendiculaires, HA et HB sont perpendiculaires à $x'x$ et $y'y$. Pour que les obliques MA et MB soient égales, il faut et il suffit que HA et HB le soient (n^{os} 294 et 295), donc que H appartienne à l'une des deux bissectrices des angles formés par $x'x$ et $y'y$. Il en résulte que le lieu de M se compose de deux plans rectangulaires zOu et zOv menés perpendiculairement au plan P suivant les bissectrices des deux droites Ox et Oy.

EXERCICES

352. Les plans parallèles P et Q sont coupés par le plan R respectivement suivant les droites D et D'. Montrer que les huit dièdres d'arêtes D et D' ainsi formés sont deux à deux égaux ou supplémentaires.

Les réciproques sont-elles vraies?

353. 1° Démontrer que si deux dièdres ont leurs faces respectivement parallèles et de même sens, ils sont égaux.

2° En déduire que deux dièdres, dont les faces sont respectivement parallèles et de sens contraires, sont égaux.

354. 1° On considère un point M variable sur un cercle de diamètre AB. En A et B on mène les perpendiculaires Ax et By au plan du cercle. Évaluer le dièdre dont les faces sont les plans MAx et MBy.

2° Soit C un point quelconque de la droite By. Évaluer le dièdre dont les faces sont les plans AMC et BMC.

355. On donne deux plans perpendiculaires et leur rectiligne xOy.

1° Montrer que tout plan passant par Ox ou par Oy coupe le dièdre suivant un angle droit.

2° Montrer que tout plan passant par O et qui coupe le dièdre suivant un angle droit contient Ox ou Oy.

356. Soit un dièdre (P, Q) et un rectiligne variable xOy de ce dièdre. On prend un point variable A sur Ox et un point variable B sur Oy tels que : $OA + OB = l$, longueur donnée.

1° Trouver le lieu du point C tel que OACB soit un parallélogramme.

2° Trouver le lieu du milieu de AB.

357. On désigne par MH et MK les distances d'un point intérieur M aux deux faces d'un dièdre :

1° Montrer que MH + MK reste constant lorsque M décrit une perpendiculaire au bissecteur du dièdre ou une parallèle à son arête.

2° Montrer que |MH — MK| reste constant lorsque M décrit une parallèle au bissecteur.

3° Trouver, étant donnée une longueur l le lieu des points intérieurs au dièdre tels que :

a) $MH + MK = l$; *b*) $MH - MK = l$; *c*) $MK - MH = l$.

358. On considère un tétraèdre régulier ABCD dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux de côté a.

1° Montrer que le bissecteur intérieur du dièdre AB est le plan médiateur du segment CD.

2° Évaluer l'angle des bissecteurs intérieurs des dièdres AB et AC, puis celui des bissecteurs intérieurs des dièdres AB et CD.

3° Déterminer le cosinus de l'un des dièdres du tétraèdre.

359. Dans le plan P on donne un triangle rectangle isocèle ABC d'hypoténuse BC = a et sur la demi-droite Ax perpendiculaire en A au plan P, on donne le point S.

1° Quelles sont les valeurs des dièdres d'arêtes AB, AC, AS de ce tétraèdre?

2° Calculer AS en fonction de a pour que la dièdre d'arête BC soit égal à 45°.

360. On se donne deux droites de l'espace D_1 et D_2, un point variable A sur D_1 et un point variable B sur D_2.

1° Déterminer le lieu d'un point M de AB tel que $\overline{MA} = k\overline{MB}$ (k nombre relatif donné).

2° On suppose que AB reste parallèle à un plan fixe R. Quel est dans ce cas le lieu de I milieu de AB?

3° On suppose AB dans un plan donné S perpendiculaire à D_1 et on prend un point N sur le cercle de diamètre AB situé dans ce plan. Montrer que les deux plans issus de N et contenant D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

361. On considère deux plans perpendiculaires H et F et leur intersection xy.

1° Montrer qu'il existe une infinité de plans coupant les deux plans H et F suivant deux droites perpendiculaires. Dans ce qui suit, on appellera plan P tout plan possédant cette propriété. Caractériser la position des plans P par rapport aux plans H et F.

2° Montrer que par une droite D quelconque de l'espace on peut mener en général deux plans P.

Comment faut-il choisir la droite D pour qu'on ne puisse mener par elle qu'un seul ou aucun ou une infinité de plans P?

3° On considère tous les plans P passant par un point fixe A de l'espace. D'un point B quelconque de la droite xy on mène les perpendiculaires à ces plans. Trouver le lieu géométrique de ces perpendiculaires et le lieu géométrique de leur intersection avec les plans P correspondants.

362. On considère un cercle (C) de centre O, de rayon R, et deux droites D et E rencontrant respectivement le plan P du cercle (C) en deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle.

La droite D est perpendiculaire à P et les deux droites D et E ne sont pas un même plan.

1° M étant un point quelconque de (C) distinct de A et B, démontrer qu'il existe une droite d et une seule passant par M et rencontrant D et E.

Montrer que les deux plans déterminés par le point M et les droites D et E respectivement sont perpendiculaires.

2° Un plan perpendiculaire à D coupe D, d, E respectivement en A', M', B'. Démontrer que le triangle A'M'B' est rectangle.

3° Un plan perpendiculaire à E coupe D, d, E respectivement en A", M", B". Démontrer que le triangle A"M"B" est rectangle.

363. On donne un triangle équilatéral ABC de côté a. Soient D la perpendiculaire menée par A au plan du triangle, M un point quelconque sur D, O le centre du cercle circonscrit à ABC.

1° Le point M variant sur D, montrer que les lieux des points E et F, pieds sur CM et BM des hauteurs issues de B et C dans le triangle MBC, sont des cercles dont on déterminera les centres et les rayons.

2° Quel est le lieu de l'orthocentre H du triangle MBC?

3° OH rencontre D en N. Démontrer que le tétraèdre BCMN a ses arêtes opposées rectangulaires.

PROJECTION SUR UN PLAN

328. Définition.— Considérons un plan fixe P, appelé ***plan de projection*** et une droite fixe Δ coupant le plan P (fig. 285). La parallèle à Δ menée par un point donné A de l'espace coupe le plan P en un point unique A′ :

Le point A′ ***est la projection, effectuée parallèlement à*** Δ, ***du point*** A ***sur le plan*** P.

La droite AA′ est la *projetante du point* A. Si ce point est extérieur au plan P les points A et A′ sont distincts. Tout point B du plan P est confondu avec sa projection B′.

Lorsqu'un point M décrit une figure (F) quelconque de l'espace, sa projection M′ décrit une figure plane (F′) appelée *projection de la figure* F *sur le plan* P, effectuée parallèlement à Δ.

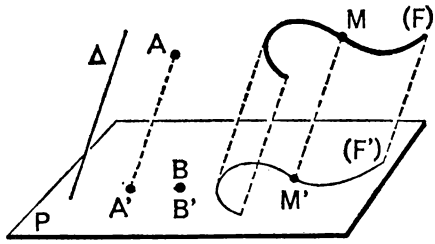


Fig. 285.

Lorsque la direction de projection Δ est perpendiculaire au plan P, la projection est dite *orthogonale* au plan P. Sinon elle est dite *oblique* au plan P.

329. Projection d'une droite ou d'un segment. — 1° Soit D une droite non parallèle à la direction Δ (fig. 286), A et M deux points l'un fixe, l'autre variable sur D et soient A′ et M′ leurs projections sur le plan P. Le plan Q déterminé par les droites D et AA′ est parallèle à la droite Δ et coupe le plan P suivant une droite D′. Ce plan Q, appelé *plan projetant de la droite* D, contient MM′ (n° 264); donc M′ appartient à la droite D′ et la décrit en entier lorsque M décrit la droite D.

2° La démonstration est en défaut si la droite est parallèle à Δ (fig. 287). Dans ce cas, tous les points de D ont même projection A sur le plan P :

La projection d'une droite sur un plan est en général une droite.

Notons que si la droite D coupe le plan de projection en O, ce point est sa propre projection sur le plan P. La projection D′ de la droite D sur le plan P passe donc par O (fig. 286).

3° Si la droite D est parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection D' sur le plan P (fig. 288). Réciproquement, si D est parallèle à sa projection D' sur le plan P, elle est parallèle au plan P (n° 263).

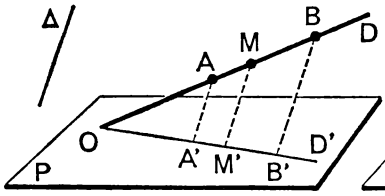


Fig. 286.

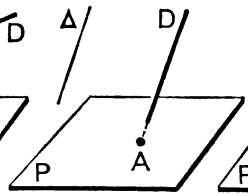


Fig. 287.

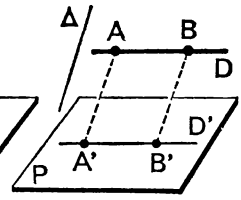


Fig. 288.

4° Si le point M décrit la demi-droite AD ou le segment AB, sa projection M' sur le plan P (fig. 286) décrit la demi-droite A'D' ou le segment A'B'. Ainsi :

La projection d'un segment de droite sur un plan est le segment qui joint les projections de ses extrémités.

Il en résulte que la projection d'un angle est un angle, celle d'un triangle un triangle, celle d'un polygone un polygone d'un même nombre de côtés.

330. Théorème. — ***Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont en général parallèles.***

Considérons les deux parallèles AB et CD non parallèles à la direction Δ (fig. 289). Les deux projetantes AA' et CC', parallèles à Δ, sont parallèles Il en résulte (n° 269), que si les deux plans ABB'A' et CDD'C' ne sont pas confondus, ils sont parallèles et leurs intersections A'B' et C'D' avec le plan P sont parallèles. Sinon ces projections sont confondues.

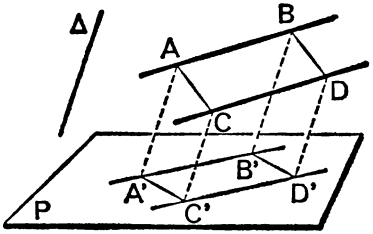


Fig. 289.

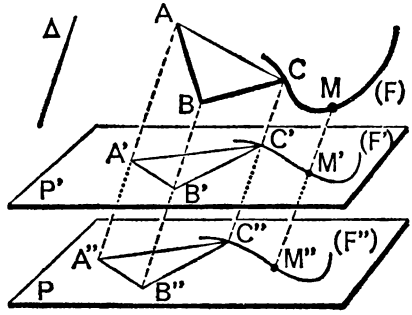


Fig. 290.

— La réciproque du théorème précédent est inexacte : deux droites dont les projections sur un plan donné sont parallèles ne sont pas en général parallèles.

Il résulte de ce qu'il précède que :

La projection d'un parallélogramme sur un plan est, en général, un parallélogramme.

Si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (fig. 289), les relations AB ∥ CD et AC ∥ BD entraînent A′B′ ∥ C′D′ et A′C′ ∥ B′D′. Le quadrilatère A′B′D′C′ est un parallélogramme véritable, ou aplati lorsque le plan ABCD est parallèle à Δ.

331. Théorème. — ***Les projections d'une même figure sur deux plans parallèles, sont deux figures égales.***

Soient A′, B′, C′, et A″, B″, C″ les projections des trois points A, B et C d'une figure (F) sur les plans parallèles P′ et P″ (fig. 290). Les quadrilatères tels que A′B′B″A″ sont des parallèlogrammes. Donc : A′B′ = A″B″; B′C′ = B″C″ et C′A′ = C″A″.

Les deux triangles A′B′C′ et A″B″C″ sont donc égaux.

Si on superpose les plans P′ et P″ en amenant A′B′ sur A″B″, les points C′ et C″ coïncident. Il en est évidemment de même des projections M′ et M″ de tout autre point M de la figure (F). Autrement dit, les figures planes (F′) et (F″) sont superposables.

332. Conséquences. — 1° Toute figure plane (F) dont le plan est parallèle au plan de projection se projette suivant une figure plane égale. On dit dans ce cas que *la figure se projette en vraie grandeur.*

2° Pour étudier la projection d'une figure (F) sur un plan P, on pourra aussi bien étudier sa projection sur un plan P′ parallèle au plan P.

333. Propriétés conservées dans la projection sur un plan. — Le cas de la projection en vraie grandeur mis à part, la projection sur un plan ne conserve en général ni les longueurs, ni les angles. Parmi les propriétés conservées en projection, notons : Points alignés : droites concourantes ou parallèles, rapport de vecteurs portés par une même droite (cela résulte du th. de Thalès dans le plan projetant), Ainsi :

Le milieu d'un segment AB a pour projection le milieu de sa projection A′B′.

Une division harmonique ABCD se projette suivant une division harmonique A′B′C′D′.

PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN

334. Définition. — Lorsque la direction des projetantes Δ est perpendiculaire au plan de projection P, *la projection est dite orthogonale au plan* P. Quand aucune indication n'est donnée, c'est de cette projection qu'il s'agit.

La projetante AA′ de tout point A de l'espace est perpendiculaire au plan P et sa projection A′ est le pied de cette perpendiculaire. Toute droite D non perpendiculaire au plan P se projette suivant une droite D′ du plan P.

335. Théorème I. — ***Lorsqu'un angle droit a un côté parallèle au plan de projection, il se projette orthogonalement suivant un angle droit.***

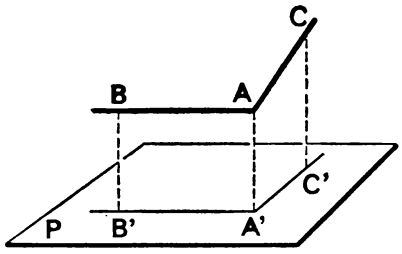


Fig. 291.

Considérons l'angle droit BAC (fig. 291), se projetant orthogonalement suivant l'angle B'A'C' sur le plan P parallèle à AB (et non perpendiculaire à AC). Le côté A'B' est parallèle au côté AB (n° 329, 3°) et par suite orthogonal à AC. D'autre part A'B', droite du plan P, est perpendiculaire à la projetante AA'. Le côté A'B' orthogonal à deux droites concourantes AC et AA' du plan CAA'C' est perpendiculaire à ce plan et est donc perpendiculaire à la droite A'C' de ce plan (n° 283).

336. Théorème II. — ***Lorsqu'un angle qui a un côté parallèle au plan de projection, se projette orthogonalement suivant un angle droit, il est lui-même droit.***

Soit un angle BAC (fig. 291), se projetant suivant l'angle droit B'A'C', sur le plan P parallèle à AB. Le côté AB, parallèle à A'B' (n° 329) est par suite orthogonal à A'C' d'une part et perpendiculaire à la projetante AA' d'autre part. Le côté AB est perpendiculaire au plan CAA'C'. Il est donc perpendiculaire à la droite AC de ce plan (n° 283).

337. Théorème III. — ***Lorsqu'un angle droit se projette orthogonalement suivant un angle droit, un de ses côtés au moins est parallèle au plan de projection.***

Considérons l'angle droit BAC (fig. 291), se projetant sur le plan P suivant l'angle droit B'A'C' et supposons que le côté AC ne soit pas parallèle au plan P. Par suite les droites AC et A'C' sont concourantes. Il nous faut montrer que AB et A'B' sont parallèles.

Le côté A'C', perpendiculaire à A'B' par hypothèse et à la projetante AA' est perpendiculaire au plan BAA'B' et orthogonal à la droite AB de ce plan. Il en résulte que le côté AB perpendiculaire par hypothèse au côté AC est orthogonal aux deux droites concourantes AC et A'C' du plan CAA'C'. Il est donc perpendiculaire à ce plan et en particulier à la droite AA'de ce plan (n° 283). Les droites AB et A'B' situées dans un même plan et perpendiculaires à AA' sont donc parallèles et par suite AB est parallèle au plan P.

338. Résumé. — ***Lorsqu'un angle possède deux des trois propriétés suivantes :*** 1° ***être droit;*** 2° ***avoir un côté parallèle au plan de projection;*** 3° ***se projeter suivant un angle droit, il possède aussi la troisième propriété.***

Il en résulte que deux des trois théorèmes précédents peuvent être considérés comme des réciproques du troisième.

339. Remarques. — 1° Dans les théorèmes I et II, on peut toujours supposer le côté AB dans le plan P (n° 332, 2°). On retrouve le théorème des trois perpendiculaires (n° 302) et sa réciproque.

2° Les deux côtés de l'angle droit BAC peuvent être remplacés dans les trois théorèmes par deux droites orthogonales. Ainsi :

Deux droites orthogonales se projettent orthogonalement sur un plan parallèle à l'une d'elles et non perpendiculaire à l'autre suivant deux droites perpendiculaires.

Pour qu'une droite D *d'un plan* P *soit orthogonale à une droite* Δ *non perpendiculaire au plan* P, *il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à la projection orthogonale* Δ' *de* Δ *sur le plan* P.

Il en résulte que par un point d'un plan P on peut mener dans ce plan une droite D et une seule orthogonale à une droite donnée Δ non perpendiculaire au plan P.

EXERCICES

364. Montrer qu'une droite D de l'espace est parfaitement déterminée lorsque l'on connaît ses projections orthogonales D′ et D″ sur deux plans sécants donnés P et Q.

365. Démontrer qu'un point M de l'espace est déterminé par ses projections orthogonales :

1° Sur un plan donné P et sur une droite donnée D non parallèle à P.

2° Sur trois droites D_1, D_2 et D_3 non parallèles à un même plan. Ces droites peuvent elles être concourantes en un même point O?

366. Une condition nécessaire et suffisante pour que deux droites de l'espace soient parallèles est que leurs projections sur deux plans sécants P et Q soient respectivement parallèles.

367. Un point donné A se projette orthogonalement en A′ sur un plan P et en M sur une droite D de ce plan :

1° Montrer que M est la projection orthogonale de A′ sur D.

2° Le plan P étant fixe, trouver le lieu du point M lorsque D varie en passant par un point fixe ou en restant parallèle à une direction fixe.

3° La droite D étant fixe trouver la courbe décrite par le point A′ lorsque le plan P tourne autour de D.

368. 1° Trouver le lieu des demi-droites issues d'un point fixe O et faisant des angles égaux avec deux demi-droites fixes Ox et Oy.

2° Construire les droites Δ issues du point O faisant des angles égaux avec les trois droites fixes Ox, Oy et Oz non situées dans un même plan.

369. 1° Deux points fixes I et J se projettent orthogonalement en un même point M sur une droite variable Ox issue d'un point fixe O. Trouver le lieu de la droite Ox puis celui du point M.

2° Lieu des droites issues d'un point fixe O sur lesquelles deux segments donnés AB et CD ont des projections orthogonales égales.

370. Démontrer pour que deux droites d'un plan P soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles soient orthogonales à une droite Δ non perpendiculaire au plan P.

371. On donne deux plans P et Q et un point O de leur intersection.

1° Montrer que si une droite OM fait des angles égaux avec ses projections orthogonales sur les plans P et Q, le point M est équidistant des plans P et Q.

2° Étudier la réciproque.

372. On considère un triangle OAB et un point mobile M sur la perpendiculaire en O au plan OAB. On désigne par A' et D les projections orthogonales de A sur OB et MB et par B' et E les projections orthogonales de B sur OA et MA. Soit H l'orthocentre du triangle OAB et K celui du triangle MAB.

1° Montrer que D et E sont les projections orthogonales de A' et B' sur MB et MA et que K est la projection orthogonale de H sur le plan MAB.

2° En déduire les lieux géométriques des points D, E et K.

373. On considère deux droites D_1 et D_2 non situées dans un même plan et on se propose de construire un segment AB perpendiculaire en A à D_1 et en B à D_2. On mène un plan P perpendiculaire en K à D_2 et coupant D_1 en O. Soit H la projection orthogonale de A sur le plan P.

1° Évaluer l'angle OHK et donner une construction de H, puis du segment AB. Montrer qu'il est unique.

2° Soit M un point quelconque de D_1 et N un point quelconque de D_2. Comparer la longueur MN et la longueur HK à la longueur M'K projection de MN sur le plan P. En déduire que le segment AB est le plus court segment joignant un point de D_1 à un point de D_2.

374. On donne un plan fixe P et un point extérieur A.

1° Trouver le lieu des points M du plan P tels que la droite AM fasse avec sa projection orthogonale sur le plan P un angle aigu de valeur donnée α. Caractériser par rapport à ce lieu les intersections Δ du plan P et des plans R issus de A et faisant avec le plan P l'angle α.

2° Construire les droites AM situées dans un plan donné Q issu de A. Discuter.

3° Construire les plans R contenant une droite donnée D issue de A. Discuter.

375. Soient A, B, C, D les sommets d'un tétraèdre; a, b, c, d, leurs projections orthogonales sur les plans des faces opposées.

1° Démontrer que si a est situé sur la hauteur BH du triangle BCD les arêtes AB et CD sont orthogonales.

2° Énoncer et démontrer la réciproque.

3° Démontrer que si a est confondu avec l'orthocentre du triangle BCD les points b, c, d sont respectivement confondus avec les orthocentres des triangles ACD, ABD et ABC.

376. 1° Étant donné un plan P et un point B extérieur à ce plan, démontrer que le lieu géométrique des projections orthogonales du point B sur les droites du plan P qui passent par un point donné A de ce plan est en général un cercle.

2° On considère deux droites $x'x$ et $y'y$, orthogonales, qui ne se rencontrent pas. Leur perpendiculaire commune coupe $x'x$ en O et $y'y$ en I.

On prend sur $x'x$ deux points fixes distincts A et B; on joint A à un point variable M de $y'y$.

Quel est le lieu géométrique de la droite AM?

Quel est le lieu géométrique du pied de la perpendiculaire menée du point B sur la droite AM, quand le point M décrit la droite $y'y$?

Préciser la position de la projection orthogonale H de B sur le plan P défini par la droite $y'y$ et le point A.

3° Montrer qu'à chaque point M de $y'y$ on peut associer un point N de cette même droite tel que les droites AM et BN soient orthogonales. Déduire de la deuxième partie du problème une construction du point N par un tracé s'effectuant dans le plan P.

4° Vérifier que H est l'orthocentre du triangle AMN. En déduire que les droites AN et BM sont aussi orthogonales.

TRIÈDRES. ANGLES POLYÈDRES

340. Définition. — ***On appelle trièdre la figure formée par trois demi-droites issues d'un même point et non situées dans un même plan.***

L'origine commune S des trois demi-droites SA, SB et SC est le *sommet* du tièdre S. ABC (fig. 292). Les trois demi-droites SA, SB et SC sont les *arêtes*, les angles saillants tels que ASB sont les *faces* et les dièdres formés par les faces sont les *dièdres* de ce trièdre. Dièdres et faces constituent les *six éléments* du trièdre : la face BSC est dite opposée au dièdre (ou à l'arête) SA.

La surface illimitée formée par les trois portions de plan constituées par les faces du trièdre partage l'espace en deux régions. Celle qui contient les prolongements des arêtes est la *région extérieure*, l'autre la *région intérieure*.

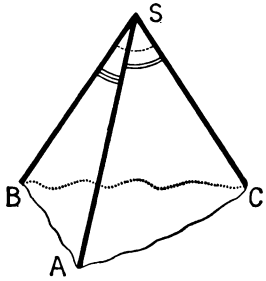


Fig. 292.

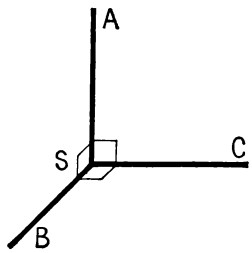


Fig. 293.

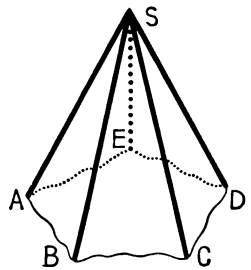


Fig. 294.

On obtient un trièdre en joignant les sommets d'un triangle à un point S extérieur à son plan et tout trièdre peut être obtenu de cette façon.

341. Trièdre trirectangle. — ***Un trièdre est trirectangle lorsque ses trois faces sont des angles droits.***

On obtient un tel trièdre en menant l'arête SC perpendiculairement au plan d'un angle droit ASB (fig. 293). Chaque arête est perpendiculaire au plan de la face opposée (n° 284) et les trois dièdres sont droits car la face ASB par exemple est le rectiligne du dièdre d'arête SC.

342. Angle polyèdre. — ***On appelle angle polyèdre la figure formée par un nombre quelconque de demi-droites de même origine prises dans un ordre déterminé de telle sorte que trois consécutives d'entre elles ne soient pas coplanaires.***

L'origine S est le sommet de l'angle polyèdre S.ABCDE (fig. 294). Les demi-droites telles que SA sont les arêtes et les angles saillants tels que ASB sont les faces de cet angle polyèdre. Un angle polyèdre est dit convexe lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté du plan de l'une quelconque de ses faces.

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UNE DROITE

343. Définition. — ***Deux points*** M ***et*** M′ ***sont symétriques par rapport à une droite*** Δ ***si cette droite est médiatrice du segment*** MM′.

Étant donné une droite Δ, appelée *axe de symétrie*, menons d'un point quelconque M le segment MH perpendiculaire à Δ et prolongeons-le d'une longueur HM′ égale à MH (fig. 295). Nous obtenons le point M′ symétrique du point M par rapport à Δ.

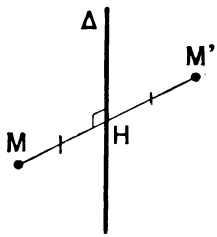


Fig. 295.

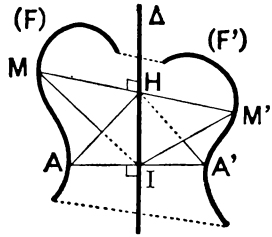


Fig. 296.

Si on construit le symétrique de chaque point d'une figure F on obtient une figure F′ : *Les figures* F et F′ *sont dites symétriques par rapport à la droite* Δ.

Cette transformation est la *symétrie par rapport à la droite* Δ *ou symétrie-droite* Δ.

344. Théorème. — ***Deux figures symétriques par rapport à une droite sont superposables.***

Soient A un point donné, M un point quelconque de la figure F, A′ et M′ leurs homologues de la figure F′ (fig. 296). Désignons par I et H les milieux de AA′ et de MM′. Les deux dièdres (A, IH, M) et (A′, IH, M′), opposés par l'arête sont égaux. Ils coïncident si on fait tourner la figure F autour de Δ de

façon à amener IA sur IA'. Le segment HM coïncide alors avec son égal HM'. Il en résulte que tout point M de la figure F coïncide avec son homologue M' de la figure F'.

345. Corollaire. — Dans la symétrie par rapport à une droite Δ, l'homologue d'une droite est une droite, l'homologue d'un angle est un angle égal, l'homologue d'un segment est un segment égal et l'homologue d'un plan est un plan.

Notons que tout point de l'axe de Δ coïncide avec son symétrique et qu'il en est de même de toute droite perpendiculaire à Δ ou de tout plan issu de Δ ou perpendiculaire à Δ.

SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN POINT OU PAR RAPPORT A UN PLAN

346. Définitions. — 1° ***Deux points*** M ***et*** M' ***sont symétriques par rapport à un point*** O ***lorsque ce point est le milieu du segment*** MM' (fig. 297).

2° ***Deux points*** M ***et*** M' ***sont symétriques par rapport à un plan*** P ***si ce plan est le plan médiateur du segment*** MM' (fig. 298).

En construisant les symétriques de chaque point d'une figure F par rapport à un centre de symétrie O donné (ou par rapport à un plan de symétrie P donné), on obtient une figure F' : *Les figures* F et F' *sont symétriques par rapport au point* O (*ou par rapport au plan* P).

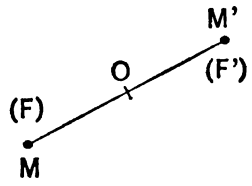


Fig. 297.

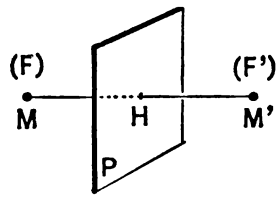


Fig. 298.

Ces deux transformations sont la symétrie par rapport au point O (ou symétrie-point O) et la symétrie par rapport au plan P (symétrie-plan P).

347. Théorème. — ***Dans la symétrie par rapport au point*** O ***ou par rapport au plan*** P, ***l'homologue d'un segment de droite*** AB ***est un segment égal*** A'B'.

On est, en effet ramené à une symétrie dans le plan AA'BB'. Dans le premier cas (fig. 299) les segments AB et A'B' sont symétriques par rapport à O

(n° 37) et le quadrilatère ABA'B' est un parallélogramme donc, AB = A'B' et AB ∥ A'B'.

Dans le second cas (fig. 300) les segments AB et A'B' sont symétriques par rapport par à HK projection orthogonale de AB sur le plan P, et le quadrilatère ABB'A' est un trapèze isocèle de bases AA' et BB', donc : AB = A'B' (n° 34).

348. Corollaires. — Il en résulte que ces deux symétries transforment :

1° *Une droite* AB *en une droite* A'B'. Ces deux droites sont parallèles dans le premier cas, concourantes en un point du plan P ou parallèles à ce plan dans le second cas.

2° *Un triangle* ABC *en un triangle égal* A'B'C' (côtés égaux) et par suite tout angle en un angle égal.

3° *Un plan* ABC *en un plan* A'B'C' *et toute figure plane (f) en une figure plane égale (f').*

En effet, soit M un point quelconque du plan ABC et D l'insersection de AM et BC (fig. 299 et 300). Lorsque la droite AM engendre le plan ABC en tournant autour de A, le point D' homologue de D décrit la droite B'C' homologue de la droite BC, et la droite A'M' homologue de la droite AM engendre le plan A'B'C' qui est donc l'homologue du plan ABC.

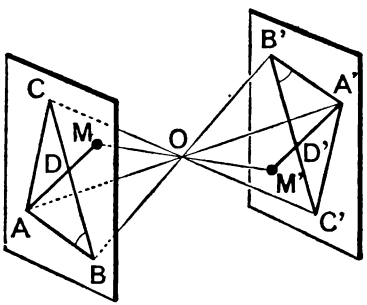


Fig. 299.

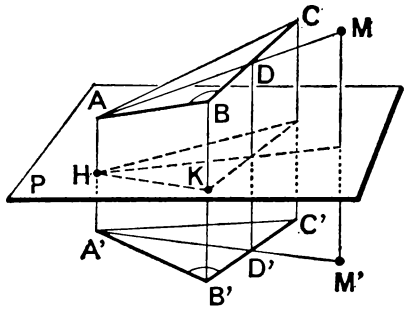


Fig. 300.

Si M décrit la figure (*f*) du plan ABC, la superposition des triangles homologues ABC et A'B'C' entraîne celle des points D et D', puis des points M et M'. La figure (*f'*) décrite par M' est égale à la figure (*f*).

Notons que dans la symétrie-point O, les droites et les plans issus de O coïncident avec leur transformés. Dans la symétrie-plan P, il en est de même des points du plan P, des droites et des plans perpendiculaires au plan P.

349. Remarques. — 1° *Toutefois deux figures de l'espace symétriques l'une de l'autre par rapport à un point ou par rapport à un plan ne sont pas superposables par éléments homologues.*

Ainsi le symétrique, par rapport à O, du tétraèdre OABM (fig. 301) est le tétraèdre OA'B'M'. Si nous amenons, par glissement dans son plan P, le triangle OA'B' sur son égal OAB, les points M et M' restent de part et d'autre du plan P et ne viennent pas coïncider. (M' vient en M'', symétrique du point M par rapport au plan P).

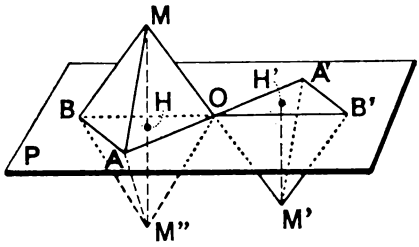


Fig. 301.

2° *Par définition, deux figures* F *et* F_1 *de l'espace sont dites symétriques si la figure* F_1 *est égale à une figure* F' *symétrique de la figure* F *soit par rapport à un point, soit par rapport à un plan.*

On démontre que toutes les figures symétriques d'une figure donnée sont superposables. Ainsi les symétriques d'une main droite sont des mains gauches identiques.

Autrement dit, si on fait abstraction de la position de la figure transformée, pour n'envisager que sa forme, les symétries par rapport aux différents points et aux différents plans de l'espace sont équivalentes.

AXE, CENTRE OU PLAN DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

350. Définition. — ***Lorsqu'une figure donnée coïncide avec elle-même, après symétrie par rapport à une droite, un point ou un plan donnés, on dit qu'elle admet cette droite pour axe de symétrie, ce point pour centre de symétrie ou ce plan pour plan de symétrie.***

1° L'axe d'un cercle est un axe de symétrie de ce cercle. La bissectrice d'un rectiligne d'un dièdre est un axe de symétrie de ce dièdre. Certains objets : roue, hélice à deux pales, foret américain, ciseaux à broder, cruche à deux anses, etc... possèdent un axe de symétrie. On peut les faire pivoter d'un demi-tour autour de cet axe et les ramener à coïncider avec leur position initiale.

2° La sphère, le parallélépipède oblique, le cube admettent un centre de symétrie.

3° Le bissecteur d'un dièdre est un plan de symétrie de ce dièdre. Beaucoup d'objets usuels admettent un plan de symétrie : pelle, fourchette, chaise, commode, lit, carrosserie de voiture, brouette... Leur aspect ne change pas lorsqu'on les regarde dans un miroir plan.

4° Beaucoup d'objets rectangulaires : flacon, table, possèdent un axe de symétrie, à l'intersection de deux plans de symétrie, rectangulaires. Certaines gommes biseautées admettent (à l'état neuf) un centre de symétrie à l'intersection d'un axe et d'un plan de symétrie perpendiculaires.

EXERCICES

377. 1° Trouver le lieu des points intérieurs équidistants des trois faces d'un trièdre.

2° En déduire que les bissecteurs intérieurs d'un trièdre passent par une même droite également inclinée sur les faces du trièdre.

378. 1° Trouver le lieu des points équidistants des arêtes d'un trièdre.

2° En déduire que les plans menés perpendiculairement à chacune des faces d'un trièdre suivant sa bissectrice intérieure passent par une même droite également inclinée sur les arêtes du trièdre.

3° Démontrer que les bissectrices extérieures des faces du trièdre sont dans un même plan également incliné sur les trois arêtes.

379. 1° Montrer qu'il existe toujours un point O et un seul équidistant des quatre sommets du tétraèdre ABCD.

2° Le triangle ABC est rectangle en A et l'arête BD est perpendiculaire à la face ABC. Déterminer la position du point O.

380. 1° Trouver le lieu des points équidistants de trois droites d'un même plan AB, BC et CA.

2° En déduire la construction d'un point équidistant de ces trois droites et d'une quatrième droite Δ coupant BC en D.

381. 1° Trouver le lieu des points équidistants de trois droites non situées dans un même plan DA, AB et BC.

2° Trouver les points équidistants des quatre côtés du quadrilatère gauche ABCD.

382. 1° Montrer qu'il existe toujours un point intérieur I, équidistant des quatre faces du tétraèdre ABCD.

2° Établir l'existence d'un point extérieur J, intérieur au trièdre ABCD, possédant la même propriété et de trois autres points analogues. A-t-on obtenu ainsi la totalité des points équidistants des quatre faces du tétraèdre?

383. 1° Démontrer que les symétriques M_1 et M_2 d'un même point M par rapport à un plan P et par rapport à un point O de ce plan sont symétriques par rapport à la droite Δ perpendiculaire en O au plan P.

2° En déduire que les figures F_1 et F_2 symétriques d'une même figure F par rapport à un plan P et par rapport à un point O de ce plan sont superposables.

384. 1° Démontrer que si une figure F admet deux plans de symétrie rectangulaires elle admet leur intersection pour axe de symétrie.

2° Si la figure F admet trois plans de symétrie perpendiculaires deux à deux elle admet trois axes de symétrie et un centre de symétrie.

3° Si une figure admet deux axes de symétrie rectangulaires, elle en admet un troisième perpendiculaire aux deux premiers à leur intersection.

385. On considère un trièdre SABC. Soient SB' et SC' les projections de SB sur la face ASC et de SC sur la face ASB. Les plans BSB' et CSC' se coupent suivant la droite SH. On prend les symétriques du plan B'SC' par rapport aux plans BSH et CSH. Ces deux plans se coupent suivant SA'.

1° Montrer que les plans A'SB' et A'SC' sont les symétriques du plan B'SC' par rapport aux plans ASC et ASB.

2° Montrer que tout point de l'une des quatre droites SA, SB, SC ou SH est équidistant des trois faces du trièdre SA'B'C'. Conséquence pour les plans ASH et BSC.

3° En déduire que SA' est la projection de SA sur le plan SBC et que les trois plans menés par chaque arête du trièdre perpendiculaire à la face opposée (plans hauteurs) concourent suivant une même droite.

386. On considère un trétraèdre ABCD dans lequel AB = CD, AC = BD et AD = BC. Soient M, N, P, Q, R et S les milieux de AB, CD, AC, BD, AD et BC.

1° Montrer que MN est perpendiculaire à AB et à CD.

2° Montrer que les trois segments MN, PQ et RS se coupent en un même point O, milieu de chacun d'eux et qu'ils sont deux à deux perpendiculaires.

3° Prouver que le tétraèdre admet trois axes de symétrie et que le point O est équidistant des quatre sommets ainsi que des quatre faces.

387. On porte sur les arêtes d'un trièdre de sommet S des longueurs égales SA, SB et SC. Soient M, N et P les milieux de BC, CA et AB.

1° Montrer que les trois plans SAM, SBN et SCP passent par une même droite.

2° En déduire une propriété des plans menés par chaque arête d'un trièdre et la bissectrice intérieure de la face opposée.

3° Démontrer que les trois bissectrices extérieures des faces du trièdre, sont dans un même plan également incliné sur les arêtes du trièdre.

388. On considère un trièdre $Sxyz$, et on prend un point quelconque A de l'arête Sx et les points B et C sur Sy et Sz tels que AB et AC soient respectivement orthogonaux à Sz et Sy.

1° Montrer que la projection H du sommet S sur le plan ABC est l'orthocentre du triangle ABC.

2° En déduire que dans un trièdre, les trois plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée passent par une même droite.

3° Démontrer que les droites menées par le sommet S dans chacune des faces perpendiculairement à l'arête opposée sont dans un même plan.

389. Étant données deux droites parallèles D et E, une perpendiculaire à ces deux droites coupe D en I et E en H. Soit IZ une demi-droite perpendiculaire à D en I telle que $\widehat{HIZ} = 45°$. D'un point M de E on abaisse la perpendiculaire sur IZ.

1° Montrer que le pied K de cette perpendiculaire ne dépend pas de la position de M sur E.

2° Soit P le plan perpendiculaire à IH en I. Lieu du point N d'intersection de P et de MK quand M décrit E. Montrer que K est le milieu de MN.

3° Soient A et B deux points de D symétriques par rapport à I tels que IA = IB = l. Montrer qu'il existe sur la droite IK un point O équidistant des points M, N, A et B.

390. On considère un tétraèdre régulier SABC dont les six arêtes SA, SB, SC, BC, CA, AB ont des longueurs égales. On désigne par a leur longueur commune, par A', B', C' les milieux de SA, SB, SC respectivement par A", B", C" les milieux de BC, CA, AB respectivement.

1° Montrer que A'B et A'C sont perpendiculaires à SA, que A'A" est perpendiculaire aux arêtes SA et BC, que SA et BC sont perpendiculaires entre elles. Que peut-on dire des arêtes SB et AC, des arêtes SC et AB?

2° Trouver une droite (D) telle que la symétrie par rapport à (D) transforme S en A et B en C; une telle droite est un axe de symétrie du tétraèdre SABC : pourquoi? Le tétraèdre SABC possède-t-il d'autres axes de symétrie? Montrer que la figure A'C'A"C" est un carré : que les trois droites A'A", B'B", C'C" ont un point commun I et sont deux à deux perpendiculaires. Le point I est-il un centre de symétrie du tétraèdre SABC?

VECTEURS

351. Éléments orientés. — L'utilisation d'éléments orientés en Géométrie permet de donner à certains théorèmes une forme plus précise et plus générale.

Un axe est une droite orientée. — C'est une droite (fig. 302) sur laquelle on a fixé un sens de parcours indiqué par une flèche et appelé *sens de l'axe.*

A toute droite $x'x$ correspondent deux axes $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{xx'}$ de sens opposés.

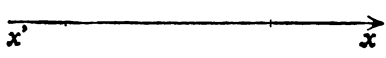


Fig. 302.



Fig. 303.

Un vecteur est un segment de droite orienté. — Le symbole $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur d'origine A et d'extrémité B (fig. 303). La droite AB est le *support* du vecteur et la longueur AB est son *module.* Le sens de parcours de A vers B est le *sens* du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Un segment AB définit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

Un vecteur $\vec{V}$ est nul lorsque son module est nul. — On écrit : $\vec{V} = 0$.

L'unité de longueur étant choisie, on appelle *vecteur unitaire* tout vecteur de module 1. Tout vecteur unitaire $\vec{i}$ porté par un axe $x'x$ (fig. 304) et de même sens que lui est dit *vecteur unitaire de l'axe x'x.*



Fig. 304.

Deux vecteurs dont les supports sont parallèles (ou confondus) sont dits parallèles ou de même direction. Ces deux vecteurs peuvent être de même sens (fig. 307) ou de sens contraires (fig. 308).

Deux ou plusieurs vecteurs de même support sont dits *colinéaires,* tandis que des vecteurs situés dans un même plan sont dits *coplanaires.*

352. Vecteurs égaux (ou équipollents). — ***Deux vecteurs égaux sont deux vecteurs de même direction, de même sens et de même module.***

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux (fig. 305 et 306) on écrit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ n'ont pas même support (fig. 305), le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, le quadrilatère ABDC est un parallélogramme et : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

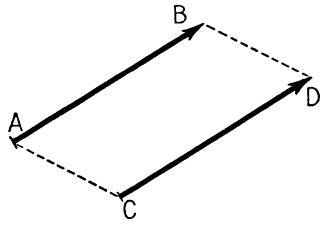


Fig. 305.

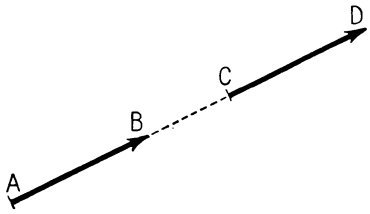


Fig. 306.

Ces propriétés subsistent si les vecteurs ont même support (fig. 306) car les figures ABCD et DCBA sont superposables. Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

De même : $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}.$$

Dans l'égalité de deux vecteurs on peut échanger les lettres moyennes ou les lettres extrêmes.

Si deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont égaux à un troisième $\overrightarrow{V_3}$, les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ ont même direction (n° 256), même sens, et même module, celui de $\overrightarrow{V_3}$. Donc :

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_3} \text{ et } \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3} \Longrightarrow \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2};$$

Soit : *Deux vecteurs égaux à un troisième sont égaux.*

PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE

353. Rapport de deux vecteurs parallèles. — ***Le rapport de deux vecteurs de même direction est le nombre relatif qui a pour valeur absolue le rapport des modules des deux vecteurs et dont le signe est + ou — suivant que ces deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.***

Ainsi (fig. 307) : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = +\dfrac{3}{5}$ et (fig. 308) : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\dfrac{2}{3}$.

354. Produit d'un vecteur par un nombre. — ***Lorsque deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ont pour rapport le nombre relatif k le vecteur $\vec{V}_1$ est par définition le produit du vecteur $\vec{V}_2$ par le nombre k.***

Soit : $$\frac{\vec{V}_1}{\vec{V}_2} = k \Longleftrightarrow \vec{V}_1 = k\,\vec{V}_2.$$

Ces égalités impliquent que $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ont même direction.

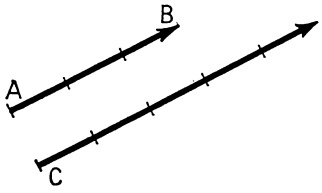


Fig. 307.

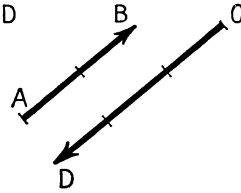


Fig. 308.

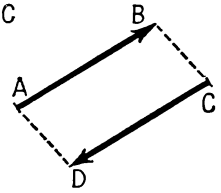


Fig. 309.

Deux vecteurs égaux (ou équipollents) ont pour rapport + 1.
Deux vecteurs dont le rapport est — 1 sont dits opposés.
Ils ont même direction, même module et des sens opposés.

Ainsi (fig. 309) : $$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -1 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}.$$

En particulier : $$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

355. Mesure algébrique d'un vecteur. — ***On appelle mesure algébrique d'un vecteur sur un axe parallèle (ou de même support) le rapport de ce vecteur et du vecteur unitaire de l'axe.***

La mesure algébrique $\overline{AB}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe $x'x$ de vecteur unitaire $\vec{i}$ est donc (fig. 310) : $$\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}.$$

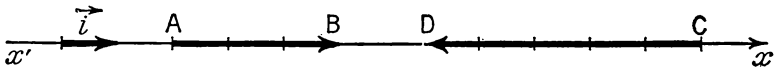


Fig. 310.

356. Théorème. — ***Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs mesures algébriques sur tout axe de même direction.***

La démonstration est identique à celle que nous avons déjà donnée (n° 218) :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}},$$

Il en résulte que la valeur du rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ est indépendante du sens de l'axe $x'x$ et que :

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overline{AB} = k\,\overline{CD}.$$

Ou encore :

Si on multiplie un vecteur par un nombre, sa mesure algébrique sur tout axe parallèle est multipliée par ce nombre.

En particulier : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \Longleftrightarrow \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

357. Construction du produit d'un vecteur par un nombre.

Soit à construire le produit $k\,\overrightarrow{AB}$ (fig. 311 et 312). O désignant un point quelconque hors de la droite AB, construisons les points A′ et B′ tels que : $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}$ puis achevons le parallélogramme B′A′AC.

Nous avons : $\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

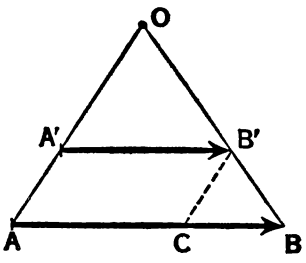


Fig. 311.

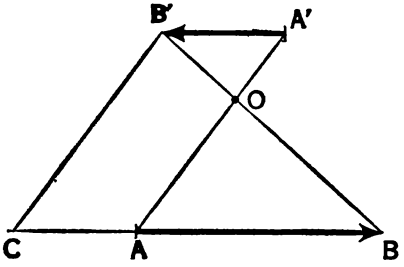


Fig. 312.

Or, d'après le théorème de Thalès (n° 235) : $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k.$

Donc : $\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = k \Longleftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}.$

REMARQUE. — Si O est choisi sur le support $x'x$ de AB (fig. 313) :

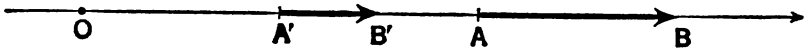


Fig. 313.

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = k\,\overline{OB} - k\,\overline{OA} = k\,(\overline{OB} - \overline{OA}) = k\,\overline{AB}.$$

Et $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Ainsi :

Le produit $k\,\overrightarrow{AB}$ ***est le vecteur*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***tel que,*** O ***désignant un point arbitraire :*** $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$ ***et*** $\overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB}$.

Le point O peut en particulier coïncider avec l'un des points A ou B.

SOMMES VECTORIELLES

358. Somme de deux vecteurs. — Soient deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ (fig. 314). A partir d'un point O donné, construisons $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1}$ puis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_2}$. Par définition :

Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ ***est la somme géométrique des vecteurs*** $\overrightarrow{V_1}$ ***et*** $\overrightarrow{V_2}$.

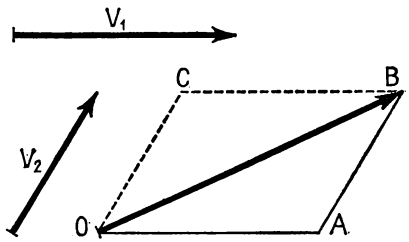


Fig. 314.

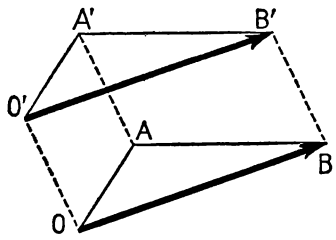


Fig. 315.

On écrit : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$.

Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ *est indépendant du point* O. En prenant une autre origine O' (fig. 315), on est amené à construire $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA}$ puis $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, ce qui entraîne (n° 352) : $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$ donc : $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{OB}$.

La somme de deux vecteurs est indépendante de leur ordre. En effet (fig. 314) construisons $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{V_2}$; on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ donc (n° 352) : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1}$

d'où : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}$.

En particulier la somme $\overrightarrow{OM}$ de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ s'obtient en achevant le parallélogramme AOBM (fig. 319).

359. Différence de deux vecteurs. — Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qu'il faut ajouter au vecteur $\overrightarrow{OA}$ pour obtenir $\overrightarrow{OB}$ est par définition la différence des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$. Autrement dit :

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}.$$

Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc la différence des vecteurs obtenus en joignant successivement un point donné O à son extrémité puis à son origine.

Pour construire la différence $\overrightarrow{AB}$ de deux vecteurs donnés $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_1}$ on peut donc construire $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{V_2}$ puis $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1}$. Mais l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ montre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{V_2} + (-\overrightarrow{V_1})$. D'où la règle :

Pour retrancher un vecteur il suffit d'ajouter le vecteur opposé.

360. Somme de plusieurs vecteurs. — La somme de plusieurs vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2} \ldots \overrightarrow{V_n}$ rangés dans cet ordre est, par définition, le vecteur $\overrightarrow{W}$ que l'on obtient en faisant la somme $\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ des deux premiers, puis en ajoutant $\overrightarrow{V_3}$ au vecteur obtenu et ainsi de suite jusqu'à épuisement des vecteurs.

La somme de deux vecteurs étant indépendante de l'origine utilisée, il en est de même du vecteur final obtenu.

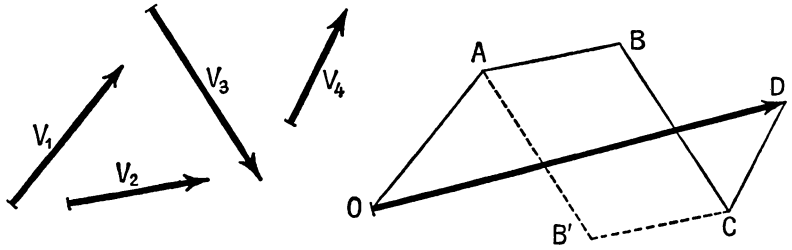


Fig. 316.

Ainsi (fig. 316) en construisant $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{V_4}$ on obtient :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}, \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$$

et

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{V_4} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_4} = \overrightarrow{W}.$$

Il n'est pas nécessaire de tracer OB et OC et on a toujours quelle que soit la disposition des points O, A, B, C et D :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

361. Propriétés des sommes de vecteurs.

1° ***L'addition des vecteurs est commutative.*** — Construisons $\overrightarrow{AB'} = \vec{V}_3$ (fig. 316). L'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB'}$ entraîne $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB} = \vec{V}_2$ et l'égalité

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CD}$$

montre que

$$\overrightarrow{OD} = \vec{V}_1 + \vec{V}_3 + \vec{V}_2 + \vec{V}_4.$$

On peut donc, dans une somme de plusieurs vecteurs, échanger deux vecteurs consécutifs. En répétant cette opération il est possible de ranger les vecteurs dans un ordre donné quelconque. L'addition des vecteurs est une opération *commutative.*

$$\boxed{\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = \vec{V}_3 + \vec{V}_2 + \vec{V}_4 + \vec{V}_1}.$$

En particulier la somme $\overrightarrow{OM}$ de trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ s'obtient en achevant les parallélogrammes AOBD puis CODM. En effet (fig. 320) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

2° ***L'addition des vecteurs est associative.***

C'est-à-dire qu'on peut dans une somme de vecteurs remplacer plusieurs d'entre eux par leur somme :

La propriété est évidente pour des vecteurs consécutifs. Ainsi (fig. 316) :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) + \vec{V}_4$$

ou :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4).$$

Elle est également vraie pour tout groupe de vecteurs car d'après la propriété de commutativité :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1 + \vec{V}_3 + \vec{V}_5 + \vec{V}_4$$
$$= \vec{V}_2 + (\vec{V}_1 + \vec{V}_3 + \vec{V}_5) + \vec{V}_4.$$

L'addition des vecteurs est une opération *associative.*

3° ***Lorsqu'on multiplie plusieurs vecteurs par un même nombre relatif k, leur somme est multipliée par ce nombre.***

Soit : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
$= \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$

une somme de vecteurs (fig. 317).

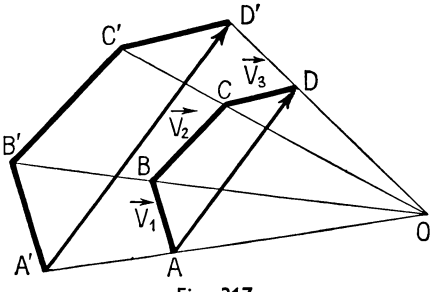


Fig. 317.

Construisons les points A′, B′, C′, D′ tels que :

$$\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'} = k\,\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC'} = k\,\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD'} = k\,\overrightarrow{OD}.$$

D'après le n° 357 : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB} = k\,\vec{V}_1$.

De même : $\overrightarrow{B'C'} = k\,\vec{V}_2$ et $\overrightarrow{C'D'} = k\,\vec{V}_3$.

Donc : $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} = k\,\vec{V}_1 + k\,\vec{V}_2 + k\,\vec{V}_3$.

Or : $\overrightarrow{A'D'} = k\,\overrightarrow{AD}$ (n° 357).

Donc : $k\,\vec{V}_1 + k\,\vec{V}_2 + k\,\vec{V}_3 = k\,(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3)$.

On dit encore que la multiplication d'un vecteur par un nombre est *distributive* par rapport à l'addition des vecteurs.

4° ***Pour multiplier un vecteur par une somme algébrique on peut multiplier ce vecteur par chacun des termes de la somme et additionner les vecteurs obtenus.***

Soit v la mesure algébrique d'un vecteur $\vec{V}$ sur l'axe $x'x$ (fig. 318). Construisons sur cet axe les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{V}$, $\overrightarrow{AB} = \beta\vec{V}$ et $\overrightarrow{BC} = \gamma\vec{V}$. On obtient (1) :

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V} + \gamma\vec{V}.$$

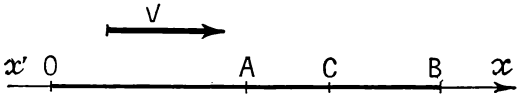


Fig. 318.

Or (n° 356) : $\overline{OA} = \alpha v$, $\overline{AB} = \beta v$ et $\overline{BC} = \gamma v$,

donc : $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} = \alpha v + \beta v + \gamma v = (\alpha + \beta + \gamma)\,v$.

Cette égalité montre que $\overrightarrow{OC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\vec{V}$, soit d'après (1) :

$$\boxed{(\alpha + \beta + \gamma)\,\vec{V} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V} + \gamma\vec{V}}.$$

On dit encore que la multiplication d'un vecteur par un nombre est *distributive* par rapport à l'addition des nombres relatifs.

362. Décomposition d'un vecteur. — 1° Soit dans un plan un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et deux directions distinctes Ox et Oy (fig. 319). Les parallèles menées par M à Oy et Ox coupent Ox en A et Oy en B. On a (n° 358) : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est décomposé suivant les deux directions Ox et Oy.

2° Soit de même dans l'espace un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et trois directions non coplanaires Ox, Oy et Oz (fig. 320). Les plans issus de M et parallèles aux trois plans yOz, zOx et xOy, coupent respectivement Ox, Oy et Oz en A, B et C tels que (n° 360) :

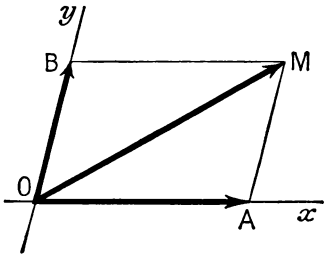


Fig. 319.

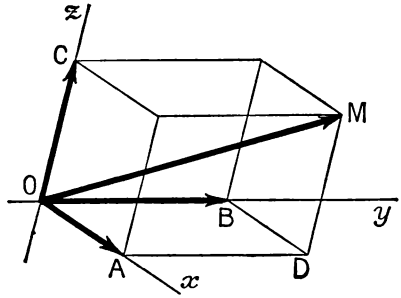


Fig. 320.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est décomposé suivant les trois directions Ox, Oy et Oz. La décomposition ainsi obtenue est unique. *Les trois vecteurs* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ *sont les composantes vectorielles du vecteur* $\overrightarrow{OM}$, *suivant les trois directions* Ox, Oy *et* Oz.

EXERCICES

391. On désigne par M, N, P, Q les milieux des segments AC, BD, AD et BC. Démontrer que, quels que soient A, B, C et D, on a :

1° $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{MN}$; 2° $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ}$.

392. Soient trois points A, B, C d'un axe $x'x$. Démontrer, en prenant pour origine O la projection sur $x'x$ d'un point M quelconque que l'on a :

1° $\overrightarrow{MA}\cdot\overline{BC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overline{CA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overline{AB} = 0$;

2° $\overrightarrow{MA}^2\cdot\overline{BC} + \overrightarrow{MB}^2\cdot\overline{CA} + \overrightarrow{MC}^2\cdot\overline{AB} + \overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB} = 0$.

393. 1° Étant donnés trois points A, B, C d'un axe $x'x$ montrer qu'il existe sur cet axe un point unique I tel que : $\overline{IA}^3 + \overline{IB}^3 + \overline{IC}^3 - 3\,\overline{IA}\,.\,\overline{IB}\,.\,\overline{IC} = 0$.

2° Démontrer que pour tout point M de l'axe on a alors :

a) $\overrightarrow{MA}^3 + \overrightarrow{MB}^3 + \overrightarrow{MC}^3 - 3\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{MI}\cdot[\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2]$;

b) $\overrightarrow{MA}^3\cdot\overline{BC} + \overrightarrow{MB}^3\cdot\overline{CA} + \overrightarrow{MC}^3\cdot\overline{AB} + 3\,\overrightarrow{MI}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA} = 0$.

394. Étant donné dans le plan trois longueurs a, b, c, le point O et la direction OA, construire trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ tels que la somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ soit nulle et que $\frac{OA}{a} = \frac{OB}{b} = \frac{OC}{c}$.

395. Décomposer dans un plan un vecteur donné $\overrightarrow{OM}$ en deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de modules respectifs a et b, portés par les droites Ox et Oy quand on donne :

1° Ox et b; 3° $\widehat{xOy} = \alpha$ et a; 5° $\widehat{xOy} = \alpha$ et b;
2° a et b; 4° $\widehat{xOy} = 90°$ et $a + b$; 6° $\widehat{xOy} = 90°$ et ab.

396. Décomposer dans l'espace un vecteur donné $\overrightarrow{OM}$ en trois vecteurs non coplanaires, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ de modules respectifs a, b, c portés par les droites Ox, Oy, Oz quand on donne :

1° $\overrightarrow{OC}$, Ox et $\widehat{xOy} = \alpha$; 3° Ox, Oy, $\frac{a}{b}$ et c;
2° $\overrightarrow{OC}$, Ox et b; 4° Ox, Oy, $a + b$ et c.

397. On considère un tétraèdre OABC et on construit les vecteurs $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1° Montrer que la droite OS coupe le plan ABC en un point G, centre de gravité de chacun des triangles ABC et OCD.

2° Démontrer que : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OS}$ et en déduire que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

398 Soient deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ tels que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$. Les droites AC et BD se coupent en I :

1° Démontrer que $\overrightarrow{IA} = k\,\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IB} = k\,\overrightarrow{ID}$;
2° Évaluer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction de k, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

399. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC, par A' le milieu de BC et par M un point quelconque de l'espace :

1° Démontrer que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.
2° En déduire la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

400. Soient G et G' les centres de gravité respectifs des triangles ABC et A'B'C' :

1° Démontrer (ex. 399) que $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$;

2° En déduire une condition pour que les deux triangles ABC et A'B'C' aient même centre de gravité, et montrer qu'il existe alors un point D tel que BA'CD et B'AC'D soient deux parallélogrammes.

401. Dans un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O, on désigne par G le centre de gravité, par H l'orthocentre, par M le milieu de BC et par D le point diamétralement opposé à A sur le cercle ABC :

1° Nature du quadrilatère BHCD ? Comparer les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{MO}$;

2° Démontrer que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$;

3° De la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ déduire que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ et préciser la position de G par rapport à O et H.

402. Soient A', B', C' les pieds des médianes du triangle ABC et G le centre de gravité. A partir d'un point quelconque M on construit $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$:

1° Démontrer que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MG}$.

2° Montrer que si M est au centre O du cercle ABC, le point P est en H orthocentre du triangle ABC. Établir les relations :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'} \text{ et } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

3° En prenant P en O montrer que le point ω tel que $\overrightarrow{\omega O} = \overrightarrow{\omega A} + \overrightarrow{\omega B} + \overrightarrow{\omega C}$ est le milieu de $\overrightarrow{OH}$ et que $\overrightarrow{\omega A} + \overrightarrow{\omega B} + \overrightarrow{\omega C} + \overrightarrow{\omega H} = 0$.

PROJECTION D'UN VECTEUR

363. Projection d'un vecteur sur un plan. — Rappelons (n° 328) que la projection effectuée parallèlement à une direction donnée Δ, d'un point quelconque A de l'espace sur un plan de projection P, s'obtient en prenant l'intersection A′ du plan P et de la parallèle à Δ menée par A.

Lorsqu'un point décrit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ (fig. 321) sa projection décrit le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ défini par les projections de A et de B. Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est la projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le plan ABB′A′ est le plan projetant du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

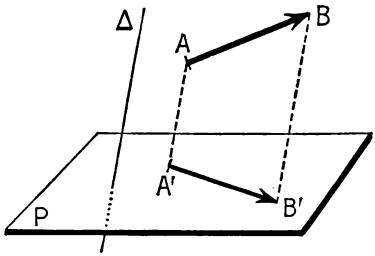


Fig. 321.

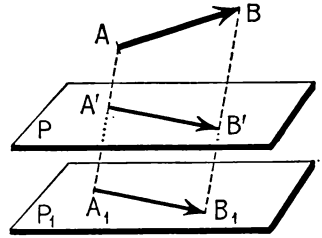


Fig. 322.

Les projections d'un vecteur, effectuées parallèlement à une même direction, sur deux plans parallèles, sont des vecteurs égaux.

En effet (fig. 322) si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se projette en $\overrightarrow{A'B'}$ sur le plan P et en $\overrightarrow{A_1B_1}$ sur le plan parallèle P_1, le quadrilatère $A'B'B_1A_1$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

364. Théorème. — ***Les projections, sur un même plan, de deux vecteurs égaux, sont deux vecteurs égaux.***

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs égaux non parallèles à Δ (fig. 323). Les droites AB et CD étant parallèles ainsi que les projetantes AA′ et CC′, il en est de même des plans projetants ABB′A′ et CDD′C′ et par suite de A′B′ et C′D′. Et puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ on voit de même que A′C′ et B′D′ sont parallèles. Il en résulte que

la projection du parallélogramme ABDC est en général un parallélogramme A'B'D'C'. Donc $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Si les plans projetants ABB'A' et CDD'C' sont confondus, il suffit de projeter un vecteur auxiliaire $\overrightarrow{EF}$ égal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Les égalités $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{E'F'}$ et $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{E'F'}$ entraînent $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

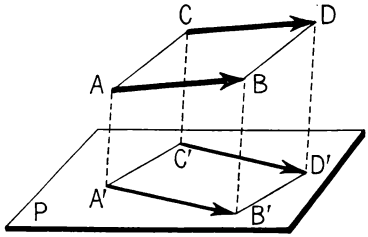


Fig. 323.

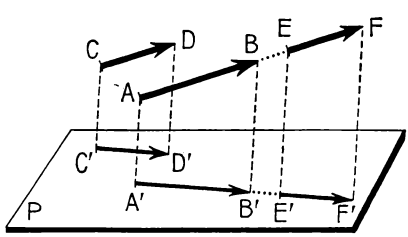


Fig. 324.

365. Corollaire. — ***Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs projections sur un même plan.***

Soient $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ les projections des vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (fig. 324). Construisons sur la droite $\overrightarrow{AB}$ un vecteur $\overrightarrow{EF}$ égal à $\overrightarrow{CD}$. On a $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{C'D'}$ et d'après le théorème de Thalès dans le plan AA'F'F :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{E'F'}} \Longleftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{E'F'}} \Longleftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}.$$

366. Projection d'un vecteur sur une droite. — 1° Considérons, dans l'espace, une droite fixe $x'x$ et un plan fixe sécant P (fig. 325). Le plan Q, parallèle à P mené par un point quelconque A de l'espace coupe $x'x$ en A' :

Le point A' ***est la projection, effectuée parallèlement au plan*** P ***du point*** A ***sur la droite*** $x'x$.

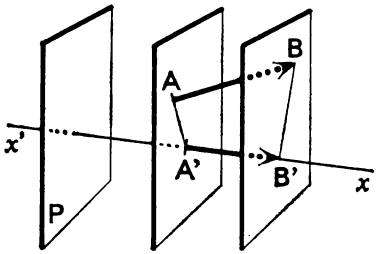


Fig. 325.

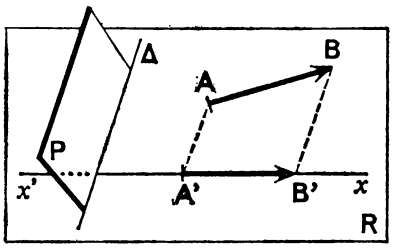


Fig. 326.

2° Considérons de même, dans le plan, une droite fixe $x'x$ et une direction sécante Δ (fig. 326). La parallèle à Δ menée par un point quelconque A du plan coupe $x'x$ en A'.

***Le point* A′ *est la projection, effectuée parallèlement à* Δ, *du point* A *sur la droite* $x'x$.**

Soit P un plan fixe quelconque issu de Δ et distinct du plan de référence R (plan $x'x$, Δ). On peut toujours considérer cette seconde projection, comme la projection dans l'espace effectuée sur $x'x$ parallèlement au plan P. Les propriétés de la première projection s'étendent donc à la seconde.

Dans les deux cas, la projection d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite $x'x$ est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ défini par les projections A′ et B′ de A et B.

Si le plan P est perpendiculaire à $x'x$ la projection est dite orthogonale à la droite $x'x$. Sinon elle est dite oblique. Quand aucune indication n'est donnée, c'est de la projection orthogonale qu'il s'agit.

367. Théorème. — ***Les projections d'un vecteur sur deux droites parallèles sont deux vecteurs égaux.***

Les projections $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A_1B_1}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ effectuées parallèlement au même plan P sur deux droites parallèles $x'x$ et $y'y$ sont égales comme portions de parallèles comprises entre deux plans parallèles (fig. 327).

368. Théorème. — ***Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs projections sur une même droite.***

Soient deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et leurs projections $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sur la droite $x'x$ (fig. 328). Désignons par P, Q, R et S les plans projetants de A,

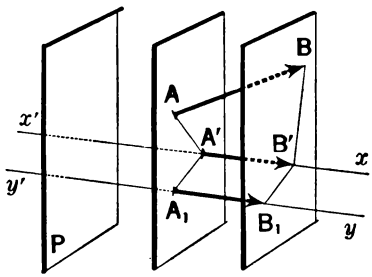


Fig. 327.

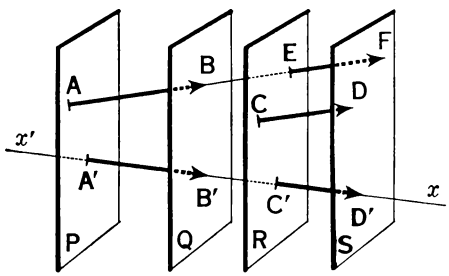


Fig. 328.

B, C et D. Les plans R et S découpent sur la droite AB un vecteur $\overrightarrow{EF}$ égal à $\overrightarrow{CD}$. Le théorème de Thalès dans l'espace donne sur les droites AB et $x'x$:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}} \quad \text{soit} \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}.$$

369. Corollaire. — ***Les projections sur une même droite de deux vecteurs égaux sont deux vecteurs égaux.***

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ la relation précédente donne : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

370. Projection du produit d'un vecteur par un nombre.

Lorsqu'on multiplie un vecteur $\vec{V}$ par un nombre k, sa projection $\vec{V}'$ sur un plan ou sur une droite, est multipliée par k.

Construisons les vecteurs $\overrightarrow{CD} = \vec{V}$, et $\overrightarrow{AB} = k\vec{V} = k\overrightarrow{CD}$ puis projetons les deux vecteurs sur un plan ou sur une droite. On a (n° 365 ou 368) :

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = k. \quad \text{Donc : } \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'} = k\vec{V}'.$$

371. Projection d'une somme vectorielle. — ***La projection sur un plan ou sur une droite de la somme de plusieurs vecteurs est égale à la somme des projections de chacun de ces vecteurs.***

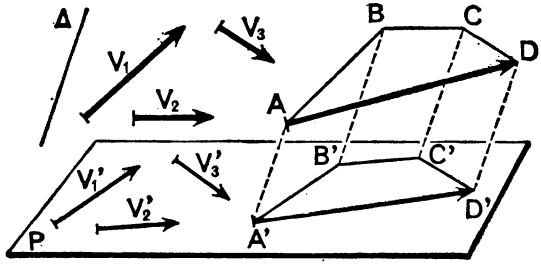


Fig. 329.

Considérons les vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$, ainsi que leurs projections sur un plan P (ou sur une droite $x'x$) : $\vec{V}_1'$, $\vec{V}_2'$ et $\vec{V}_3'$ (fig. 329). Construisons $\overrightarrow{AB} = \vec{V}_1$, $\overrightarrow{BC} = \vec{V}_2$, $\overrightarrow{CD} = \vec{V}_3$ et leurs projections $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$.

On obtient d'après le n° 364 (ou 369) :

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{V}_1', \quad \overrightarrow{B'C'} = \vec{V}_2' \quad \text{et} \quad \overrightarrow{C'D'} = \vec{V}_3'.$$

Or : $$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

et : $$\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} = \vec{V}_1' + \vec{V}_2' + \vec{V}_3'.$$

Donc la projection $\overrightarrow{A'D'}$ de la somme $\overrightarrow{AD}$ des vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est égale à la somme des projections $\vec{V}_1'$, $\vec{V}_2'$ et $\vec{V}_3'$ de ces vecteurs.

372. Projection sur un axe. — Si la droite $x'x$, sur laquelle on effectue les projections des vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, est orientée on a (n° 356) :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}. \quad \text{Donc : } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overline{A'B'} = k\overline{C'D'}.$$

Lorsqu'on multiplie un vecteur par un nombre, la mesure algébrique de sa projection sur un axe est multipliée par ce nombre.

De même dans la projection d'une somme vectorielle, l'égalité :

$$\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} \Longrightarrow \overline{A'D'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}.$$

La mesure algébrique de la projection sur un axe de la somme de plusieurs vecteurs est égale à la somme des mesures algébriques des projections sur cet axe de chacun de ces vecteurs.

Il en résulte que toute relation linéaire entre plusieurs vecteurs telle que :

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{CD} + n\overrightarrow{EF} + p\overrightarrow{GH}$$

entraîne :

$$\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{C'D'} + n\overrightarrow{E'F'} + p\overrightarrow{G'H'}.$$

On a donc la relation analogue entre les mesures algébriques des projections de ces vecteurs sur un même axe.

TRANSLATION

373. Définition de la translation. — Étant donné un vecteur fixe $\overrightarrow{TT'}$ appelé vecteur de la translation, faisons correspondre à tout point M de l'espace le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{TT'}$ (fig. 330). Par définition :

Le point M' ***est l'homologue du point*** M ***dans la translation de vecteur*** $\overrightarrow{TT'}$.

Si on construit ainsi (fig. 330), l'homologue de chaque point d'une figure F, on obtient une figure F', transformée de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{TT'}$.

Inversement la figure F se déduit de F' dans la translation de vecteur opposé

$$\overrightarrow{T'T} = -\overrightarrow{TT'}.$$

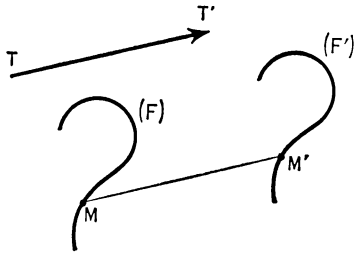


Fig. 330.

374. Transformée d'une droite. — Considérons la droite (D) et la translation de vecteur $\overrightarrow{TT'}$ non parallèle à (D) (fig. 331).

Le point fixe A et le point variable M de la droite (D) ont respectivement pour transformés les points A′ et M′ tels que :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{TT'}\ ;\ \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{TT'}\ (A' \text{ fixe};\ M' \text{ variable})$$

donc (n° 352) : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$. La figure AMM′A′ est un parallélogramme et lorsque M décrit la droite (D), le point M′ décrit la droite (D′) passant par A′ et parallèle à (D).

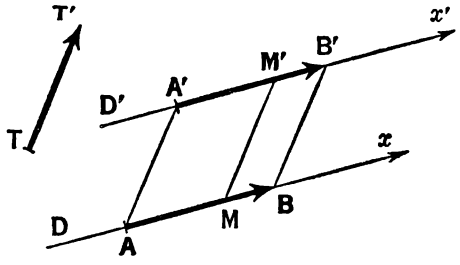


Fig. 331.

Si le vecteur $\overrightarrow{TT'}$ est parallèle à (D), le point M′ décrit la droite (D). Ainsi :

La figure transformée d'une droite par translation est une droite de même direction.

375. Corollaires. — 1° *La figure transformée d'une demi-droite est une demi-droite parallèle et de même sens.*

2° *La figure transformée d'un vecteur est un vecteur égal.*

3° *La figure transformée d'un angle est un angle égal à côtés parallèles et de même sens.*

En effet, si M décrit la demi-droite Ax (fig. 331), le point M′ décrit la demi-droite A′x′ parallèle et de même sens. Si M décrit le segment AB, le point M′ décrit le segment A′B′ tel que :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

Les côtés de l'angle xAy ont pour transformés les demi-droites A′x′ et A′y′ parallèles aux premières et de même sens. L'angle x′A′y′ est égal à l'angle xAy (n° 257).

376. Transformée d'un plan (fig. 332).

Soit le plan P et la translation de vecteur $\overrightarrow{TT'}$. Au point fixe A du plan P correspond le point fixe A′ tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{TT'}$. Lorsqu'une droite A$x$ engendre le plan P en tournant autour de A, sa transformée A′x′ parallèle à Ax engendre le plan P′ passant par A′ et parallèle au plan P (n° 274).

Si le vecteur $\overrightarrow{TT'}$ est parallèle au plan P, les plans P et P′ sont confondus.

La figure transformée d'un plan par translation est un plan de même direction.

Il en résulte que la figure transformée d'un demi-plan est un demi-plan parallèle au premier, que la figure transformée d'un dièdre est un dièdre égal.

377. Transformée d'un cercle.

Soit un cercle C de centre O, de rayon R appartenant au plan P et la translation de vecteur $\overrightarrow{TT'}$ sécant ou parallèle à P (fig. 333). Le centre O et un point quelconque M du cercle ont pour transformés les points O' et M' tels que :

$$\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MM'} \Longrightarrow \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM}.$$

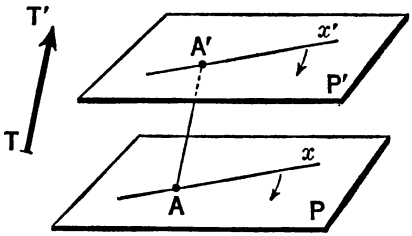


Fig. 332.

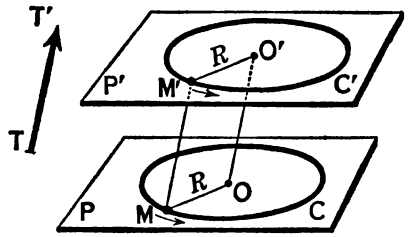


Fig. 333.

Le point M' appartient au plan P' passant par O' et parallèle au plan P (ou confondu avec P si $\overrightarrow{TT'}$ est parallèle à P). Dans ce plan O'M' = OM = R. Lorsque le segment OM tourne de 360° dans le plan P, le segment parallèle O'M' tourne de 360° dans le plan P' et le point M' décrit le cercle du plan P', de centre O', de rayon R :

Le transformé d'un cercle par translation est un cercle égal au premier dont le plan a même direction que le plan du cercle donné et dont le centre est le transformé du centre de ce cercle.

Si le point M décrit un arc AB du cercle O, le point M' décrit un arc égal du cercle O'.

EXERCICES

403. Soit un polygone régulier de n côtés ABC... L et de centre O.

1° Montrer que la somme $\overrightarrow{OS}$ des n vecteurs tels que $\overrightarrow{OA}$ est nulle (on pourra démontrer que la projection de $\overrightarrow{OS}$ sur les perpendiculaires à $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$... est nulle).

2° Si M est un point quelconque de l'espace, la somme des n vecteurs tels que $\overrightarrow{MA}$ est égale à $n\ \overrightarrow{MO}$. Cas où M est en A?

404. On considère trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ tels que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$. Une droite Δ coupe respectivement les droites OA, OB, OC en α, β et γ. Démontrer en utilisant la projection sur OA effectuée parallèlement à Δ que :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{O\alpha}} + \frac{\overline{OB}}{\overline{O\beta}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{O\gamma}} = 0.$$

405. Deux segments donnés non parallèles AB et CD se projettent orthogonalement sur un plan P suivant deux segments parallèles A'B' et C'D'. Les droites A'C' et B'D' se coupent en I et soient M le point de AC et N le point de BD se projetant en I.

Comparer les rapports $\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}$ et $\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}}$ au rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.

En déduire les plans P sur lesquels les deux segments donnés AB et CD se projettent orthogonalement suivant deux segments parallèles de rapport donné.

406. Dans un triangle ABC on désigne par O, H, G, ω le centre du cercle circonscrit l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle passant par les milieux des côtés du triangle :

1° On considère le vecteur $\overrightarrow{OS}$ somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et on projette orthogonalement cette somme sur le côté BC. Où se projette S? En déduire que S est confondu avec H.

2° Montrer de même que le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est triple du vecteur $\overrightarrow{OG}$. En déduire la position relative des points O, G, H.

3° Préciser la position des points ω, O, G à l'aide de considérations analogues aux précédentes.

407. On considère dans un plan P deux triangles ABC et A'B'C'. Les côtés homologues BC et B'C' se coupent en α, CA et C'A' en β, AB et A'B' en γ.

1° Montrer que si α, β, γ sont alignés sur une droite Δ, les points A', B', C' sont les projections orthogonales sur P de trois points A_1, B_1, C_1 d'un plan Q issu de Δ et non perpendiculaire à P. Démontrer que les droites AA', BB' et CC' concourent en un point O.

2° Démontrer que si AA', BB' et CC' concourent en O, les points A', B', C' sont les projections de trois points A_1, B_1, C_1 pris respectivement sur trois droites O_1A, O_1B et O_1C se projetant sur P, suivant OA, OB, OC. En déduire que α, β, γ sont alignés sur l'intersection Δ du plan P et du plan $A_1B_1C_1$.

408. On considère dans le plan une droite (D) et un vecteur $\vec{V}$.

1° Par un point quelconque M de (D) on mène le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ équipollent à $\vec{V}$. Trouver le lieu du point M'.

2° Soit une seconde droite (D') qui coupe D. Trouver un point A de (D) et un point B de (D') tels que le vecteur AB soit équipollent à $\vec{V}$.

409. Dans un parallélogramme ABCD les sommets A et B sont fixes. Le sommet C décrit un cercle donné O.

1° Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{CD}$?

2° Trouver le lieu géométrique du sommet D.

410. On donne, dans un plan P, une droite *xy*, deux points A et B d'un même côté de cette droite et un vecteur $\vec{V}$ parallèle à *xy*.

1° Soit $\overrightarrow{CD}$ un vecteur équipollent à $\vec{V}$ et porté par *xy*. On mène le vecteur $\overrightarrow{AE}$ équipollent à $\vec{V}$. Comparer le périmètre des lignes brisées ACDB et AEDB.

2° Construire les points C et D de façon que le périmètre de la ligne brisée ACDB soit le plus court possible.

411. On donne deux droites parallèles (D) et (D') et deux points A et B de leur plan situés de part et d'autre de ces parallèles.

1° Soit C un point de (D) et E un point de (D'). On construit le vecteur AF équipollent à CE. Comparer les longueurs des lignes brisées ACEB et AFEB.

2° Construire les points C et E connaissant la direction de CE de façon que le périmètre de la ligne brisée ACEB soit le plus court possible.

412. Soient deux plans sécants P et Q, un point variable M du plan P, un point variable M' du plan Q. Trouver le lieu géométrique des points M et M' sachant que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur donné $\vec{V}$.

413. On donne trois plans P, Q, R ayant un point commun O. Construire un triangle dont les sommets A, B, C appartiennent respectivement aux plans P, Q et R sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs donnés $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

414. 1° Étant donné un vecteur $\vec{V}$, construire un point M d'une droite donnée Δ et un point N d'un plan donné P tels que $\overrightarrow{MN} = \vec{V}$.

2° Construire un tétraèdre ABCD sachant que A et C appartiennent à Δ, que B et D appartiennent au plan P et que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs donnés $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

415. Soient Δ_1 et Δ_2 deux parallèles, perpendiculaires en H_1 et H_2 au segment H_1H_2. On construit le point M_1, symétrique par rapport à Δ_1 d'un point quelconque M de l'espace, puis M_2, symétrique de M_1 par rapport à Δ_2.

1° Démontrer que $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{H_1H_2}$. En déduire la correspondance entre M et M_2.

2° Montrer que toute translation peut ainsi se décomposer d'une infinité de manières en deux symétries-droites parallèles successives.

416. On construit M_1 symétrique d'un point quelconque M par rapport au point fixe O_1, puis M_2 symétrique de M_1 par rapport au point fixe O_2.

1° Établir que $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}$ et trouver la correspondance entre M et M_2.

2° En déduire que toute translation équivaut à deux symétries-point successives, le centre de l'une d'elles étant arbitraire.

417. On donne deux plans parallèles P_1 et P_2 perpendiculaires en K_1 et K_2 au segment K_1K_2. On construit le point M_1 symétrique d'un point variable M par rapport au plan P_1, puis M_2 symétrique de M_1 par rapport à P_2.

1° Démontrer que $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{K_1K_2}$. Relation entre les lieux F et F_2 de M et M_2.

2° Peut décomposer une translation en deux symétries-plan parallèles successives?

418. Soient M_1 et M_2 les symétriques d'un point quelconque M par rapport à deux points fixes O_1 et O_2.

1° Montrer que $\overrightarrow{M_1M_2}$ est égal à $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$ et établir que les symétriques d'une figure F par rapport aux différents points de l'espace sont superposables.

2° En utilisant le résultat de l'exercice n° 383, 2°, en déduire que toutes les figures se déduisant de la figure F par symétrie-point ou symétrie-plan sont superposables.

419. La translation de vecteur $\vec{V}_1$ transforme M en M_1, la translation de vecteur $\vec{V}_2$ transforme M_1 en M_2 et la translation $\vec{V}_3$ transforme M_2 en M_3.

1° Montrer que M_3 est le transformé de M dans la translation de vecteur

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3.$$

2° Décomposer une translation donnée $\vec{T}$ en trois translations successives parallèles aux arêtes du trièdre trirectangle donné *Oxyz*.

420. Soit un tétraèdre ABCD dont les sommets B, C et D sont fixes et le sommet A mobile. Soient d'autre part M, N et G les milieux respectifs de AB, CD et MN.

1° Trouver les lieux des points M et G lorsque A décrit une droite ou un plan donné.

2° Soient A_1 une position particulière de A et G_1 la position correspondante de G. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{GG_1}$ et $\overrightarrow{AA_1}$ et montrer que AG passe par un point fixe I.

3° En prenant A_1 en B définir la position de I dans le triangle BCD et la position de G sur IA.

HOMOTHÉTIE

378. Définition de l'homothétie. — Étant donnés un point fixe O appelé *centre d'homothétie* et un *rapport algébrique* k (fig. 334 et 335), faisons correspondre à tout point M de l'espace, le point M′ tel que : $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$.

Le point M′ ***est l'homologue du point*** M ***dans l'homothétie de centre*** O ***et de rapport*** k ***:*** *homothétie* (O, k).

Si on construit l'homothétique de chaque point d'une figure (F) on obtient la figure (F′), homothétique de la figure (F) dans l'homothétie envisagée.

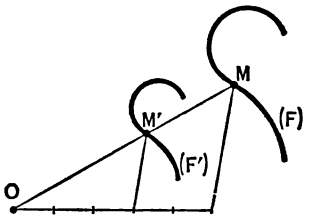


Fig. 334.

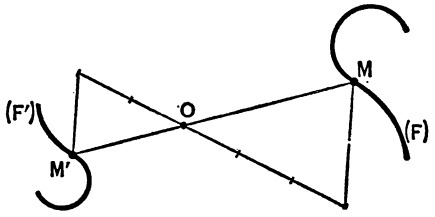


Fig. 335.

Si $k > 0$, l'homothétie est *positive* ou *directe* (fig. 334) : $k = +\frac{3}{5}$.

Si $k < 0$, l'homothétie est *négative* ou *inverse* (fig. 335) : $k = -\frac{2}{3}$.

Notons que si $k = 1$, M′ est confondu avec M. Si $k = -1$, on obtient la symétrie par rapport au point O (n° 346).

Remarquons que si M′ est l'homologue du point M dans l'homothétie (O, k), inversement M est l'homothétique de M′ dans l'homothétie $\left(O, \frac{1}{k}\right)$.

379. Théorème fondamental. — ***Si*** A′ ***et*** M′ ***sont les homologues des points*** A ***et*** M ***dans l'homothétie*** (O, k) ***on a :*** $\overrightarrow{A'M'} = k.\overrightarrow{AM}$.

En effet nous pouvons écrire (nos 359 et 361, 3°) :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{OA} = k\,(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = k.\overrightarrow{AM}.$$

380. Corollaires. — 1° ***L'homothétique d'une droite*** Δ ***est une droite*** Δ' ***parallèle ou confondue avec*** Δ.

Soit Δ la droite définie par A et B (fig. 336 et 337). La relation $\overrightarrow{A'M'} = k.\overrightarrow{AM}$ montre que A'M' reste parallèle à AM. Lorsque le point M parcourt la droite Δ, le point M' parcourt la droite Δ' définie par A' et B', et parallèle à Δ. Toutefois si la droite Δ passe par O, elle est confondue avec son homologue Δ'.

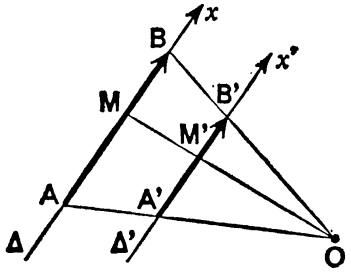


Fig. 336.

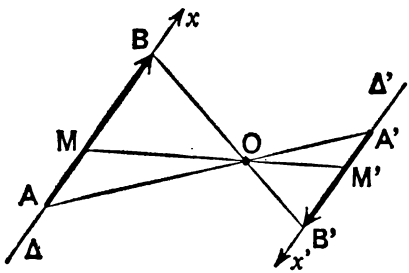


Fig. 337.

2° ***L'homothétique d'un segment, d'un vecteur ou d'une demi-droite est un segment, un vecteur ou une demi-droite parallèle.***

En effet, si le point M parcourt seulement le segment AB ou la demi-droite Ax, le point M' décrit le segment A'B' ou la demi-droite A'x' dans le même sens ou non suivant que k est positif ou négatif.

3° ***Le rapport de deux vecteurs homothétiques est égal au rapport d'homothétie.***

En effet la relation : $\overrightarrow{A'M'} = k.\overrightarrow{AM}$ s'écrit : $\dfrac{\overrightarrow{A'M'}}{\overrightarrow{AM}} = k.$

Notons que : *Le rapport de deux segments homothétiques est égal à la valeur absolue du rapport d'homothétie.*

4° ***Deux angles homothétiques sont égaux.*** — Ces angles ont leurs côtés respectivement parallèles, de même sens si k est positif, de sens contraires, si k est négatif. Ils sont donc égaux (n° 257).

381. Divisions homothétiques. — ***Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des divisions semblables.***

Soient A, B, C, D et A', B', C', D', les intersections des deux parallèles Δ et Δ' avec des droites issues d'un point O (fig. 338 et 339). La droite Δ' est l'homologue de Δ dans l'homothétie $\left(O, \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\right)$. Dans cette homothétie les homologues de A, B, C et D sont respectivement A', B', C', et D'. Le rapport de deux

vecteurs homologues tels que $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ est égal au rapport d'homothétie (n° 356). Donc :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \cdots\cdots \left(\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\right).$$

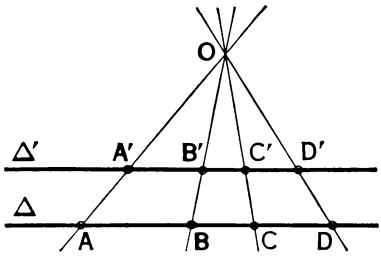


Fig. 338.

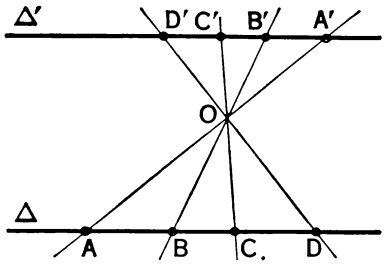


Fig. 339.

382. Réciproque. — ***Lorsque des droites déterminent des divisions semblables sur deux parallèles elles sont concourantes.***

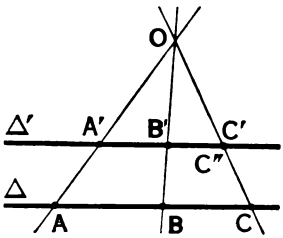


Fig. 340.

Soit O le point de rencontre de AA' et de BB' (fig. 340) et C'' l'intersection de OC et de A'B'. On a (n° 381) $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C''}}{\overline{BC}}$. Or par hypothèse : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$.

La comparaison de ces deux égalités montre que $\overline{B'C''} = \overline{B'C'}$, donc que C'' est en C'. Autrement dit CC' passe par O. (Cette réciproque permet de construire une droite passant par C et par le point de rencontre O de AA' et BB' lorsque celui-ci est inaccessible.)

Si AA' et BB' sont parallèles, les divisions ABC et A'B'C' sont égales, et CC' est parallèle à AA' et BB'.

383. Homothétique d'un triangle. — ***La figure homothétique d'un triangle est un triangle et deux triangles homothétiques ont leurs angles homologues égaux et leurs côtés homologues proportionnels.***

Dans l'homothétie (O, k) les côtés AB, BC et CA du triangle ABC (fig. 341 et 342) ont pour homologues les segments A'B', B'C' et C'A' respectivement parallèles aux premiers et de même sens ou non selon que k est positif ou

négatif. Il en résulte que les angles A et A′, B et B′, C et C′ sont égaux (n° 257) et que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = |k| \quad (n° 380, 3°).$$

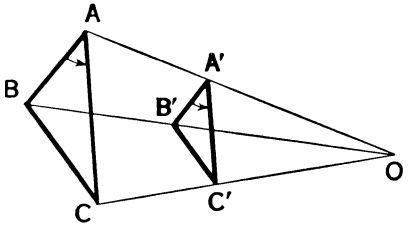


Fig. 341.

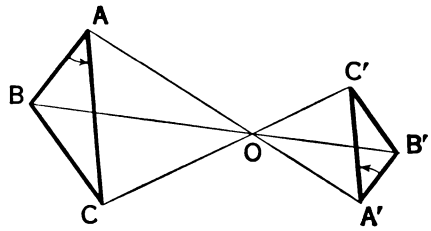


Fig. 342.

384. Réciproque. — ***Deux triangles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont en général homothétiques.***

Si AA′ et BB′ se coupent en O (fig. 341 et 342), l'homothétie $\left(O, \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\right)$ transforme A en A′, B en B′ et le triangle ABC en un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de ABC ; c'est le triangle A′B′C′. Cependant, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, le point O n'existe pas et A′B′C′ est l'homologue de ABC dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

385. Homothétique d'un plan. — 1° ***La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle.***

Écartons d'abord le cas où le centre d'homothétie O est dans le plan P. L'homothétique du plan P est alors confondu avec lui-même.

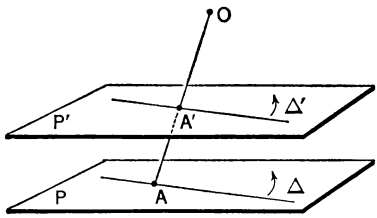


Fig. 343.

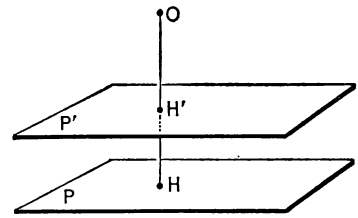


Fig. 344.

Supposons le point O extérieur au plan P (fig. 343). Soit A un point de ce plan et A′ son homothétique. Lorsqu'une droite Δ, tournant autour de A, engendre le plan P, son homologue Δ′ reste parallèle à Δ, donc au plan P. Elle engendre donc le plan P′, passant par A′ et parallèle au plan P (n° 274).

2° **Réciproque.** — ***Deux plans parallèles sont homothétiques par rapport à tout point*** O ***non situé sur l'un d'eux et le rapport d'homothétie est égal au rapport des distances du point*** O ***aux deux plans.***

Soient H et H′, les projections du point O sur les deux plans parallèles P et P′ (fig. 344). L'homothétie $\left(O, \frac{\overline{OH'}}{\overline{OH}}\right)$ transforme le plan P en un plan parallèle passant par H′ et par suite confondu avec le plan P′.

386. Homothétique d'un cercle. — ***La figure homothétique d'un cercle est un cercle. Les plans et les centres de deux cercles homothétiques sont homologues dans l'homothétie envisagée et le rapport des rayons est égal à la valeur absolue du rapport d'homothétie.***

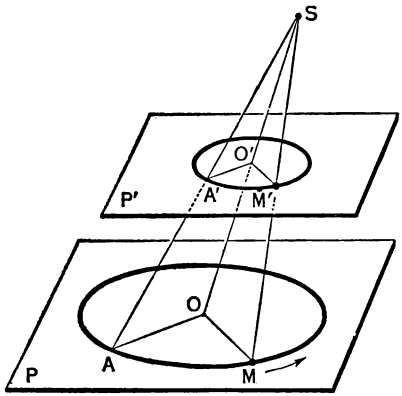


Fig. 345.

Soit un cercle (C) de centre O, de rayon R situé dans le plan P (fig. 345) et l'homothétie (S, k), le point S appartenant ou non au plan P. La figure homothétique du cercle C appartient au plan P′ homologue de P (n° 385), le plan P′ étant confondu avec le plan P si S est dans P. Soit O′ l'homologue de O et M′ l'homologue d'un point M variable du cercle C. Nous avons (n° 380) :

$O'M' = |k|\, OM$ soit $O'M' = |k|\, R.$

Le segment O′M′ de longueur constante reste parallèle à OM. Si, partant d'un point A, le point M décrit le cercle (C) en entier, le point M′ décrit en entier, dans le plan P′, le cercle (C′) de centre O′, de rayon $R' = |k|\, R.$

L'homothétique de l'arc AM est l'arc A′M′ et :

$$\widehat{AOM} = \widehat{A'O'M'} \Longrightarrow \widehat{AM} = \widehat{A'M'}.$$

387. Remarques. — 1° Si le centre d'homothétie est en O, il en est de même de O′ (fig. 346) et les cercles sont concentriques quel que soit k.

2° Si le centre d'homothétie est en I sur le cercle O et si $k > 0$, les cercles O et O′ ont un point commun I sur la ligne des centres et sont tangents intérieurement (fig. 347).

3° Si le centre d'homothétie est en J sur le cercle O et si $k < 0$, les cercles O et O′ sont tangents extérieurement (fig. 348).

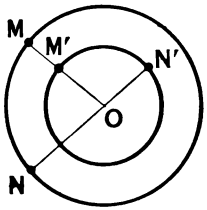


Fig. 346.

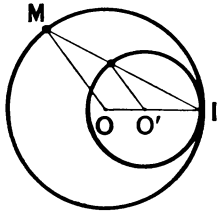


Fig. 347.

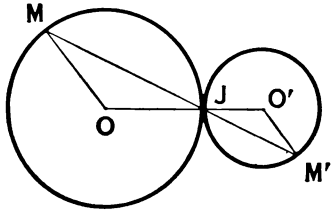


Fig. 348.

388. Réciproque. — ***Deux cercles inégaux situés dans le même plan ou dans deux plans parallèles sont homologues dans deux homothéties dont les centres sont les points qui divisent le segment joignant les centres de ces deux cercles dans le rapport de leurs rayons.***

Considérons dans un même plan (fig. 349) ou dans deux plans parallèles (fig. 350) deux cercles inégaux de centres O et O′ et rayons R et R′.

Soient OM et O′M′ deux rayons variables parallèles et de même sens.

On a : $\overrightarrow{O'M'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{OM}$. Le point M′ est donc l'homologue de M dans l'homothétie positive de rapport $\frac{R'}{R}$ et dont le centre I est défini par l'égalité $\frac{\overrightarrow{IO'}}{\overrightarrow{IO}} = \frac{R'}{R}$ (n° 223).

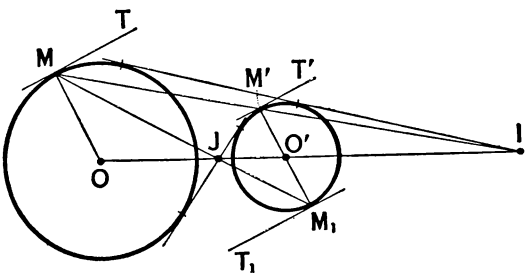


Fig. 349.

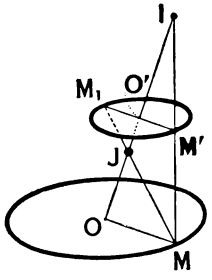


Fig. 350.

Soit $O'M_1$ le rayon opposé à O′M′. On a : $\overrightarrow{O'M_1} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{OM}$. Le point M_1

est l'homologue de M dans l'homothétie négative de rapport $-\frac{R'}{R}$ et dont le centre J est défini par l'égalité : $\frac{\overrightarrow{JO}}{\overrightarrow{JO}} = -\frac{R'}{R}$.

Les points I et J se nomment *centre d'homothétie positive* et *centre d'homothétie négative* des deux cercles.

REMARQUE. — Si R = R', les deux cercles sont égaux et

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'} = -\overrightarrow{O'M_1}.$$

Les deux cercles sont homologues dans la translation de vecteur OO' *et dans la symétrie-point dont le centre* J *est le milieu de* OO'.

389. Corollaires. — 1° Les extrémités de deux rayons parallèles sont homologues dans l'une des deux homothéties I ou J. Il en est donc de même des points de contact de deux tangentes parallèles.

2° Lorsqu'elles existent, les tangentes communes extérieures à deux cercles d'un même plan, passent par le point I et les tangentes communes intérieures passent par J.

3° Lorsque deux cercles d'un même plan sont tangents, leur point de contact est un centre d'homothétie : I s'ils sont tangents intérieurement, J s'ils sont tangents extérieurement.

APPLICATIONS

390. Droites concourantes dans le trapèze. — Soient M et N les milieux des bases AB et CD du trapèze ABCD (fig. 351), I le point de rencontre des côtés AD et BC et J le point de rencontre des diagonales AC et BD.

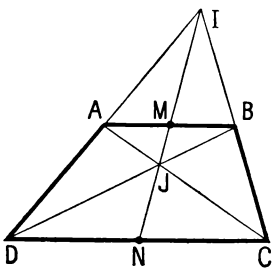


Fig. 351.

Les divisions AMB et DNC sont parallèles et semblables. Elles sont donc homothétiques par rapport à I et (n° 382) MN passe par I. De même les divisions AMB et CND sont homothétiques par rapport à J et MN passe par J.

La droite qui joint les milieux des bases d'un trapèze passe par le point de rencontre des côtés obliques et par le point de rencontre des diagonales.

Notons que : $\frac{IM}{IN} = \frac{AB}{CD}$ et $\frac{JM}{JN} = \frac{AB}{CD}$.

Les points I *et* J *divisent harmoniquement le segment* MN *dans le rapport des deux bases.*

391. Lieu géométrique. — ***Une sécante variable*** Δ ***parallèle à une direction fixe rencontre en*** A ***et*** B ***les côtés d'un angle fixe. Trouver le lieu du point*** M ***divisant le segment*** AB ***dans un rapport algébrique*** k ***donné.***

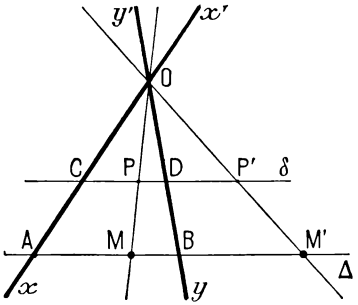


Fig. 352.

Soit CD une position particulière de AB et P la position correspondante de M (fig. 352). On a :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = k \Longrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{PD}}.$$

Les deux divisions AMB et CPD sont semblables et par suite homothétiques par rapport à O. Le point M est donc sur la droite OP, et il est clair que lorsque Δ varie la droite OP est décrite en entier.

En particulier le lieu du milieu de AB est la droite OI médiane du triangle OCD.

392. Remarque. — ***Si le rapport*** k ***est donné en valeur absolue seulement, le lieu se compose de deux droites issues de*** O.

Il existe en effet, si $k \neq 1$, deux points P et P' qui divisent le segment CD dans le rapport k. Le lieu se compose des deux droites OP et OP'.

393. Constructions. — Exemple I. — *Partager un segment* AB *en parties égales ou proportionnelles à des segments donnés* m, n, p.

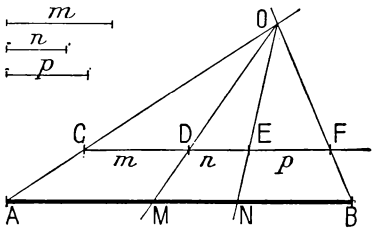


Fig. 353.

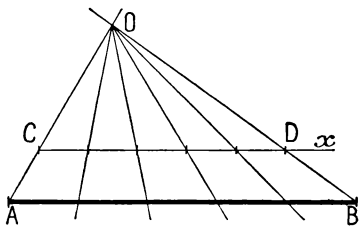


Fig. 354.

Sur une parallèle Cx à AB (fig. 353) portons CD = m, DE = n et EF = p. Les droites AC et BF se coupent en O et OD et OE coupent AB en M et N tels que (n° 381) :

$$\frac{AM}{m} = \frac{MN}{n} = \frac{NB}{p}.$$

Si on porte sur Cx cinq segments consécutifs égaux (fig. 354), AB est alors partagé en 5 parties égales.

Ces constructions sont plus simples à exécuter au compas (sans équerre), que celles des nos 238 et 138 car elles ne nécessitent qu'une seule construction de parallèle.

EXEMPLE II. — *Construire un triangle* ABC *connaissant les angles* B *et* C *et le segment* OH = *l qui joint le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre.*

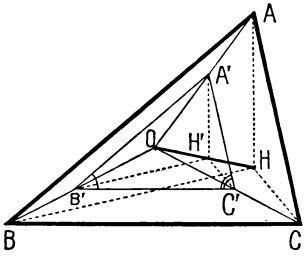


Fig. 355.

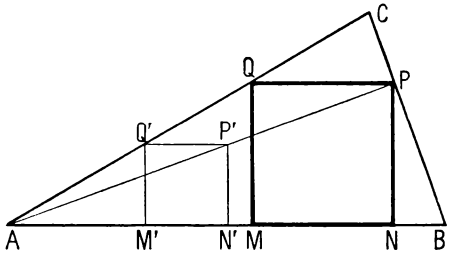


Fig. 356.

Construisons un triangle A'B'C' tel que B' = B et C' = C (fig. 355). Soit O le centre du cercle A'B'C' et H' l'orthocentre. Portons sur OH' un segment OH = *l*. L'homothétie $\left(O, \frac{OH}{OH'}\right)$ transforme le triangle A'B'C' en un triangle ABC qui répond à la question.

EXEMPLE III. — *Inscrire un carré* MNPQ *dans un triangle* ABC (fig. 356).

Le carré MNPQ est homothétique par rapport à A du carré M'N'P'Q' que l'on peut construire en se donnant le sommet M' quelconque sur AB. Le point P se trouve à l'intersection de AP' et de BC.

394. Construire un cercle passant par un point et tangent aux côtés d'un angle. — Soient A le point donné et *x*O*y* l'angle donné (fig. 357). D'un point S quelconque de la bissectrice O*z* comme centre menons un cercle tangent aux côtés de l'angle *x*O*y*. Le cercle ω cherché est homothétique du cercle précédent par rapport à O et le point A est l'homologue de l'un des points M et M' où OA coupe le cercle S. Donc Aω est parallèle à MS ou à M'S, ce qui permet de construire le point ω. Il y a donc *deux solutions* si le point A est intérieur à l'angle *x*O*y*.

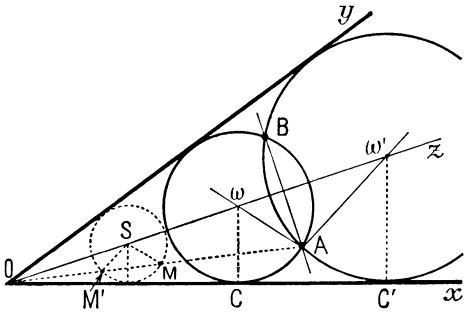


Fig. 357.

REMARQUE. — Le cercle ω passe par le point B symétrique de A par rapport à O*z*. On résoudra donc de la même manière les problèmes suivants :

1° *Construire un cercle passant par deux points donnés* A *et* B *et tangent à une droite* Δ (O*x ou* O*y*).

2° *Construire un cercle passant par un point* A, *tangent à une droite* Δ (Ox) *sachant que son centre se trouve sur une droite* D (Oz).

395. Droite d'Euler et cercle des neuf points d'un triangle. — Soient M, N et P les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle ABC (fig. 358). Les côtés du triangle MNP sont parallèles à ceux de ABC et comme $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, le triangle MNP se déduit du triangle ABC dans une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$. Le centre G de cette homothétie est situé sur AM, BN et CP qui sont donc concourantes en G et l'on a : $\overline{MG} = \frac{1}{2}\overline{GA}$ ou $\overline{MG} = \frac{1}{3}\overline{MA}$. On retrouve le théorème relatif au centre de gravité.

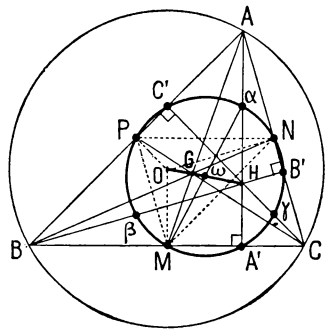


Fig. 358.

1° Les hauteurs du triangle MNP sont les médiatrices de ABC. Par suite l'homologue de l'orthocentre H de ABC est le point O orthocentre de MNP et centre du cercle circonscrit à ABC. Donc :

Dans tout triangle les trois points O, G ***et*** H ***sont alignés et*** $\overline{OG} = \frac{1}{3}\overline{OH}$.

2° L'homologue de O est le point ω centre du cercle MNP. Ce point se trouve donc sur OG et : $\overline{G\omega} = \frac{1}{2}\overline{OG}$, donc $\overline{O\omega} = \frac{3}{2}\overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{OH}$. Si on pose OA = R, la relation : $\overrightarrow{\omega M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ donne : $\omega M = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$.

Le centre ω ***du cercle*** MNP ***est le milieu du segment*** OH ***et son rayon*** ρ ***est égal à*** $\frac{R}{2}$.

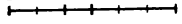


Fig. 359.

La droite OH se nomme *droite d'Euler* du triangle ABC. Notons que la *division* OGωH *est indépendante du triangle* (fig. 359).

3° Le centre d'homothétie positive des cercles MNP et ABC est le point qui divise extérieurement ωO dans le rapport $\frac{1}{2}$. C'est le point H. Dans cette nouvelle homothétie les homologues de A, B, C sont les milieux α, β, γ des segments HA, HB et HC. Ces trois points sont donc sur le cercle MNP.

Les rayons ωM et ωα, parallèles à OA, sont opposés et le segment Mα est un diamètre du cercle MNP. Ce cercle contient par suite le pied A' de la

hauteur AH car l'angle αA'M est droit. De même il contient les pieds B' et C' des hauteurs BH et CH.

Dans tout triangle les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets sont sur un même cercle appelé cercle des neuf points du triangle.

(L'exercice n° 101 conduit à une démonstration directe des remarquables propriétés précédentes.)

EXERCICES

421. Dans un plan on considère un triangle ABC dont le côté BC est fixe et le sommet A mobile. Déterminer le lieu des milieux M et N de AB et de AC et celui du centre de gravité G dans les cas suivants :

1° La hauteur AA' est constante.
2° Le pied A' de la hauteur issue de A est fixe.
3° L'angle BAC est constant.

422. Soit dans un plan un cercle O et de rayon R, un point P extérieur et un point mobile M qui parcourt le cercle. Soit H la projection de O sur PM.

1° Déterminer le lieu du centre de gravité G du triangle POM.
2° Trouver le lieu du milieu I de PH.
3° Lieu du centre de gravité K du triangle OPH.

423. Dans un triangle ABC d'un plan fixe le côté BC est fixe et la médiane AM a une longueur constante.

1° Trouver les lieux des milieux N et P de CA et de AB et celui du milieu I de PN.
2° CI et BI coupent AB et AC en R et S. Trouver les lieux des points R et S.

424. On donne un cercle de centre O et un diamètre fixe AB. On prolonge une corde variable AC d'une longueur CD égale à AC. Les droites OD et BC se coupent en M.

1° Montrer que M est le centre de gravité du triangle ABD.
2° Trouver le lieu du point D et celui du point M.

425. Soit un trapèze ABCD dont le plan est fixe et dont la base AB $= a$ est fixe. Le côté AD $= b$ et la base DC $= c$ ont des longueurs constantes.

1° Lieu géométrique des sommets C et D.
2° Lieu du point d'intersection M de AC et BD.

426. Soit dans un plan fixe une droite fixe xy et un point donné A de cette droite. Un cercle variable de centre O est tangent en A à xy. Les tangentes parallèles à une direction donnée Δ touchent le cercle en M et N. Soient P et Q les extrémités du diamètre parallèle à Δ.

1° Trouver les lieux des points M et N.
2° Déterminer les lieux des points P et Q.
3° Quelle est l'enveloppe du cercle inscrit dans le carré MPNQ?

427. Deux cercles d'un même plan sont tangents extérieurement en A. On mène par le point A deux sécantes variables coupant le premier en B et C et le second en B' et C'.

1° Démontrer que les cordes BC et B'C' sont parallèles.
2° Trouver les enveloppes de B'C', BC' et B'C lorsque BC est un diamètre.
3° On suppose que BC passe par un point fixe ω (ou soit tangente à un cercle fixe). Déterminer l'enveloppe de B'C'.

428. Dans un cercle de centre O on considère une corde fixe AB et une corde variable AM et on termine le parallélogramme MABC.

1° Trouver le lieu du milieu I de AC et celui du point C.
2° Montrer que le rayon du cercle MBC et l'angle MBC sont constants.
3° Démontrer que l'orthocentre H du triangle MBC est fixe et déterminer le lieu du centre de gravité du triangle MBC.

429. Deux cercles O et O′ sont tangents extérieurement en A. Un angle droit xAy tourne autour de son sommet, Ax coupe le cercle O en B et Ay coupe le cercle O′ en C.
1° Montrer que OB et O′C sont parallèles. Enveloppe de BC.
2° Trouver le lieu de la projection H de A sur BC et celui du milieu I de BC.
3° Déterminer le lieu du centre de gravité G du triangle ABC.

430. Soit un angle fixe xOy égal à 60° et un point fixe I sur la bissectrice intérieure. Un cercle variable de centre I coupe Ox en A et Oy en B non symétriques par rapport à OI. Soient H et K les projections de I sur Ox et Oy.
1° Montrer que HA = KB et calculer la valeur de l'angle AIB.
2° Lieu géométrique du centre ω du cercle circonscrit au triangle AIB.
3° Soit H l'orthocentre du triangle IAB. Étudier le triangle ABH. Comparer $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{I\omega}$ et en déduire le lieu de H.
4° Soit G le centre de gravité du triangle IAB. Comparer $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{I\omega}$ et en déduire le lieu de G.

431. Soient deux cercles extérieurs d'un même plan de centres O et O′. On mène deux rayons parallèles OM et O′M′ variables, mais de même sens (ou de sens contraires). MM′ recoupe le cercle O′ en N et OM et O′N se coupent en ω.
1° Montrer que MM′ passe par un point fixe I. Étudier les triangles M′O′N et MωN. Montrer que le point ω est le centre d'un cercle tangent aux deux cercles O et O′.
2° Soient P, P′ et Q, des positions correspondantes de M, M′ et N. Montrer que le quadrilatère MNQP est inscriptible.

432. On considère un point fixe O, un plan fixe P et un cercle fixe C non situé dans le plan P. Une sécante variable issue de O coupe le plan P en A et le cercle en B. Déterminer la sécante de façon que l'on ait : $\overline{OA} = k\overline{OB}$ (k constante donnée).

433. On se donne deux plans sécants P et Q et un point extérieur O. Une sécante mobile issue de O coupe le plan P en A et le plan Q en B.
1° Lieu des points A et B lorsque $\overline{OA} = k\overline{OB}$ (k constante donnée).
2° Déterminer la sécante AB de façon que OA = a et OB = b.
3° Un troisième plan R coupe la sécante AB en C. Déterminer la sécante de façon que la division OABC soit semblable à une division donnée.

434. Soit un tétraèdre ABCD et A′, B′, C′ et D′, les centres de gravité des faces BCD, CDA, DAB et ABC. On désigne par M et N les milieux respectifs de AB et de CD.
1° Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{D'C'}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont homothétiques par rapport à M. Quel est le rapport d'homothétie et la position de N′, homologue de N?
2° En déduire que les tétraèdres ABCD et A′B′C′D′ sont homothétiques par rapport à un point G appelé centre de gravité du tétraèdre.
3° Quelle est la position de G sur les segments tels que AA′ et sur les segments tels que MN?

435. On prend les homothétiques d'une figure F donnée par rapport à deux points O_1 et O_2. Soient k_1 et k_2 les rapports d'homothétie. Étudier la correspondance entre les deux figures obtenues, F_1 et F_2 dans les cas suivants :
1° Les rapports k_1 et k_2 sont égaux.
2° Les rapports k_1 et k_2 sont opposés.

436. On considère dans un plan P trois points non alignés A, B et C. On construit trois vecteurs inégaux parallèles $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$, non situés dans le plan P.

1° Construire les trois centres d'homothétie α, β et γ transformant respectivement $\overrightarrow{BB'}$ en $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{CC'}$ en $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ en $\overrightarrow{BB'}$.

2° Montrer que les trois points α, β, γ sont alignés et calculer la valeur du produit

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}.$$

437. On désigne par M et M' deux points de l'espace symétriques par rapport à une droite (D).

1° La droite (D) étant supposée fixe, quel est le lieu du point M lorsque la droite MM' est parallèle à un plan donné ?

2° On suppose que la droite (D) varie d'une manière arbitraire, parmi les droites parallèles à une droite donnée (Δ). Trouver le lieu du point M' lorsque le point M reste fixe.

3° On suppose que la droite (D), passant constamment par un point donné A, demeure en outre dans un plan fixe (P) contenant le point A. Quel est le lieu des symétriques M' d'un point M donné? Dans quel cas ce lieu contient-il le point M? Dans quel cas se réduit-il à un point fixe?

438. On considère un trièdre trirectangle $Oxyz$ (dont les arêtes Ox, Oy, Oz sont deux à deux perpendiculaires) et l'on désigne par A, B, C trois points respectivement situés sur les arêtes Ox, Oy, Oz.

1° On suppose A et B fixes et C variable sur Oz. Lieux géométriques des pieds des médianes issues de A et B du triangle ABC. Lieu géométrique du point de concours des médianes du triangle ABC.

2° On suppose A seul fixe. On pose $OB = y$, $OC = z$ et l'on fait varier B et C de façon que $y + z = l$, l étant une longueur donnée. Lieu géométrique du pied de la médiane issue de A du triangle ABC. Lieu géométrique du point de concours des médianes de ce même triangle.

3° Les hypothèses étant les mêmes qu'au 2°, on suppose en outre que $OA = 1$, $l = 2$. Construire le triangle ABC, sachant que la médiane issue de A a une longueur donnée m. Discussion. On trouvera que m doit être compris entre une valeur minimum et une valeur maximum. Préciser la forme du triangle ABC dans le cas du minimum. Calculer, dans ce cas, la distance de O au plan ABC.

— Les données ayant la même signification qu'à la page 112, construire un triangle ABC connaissant :

439. B, C, et p. **440.** B, C, et h_a ou m_a. **441.** B, C, et β_a ou β'_a.

442. A, h_a et $\frac{b}{c}$. **443.** A, a, et $\frac{b}{c}$. **444.** A, $\frac{b}{c}$, et β_a ou β'.

445. A, $\frac{b}{c}$ et OI (O centre du cercle circonscrit, I centre du cercle inscrit).

446. $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{c}$ et GI (G centre de gravité).

447. Dans un triangle ABC une parallèle à BC coupe AB en D et AC en E. Les points D et E se projettent en H et K sur BC.

1° Trouver le lieu du milieu I de DE lorsque DE se déplace.

2° Soit J la projection de I sur BC. Trouver le lieu du milieu M de IJ.

3° Déterminer DE pour que le rectangle DEKH soit semblable à un rectangle donné.

448. Le sommet A et le centre de gravité G du triangle ABC sont donnés en position Construire le milieu I de BC, puis les sommets B et C sachant que :

1° B est sur une droite Δ et C sur une droite (ou un cercle) Γ.

2° Les angles B et C sont donnés.

3° On connaît l'angle B et la hauteur AA' (ou BB').

449. Soit un quadrilatère convexe ABCD. Par un point M du côté AB on mène les parallèles aux diagonales AC et BD qui coupent BC en Q et AD en N. La parallèle à AC menée par N coupe CD en P.

1° Montrer que MNPQ est un parallélogramme.

2° Quand M varie sur AB quels sont les lieux des milieux de MN et PQ?

3° Lieu du centre O du parallélogramme.

450. Soit un angle xOy. Un point variable M de son plan se projette orthogonalement en P sur Ox et en Q sur Oy.

1° Trouver le lieu de M lorsque PQ a une direction donnée et un sens donné.

2° Si PQ a une longueur constante montrer que OM est constant : Lieu de M.

3° Construire le point M quand le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est égal à un vecteur donné.

451. On considère un triangle ABC. Une droite de direction Δ coupe AB en P et AC en N. On mène par P la parallèle à la direction Δ' et par N la parallèle à la direction Δ''; ces parallèles se coupent en M.

1° Trouver le lieu de M lorsque PN varie.

2° Construire un triangle MNP inscrit dans le triangle ABC connaissant les directions de ses côtés.

452. Soient deux droites concourantes Ox et Oy. On prend un point A sur Ox, un point B sur Oy et on mène une parallèle variable à AB qui coupe Ox en M et Oy en N. Trouver le lieu du point P d'intersection de AN et de BM.

453. 1° Étant données trois droites coplanaires Ox, Oy, et Oz, construire par le point A de Ox une droite coupant Oy en B et Oz en C de façon que $2\,\overline{AB} = 3\,\overline{BC}$.

2° Résoudre le même problème lorsque l'on connaît un point quelconque P de la sécante ABC.

454. On considère un cercle de centre O et de rayon R et un point H intérieur. Un triangle variable ABC inscrit dans le cercle O admet le point H pour orthocentre.

1° Montrer que le centre de gravité G du triangle est fixe. Le construire.

2° A étant donné construire le milieu M de BC et les points B et C.

3° Trouver le lieu des milieux des côtés et des pieds des hauteurs du triangle ABC.

24e Leçon

TRIANGLES SEMBLABLES

396. Définition. — ***Deux triangles sont semblables lorsque l'un d'eux est égal à un triangle homothétique de l'autre.***

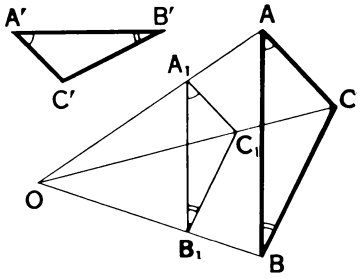


Fig. 360.

Construisons (fig. 360) le triangle $A_1B_1C_1$, homologue du triangle ABC dans l'homothétie $\left(O, \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}}\right)$ puis le triangle A'B'C' égal au triangle $A_1B_1C_1$. Par définition les triangles ABC et A'B'C' son semblables.

Les angles A et A', B et B', C et C' sont homologues et de même les côtés AB et A'B', BC et B'C', CA et C'A' sont homologues.

397. Théorème. — ***Lorsque deux triangles sont semblables leurs angles homologues sont respectivement égaux et leurs côtés homologues sont proportionnels.***

Le triangle A'B'C' semblable au triangle ABC (fig. 360) est par hypothèse égal au triangle $A_1B_1C_1$ homothétique du triangle ABC. Or (n° 383) les triangles $A_1B_1C_1$ et ABC ont leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels :

$$\widehat{A_1} = A; \quad \widehat{B_1} = B; \quad \widehat{C_1} = \widehat{C} \quad \text{et} \quad \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Soit en remplaçant les éléments du triangle $A_1B_1C_1$ par les éléments homologues du triangle égal A'B'C' :

$$\widehat{A'} = A; \quad \widehat{B'} = \widehat{B}; \quad \widehat{C'} = C \quad \text{et} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

398. Rapport de similitude. — Le rapport k des côtés du triangle A'B'C' et des côtés homologues du triangle ABC est par définition le rapport de similitude du triangle A'B'C' et du triangle ABC.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k.$$

Ce n'est autre que la valeur absolue du rapport d'homothétie des triangles $A_1B_1C_1$ et ABC.

En particulier deux triangles égaux sont deux triangles semblables dont le rapport de similitude est égal à 1.

399. Corollaire. — *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine avec les deux autres côtés un triangle semblable au premier.*

En effet (fig. 361) si le segment DE est parallèle au côté BC du triangle ABC, le triangle ADE est l'homologue du triangle ABC dans l'homothétie $\left(A, \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\right)$

Le triangle ADE est donc semblable à ABC et il en est de même de tout triangle A'B'C' égal au triangle ADE.

— Les théorèmes suivants, connus sous le nom de *cas de similitude*, constituent des conditions suffisantes pour que deux triangles soient semblables.

CAS DE SIMILITUDE

400. 1er cas. — *Lorsque deux triangles ont deux angles respectivement égaux, ils sont semblables.*

Supposons deux triangles ABC et A'B'C' (fig. 361) tels que $\widehat{A} = \widehat{A}'$ et $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

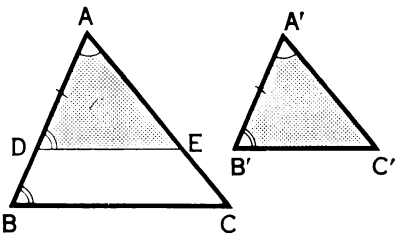


Fig. 361.

Portons sur AB un segment AD égal à A'B' et par D menons la parallèle à BC qui coupe AC en E. Le triangle ADE est semblable à ABC (no 399). L'angle ADE égal à l'angle ABC est donc égal à l'angle A'B'C'. Les triangles ADE et A'B'C' qui ont d'autre part AD égal à A'B' par construction et les angles A et A' égaux par hypothèse sont égaux (1er cas). Le triangle A'B'C', égal au triangle ADE semblable à ABC, est lui-même semblable à ABC.

401. 2e cas. — *Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ils sont semblables.*

Par hypothèse (fig. 362) : $\widehat{A}$ et $\widehat{A}'$ et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$.

Soit k la valeur commune des rapports précédents : $A'B' = k.AB$ et $A'C' = k.AC$.

Portons sur AB un segment AD = A'B' = k.AB et menons la parallèle DE à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC et le rapport de similitude est k. Par suite AE = k.AC soit AE = A'C'. Les triangles ADE et A'B'C' qui ont de plus AD = A'B' et les angles A et A' égaux, sont égaux (2e cas). Le triangle A'B'C' égal à ADE est lui-même semblable à ABC.

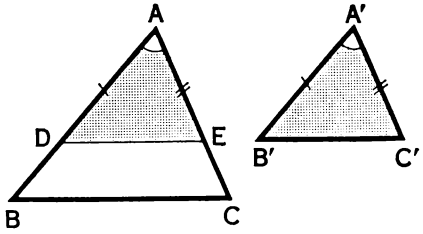


Fig. 362.

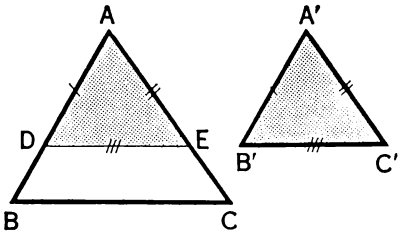


Fig. 363.

402. 3e cas. — *Lorsque deux triangles ont leur trois côtés proportionnels, ils sont semblables.*

Par hypothèse (fig. 363) : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k.$

Soit : $A'B' = k.AB$; $A'C' = k.AC$; $B'C' = k.BC$.

Portons sur AB un segment AD = A'B' = k.AB, puis menons la parallèle DE à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC, et le rapport de similitude est k. Donc :

$$AD = k.AB \qquad AE = k.AC \qquad \text{et} \qquad DE = k.BC.$$

Les deux triangles ADE et A'B'C' ont leurs trois côtés respectivement égaux; ils sont égaux. Le triangle A'B'C' égal au triangle ADE est lui-même semblable à ABC.

403. Cas spécial aux triangles rectangles. — *Lorsque deux triangles rectangles ont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit proportionnels, ils sont semblables.*

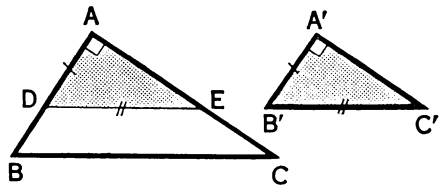


Fig. 364.

Par hypothèse (fig. 364) :

$$\widehat{A} = \widehat{A}' = 1^{D}.$$

et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = k.$

Nous avons $A'B' = k.AB$ et $B'C' = k.BC$. Portons sur AB un segment AD = A'B' = k.AB, et menons la parallèle DE à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC (no 399) et le rapport de similitude est k. Donc $DE = k.BC$. Il en résulte que AD = A'B' et DE = B'C'. Les trian-

gles rectangles ADE et A'B'C' sont égaux (2e cas d'égalité des triangles rectangles). Le triangle A'B'C' égal à ADE, est lui-même semblable à ABC.

404. Corollaires. 1° ***Deux triangles semblables à un troisième sont semblables entre eux.***

Ces deux triangles ont en effet leurs angles respectivement égaux à ceux du troisième. Ils sont semblables (1er cas).

2° ***Deux triangles isocèles qui ont même angle au sommet ou même angle à la base sont semblables*** (1er cas).

En particulier : deux triangles rectangles isocèles sont semblables, deux triangles équilatéraux sont semblables.

3° ***Deux triangles rectangles qui ont un angle aigu égal sont semblables*** (1er cas).

4° ***Deux triangles rectangles qui ont les côtés de l'angle droit proportionnels sont semblables*** (2e cas).

405. Théorème. — ***Deux triangles d'un même plan qui ont leurs côtés respectivement parallèles (ou perpendiculaires) sont semblables.***

Les triangles ABC et A'B'C' (fig. 365 et 366) ont leurs côtés respectivement parallèles (ou perpendiculaires). Donc, d'après les nos 94 et 95, on a entre les angles des deux triangles :

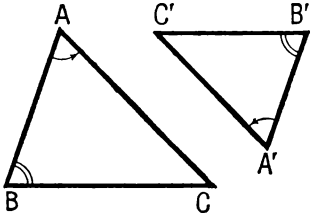


Fig. 365.

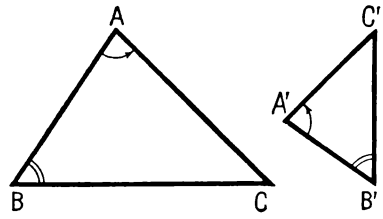


Fig. 366.

$$\begin{array}{lll} A = A' & \text{ou} & A + A' = 2^D \\ B = B' & \text{ou} & B + B' = 2^D \\ C = C' & \text{ou} & C + C' = 2^D. \end{array}$$

Deux des égalités de la colonne de droite ne peuvent être vérifiées en même temps, par exemple les deux premières car la somme totale des 6 angles serait :

$$4^D + C + C'$$

donc supérieure à 4^D, alors qu'elle doit être 4^D. Par conséquent, deux au moins des égalités de la colonne de gauche sont vérifiées simultanément. Les triangles sont alors semblables d'après le 1er cas de similitude.

APPLICATIONS

406. Utilité des cas de similitude. — Si deux triangles ABC et DEF sont semblables, nous avons :

$$\hat{A} = \hat{D}; \quad \hat{B} = \hat{E}; \quad \hat{C} = \hat{F} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Notons qu'il faut toujours énoncer dans le même ordre les sommets homologues de deux triangles semblables. En écrivant $\left\{\begin{matrix} ABC \\ DEF \end{matrix}\right.$ les sommets homologues et les côtés homologues se correspondent ainsi verticalement.

Les cas de similitude ne font intervenir que deux des relations ci-dessus. Les autres en sont donc des conséquences, ce qui permet de découvrir des relations entre les éléments de deux triangles donnés.

407. Exemple. — *Soit un triangle* ABC; *on mène la hauteur* AH *et le diamètre* AD *du cercle circonscrit* (fig. 367). *Démontrer la relation :*

$$AB.AC = AD.AH.$$

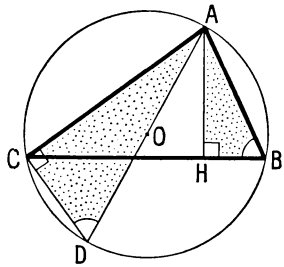


Fig. 367.

Les triangles AHB et ACD ont $\hat{H} = \hat{C} = 1^D$, car $\hat{C}$ est inscrit dans un demi- cercle. Ils ont aussi $\hat{B} = \hat{D}$ (angles inscrits interceptant le même arc). Les triangles $\left\{\begin{matrix} AHB \\ ACD \end{matrix}\right.$ sont semblables (1^{er} cas). Donc :

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \quad \text{et} \quad AB.AC = AD.AH.$$

ce qui permet d'énoncer le théorème :

Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur relative au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit au triangle.

En posant AH $= h_a$, CA $= b$, AB $= c$ et OA $= R$, on obtient la relation :

$$\boxed{bc = 2R.h_a}.$$

408. Hauteurs homologues de deux triangles semblables.

Théorème. — ***Le rapport des hauteurs homologues de deux triangles semblables est égal au rapport de similitude.***

Soient ABC et A'B'C' deux triangles semblables (fig. 368). Menons les hauteurs homologues AH et A'H' et comparons les triangles AHB et A'H'B'.

Ils ont H = H′ = 1ᵖ et B = B′ (angles homologues de deux triangles semblables ABC et A′B′C′). Donc, AHB et A′H′B′ sont semblables (1ᵉʳ cas) et

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{A'B'}{AB} = k.$$

On pourra de même, à titre d'exercice, montrer que le rapport de deux bissectrices homologues, de deux médianes homologues, etc., est égal au rapport de similitude.

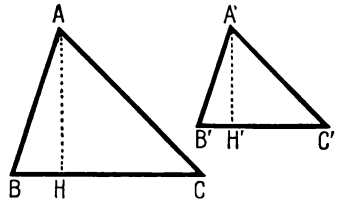


Fig. 368.

409. Construire les points qui divisent un segment dans un rapport donné.

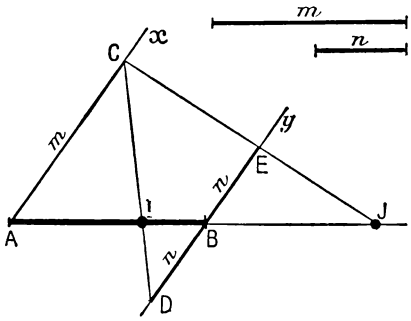


Fig. 369.

La construction suivante est plus simple que celle du nº 239 car elle n'exige qu'une seule construction de parallèle.

Menons par A une demi-droite Ax (fig. 369) et par B la parallèle By à Ax. Puis portons sur Ax un segment AC = m et sur By les deux segments BE = BD = n. Les droites CD et CE coupent la droite AB en I et J. Nous obtenons (nº 397) des triangles semblables :

$$\begin{cases} \text{IAC} \\ \text{IBD} \end{cases} \text{ donc } \frac{IA}{IB} = \frac{AC}{BD} = \frac{m}{n}$$

et

$$\begin{cases} \text{JAC} \\ \text{JBE} \end{cases} \text{ donc } \frac{JA}{JB} = \frac{AC}{BE} = \frac{m}{n}.$$

Les points I et J sont les points qui divisent harmoniquement AB dans le rapport $\frac{m}{n}$.

410. Construire le conjugué harmonique d'un point.

Soit à construire le conjugué harmonique de I par rapport à A et B (fig. 369). Menons par A et B deux parallèles Ax et By, puis par I la sécante CD et sur By portons BE = BD. La droite CE coupe AB en J, qui est, d'après ce qui précède, le conjugué harmonique de I.

Si I est au milieu de AB, AC = BD = BE. Le quadrilatère ABEC est un parallélogramme et le point J n'existe plus. On retrouve le fait que le milieu d'un segment AB n'a pas de conjugué par rapport à A et B (nº 227).

EXERCICES

455. Par le sommet A d'un triangle isocèle ABC, on mène une sécante qui coupe la base BC en D et le cercle circonscrit en E. Comparer les triangles ABD et AEB et démontrer la relation $\overline{AB}^2 = \overline{AD}.\overline{AE}$.

456. On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle et on mène une corde DD' parallèle à BC. AD' coupe BC en E.

1° Montrer que les angles BAC et DAE ont même bissectrices.

2° Comparer les triangles ABD et AEC, puis les triangles ABE et ADC.

3° Evaluer le produit AD.AE en fonction de AB et de AC.

457. On mène une parallèle à la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC. Cette parallèle coupe AB en M et AC en N.

1° Montrer que le quadrilatère BCNM est inscriptible.

2° Comparer les triangles ABC et AMN et démontrer que : $\overline{AB}.\overline{AM} = \overline{AC}.\overline{AN}$.

458. On considère un cercle de diamètre AB et une perpendiculaire Δ en I à ce diamètre. Un point M décrit le cercle et MA et MB coupent Δ en C et D.

1° Démontrer la relation $\overline{IC}.\overline{ID} = \overline{AI}.\overline{IB}$.

2° Soit E le symétrique de B par rapport à I. Comparer les triangles IAC et IDE.

3° Trouver le lieu géométrique du centre du cercle ACD.

459. On considère un triangle isocèle OAB de base AB et d'un point variable M intérieur à l'angle AOB, on mène les perpendiculaires MH, MK et MI à OA, OB et AB. On suppose que $\overline{MI}^2 = MH.MK$.

1° Comparer les deux triangles MIH et MKI puis les angles MIH et MKI.

2° Les deux quadrilatères AIMH et BKMI sont inscriptibles. En déduire que les angles MAB et MBK sont égaux et la valeur de l'angle AMB.

3° Montrer que le lieu du point M est le cercle tangent en A et B aux côtés de l'angle AOB et qu'il passe par les centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle O du triangle OAB.

460. On donne un trapèze de bases AB et CD. Soit E le point du segment AD tel que $\frac{EA}{ED} = \frac{m}{n}$. La parallèle menée par E aux bases coupe BC en F, AC en G et BD en H.

1° Calculer en fonction de AB = a, CD = b, m et n les segments EG, EH, puis FG et FH et finalement EF.

2° En déduire que EF et GH ont même milieu. Que se passe-t-il quand $m = a$ et $n = b$?

461. Les tangentes en B et C à un cercle de centre O se coupent en A et coupent en I et J la perpendiculaire en O à AO. Une tangente mobile coupe AB en M et AC en N.

1° Montrer que l'angle aigu des droites OM et ON est constant.

2° Comparer les triangles OMN, IMO et JON. Démontrer que le produit $\overline{IM}.\overline{JN}$ est constant et qu'il est égal à $\overline{IA}.\overline{JC}$ ou $\overline{IB}.\overline{JA}$.

3° En déduire que les divisions IMA et JCN sont semblables ainsi que les divisions JNA et IBM, puis que le produit $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$ est constant.

462. Dans un triangle ABC on mène par un point P du côté BC la parallèle à la médiane AD, elle coupe AB en M et AC en N.

1° Comparer les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

2° Évaluer les rapports $\frac{PM}{DA}$ et $\frac{PN}{DA}$. En déduire que PM + PN = 2AD.

3° Quel est le lieu du milieu I de MN lorsque P décrit le segment BC?

463. Soient AH et BK les distances de deux points donnés à une droite Δ qui coupe la droite AB en I.

1° Comparer les rapports $\frac{IA}{IB}$ et $\frac{AH}{BK}$.

2° On suppose le rapport $\frac{AH}{BK}$ constant. Quelle est l'enveloppe de la droite Δ?

3° Construire une droite Δ sachant que ses distances aux trois sommets d'un triangle sont proportionnelles à des nombres donnés α, β et γ (4 solutions).

464. La bissectrice intérieure de l'angle A d'un triangle ABC coupe BC en D et le cercle circonscrit en E. Soient I, J, K et L les centres des cercles inscrit et exinscrit au triangle.

1° Démontrer les relations AB . AC = AD . AE = AI . AJ.

2° En désignant par D′ et E′ les intersections de la bissectrice extérieure de l'angle A avec BC et le cercle circonscrit, démontrer les relations analogues :

$$AB \cdot AC = AD' \cdot AE' = AK \cdot AL.$$

465. On considère un angle xOy et deux points intérieurs A et A′ tels que les droites OA et OA′ soient symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle xOy. Soient M et N les projections de A sur Ox et Oy, et M′ et N′ celles de A′ sur Ox et Oy.

1° Comparer les triangles OAM et OA′N′, puis OAN et OA′M′.

2° En déduire les relations AM . A′M′ = AN . A′N′ et OM . OM′ = ON . ON′.

3° Montrer que les triangles OMN et ON′M′ sont semblables ainsi que les triangles AMN et A′N′M′ et que les quatre points MNN′M′ sont sur un cercle dont le centre est le milieu I de AA′.

466. Deux cercles O et O′ se coupent en A et B. Une sécante variable passant par B coupe O en P et O′ en Q.

1° Comparer les triangles AOO′ et APQ. En déduire que APQ reste semblable à lui-même quand PQ tourne autour de B.

2° On suppose que AB passe par O et on appelle Q′ le symétrique de Q par rapport à P. Évaluer l'angle QQ′A. Quel est le lieu de Q′?

467. Soit un triangle ABC. On mène la hauteur AD et les perpendiculaires BE et CF à une droite xy passant par A.

1° Comparer les triangles ABC et DEF.

2° Soit I le milieu de BC et M le milieu de EF. Comparer les directions de IM et EF. Quel est le lieu de M lorsque xy tourne autour de A?

3° En général quel est le lieu du point P qui partage EF dans un rapport donné?

468. Deux cercles O et O′ se coupent en M et N; soient A, B, C trois points du cercle O; les droites AM, BM, CM coupent O′ en A′, B′, C′.

1° Comparer les triangles NAA′, NBB′, NCC′.

2° Montrer que les triangles NAB et NA′B′ sont semblables et comparer le rapport de similitude au rapport des rayons des deux cercles.

3° Comparer les triangles ABC et A′B′C′.

469. Soit un triangle ABC dont les hauteurs AA′, BB′, CC′ se coupent en H. Démontrer les relations suivantes :

1° $\overline{A'A}.\overline{A'H} = -\overline{A'B}.\overline{A'C}.$

2° $\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$

3° $BC.AA' = CA.BB' = AB.CC'.$

Classer les hauteurs de ABC en supposant BC > AC > AB.

470. Soit I un point quelconque du cercle circonscrit à un quadrilatère ABCD. On mène les perpendiculaires IM, IN, IP, IQ, IR et IS respectivement à AB, CD, AC, BD, AD et BC.

1° Montrer que les quadrilatères IMAP et INDQ sont inscriptibles. Comparer les triangles IMP et IQN.

2° Démontrer que IM . IN = IP . IQ = IR . IS et que les trois angles MIN, PIQ et RIS ont mêmes bissectrices.

3° Étudier ce que deviennent les propriétés précédentes lorsque le côté AD est remplacé par la tangente en A au cercle ABC, puis lorsque les côtés AD et BC sont remplacés par les tangentes en A et B.

471. On donne un triangle ABC. Une parallèle au côté BC coupe AB en D et AC en E. de manière que $\overline{DC}^2 = BC \cdot DE$.

1° Comparer les triangles DEC et DBC.

2° En déduire la construction de la droite DE.

3° Démontrer que : $\overline{AD}^2 = \overline{AC}.\overline{AE}$ et $\overline{AC}^2 = \overline{AB}.\overline{AD}$.

472. Dans un triangle ABC on connaît le produit $AB.AC = l^2$ où l est une longueur donnée, la hauteur AH et le côté BC.

1° Construire le diamètre du cercle circonscrit au triangle.

2° Construire le triangle ABC.

473. Soit un cercle de centre O de rayon R et AB un diamètre fixe de ce cercle. M étant un point variable du cercle on joint MA, MB et on prolonge AM d'une longueur MI = 2 MB.

1° Montrer que le triangle MIB reste semblable à lui-même.

2° Trouver le lieu du point I.

474. On donne un triangle isocèle ABC (AB = AC).

1° Montrer que la bissectrice extérieure de l'angle A est parallèle à BC.

2° Soient P et Q deux points de cette bissectrice de part et d'autre de A et tels que $AP \cdot AQ = \overline{AB}^2$. Comparer les triangles APB et ACQ.

3° PB et CQ se coupent en S. Montrer que les triangles APB et ACQ sont semblables au triangle SPQ.

4° Trouver le lieu de S quand P et Q se déplacent sur la bissectrice extérieure de A de façon que $AP.AQ = \overline{AB}^2$.

475. Soient deux cercles extérieurs O et O′ de rayons R et R′. On mène une tangente commune extérieure AA′ et une tangente commune intérieure BB′ se coupant en I.

1° Évaluer l'angle OIO′ et comparer les triangles OAI et IA′O′.

2° Calculer en fonction de R et R′ les produits $\overline{IA} \cdot \overline{IA'}$ et $\overline{IB} \cdot \overline{IB'}$.

3° Soit H la projection de I sur OO′. Montrer que ce point est sur les cercles circonscrits aux quadrilatères IOAB et IO′A′B′. En déduire la valeur des angles AHA′ et BHB′ et que HA et HA′ recoupent respectivement les cercles O et O′ en C et C′ points de contact de la seconde tangente intérieure.

476. On considère un triangle équilatéral ABC, de côté a, situé dans un plan (P). Soit H l'orthocentre de ce triangle. On désigne par M un point quelconque de la droite (Δ), perpendiculaire en H au plan (P).

1° Démontrer que chaque côté du triangle ABC est perpendiculaire au plan déterminé par le sommet opposé et la droite (Δ).

2° On considère les droite issues de M, perpendiculaires aux plans MBC, MCA, MAB et l'on désigne respectivement par A′, B′, C′ les points où elles coupent le plan (P). Montrer que les triangles ABC, A′B′C′ sont semblables; déterminer le rapport $\frac{A'B'}{AB}$.

3° Étudier, en fonction de la longueur $HM = x$, la variation du périmètre y du triangle A′B′C′.

4° Déterminer la position du point M pour que ce périmètre ait une longueur donnée l.

Cas particulier : $l = 3a$. Construction géométrique du point M correspondant.

477. On donne deux points A et B et un nombre k.

1° Montrer que les plans P tels que le rapport des distances de A et B au plan P soit égal à k, passent par l'un ou l'autre de deux points fixes I ou J.

2° Caractériser les plans dont les distances à trois points donnés A, B et C soient proportionnelles à trois nombres donnés a, b et c.

3° Déterminer un plan dont les distances à quatre points donnés soient proportionnelles à quatre nombres donnés.

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE CERCLE

411. Théorème I. — ***Si d'un point*** M ***on mène deux sécantes*** MAB ***et*** MCD ***à un cercle, on a la relation :***

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}.$$

Menons AD et BC (fig. 370 et 371). Les triangles MAD et MCB ont les angles en M opposés par le sommet ou confondus et les angles inscrits D et B égaux. Ils sont semblables (1er cas) et :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{MAD}\\ \text{MCB}\end{array}\right. \qquad \frac{\text{MA}}{\text{MC}} = \frac{\text{MD}}{\text{MB}} \Longrightarrow \text{MA.MB} = \text{MC.MD}.$$

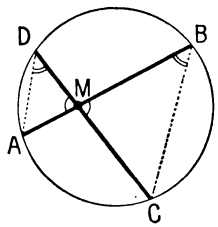


Fig. 370.

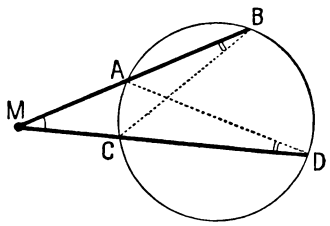


Fig. 371.

Les deux produits $\overline{MA}.\overline{MB}$ et $\overline{MC}.\overline{MD}$ ont même valeur absolue. Ils sont tous deux négatifs si M est intérieur au cercle et tous deux positifs si M est extérieur. Ils sont donc égaux.

412. Réciproque. — ***Si les côtés*** AB ***et*** CD ***d'un quadrilatère se coupent en un point*** M ***tel que*** $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$ ***ce quadrilatère est inscriptible.***

Soit D′ le point où le cercle ABC recoupe CD. On a : $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD'}$ et par suite $\overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MC}.\overline{MD'}$ ou $\overline{MD} = \overline{MD'}$.

Les points D et D′ sont confondus et le cercle ABC passe par D.

413. Théorème II. — ***Si d'un point*** M ***extérieur à un cercle on mène une tangente*** MA ***et une sécante*** MBC, ***on a la relation :***

$$\overline{MA^2} = \overline{MB}.\overline{MC}.$$

Les triangles MAB et MCA (fig. 372) ont l'angle M commun et les angles A et C égaux (n° 173). Ils sont semblables (1er cas) et :

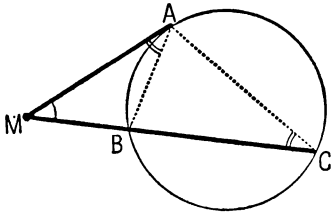


Fig. 372.

$$\left\{\begin{matrix}\text{MAB}\\ \text{MCA}\end{matrix}\right. \qquad \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA}$$

soit $\overline{MA^2} = MB.MC.$

Comme $\overline{MA^2}$ et $\overline{MB}.\overline{MC}$ sont tous deux positifs, ils sont donc égaux.

414. Réciproque. — ***Si un point*** M ***du côté*** BC ***d'un triangle*** ABC ***est tel que*** $\overline{MA^2} = \overline{MB}.\overline{MC}$ ***la droite*** MA ***est tangente au cercle circonscrit au triangle.***

Soit C′ le point où le cercle passant par A et B et tangent à MA recoupe BC. On a : $\overline{MA^2} = \overline{MB}.\overline{MC'}$ et par suite $\overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MB}.\overline{MC'}$ ou $\overline{MC} = \overline{MC'}$.

Les points C et C′ sont confondus. Autrement dit le cercle ABC est tangent en A à MA.

BISSECTRICES D'UN TRIANGLE

415. Théorème. — ***Les bissectrices d'un angle d'un triangle divisent intérieurement et extérieurement le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.***

Soit un triangle ABC (fig. 373). Par B menons la parallèle à AC qui coupe en E et E′ les bissectrices intérieure et extérieure AD et AD′ de l'angle A. L'angle AEB égal à l'angle DAC comme alterne-interne est donc égal à l'angle EAB. Le triangle ABE est isocèle et EB = AB. Les triangles semblables DEB et DAC donnent :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{AC} \Longrightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

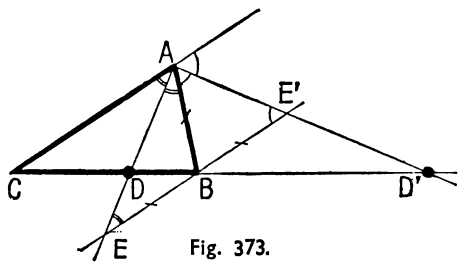


Fig. 373.

On montrerait de même que E′B = AB et que $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$. Donc :

Les pieds D *et* D′ *des bissectrices d'un angle* BAC *divisent harmoniquement le segment* BC *dans le rapport* $\frac{AB}{AC}$.

REMARQUE. — Si AB = AC le point D est au milieu de BC et la bissectrice extérieure AE′ est parallèle à BC. On vérifie à nouveau que le milieu de BC n'a pas de conjugué harmonique par rapport à B et C.

416. Réciproque. — ***Les droites qui joignent un sommet*** A ***d'un triangle aux points qui divisent le côté opposé*** BC ***dans le rapport des côtés adjacents*** AB ***et*** AC ***sont les bissectrices de l'angle*** A.

En effet il n'existe que deux points D et D′ divisant BC dans le rapport $\frac{AB}{AC}$.

Or, d'après le théorème précédent, ces deux points sont les pieds des bissectrices de l'angle A.

Ainsi (n° 388) lorsque deux cercles O et O′ sont sécants en A et B leurs centres d'homothétie sont les pieds des bissectrices de l'angle A du triangle AOO′ (fig. 374).

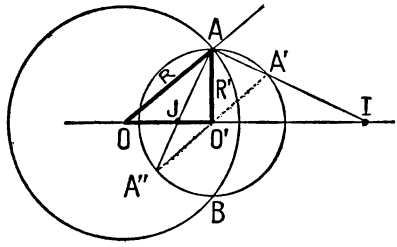


Fig. 374.

417. Calcul des segments DB, DC, D′B et D′C (fig. 373).

Posons BC = a, CA = b et AB = c. (On suppose $b > c$).

1° On a : $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ et DB + DC = BC = a.

Donc $\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{c + b} = \frac{a}{b + c}$.

Soit $DB = \frac{ac}{b + c}$ et $DC = \frac{ab}{b + c}$.

2° De même : $\frac{D'B}{D'C} = \frac{c}{b}$ et D′C — D′B = BC = a.

Donc $\frac{D'B}{c} = \frac{D'C}{b} = \frac{D'C - D'B}{b - c} = \frac{a}{b - c}$.

Soit $D'B = \frac{ac}{b - c}$ et $D'C = \frac{ab}{b - c}$.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

418. Théorème — ***Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux droites fixes est constant se compose de deux droites passant par le point d'intersection des deux premières.***

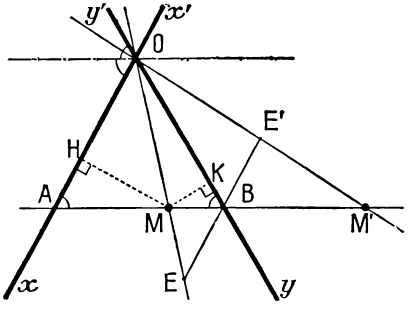


Fig. 375.

Notons d'abord que si $k = 1$ le lieu est formé des deux bissectrices des angles formés par ces deux droites (n° 185).

Supposons $k \neq 1$. Désignons par MH et MK les distances d'un point quelconque M aux deux droites fixes $x'x$ et $y'y$ et menons par M la parallèle AB à l'une des bissectrices des angles formés en O (fig. 375). Le triangle OAB est isocèle car les angles aigus en A et B sont égaux; les triangles rectangles MHA et MKB sont semblables (1er cas). Donc : $\frac{MH}{MK} = \frac{MA}{MB}$. Pour que M soit un point du lieu il faut et il suffit que $\frac{MA}{MB}$ soit égal à k. Or la sécante AB est parallèle à une direction fixe, nous sommes donc ramenés au lieu du n° 392.

Construction du lieu. — Soient m et n deux segments tels que $\frac{m}{n} = k$. Construisons $OA = OB = m$ et sur la parallèle à $x'x$ passant par B portons $BE = BE' = n$ (fig. 375). Les droites OE et OE' sont les droites cherchées car d'après la construction (n° 409): $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{m}{n} = k$.

419. Théorème. — ***Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points donnés*** A ***et*** B ***a une valeur*** k ***différente de l'unité est un cercle admettant pour diamètre le segment qui joint les points qui divisent le segment*** AB ***dans le rapport*** k.

1° Soit M un point du lieu (fig. 376). Les bissectrices de l'angle AMB coupent AB en I et J tels que (n° 415) :

$$\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{MA}{MB} = k.$$

Les points I et J sont déterminés car ils divisent AB dans le rapport k donné. L'angle IMJ est droit et M appartient au cercle de diamètre IJ.

2° Réciproquement, si M est un point quelconque du cercle de diamètre IJ, l'angle IMJ est droit. On peut construire un angle AMx admettant MI et MJ pour bissectrices. Le côté Mx coupe la droite IJ en un point conjugué harmonique de A par rapport à I et J, c'est-à-dire en B. La droite MI est donc bissectrice de l'angle AMB et $\frac{MA}{MB} = \frac{IA}{IB} = k$. Le lieu cherché est donc le cercle de diamètre IJ.

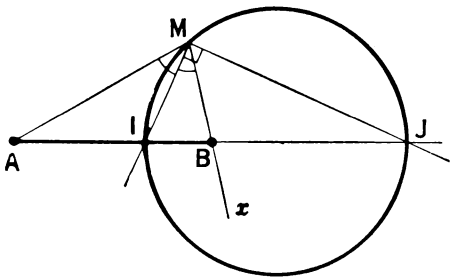


Fig. 376.

REMARQUE. — Si $k = 1$ le raisonnement précédent n'est plus valable car J n'existe plus. Mais on a alors MA = MB et le lieu est la médiatrice de AB (n° 183).

POLYGONES SEMBLABLES

420. Définition. — ***Deux polygones sont semblables lorsque l'un d'eux est égal à un homothétique de l'autre.***

Cette définition généralise celle des triangles semblables. Le polygone A'B'C'D'E' égal au polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ lui-même homothétique du polygone ABCDE, est semblable au polygone ABCDE (fig. 377). Il en résulte que :

Deux polygones semblables ont leurs angles homologues égaux et leurs côtés homologues proportionnels.

Le rapport de similitude est celui de deux côtés homologues.

421. Théorème. — ***Pour que deux polygones soient semblables il faut et il suffit que l'on puisse les décomposer par des diagonales en un même nombre de triangles respectivement semblables et disposés de la même façon.***

1° Les triangles A'B'C', A'C'D', et A'D'E' (fig. 377) sont respectivement égaux aux triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$ et $A_1D_1E_1$. Ceux-ci sont respectivement homothétiques des triangles ABC, ACD et ADE. Les deux polygones semblables sont décomposés en triangles semblables disposés de la même façon.

2° Supposons que les triangles A'B'C', A'C'D' et A'D'E' soient respectivement semblables aux triangles ABC, ACD et ADE et qu'ils aient même

disposition que ces derniers. Les trois rapports de similitude sont égaux car les deux premiers sont égaux à $\frac{A'C'}{AC}$ et les deux derniers à $\frac{A'D'}{AD}$. Soit k leur valeur commune.

Construisons un polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ homothétique de ABCDE dans le rapport k. On obtient :

$$A_1B_1 = k.AB = A'B'; \quad B_1C_1 = k.BC = B'C' \text{ etc.}$$

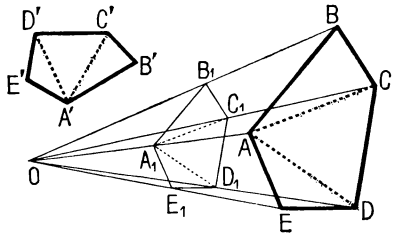


Fig. 377.

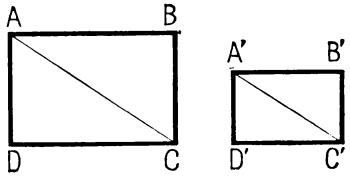


Fig. 378.

On voit que les triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$ et $A_1D_1E_1$ et les triangles A'B'C', A'C'D' et A'D'E' ont leurs côtés homologues respectivement égaux. Ils sont donc eux-mêmes respectivement égaux et ont même disposition (celle de ABC, ACD et ADE). Si on superpose A'B'C' et $A_1B_1C_1$, le point D' viendra en D_1 et E' en E_1. Le polygone A'B'C'D'E' égal au polygone $A_1C_1B_1D_1E_1$ est donc semblable au polygone ABCDE.

422. Exemples.

1° ***Deux carrés sont semblables.*** — Ils sont en effet décomposables en deux triangles rectangles isocèles donc semblables.

2° ***Deux rectangles qui ont des côtés proportionnels sont semblables*** (fig. 378). — En effet les triangles ABC et A'B'C' sont semblables (2e cas) et il en est de même de ADC et A'D'C'.

423. Rapport des périmètres de deux polygones semblables.

Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal à leur rapport de similitude.

En effet si les polygones semblables A'B'C'D'E' et ABCDE ont pour rapport de similitude k :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}$$

$$= \frac{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'}{AB + BC + CD + DE + EA} = k.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\frac{\text{Périmètre A'B'C'D'E'}}{\text{Périmètre ABCDE}} = k}.$$

Ce théorème s'applique en particulier aux triangles semblables.

EXERCICES

478. On mène d'un point extérieur M les sécantes MAB et MCD à un cercle de centre O et de rayon R = 30, puis le diamètre EF issu de M et la tangente MT.

1° Sachant que MA = 54, MB = 96 et MC = 64. Calculer MD.

2° Calculer MT, MO, puis ME et MF.

3° Calculer les distances OH et OI du point O aux cordes AB et CD.

479. Par un point M intérieur à un cercle de centre O et de rayon R on mène deux cordes AB et CD, le diamètre EF et la corde PQ perpendiculaire à ce diamètre.

1° Sachant que MA = 80, MB = 45 et MC = 48, calculer MD et MP.

2° Sachant que OM = 32, calculer R, ME et MF et les distances du point O à AB et CD.

3° Les tangentes en P et Q se coupent en N. Calculer ON et NP.

480. Soit un segment AB et un point I de la droite AB en dehors de AB. On mène un cercle variable passant par A et B et les tangentes IM et IM' à ce cercle.

1° Lieu géométrique des points M et M'.

2° Ce lieu coupe AB en C et D. Étudier la division ABCD.

481. Dans un triangle ABC les bissectrices intérieures AD, BE, CF se coupent en I.

1° Évaluer en fonction des côtés a, b, c du triangle les rapports $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$, $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}$ et $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$ puis leur produit.

2° Évaluer en fonction de a, b, c les rapports $\frac{\overline{DI}}{\overline{DA}}$, $\frac{\overline{EI}}{\overline{EB}}$ et $\frac{\overline{FI}}{\overline{FC}}$ et calculer leur somme.

482. Soient deux cordes AB et AC d'un cercle O. On mène le diamètre IJ perpendiculaire à BC qui coupe AB en E et AC en F.

1° Que représentent AI et AJ pour l'angle BAC?

2° Comparer les rapports $\frac{IE}{IF}$ et $\frac{JE}{JF}$.

3° Calculer le produit $\overline{OE}.\overline{OF}$ en fonction du rayon R du cercle.

483. Dans un triangle ABC on désigne par D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C, par H l'orthocentre, par P l'intersection de AD et EF.

1° Montrer que les bissectrices du triangle DEF sont les hauteurs de ABC.

2° Établir la relation : $\frac{2}{\overline{AH}} = \frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

484. On mène d'un point A les tangentes AB et AC à un cercle O. La corde de contact BC coupe le diamètre AO en H et AO coupe le cercle en D et E.

2° Établir la relation $\overline{OA}.\overline{OH} = R^2$ en désignant par R le rayon du cercle.

485. Deux cercles O et O' sont sécants en A et B. Soient I et J les centres d'homothétie positive et négative des deux cercles.

1° Montrer que AI et AJ sont bissectrices de l'angle OAO'.

2° Montrer que le cercle de diamètre IJ passe par A et B.

486. On considère un triangle ABC inscrit dans le cercle O. La tangente en A coupe BC en I. Soient D et E les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A.

1° Montrer que le triangle IAD est isocèle. En déduire que I est le milieu de DE.

2° Établir la relation $\overline{IA}^2 = \overline{IB}.\overline{IC}$.

3° Calculer IB et IC en fonction des côtés du triangle ABC.

487. Soit un triangle ABC, AH la hauteur issue de A, K le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A, D et E les projections sur BC du centre du cercle inscrit I et du centre du cercle J exinscrit dans l'angle A.

1° Montrer que la division AKIJ est harmonique.

2° Montrer qu'il en est de même de la division HKDE.

3° M étant le milieu de BC établir la relation : $\overline{MD}^2 = \overline{MH}.\overline{MK}$.

488. On donne 3 points alignés ABC (B entre A et C).

1° Trouver le lieu des points M d'où l'on voit AB et BC sous le même angle.

2° Soit D un point de la droite ABC. Construire un point M d'où l'on voit AB, BC et CD sous le même angle.

489. On considère deux cercles O et O' de rayons R et R'.

1° D'un point M on voit ces cercles sous le même angle, c'est-à-dire que les tangentes menées de M au cercle O et au cercle O' font le même angle. Évaluer le rapport $\frac{MO}{MO'}$ en fonction de R et R'. Trouver le lieu de M.

2° Construire un point M d'où l'on voit trois cercles O, O', O" sous le même angle.

490. Dans un trapèze isocèle ABCD de bases AB et CD les sommets A et D sont fixes et le rapport $\frac{DC}{AB}$ est constant.

1° Soit M l'intersection des diagonales. Comparer $\frac{MA}{MD}$ et $\frac{AB}{DC}$.

2° Trouver le lieu du point M.

491. Soient trois points alignés A, B et C; B est entre A et C et on pose AB = a; BC = b. Une droite variable Δ tourne autour de B et on construit les symétriques A' et C' de A et C par rapport à Δ; les droites AC' et A'C se coupent en M.

1° Lieux des points A' et C'.

1° Évaluer le rapport $\frac{MA}{MC}$ en fonction de a et b.

3° Le lieu du point M est un cercle dont on calculera le rayon en fonction de a et b.

492. On désigne par a, b, et c les côtés du triangle ABC, et par D et D', E et E', F et F' les pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles A, B et C.

1° Montrer que les cercles de diamètres DD', EE' et FF' ont deux points communs vérifiant la relation : a.MA = b.MB = c.MC.

2° En déduire que les milieux I, J et K de DD', EE' et FF' sont alignés. Que peut-on dire des pieds des tangentes en A, B et C au cercle circonscrit à ABC?

493. Construire un triangle ABC connaissant BC = a, le rapport des côtés AB et AC et : 1° L'angle A. 2° La hauteur AA'. 3° La bissectrice AD ou AD'. 4° Le rapport des deux bissectrices précédentes.

494. Dans un triangle ABC on mène la hauteur AA' et la médiane AM. On suppose que les points A et M sont fixes ainsi que le rapport $\frac{AB}{BC} = k$.

1° Lieux des points A', B et C.

2° Construire ABC connaissant AM, AA' et k.

495. On désigne par AD la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du point A.

1° On suppose connus les points A et D et le rapport $\frac{AB + AC}{BC}$. Évaluer les rapports $\frac{BA}{BD}$ et $\frac{CA}{CD}$ et en déduire le lieu des points B et C.

2° Construire le triangle connaissant les longueurs AD, BC et AB + AC.

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

424. Définitions. — 1° On appelle *relation métrique* toute relation entre les mesures de différents segments.

Ainsi (n° 407) : $AB.AC = AD.AH$ ou $bc = 2Rh_a$.

2° On dit qu'un nombre x est *moyen proportionnel* entre a et b si :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{ou} \quad x^2 = ab.$$

3° La *projection orthogonale d'un segment* AB sur une droite xy est le segment A'B' limité par les projections de A et de B (fig. 379).

425. Lemme. — ***La hauteur*** AH ***d'un triangle rectangle*** ABC ***détermine deux triangles*** HBA ***et*** HAC ***semblables au triangle*** ABC ***et semblables entre eux.***

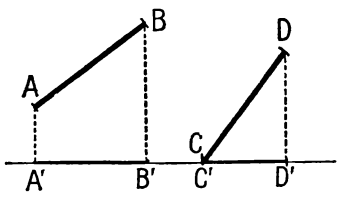


Fig. 379.

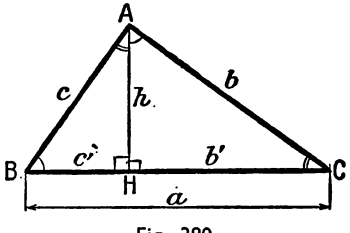


Fig. 380.

En effet (fig. 380) les triangles HBA et ABC sont rectangles et ont l'angle aigu B commun, ils sont semblables (n° 403). De même HAC et ABC ont l'angle C commun, ils sont semblables. Par suite HBA et HAC semblables à ABC, sont semblables entre eux.

426. Théorème I. — ***Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.***

De la similitude des triangles $\left\{\begin{matrix} ABC \\ HBA \end{matrix}\right.$ il résulte que : $\frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA}$.

D'où : $\overline{AB}_2 = BC.HB.$

et de même : $\overline{AC}_2 = CB.CH.$

Si on suppose BC orienté on obtient les relations :

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BH} \quad \text{et} \quad \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{HC}. \tag{1}$$

REMARQUE. — Posons :

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AH = h$, $BH = c'$ et $CH = b'$.

Les relations précédentes s'écrivent :

$$\boxed{b^2 = ab'} \quad \text{et} \quad \boxed{c^2 = ac'}.$$

427. Théorème II (de Pythagore). — ***Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.***

En ajoutant membre à membre les deux relations du théorème précédent on obtient :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{BH} + \overline{BC}.\overline{HC} = \overline{BC}\,(\overline{BH} + \overline{HC}) = \overline{BC}^2.$$

Soit

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}. \tag{2}$$

Cette relation permet de calculer l'un des trois côtés d'un triangle rectangle quand on connaît les deux autres.

428. Théorème III. — ***Dans tout triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.***

De la similitude des triangles $\begin{cases} HBA \\ HAC \end{cases}$ il résulte que : $\dfrac{HB}{HA} = \dfrac{HA}{HC}$.

Donc

$$\overline{HA}^2 = HB.HC \quad \text{ou} \quad \boxed{h^2 = b'.c'}.$$

Si BC est orienté il faut écrire

$$\overline{AH}^2 = -\,\overline{HB}.\overline{HC} \quad \text{ou} \quad \overline{AH}^2 = \overline{BH}.\overline{HC}. \tag{3}$$

429. Théorème IV. — ***Dans tout triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur.***

La similitude des triangles $\begin{cases} ABC \\ HBA \end{cases}$ donne $\dfrac{AC}{HA} = \dfrac{BC}{BA}$.

Donc :

$$\mathrm{AB.AC} = \mathrm{BC.AH} \quad \text{ou} \quad \boxed{bc = ah}. \tag{4}$$

Observons que cette relation n'est autre que la relation $bc = 2Rh_a$ (n° 407) car dans un triangle rectangle en A, on a : $a = 2R$.

430. Corollaires. — 1° ***Le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport de leurs projections sur l'hypoténuse.***
En divisant membre à membre les relations (1) on obtient :

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2}{\overline{\mathrm{AC}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{HC}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'}}. \tag{5}$$

2° ***L'inverse du carré de la hauteur est égal à la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit.***

La relation (4), compte tenu de la relation (2), s'écrit :

$$b^2c^2 = a^2h^2 \quad \text{ou} \quad b^2c^2 = h^2(c^2 + b^2).$$

Soit en divisant les deux membres par $h^2b^2c^2$:

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\overline{\mathrm{AH}}^2} = \frac{1}{\overline{\mathrm{AB}}^2} + \frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}^2}. \tag{6}$$

431. Réciproque du théorème de Pythagore. — ***Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, ce triangle est rectangle.***

Soit un triangle ABC tel que $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ (fig. 381). Construisons un triangle A'B'C' rectangle en A' tel que A'B' = AB et A'C' = AC. D'après le théorème direct :

$$\overline{\mathrm{B'C'}}^2 = \overline{\mathrm{A'B'}}^2 + \overline{\mathrm{A'C'}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2.$$

Donc B'C' = BC. Les deux triangles A'B'C' et ABC, ayant les trois côtés respectivement égaux, sont égaux (3e cas) et le triangle ABC est rectangle en A.

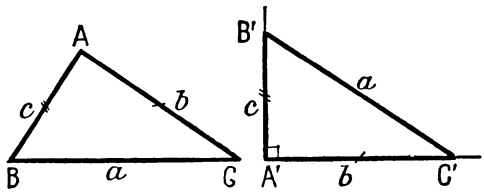


Fig. 381.

REMARQUES. — 1° Il résulte de la démonstration précédente que lorsque trois nombres a, b, c vérifient la relation $a^2 = b^2 + c^2$, il existe un triangle rectangle d'hypoténuse a et de côtés b et c.

Exemples : $a = 13,\ b = 4,\ c = 3 \quad (25 = 16 + 9).$
$a = 15,\ b = 12,\ c = 5 \quad (169 = 144 + 25).$

2° *Les relations* (1), (3) et (4) *sont de même nécessaires et suffisantes pour que le triangle* ABC *de hauteur* AH *soit rectangle en* A.

Supposons par exemple réalisée la relation (3) : $\overline{AH}^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}$.

En désignant par C′ l'intersection de BC et de la perpendiculaire en A à AB, on a, d'après le théorème direct : $\overline{AH}^2 = -\overline{HB}.\overline{HC'}$. Ce qui montre que $\overline{HC} = \overline{HC'}$ et que le point C′ est en C.

432. Applications. — 1° **Diagonale d'un rectangle.** — Soit ABCD un rectangle de côtés AB = a et BC = b (fig. 382). Dans le triangle rectangle ABC :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \quad \text{soit} \quad d^2 = a^2 + b^2.$$

Donc : $\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

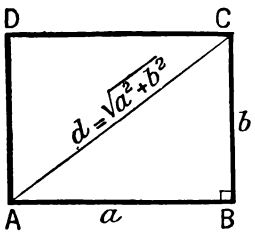


Fig. 382.

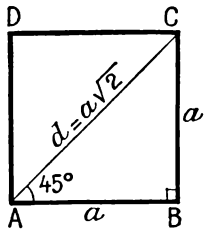


Fig. 383.

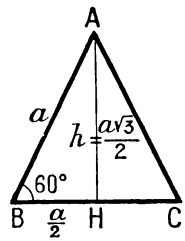


Fig. 384.

2° **Diagonale d'un carré.** — Si ABCD est un carré de côté a (fig. 383) on obtient :

$$d^2 = a^2 + a^2$$

soit : $\boxed{d = a\sqrt{2}}$ $\qquad (\sqrt{2} = 1{,}414...).$

Notons que cette formule donne *l'hypoténuse* AC *d'un triangle rectangle isocèle* ABC *de côté* a.

3° **Hauteur d'un triangle équilatéral.** — Soit ABC un triangle équilatéral de côté a (fig. 384) et soit AH = h la hauteur issue de A. On a :

$$BH = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

D'où : $$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

soit $\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$ $(\sqrt{3} = 1{,}732...)$.

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

433. Moyenne proportionnelle (ou géométrique) de deux segments. Étant donnés deux segments a et b, il s'agit de construire le segment x tel

que $$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{ou} \quad x^2 = ab$$

ou $$x = \sqrt{ab}.$$

1° CONSTRUCTION. — Portons sur une droite deux segments HA $= a$ et HB $= b$ de sens contraires (fig. 385). Traçons le demi-cercle de diamètre AB, puis la perpendiculaire en H à AB qui coupe le demi-cercle en M. Le triangle AMB est rectangle en M et (n° 428).

$$\overline{MH}^2 = AH.HB = ab.$$

Donc : $$MH = x.$$

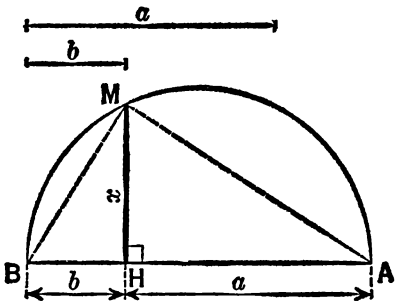


Fig. 385.

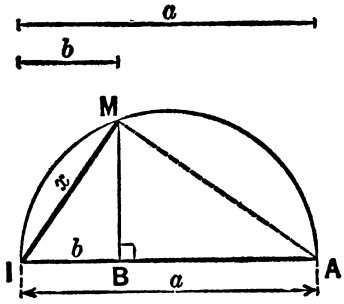


Fig. 386.

2° CONSTRUCTION. — Portons sur une droite deux segments de même sens IA $= a$ et IB $= b$ (fig. 386). Traçons le demi-cercle de diamètre IA (en supposant $a > b$) et la perpendiculaire en B à IA qui coupe le demi-cercle en M. Le triangle IMA est rectangle en M et (n° 427)

$$\overline{IM}^2 = \overline{IA}.\overline{IB} = ab.$$

Donc $$IM = x.$$

434. Applications du théorème de Pythagore. Soit à construire

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

La longueur x est l'hypoténuse d'un triangle rectange OAB tel que OA $= a$ et OB $= b$ (fig. 387). La longueur y est le côté AB d'un triangle rectangle OBA (fig. 388 et 389) dont l'hypoténuse est OA $= a$ et le côté OB $= b$ (n° 204).

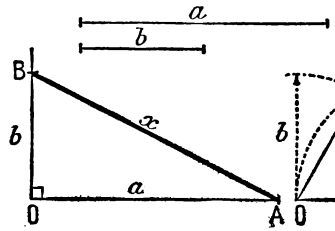


Fig. 387.

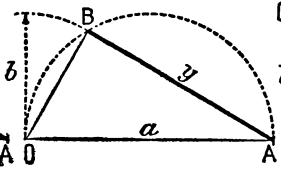


Fig. 388.

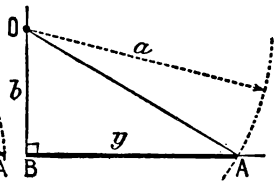


Fig. 389.

435. Construire un segment dont la longueur est une racine carrée. Soit à construire le segment $x = a\sqrt{k}$, a étant un segment donné et k un nombre donné.

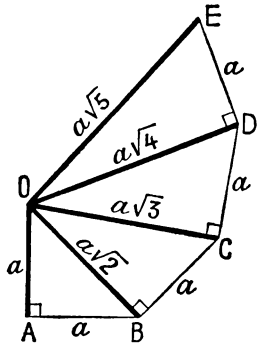


Fig. 390.

1° On a : $x^2 = a.ka$. Par suite x est moyen proportionnel entre les segments a et ka. On est ramené à l'une des constructions du n° 433.

2° Le nombre k est toujours décomposable en une somme ou une différence de deux ou plusieurs carrés. On est alors ramené à utiliser les constructions du n° 434.

Ainsi construisons OA $= a$ (fig. 390) puis AB $= a$ perpendiculaire à OA, BC $= a$ perpendiculaire à OB, etc. On obtient successivement :

$$\text{OB} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2},$$

$$\text{OC} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3},$$

$$\text{OD} = a\sqrt{4} = 2a. \qquad \text{OE} = a\sqrt{5}, \text{ etc.}$$

Exemples. — Pour construire la longueur

$$x = a\sqrt{13}.$$

on peut construire :

$$x^2 = a \times 13a\,; \quad x^2 = (3a)^2 + (2a)^2$$

ou

$$x^2 = (7a)^2 - (6a)^2.$$

De même pour obtenir $x = a\sqrt{19}$, construire $y^2 = (4a)^2 + (2a^2) = 20a^2$ puis

$$x^2 = y^2 - a^2.$$

On obtient :

$$x^2 = 19a^2.$$

EXERCICES

— Dans un triangle ABC rectangle en A on pose BC = a, CA = b, AB = c, AH = h, CH = b' et BH = c'. Calculer les éléments inconnus sachant que :

496. $b = 130$; $c = 312$. **497.** $b = 136$; $h = 120$. **498.** $b = 156$; $b' = 144$.

499. $a = 125$; $b = 35$. **500.** $b' = 225$; $c' = 64$. **501.** $b' = 144$; $h = 510$.

502. $a = 289$; $h = 120$. Calculer d'abord $(b + c)^2$ et $(b - c)^2$.

503. $b = 255$; $c' = 64$. Démontrer d'abord que $(a + b')^2 = 4b^2 + c'^2$.

504. Soit un triangle ABC dans lequel la hauteur AH tombe entre B et M milieu de BC. On a : BH = 75, CH = 96 et AB = 85.

1° Calculer les côtés inconnus et le rayon R du cercle circonscrit.

2° Calculer la médiane AM et les bissectrices AD et AD' de l'angle A.

— Reprendre l'exercice précédent pour :

505. AB = 30; AH = 24; HC = 32. **506.** AB = 70; AC = 119; AH = 56.

507. AB = 50; AC = 52; BH = 14. **508.** AB = 65; AC = 87; MH = 19.

509. Deux cercles de centres O et O' et de rayons R et R' sont tangents extérieurement en T et tangents en A et B à la droite AB.

Évaluer AB en fonction de R et R'. Montrer que l'angle ATB est droit et que le cercle de diamètre AB est tangent en T à OO'.

510. Dans un trapèze ABCD rectangle en A et D on pose : AD = h, AB = b, CD = b' et BC = a.

1° Établir la relation qui existe entre les quatre côtés.

2° Soit O le milieu de AD. On suppose que $a = b + b'$. Montrer que le triangle OBC est rectangle et que le cercle de diamètre AD est tangent à BC.

511. Dans un triangle ABC les angles B et C ont pour différence 1D.

1° Démontrer que le diamètre AA' = 2 R du cercle ABC est parallèle à BC et que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4R^2.$$

2° Montrer que la hauteur AH est telle que :

$$\overline{HA}^2 = \overline{HB}.\overline{HC} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{AH}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2}.$$

512. Deux cercles variables O et O' de rayons R et R' sont tangents en deux points fixes A et B à la droite AB et sont tangents entre eux en M.

1° Montrer que la tangente en M passe par le milieu I de AB. En déduire le lieu de M, l'enveloppe de la droite OO' et le lieu du milieu J de la seconde tangente extérieure.

2° On pose AB = 2 a. Trouver la relation entre R, R' et a.

3° On se donne le rapport des rayons : Construire les deux cercles.

513. On mène une tangente mobile en M à un demi-cercle de diamètre AB = 2R et de centre O. Cette tangente coupe en I la droite AB et en C et D les tangentes en A et B.

1° Montrer que l'angle COD est droit. Évaluer en fonction de R les deux produits $\overline{MC}.\overline{MD}$ et $\overline{AC}.\overline{BD}$. Étudier les réciproques possibles.

2° Soit H la projection de M sur AB. Montrer que les divisions CDMI et ABHI sont harmoniques. En déduire que MH est bissectrice de CHD.

3° Les perpendiculaires en C et D à CD coupent AB en R et S. Montrer que les cercles de centres R et S passant respectivement par C et D sont tangents en O.

— a, b, et c désignant des longueurs données, construire les longueurs :

514. $a\sqrt{7}$. **515.** $a\sqrt{10}$. **516.** $a\sqrt{15}$.

517. $a\sqrt{17}$. **518.** $a\sqrt{29}$. **519.** $a\sqrt{34}$.

520. $a\sqrt{39}$. **521.** $a\sqrt{41}$. **522.** $a\sqrt{61}$.

523. $\sqrt{4a^2 + b^2}$. **524.** $\sqrt{9a^2 + 4b^2}$. **525.** $\sqrt{25a^2 + 4b^2 + c^2}$.

526. $\sqrt{9a^2 - b^2}$. **527.** $\sqrt{25a^2 - 4b^2}$. **528.** $\sqrt{25a^2 - 9b^2 + 4a^2}$.

529. $\sqrt{a^2 + bc}$. **530.** $\sqrt{9a^2 - 5bc}$. **531.** $\sqrt{15a^2 - 4b\,(b + c)}$.

532. $a(\sqrt{5} + \sqrt{3})$. **533.** $a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. **534.** $a\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

535. $\frac{a}{2}\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$. **536.** $a\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. **537.** $a\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

538. Construire $x = \frac{22a}{7}$, $y = a(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ et $z = \frac{3a}{5}(3 + \sqrt{5})$.

et comparer les segments obtenus.

539. Même problème pour $x = \frac{7a}{22}$, $y = a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ et $z = \frac{5a}{12}(3 - \sqrt{5})$

540. Construire, étant données deux longueurs a et b $(a < b)$, les longueurs x et y telle que : $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ et $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$.

541. On considère un triangle ABC rectangle en A de hauteur AH. Une parallèle à BC coupe AB en D et AC en E. Démontrer que : $\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AE}^2} = \frac{HB}{HC}$.

a, b, c étant des longueurs données en déduire une construction de la longueur x telle que : $\frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c}$.

542. Soit un triangle ABC rectangle en A. Par un point D de la hauteur AH on mène les parallèles aux côtés AB et AC qui coupent BC en E et F. Démontrer que :

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{HE}{HF}.$$

En déduire, connaissant les longueurs a, b et c une construction de la longueur x telle que : $\frac{x}{a} = \frac{b^2}{c^2}$.

543. Soit un tétraèdre SABC, tel que SA = SB = SC = AB = BC = CA.

On désigne par a la longueur commune de ces six arêtes.

1° Démontrer que le sommet S se projette orthogonalement sur le plan du triangle ABC, au centre H du cercle circonscrit à ce triangle. Calculer HS en fonction de a.

2° Montrer que AB et SC sont orthogonales.

3° Par un point M de AB, tel que AM = x, on mène le plan perpendiculaire à AB. Comment ce plan coupe-t-il le tétraèdre? Comparer la section obtenue au triangle SCI, I désignant le milieu de AB. Calculer, en fonction de x, le périmètre de la section; étudier ses variations et représenter graphiquement, lorsque x varie de 0 à a. Est-il possible que ce périmètre soit égal à $2a$?

544. On considère un tétraèdre SABC dans le quel le trièdre de sommet S est trirectangle et on pose SA = a, SB = b et SC = c.

1° Le point S se projette orthogonalement en K sur la droite AB et en H sur le plan ABC. Démontrer que :

$$\frac{1}{\overline{SH}^2} = \frac{1}{\overline{SK}^2} + \frac{1}{\overline{SC}^2} = \frac{1}{\overline{SA}^2} + \frac{1}{\overline{SB}^2} + \frac{1}{\overline{SC}^2}$$

En déduire la longueur SH = h en fonction de a, b, et c.

2° On construit $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$. Soit D la projection de P sur le plan ABC. Montrer que le milieu O de SP est équidistant des sommets du tétraèdre ainsi que des points P et D. Calculer OS.

3° La droite OS coupe le plan ABC en G. Que représente G pour chacun des triangles ABC et SCD ? En déduire la longueur SG.

545. Un tétraèdre OABC a ses arêtes OA, OB, OC égales à a : les angles AOB et AOC valent 60°, l'angle BOC vaut 90°.

1° Évaluer les autres arêtes en fonction de a et montrer que le triangle ABC est rectangle.

2° Montrer que les arêtes opposées OA et BC sont orthogonales et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux I et J Montrer que le tétraèdre possède deux plans de symétrie et un axe de symétrie.

3° Montrer que le dièdre d'arête BC est droit. Évaluer en fonction de a la longueur du segment IJ.

546. On donne un carré ABCD de côté a et de centre O. On élève en A, B, C, D, au plan du carré et d'un même côté de celui-ci, quatre perpendiculaires Ax, By, Cz, Dt.

Sur Ax on prend un point A' tels que $OA' = a$ et sur Cz un point C' tel que $A'C' = 2a$.

1° Évaluer CC' en fonction de a. Que peut-on dire du triangle C'A'O?

Montrer que A'C' est perpendiculaire au plan DA'B.

2° On prend sur By un point B' tel que $BB' = x$ et sur Dt un point D' tel que $DD' = y$. Quelle relation lie x, y, a pour que A', B', C', D' soient dans un même plan? Dans ce cas, prouver que le quadrilatère A'B'C'D' est un parallélogramme.

3° Que vaut x :

α) pour que le plan A'B'C' passe par D?

β) pour que le parallélogramme A'B'C'D' soit un losange, un rectangle?

547. Dans deux plans perpendiculaires P et Q on considère deux triangles isocèles ACD et BCD ayant même base $CD = 2x$. Les autres côtés ont pour longueur a. Soient M le milieu de AB et N le milieu de CD.

1° Démontrer que MN est perpendiculaire à la fois à AB et à CD.

2° Calculer en fonction de a et x les longueurs AB et MN.

3° Pour quelle valeur de x le dièdre d'arête AB est-il droit? Calculer dans ce cas la longueur de AB et préciser la position du point O équidistant des quatre points A, B, C, D. Calculer la longueur OA.

548. On considère dans un plan P un losange formé de deux triangles équilatéraux égaux de côté a, ABD et BCD.

En A on mène la perpendiculaire au plan P, sur laquelle on porte la longueur $AS = a$.

Par un point M de la diagonale AC du losange on mène le plan Q perpendiculaire à cette diagonale. Le plan Q coupe le solide S.ABCD suivant un certain polygone F. On posera

$$CM = x\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1° Calculer les angles des triangles SAB, SAD et SAC ainsi que la longueur de leurs côtés.

2° Étudier suivant les valeurs de x la forme du polygone F. Calculer les longueurs de ses côtés et ses angles.

ÉLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE

436. Propriété fondamentale. — Considérons un angle aigu xOz égal à α (fig. 391). Soit M un point quelconque de Oz et P sa projection sur Ox. Le triangle rectangle OPM reste semblable à lui-même lorsque M parcourt Oz.

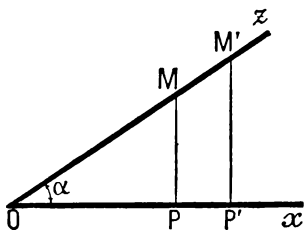


Fig. 391.

Donc :

$$\begin{cases} \text{OPM} \\ \text{OPM}' \end{cases} \quad \frac{\text{OP}}{\text{OP}'} = \frac{\text{PM}}{\text{P}'\text{M}'} = \frac{\text{OM}}{\text{OM}'}.$$

On en déduit les trois proportions :

$$\frac{\text{OP}}{\text{OM}} = \frac{\text{OP}'}{\text{OM}'}; \quad \frac{\text{PM}}{\text{OM}} = \frac{\text{P}'\text{M}'}{\text{OM}'} \quad \text{et} \quad \frac{\text{PM}}{\text{OP}} = \frac{\text{P}'\text{M}'}{\text{OP}'}.$$

Le rapport de deux côtés du triangle OPM est donc indépendant de la position du point M.

Inversement si on connaît la valeur de l'un de ces rapports on pourra construire un triangle O'P'M' semblable à OPM et par suite construire l'angle α.

437. Rapports trignométriques d'un angle aigu. — ***Les trois rapports*** $\frac{\text{OP}}{\text{OM}}, \frac{\text{PM}}{\text{OM}}$ ***et*** $\frac{\text{PM}}{\text{OP}}$, ***indépendants du point*** M, ***caractérisent l'angle aigu*** α. ***On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu*** α.

On peut envisager aussi les inverses de ces trois rapports. Pratiquement on n'utilise que l'inverse du dernier qui se nomme ***cotangente de l'angle*** α.

On écrit en abrégé (lire « cosinus α, sinus α, tangente α et cotangente α ») :

$\cos\alpha = \frac{\text{OP}}{\text{OM}}$	$\sin\alpha = \frac{\text{PM}}{\text{OM}}$	$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{PM}}{\text{OP}}$	$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{OP}}{\text{PM}} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

Sin α, ***cos*** α, ***tg*** α ***et cotg*** α ***constituent les rapports trigonométriques de l'angle*** α.

438. Interprétation géométrique. — Désignons par A et M les intersections de Ox et Oz avec le cercle de centre O et de rayon 1 (fig. 392), et par T l'intersection de la tangente en A et de Oz.

Il en résulte puisque

$$OA = OM = 1,$$

que :

$$\sin\alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{1}; \quad \cos\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1}$$

et

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1}.$$

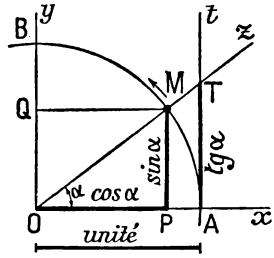


Fig. 392.

Soit

$$\boxed{\sin\alpha = PM \mid \cos\alpha = OP \mid \operatorname{tg}\alpha = AT}.$$

Remarquons que l'arc AM intercepté par l'angle xOz a pour mesure α. C'est pourquoi on parle indifféremment des rapports trigonométriques d'un angle ou d'un arc. D'autre part, si on désigne par Q la projection de M sur Oy on a : $\sin\alpha = OQ$.

REMARQUE IMPORTANTE. — Il faut éviter de supposer ici que $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ sont des segments. Il faut au contraire dans la formule $\cos\alpha = OP$ supposer que OP représente la mesure du segment OP, c'est-à-dire le *rapport du segment* OP *au segment unité* OA *ou* OM.

439. Rapports trigonométriques d'un angle obtus. — Orientons la droite Ox dans le sens de O vers A, la droite Oy dans le sens de O vers B et la droite At dans le même sens que Oy (fig 393). Si l'angle α est aigu, M est sur l'arc AB et :

$$\cos\alpha = \overline{OP},$$
$$\sin\alpha = \overline{OQ}$$
et $$\operatorname{tg}\alpha = \overline{AT}.$$

Ceci permet de généraliser la définition des rapports trigonométriques pour une valeur quelconque de l'angle α. Par définition (fig. 393 et 394) :

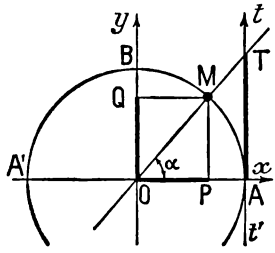


Fig. 393.

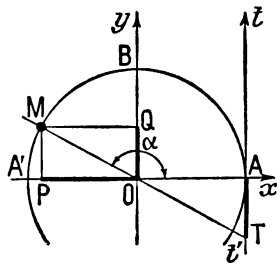


Fig. 394.

$$\boxed{\cos\alpha = \overline{OP} \mid \sin\alpha = \overline{OQ} \mid \operatorname{tg}\alpha = \overline{AT} \mid \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

440. Variations des rapports trigonométriques.

1° Si α varie de 0 à 90° (fig. 393), le point M décrit le quart de cercle AB :

P décrit le segment AO. Donc cos α décroît de + 1 à 0.

Q décrit le segment OB, donc sin α croît de 0 à + 1.

T décrit la demi-droite At donc tg α croît de 0 à + ∞ et son inverse cotg α décroît de + ∞ à 0.

2° Si α varie de 90° à 180° (fig. 394) M décrit l'arc BA′ :

P décrit le segment OA′ et cos α décroît de 0 à — 1.

Q décrit le segment BO et sin α décroît de + 1 à 0.

T décrit la demi-droite t'A et tg α croît de — ∞ à 0. Son inverse cotg α décroît de 0 à — ∞. Soit finalement :

α	0		90°		180°
sin α	0	↗	1	↘	0
cos α	1	↘	0	↘	— 1
tg α	0	↗	+ ∞ ‖ — ∞	↗	0
cotg α	+ ∞	↘	0	↘	— ∞

Ce qui permet d'en donner les représentations graphiques :

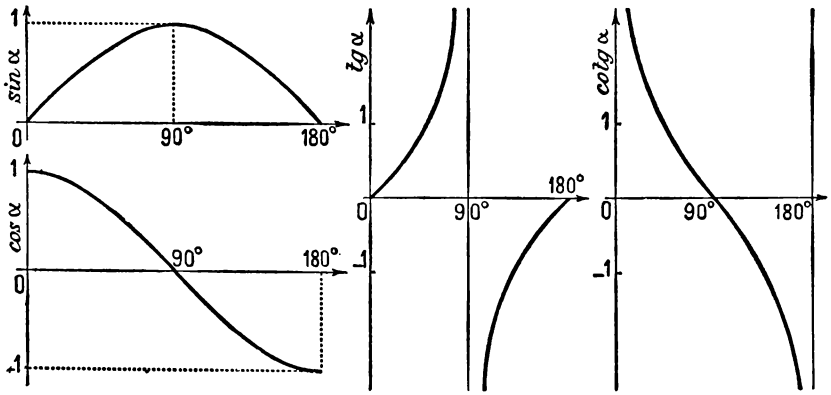


Fig. 395.

Notons que pour $\alpha = 90°$ la tangente n'existe plus et que :

Sin α est toujours positif tandis que cos α, tg α, et cotg α sont positifs lorsque α est aigu et négatifs lorsque α est obtus.

441. Relations entre les rapports trigonométriques de l'angle α.

Les rapports trigonométriques de l'angle α sont liés par les trois relations :

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad | \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad | \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad (1)\ (2)\ (3)$$

1° Considérons le triangle OPM (fig. 393 et 394). D'après la relation de Pythagore : $\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2$.

Or $OP = |\cos\alpha|$, $PM = OQ = \sin\alpha$ et $OM = 1$.

Donc : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

Par convention on écrit : $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$ et on lit : « cosinus carré α » afin de ne pas confondre avec $\cos(\alpha^2)$ ou $\cos(2\alpha)$.

2° Les triangles OPM et OAT sont homothétiques : $\dfrac{OP}{OA} = \dfrac{PM}{AT}$.

Soit $\dfrac{|\cos\alpha|}{1} = \dfrac{|\sin\alpha|}{|\operatorname{tg}\alpha|}$ ou puisque $\cos\alpha$ et $\operatorname{tg}\alpha$ sont de même signe tandis que $\sin\alpha$ est positif : $\cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$ donc : $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3° La formule de définition : $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ donne alors : $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

REMARQUE. — En éliminant $\sin\alpha$, puis $\cos\alpha$ entre les relations (1) et (2) on obtient :

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

442. Angles complémentaires. — *Lorsque deux angles sont complémentaires :*

1° ***Le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.***

2° ***La tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.***

Soient $AOM = \alpha$ et $AOM' = \alpha'$ deux angles aigus complémentaires (fig. 396). Les deux triangles rectangles OPM et M'P'O ont l'hypoténuse égale et leurs angles aigus respectivement égaux à α et à α'. Ils sont égaux et :

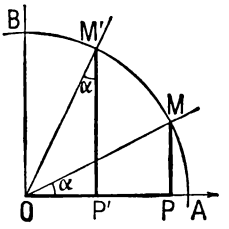


Fig. 396.

$$PM = OP' \qquad OP = P'M'.$$

Soit : $\sin\alpha = \cos\alpha' \qquad \cos\alpha = \sin\alpha'$.

En faisant les rapports membre à membre de ces deux égalités on obtient :

$$\text{tg } \alpha = \text{cotg } \alpha' \quad \text{et} \quad \text{cotg } \alpha = \text{tg } \alpha'.$$

443. Angles supplémentaires.

1° ***Les sinus de deux angles supplémentaires sont égaux.***

2° ***Leurs cosinus sont opposés ainsi que leurs tangentes.***

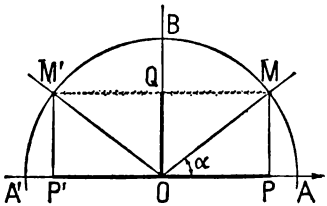


Fig. 397.

Soient (fig. 397) les angles AOM = α et AOM' = 180° — α. L'angle M'OP' est égal à α. Les deux triangles OPM et OP'M' sont égaux et symétriques par rapport à OB. Donc:

$$P'M' = PM = \overline{OQ} \text{ et } \overline{OP'} = -\overline{OP}.$$

Soit $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha.$

En faisant le rapport membre à membre, on obtient :

$$\text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha \quad \text{et} \quad \text{cotg}\,(180° - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha.$$

REMARQUE. — Ce théorème permet de ramener la détermination des rapports trigonométriques d'un angle obtus à celle des rapports d'un angle aigu.

444. Usage des tables de rapports trigonométriques. — Les tables pages 282 et 283 donnent les valeurs des rapports trigonométriques d'un angle aigu et de leurs inverses. Ces tables sont à double entrée (propriété des angles complémentaires). Les angles de 0 à 45° (ou 50 gr) se lisent de haut en bas, colonne de gauche en se reportant aux indications du haut de la table. Les angles de 45° à 90° (ou 50 gr à 100 gr) se lisent de bas en haut, colonne de droite en se reportant aux indications du bas de la table.

L'emploi est immédiat pour les nombres figurant dans la table :

$$\text{tg } 38° = 0{,}7813 \qquad \frac{1}{\cos 17°} = 1{,}046 \qquad 0{,}8746 = \cos 29° = \sin 61°.$$

Pour les autres valeurs on procède par *interpolation* en admettant que :

Entre deux valeurs consécutives de la table, l'accroissement de l'angle et l'accroissement d'un rapport trigonométrique sont proportionnels.

Ces accroissements doivent être pris en valeur algébrique.

445. 1er Problème. — *Déterminer :* $\sin 32°25'$ *et* $\cos 32°25'$.

On lit dans la table : $\sin 32° = 0{,}5299$; $\sin 33° = 0{,}5446$.

Pour un accroissement de α de 1° = 60', l'accroissement du sinus est (en dix millièmes)

$$D = 446 - 299 = 147.$$

Pour 1′ cet accroissement serait $\frac{147}{60}$ et pour 25′ la correction est donc :

$$\frac{147 \times 25}{60} = 61{,}25.$$

On arrondit à 61, ce qui donne : $\sin 32^\circ 25' = 0{,}5299 + 0{,}0061 = 0{,}5360$.

On opère de même pour le cosinus : seule différence, D est négatif ainsi que la correction.

DISPOSITION PRATIQUE.

$\sin 32^\circ \ldots\ldots = 0{,}5299$ D $= 147$	$\cos 32^\circ \ldots\ldots = 0{,}8480$ D $= -93$
Pour 25′ : $\frac{147 \times 25}{60} = 61$	Pour 25′ : $\frac{-93 \times 25}{60} = -38$
$\sin 32^\circ 25' \ldots\ldots = 0{,}5360$	$\cos 32^\circ 25' \ldots\ldots = 0{,}8442.$

446. 2e Problème. — *Déterminer* α *sachant que* $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7456$ et β *sachant que* $\frac{1}{\sin\beta} = 1{,}259$.

On lit dans la table : $0{,}7265 = \operatorname{tg} 36^\circ$; $0{,}7536 = \operatorname{tg} 37^\circ$.

Quand $\operatorname{tg}\alpha$ s'accroît de $D = 536 - 265 = 271$, α s'accroît de $1^\circ = 60'$. Pour un accroissement de $d = 456 - 265 = 191$ la correction pour α sera de

$$\frac{60' \times 191}{271} = 42'. \quad \text{D'où } \alpha = 36^\circ 42'.$$

DISPOSITION PRATIQUE

$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7265 \ldots\ldots \alpha = 36^\circ$ D $= 271$	$\frac{1}{\sin\beta} = 1{,}269 \ldots\ldots \beta = 52^\circ$ D $= -17$
Pour $191 : \frac{60' \times 191}{271} = 42'$	Pour $-10 : \frac{60' \times 10}{17} = 35'$
$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7456. \ldots\ldots \alpha = 36^\circ 42'$	$\frac{1}{\sin\beta} = 1{,}259. \ldots\ldots \beta = 52^\circ 35'$

N. B. — Les calculs sont analogues lorsqu'on opère en grades (remplacer 60 par 10 pour les décigrades ou 100 pour les centigrades).

EXERCICES

— Donner à l'aide de la table les rapport trigonométriques sin α, cos α, tg α et leurs inverses pour les angles suivants :

549. 10°, 37°, 65°, 80°.

550. 12 gr, 31 gr, 69 gr, 83 gr.

551. 32°, 41°, 69°, 76°.

552. 17 gr, 38 gr, 55 gr, 88 gr.

553. 67° 98° 121°, 168°.

554. 87 gr, 116 gr, 145 gr, 179 gr.

555. 36°, 112°, 140°, 163°.

556. 61 gr, 125 gr, 189 gr.

— Déterminer, en faisant l'interpolation, les rapports trigonométriques des angles suivants :

557. 13° 40′ **558.** 37° 24′ **559.** 58° 42′ **560.** 78° 31′

561. 12,7 gr **562.** 35,75 gr **563.** 62,43 gr **564.** 83,56 gr.

565. 118° 41′ **566.** 163° 37′ **567.** 121,57 gr **568.** 173,63 gr.

— Déterminer l'angle α en degrés et minutes sachant que :

569. $\sin \alpha = 0{,}5827$. **570.** $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2071$. **571.** $\cos \alpha = 0{,}8791$.

572. $\dfrac{1}{\sin \alpha} = 2{,}320$. **573.** $\operatorname{cotg} \alpha = 1{,}273$. **574.** $\dfrac{1}{\cos \alpha} = 1{,}742$.

575. $\cos \alpha = -0{,}7643$. **576.** $\operatorname{tg} \alpha = -1{,}743$. **577.** $\sin \alpha = 0{,}8743$.

578. $\dfrac{1}{\cos \alpha} = -1{,}641$. **579.** $\dfrac{1}{\sin \alpha} = 1{,}243$. **580.** $\operatorname{cotg} \alpha = -2{,}647$.

— Reprendre les exercices précédents en déterminant α en grades.

581. Construire sur un même graphique les courbes

$$y_1 = \sin x \quad \text{et} \quad y_2 = \cos x \ (0 \leqslant x \leqslant 180^\circ).$$

(Prendre sur Ox : 5 mm pour 10° et sur Oy : 5 cm pour unité).

582. Même exercice pour $y_1 = \operatorname{tg} x$ et $y_2 = \operatorname{cotg} x$.

583. Vérifier les formules :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

pour les angles suivants : 27°; 48°; 36 gr et 67 gr.

584. Sachant que $\operatorname{tg} x = t$, calculer $\sin x$ et $\cos x$. Distinguer le cas où t est positif et le cas où t est négatif. Applications : 1° $t = 0{,}8$, 2° $t = -1{,}5$.

585. Sachant que $\cos x = u$, calculer $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$. Discuter suivant le signe de u. Applications : 1° $u = 0{,}7$; 2° $u = -0{,}4$.

586. Sachant que $\sin x = v$ calculer $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$. Discuter :

1° $v = 0{,}6$ (x aigu). 2° $v = 0{,}3$ (x obtus).

587. Démontrer la double formule :

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

— Résoudre les équations suivantes :

588. $4 \cos x - 3 = 0$ **589.** $2 \operatorname{tg} x - 1 = 0$ **590.** $5 \sin x - 3 = 0$.

591. $3 \cos x + 1 = 0$ **592.** $3 \operatorname{tg} x + 7 = 0$ **593** $3 \sin x - \sqrt{5} = 0$.

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

447. Définition. — Les rapports trigonométriques permettent d'établir des relations entre les mesures de différents angles et les mesures de différents segments et en particulier entre les six éléments (angles et côtés) d'un triangle. On leur donne, pour cette raison, le nom de relations trigonométriques.

Dans ce qui suit nous désignerons par A, B et C les mesures des angles d'un triangle ABC et par a, b et c les longueurs des côtés opposés.

448. Théorème. — ***Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal :***

1° Au produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle adjacent à ce côté.

2° Au produit du second côté de l'angle droit par la tangente de l'angle opposé ou par la cotangente de l'angle adjacent à ce côté.

Soit un triangle ABC rectangle en A (fig. 398). En prolongeant BA jusqu'en x et BC jusqu'en z on retrouve la figure 391 où les lettres B, A et C remplacent O, P et M. Donc (n° 437) :

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \qquad \cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{AB}{AC}.$$

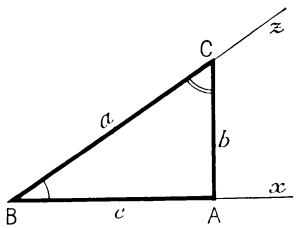


Fig. 398.

Soit

$$AC = BC \sin B \qquad AB = BC \cos B$$

$$AC = AB \operatorname{tg} B \quad \text{et} \quad AB = AC \operatorname{cotg} B$$

ou

$$b = a \sin B \qquad c = a \cos B \qquad b = c \operatorname{tg} B \qquad c = b \operatorname{cotg} B.$$

En permutant les lettres B et C d'une part et b et c d'autre part, on obtient :

$$c = a \sin C \qquad b = a \cos C \qquad c = b \operatorname{tg} C \qquad b = c \operatorname{cotg} C.$$

Soit finalement :

$$\boxed{b = a \sin B = a \cos C \quad b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C} \qquad \boxed{c = a \sin C = a \cos B \quad c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B}$$

449. Remarques. — 1° Le théorème précédent permet de retrouver les définitions du n° 437. On voit ainsi que dans un triangle rectangle dont un des angles aigus est égal à α :

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}}$$

2° D'autre part la comparaison des formules précédentes permet de retrouver le théorème relatif aux angles complémentaires (n° 442), car on en déduit :

$$\sin B = \cos C \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C.$$

450. Projection orthogonale d'un segment sur un plan. — ***La longueur de la projection orthogonale d'un segment sur un plan est égale au produit de la longueur de ce segment par le cosinus de l'angle aigu de ce segment et de sa projection.***

Désignons par α l'angle aigu du segment AB et de sa projection A'B' (fig. 399) et menons AH perpendiculaire à BB', donc parallèle à A'B'. Dans le triangle rectangle ABH on obtient : $AH = AB \cos \alpha$. D'autre part : $AH = A'B'$ comme côtés opposés du rectangle AHB'A'.

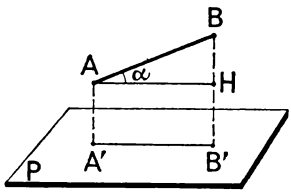


Fig. 399.

D'où : $\boxed{A'B' = AB \cos \alpha}$.

Il en résulte que la projection orthogonale sur un plan d'un segment AB, est en général plus courte que ce segment. Toutefois lorsque le segment AB est parallèle au plan de projection, le segment AB se projette en *vraie grandeur* et l'on a : $A'B' = AB$.

Corollaire. — Étant donnés un segment et une droite coplanaires la longueur de la projection du segment sur la droite est égale au produit de la longueur du segment par le cosinus de l'angle aigu du segment et de sa projection.

Dans le plan A'B' BA, le segment A'B' est en effet la projection orthogonale du segment AB sur la droite A'B' (fig. 399).

451. Cosinus de l'angle de deux vecteurs ou de deux axes.

Soient deux axes (ou deux vecteurs) $x'x$ et $y'y$ de l'espace. Par un point O menons les demi-droites OX et OY parallèles respectivement à $x'x$ et $y'y$ et

de même sens. L'angle saillant XOY = α est l'angle des axes (ou des vecteurs) $x'x$ et $y'y$ (n° 257) et cos α est le cosinus de l'angle de ces vecteurs ou de ces axes.

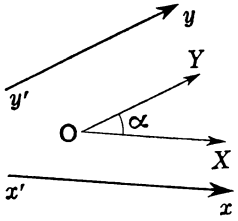


Fig. 400.

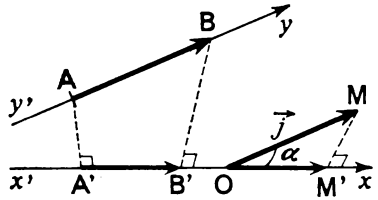


Fig. 401.

452. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe.

1° ***La mesure algébrique de la projection*** $\overrightarrow{A'B'}$ ***sur un axe*** $\overrightarrow{x'x}$ ***d'un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***porté par l'axe*** $\overrightarrow{y'y}$ ***est égale au produit de la mesure algébrique du vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***par le cosinus de l'angle des deux axes*** $\overrightarrow{x'x}$ ***et*** $\overrightarrow{y'y}$:

Par un point O de l'axe $x'x$, menons le vecteur $\overrightarrow{OM}$ égal au vecteur unitaire $\vec{j}$ de l'axe $y'y$ (fig. 401). Par définition l'angle saillant $xOM = \alpha$ est l'angle des deux axes $x'x$ et $y'y$. D'autre part la mesure algébrique $\overline{OM'}$ de la projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur Ox est égale à cos α (n° 439).

Or (n° 368) : $$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OM}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OM'}}$$

soit (n° 372) : $$\overline{AB} = \frac{\overline{A'B'}}{\cos\alpha} \Longrightarrow \boxed{\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\alpha}.$$

2° ***La mesure algébrique de la projection d'un vecteur sur un axe est égale au produit de la longueur de ce vecteur par le cosinus de l'angle du vecteur et de l'axe.***

En supposant l'axe $y'y$ de même sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, on obtient :

$$\boxed{\overline{A'B'} = AB \,.\, \cos\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}\right)}.$$

453. Rapports trigonométriques des angles de 45°, 30° et 60°.

1° Soit un triangle rectangle isocèle ABC dans lequel AB = AC = a et BAC = 1^{D}. (fig. 402).

D'après le n° 432 : $BC = a\sqrt{2}$ et (n° 449): $\sin B = \cos C = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}}$.

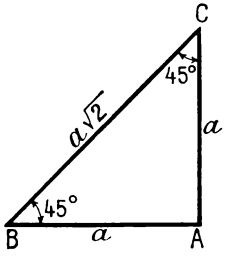


Fig. 402.

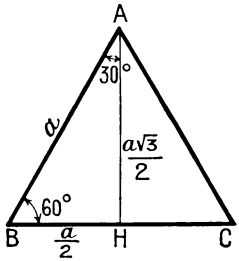


Fig. 403.

Soit : $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc :

$\sin 45^o = \cos 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } B = \text{cotg } C = \dfrac{AC}{AB} = 1.$

Donc :

$\text{tg } 45^o = \text{cotg } 45^o = 1.$

2° Soit un triangle équilatéral ABC de côté a (fig. 403). Dans le triangle rectangle AHB on a :

$B = 60^o$, $A = 30^o$, $H = 90^o$, $AB = a$, $BH = \dfrac{a}{2}$ et $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (n° 432)

$\sin B = \cos A = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc : $\sin 60^o = \cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos B = \sin A = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{a}{2} : a = \dfrac{1}{2}$. Donc : $\cos 60^o = \sin 30^o = \dfrac{1}{2}$

$\text{tg } B = \text{cotg } C = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a}{2} = \sqrt{3}$. Donc : $\text{tg } 60^o = \text{cotg } 30^o = \sqrt{3}$

et par suite $\text{cotg } 60^o = \text{tg } 30^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

On peut donc dresser le tableau :

α	0	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α	0	30°	45°	60°	90°
$\text{tg } \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\text{cotg } \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Remarquons que le théorème sur les angles supplémentaires permet d'en déduire les rapports trigonométriques des angles de 120°, 135° et 150°.

454. Résolution d'un triangle rectangle. — Un triangle rectangle est déterminé quand on connaît, outre l'angle droit, les mesures de deux des côtés ou celles d'un côté et d'un angle aigu.

Les relations du n° 431 permettent alors de calculer les éléments inconnus. Si on connaît :

1° A = 90°, B et a. — On a : C = 90° — B; $b = a \sin B$ et $c = a \cos B$;

2° A = 90°, B et b. — On a : C = 90° — B; $a = \dfrac{b}{\sin B}$ et $c = b \operatorname{cotg} B$;

3° A = 90°, a et b. — On a : $\sin B = \dfrac{b}{a}$ ce qui permet de déterminer B, puis C = 90° — B et finalement $c = a \cos B$;

4° A = 90°, b et c. — On a : $\operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c}$. On détermine B, puis C = 90° — B et $a = \dfrac{b}{\sin B}$.

455. Exemple. — *On connaît dans un triangle* ABC : A = 90°, B = 58° et a = 72 *Calculer les éléments inconnus* (fig. 404).

On a : C = 90° — B = 32°.

$b = a \sin 58° = 72 \times 0{,}8480 = 61{,}056$

$c = a \cos 58° = 72 \times 0{,}5269 = 38{,}1528$.

On peut alors calculer AH = h, HB = c' et HC = b' en utilisant le triangle rectangle HAB.

Il est préférable d'utiliser le triangle OHA.

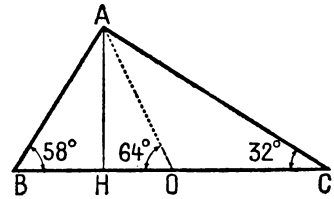


Fig. 404.

On a : $OA = \dfrac{a}{2} = 36$, et $\widehat{AOH} = 2C = 64°$.

D'où :

$AH = OA \sin 64° = 36 \times 0{,}8988 = 32{,}3568$

$OH = OA \cos 64° = 36 \times 0{,}4384 = 15{,}7824$

$BH = OA - OH = 36 - 15{,}7824 = 20{,}2176$

et $CH = OA + OH = 36 + 15{,}7824 = 51{,}7824$

456. Construire un angle connaissant un de ses rapports trigonométriques.

On est ramené à construire un triangle rectangle OPM connaissant le rapport de deux de ses côtés.

1° *Construire l'angle dont le cosinus est* 3/5. Portons sur une demi-droite Ox deux segments $\overline{OP}$ = 3 unités et $\overline{OA}$ = 5 unités (fig. 405). Le cercle de centre O et de rayon OA coupe la perpendiculaire en P à Ox en M. L'angle xOM = α et tel que $\cos \alpha = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{3}{5}$.

2° *Construire l'angle aigu dont le sinus est* 0,65. Sur la demi-droite Oy perpendiculaire à Ox portons OB = OA = a et OQ = 0,65 a (fig. 406). Le cercle de

centre O passant par A coupe du côté de Ox, la perpendiculaire en Q à Oy en M. L'angle xOM est tel que $\sin \alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{OB} = 0{,}65$.

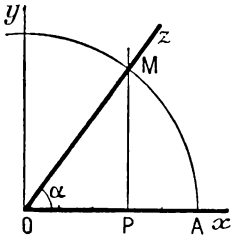


Fig. 405.

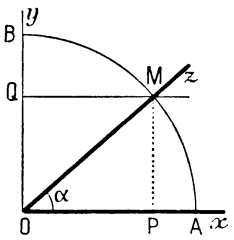


Fig. 406.

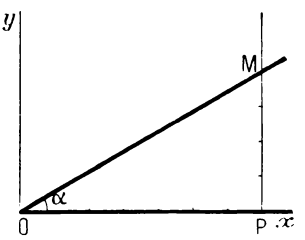


Fig. 407

3° *Construire l'angle dont la tangente est* $\frac{4}{7}$. Portons sur Ox le segment OP = 7 et sur la perpendiculaire en P à Ox le segment PM = 4 (fig. 407). L'angle xOM = α est tel que $\text{tg } \alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{4}{7}$.

Notons que par rapport aux axes Ox et Oy le point M a pour coordonnées $x = 7$ et $y = 4$ et la droite OM a pour équation $y = \frac{4}{7} x$ ou $y = x \text{ tg } \alpha$.

tg α *est donc le coefficient directeur de la droite* PM *par rapport à* Ox.

Connaissant la mesure d'un angle aigu, on peut donc à l'aide de la table déterminer sa tangente (ou son cosinus ou son sinus) et construire cet angle, sans rapporteur.

457. Cas d'un angle obtus. — On peut commencer par construire son supplément par l'une des constructions précédentes. Comme le cosinus et la tangente sont négatifs il suffit de prendre OP (fig. 405 et 407) sur le prolongement Ox' de Ox et (fig. 406) de prendre M du côté de Ox'.

Notons qu'un angle compris entre 0 et 180° est parfaitement déterminé par la donnée de son cosinus ou de sa tangente, tandis qu'il existe deux angles supplémentaires admettant un sinus donné.

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE

458. Théorème. — ***Le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée du double produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils forment.***

Menons la hauteur CC′ du triangle ABC (fig. 408 et 409). On a :

$$\overline{BC}^2 = \overline{C'B}^2 + \overline{CC'}^2 = (\overline{AB} - \overline{AC'})^2 + \overline{CC'}^2.$$

Soit : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}.\overline{AC'} + \overline{AC'}^2 + \overline{CC'}^2$.

Or : $\overline{AC'}^2 + \overline{CC'}^2 = \overline{AC}^2$. On obtient donc la relation :

$$\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}.\overline{AC'}.}$$

Orientons la droite AB dans le sens de A vers B : $\overline{AB} = AB$. Le vecteur $\overrightarrow{AC'}$ est la projection du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur l'axe Ax et l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{Ax})$ est l'angle A du triangle ABC. Donc (n° 452) : $\overline{AC'} = AC \cos A$. Par suite :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB.AC \cos A.$$

Soit :

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array}}. \qquad (1)$$

La deuxième et la troisième relation se déduisent de la première par *permutation* circulaire, c'est-à-dire en remplaçant A par B, B par C et C par A, ainsi que a par b, b par c et c par a. Il suffit de retenir la première.

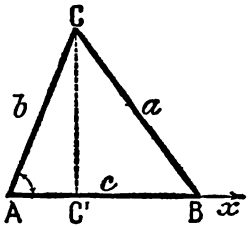


Fig. 408.

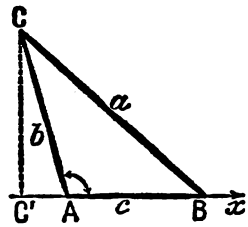


Fig. 409

Notons d'autre part que lorsque $A = 90°$, $\cos A = 0$. On retrouve la relation de Pythagore.

459. Calcul de cos A, sin A et tg A en fonction des côtés.

1° Les formules précédentes permettent de calculer cos A, cos B et cos C en fonction des côtés.

On obtient :

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \Longrightarrow \boxed{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}. \qquad (2)$$

Le signe de cos A est celui de $b^2 + c^2 - a^2$. L'angle A est donc aigu, droit ou obtus suivant que l'expression $b^2 + c^2 - a^2$ est positive, nulle ou négative.

2° D'après la relation : $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ on obtient :

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

Et en appliquant l'identité : $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$:

$$\sin^2 A = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2} = \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2c^2}.$$

Soit : $\sin^2 A = \dfrac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4b^2c^2}$.

En désignant par p le demi-périmètre du triangle :

$$a + b + c = 2p; \qquad b + c - a = 2(p - a);$$
$$c + a - b = 2(p - b) \qquad \text{et} \qquad a + b - c = 2(p - c).$$

Et : $$\sin^2 A = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2}.$$

Donc : $$\boxed{\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}. \qquad (3)$$

Afin de simplifier cette formule on pose : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ et on obtient ainsi :

$$\sin A = \frac{2S}{bc}; \quad \sin B = \frac{2S}{ca} \quad \text{et} \quad \sin C = \frac{2S}{ab}.$$

3° On en déduit alors : $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{2S}{bc} \times \dfrac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2}$.

Soit : $$\boxed{\operatorname{tg} A = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}}. \qquad (3)$$

460. Module de la somme de deux vecteurs.

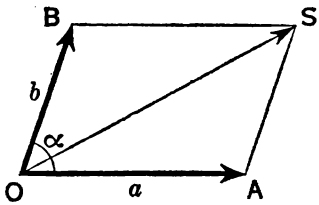


Fig. 410.

Soit $\overrightarrow{OS}$ la somme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ (fig. 410) de modules respectifs a et b et faisant l'angle $AOB = \alpha$:

$$\overline{OS}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AS}^2 - 2\,OA \cdot AS \cos \hat{A}$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos(2^D - \alpha).$$

En posant $OS = l$:

$$\boxed{l^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}.$$

461. Exercice. — *Résoudre un triangle* ABC *connaissant l'angle* $A = 36^o$ *et les côtés* $b = 85$, *et* $c = 54$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7\,225 + 2\,916 - 2 \times 85 \times 54 \times 0{,}8090$$

Donc : $a^2 = 2\,714{,}38$ et $a = \sqrt{2\,714{,}38}$ $\boxed{= 52{,}1}$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2714{,}38 + 2916 - 7225}{2 \times 52{,}1 \times 54} = -0{,}2834.$$

Donc (n° 443) : $180^\circ - B = 73^\circ 31$ et $\boxed{B = 106^\circ 29'}$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2714{,}38 + 7225 - 2916}{2 \times 52{,}1 \times 85} = 0{,}7930.$$

Donc : $\boxed{C = 37^\circ 31'}$.

On vérifie que : $A + B + C = 36^\circ + 106^\circ 29' + 37^\circ 31' = 180^\circ$

EXERCICES

594. Soit un triangle ABC rectangle en A et la hauteur AH. On pose BC = a.
1° Démontrer que : AH = $a \sin B \cos B$, BH = $a \cos^2 B$ et CH = $a \sin^2 B$.
2° Vérifier les relations : $\overline{AB}^2 = BC.BH$ et $\overline{AH}^2 = BH.HC$.

595. On donne un demi cercle de centre O et de diamètre A'A tel que OA = 1. Soit OB le rayon perpendiculaire à OA. Par A on mène l'axe At parallèle à OB et de même sens et par B l'axe Bu parallèle à OA et de même sens. Une demi-droite Oz coupe le demi-cercle en M, At en T et Bu en U. Calculer en fonction de l'angle AOM = α les mesures de $\overline{BU}$, $\overline{OT}$, et $\overline{OU}$.

596. On considère un demi-cercle de diamètre A'A = 2R et le rayon OB perpendiculaire à AA'. On oriente les droites OA et OB de O vers A et de O vers B. La tangente en un point variable M coupe les droites OA et OB en C et D. Calculer en fonction de R et de l'angle AOM = α les mesures $\overline{OC}$ et $\overline{OD}$ et les segments MC et MD.

597. On donne un triangle isocèle OAB de base AB et on mène les hauteurs OH et AK. On pose OA = a et on désigne par α l'angle AOH.
1° Évaluer en fonction de a et de α les côtés du triangle AKB.
2° Évaluer en fonction de a et de 2 α les côtés des triangles OKA et AKB.
3° En déduire sin 2 α, cos 2 α et tg 2α, en fonction de sin α, cos α et tgα.

598. Soit un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH. On suppose B < C et on pose BC = a et B = β. Soit O le milieu de BC.
1° Évaluer en fonction de a et des rapports trigonométriques de l'angle β les segments AH, BH, et CH.
2° Évaluer l'angle AOC en fonction de β et les segments précédents en fonction de a et des rapports trigonométriques de l'angle 2 β.
3° En déduire les rapports trigonométriques de l'angle 2β en fonction de ceux de l'angle β.

599. Dans un trapèze isocèle ABCD la grande base est AB = 20 cm. Les côtés non parallèles mesurent 8 cm et font avec AB des angles de 65°. Calculer la hauteur, la petite base du trapèze, l'angle ABD et la longueur des diagonales.

600. Dans un trapèze ABCD rectangle en A et D on donne AB = 30 cm, CD = 18 cm et BC = 20 cm.
1° Calculer les angles ABC et BCD.
2° Calculer les angles DAC et ADB et les diagonales du trapèze.

601. Soit un quart de cercle de rayon R limité par les rayons OA et OB. En un point M on mène la tangente qui coupe la tangente en A en C et la droite OB en D. On désigne 2 α par l'angle AOM. Exprimer en fonction de R et de α les côtés et les diagonales du quadrilatère OACD.

— Résoudre un triangle ABC rectangle en A connaissant :

602. $a = 15$; $B = 27°$ **603.** $a = 17$; $B = 27$ gr.

604. $a = 23{,}5$; $b = 12{,}75$. **605.** $a = 75$; $b = 47{,}5$ (B et C en gr.).

606. $b = 57$; $B = 51°$. **607.** $b = 12{,}5$; $B = 72$ gr.

608. $b = 70$; $c = 36$. **609.** $b = 60$; $c = 42$ (B et C en gr.)

— Résoudre et construire les solutions des équations suivantes :

610. $10 \sin x - 3 = 0$. **611.** $5 \sin x - 4 = 0$. **612.** $7 \sin x - 3 = 0$.

613. $7 \cos x - 3 = 0$. **614.** $\cos x + 0{,}43 = 0$. **615.** $8 \cos x + 5 = 0$.

616. $25 \operatorname{tg} x - 18 = 0$. **617.** $\operatorname{tg} x + 2{,}47 = 0$. **618.** $3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$.

— Calculer le module de $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ connaissant $OA = a$; $OB = b$ et $\widehat{AOB} = \alpha$ dans les cas suivants :

619. $a = 12{,}4$; $b = 5{,}3$; $\alpha = 30°$. **620.** $a = 21$; $b = 18$; $\alpha = 60°$.

621. $a = 51{,}3$; $b = 17{,}2$; $\alpha = 37°$. **622.** $a = 15$; $b = 13$; $\alpha = 120°$.

623. $a = 17{,}4$; $b = 11{,}3$; $\alpha = 75°$. **624.** $a = 8$; $b = 7$; $\alpha = 112°$.

625. Démontrer que dans tout triangle ABC : $a = b \cos C + c \cos B$

et les relations analogues pour b et c.

626. Soient R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et D le point diamétralement opposé à C. Etablir que $BC = DC \sin A$ et :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

— Utiliser les relations précédentes (ex. nos 625 et 626) pour établir que dans tout triangle ABC:

627. $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$. **628.** $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cos C - b \cos B)$.

629. $a = h_a (\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$. **630.** $h_a = 2R \sin B \sin C$,

631. $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$. **632.** $\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$..

633. Démontrer que si dans un triangle ABC le côté a est double de la hauteur h_a, on a la relation : $\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = 2$. Réciproque?

634. Les côtés d'un triangle ABC vérifient les relations :

$$a = x^2 - xy + y^2 \qquad b = x^2 - y^2 \qquad c = x^2 - 2xy.$$

Calculer la valeur de l'angle A.

635. Dans un triangle ABC on mène la bissectrice intérieure $AD = \beta_a$. Soient E et F les projections de B et C sur la droite AD.

1° Étudier la division ADEF et démontrer que

$$\frac{2}{\beta_a} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} \quad \text{et} \quad \beta_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}.$$

2° Reprendre le problème avec la bissectrice extérieure $AD' = \beta'_a$.

APPLICATION : $A = 84°,16'$, $b = 112$ et $c = 75$. Calculer β_a et β'_a.

— Calculer les angles d'un triangle ABC connaissant les côtés opposés dans les cas suivants :

636. $a = 64$; $b = 53$; $c = 40$. **637.** $a = 132$; $b = 90$; $c = 53$.

638. $a = 80$; $b = 50$; $c = 45$. **639.** $a = 12{,}5$; $b = 10{,}8$; $c = 4{,}9$.

640. On considère un triangle ABC dans lequel B > C. Le cercle de centre A passant par B coupe le côté CA en D et son prolongement en E. Par D on mène la parallèle à BE qui coupe BC en F.

1° Montrer que : $BD = BE \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ et $DF = BD \operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$.

2° En déduire que : $\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$.

3° Utiliser la formule précédente pour calculer B — C et achever la résolution du triangle sachant que : $A = 71° 32'$; $b = 67$; $c = 47$.

641. Soient r et r_a les rayons des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A du triangle ABC.

1° Montrer que : $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a} = \frac{r_a}{p}$ et $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p - b} = \frac{p - c}{r_a}$.

2° En déduire que : $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}$ et les formules analogues.

3° Utiliser ces formules pour calculer les angles du triangle sachant que

$$a = 57, \quad b = 50 \quad \text{et} \quad c = 43.$$

642. Soit un quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle de rayon R. On pose

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = x \quad \text{et} \quad BD = y.$$

1° Montrer que : $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 + 2cd \cos B$.

2° En déduire cos B et x et par permutation cos A et y, et démontrer les formules de Ptolémée :

$$xy = ac + bd \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

PROBLÈMES DE RÉVISION

I. GÉOMÉTRIE PLANE

643. Dans un triangle ABC on mène les hauteurs AA', BB' et CC'.

1° Montrer que B'C' est parallèle à la tangente en A au cercle O circonscrit au triangle ABC.

2° Montrer que les perpendiculaires menées respectivement de A, B et C aux côtés B'C', C'A' et A'B' du triangle A'B'C' concourent au centre du cercle O.

644. Dans un triangle ABC, on construit le cercle I centré sur AC et passant par les points A et B, puis le cercle J centré sur AB et passant par les points A et C. Ces deux cercles se coupent en deux points A et M.

1° Démontrer que l'orthocentre du triangle AIJ est le centre O du cercle circonscrit à ABC.

2° Prouver que la droite AM passe par O.

645. On donne un angle xOy et un point A intérieur à cet angle. Un angle uAv de grandeur constante pivote autour de A. On désigne par P l'intersection de Ox et Au, par Q celle de Oy et Av, par M, H et K les projections de A sur PQ, Ox et Oy.

1° Évaluer l'angle HMK en fonction des valeurs de xOy et uAv.

2° Quel est le lieu de M quand uAv pivote autour de A?

646. Soit un triangle ABC, A' un point quelconque du côté BC, B' un point quelconque du côté AC et C' un point quelconque du côté AB.

1° Les cercles circonscrits aux triangles AB'C' et BA'C' se recoupent en M. Démontrer que le quadrilatère CA'B'M est inscriptible.

2° En déduire le lieu de M quand, A' et B' restant fixes, le point C' décrit le côté AB.

647. On donne un trapèze ABCD dans lequel AB $= a$, CD $= b$ avec $a < b$. Les diagonales AC et BD se coupent en O et les côtés non parallèles se coupent en I. La parallèle aux bases menée par I est coupée par les diagonales AC et BD respectivement en P et Q.

1° Montrer que IP = IQ et que les divisions OPAC et OQBD sont harmoniques.

2° Calculer le rapport a/b pour que le quadrilatère PQCD soit un parallélogramme.

648. On considère deux cercles égaux O et O' et une droite D telle que O et O' soient d'un même côté de D et que les cordes interceptées par les deux cercles sur cette droite soient égales.

1° Montrer que OO′ et D sont parallèles. Existe-t-il une translation parallèle à D qui fasse coïncider O et O′.

2° Construire un cercle de rayon donné, passant par un point donné A et qui découpe sur une droite donnée D une corde de longueur donnée l.

649. Deux cercles égaux de centres O et O′ se coupent en A et B. Soient C et D les points diamétralement opposés à A dans O et O′.

1° Comparer les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OO'}$.

2° Une sécante issue de A coupe le cercle O en P et le cercle O′ en Q. Que peut-on dire des droites CP et DQ?

3° La parallèle menée de P à CD coupe DQ en M. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{CD}$.

4° Lieu géométrique du point M quand la sécante PS tourne autour de A.

650. Soient deux cercles égaux de centres O et O′ se coupant en A et B. On mène deux rayons parallèles et de même sens OC et O′D. Soient E et F les points diamétralement opposés au point A dans les deux cercles.

1° Comparer les vecteurs $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BF}$, puis les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FD}$ ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

2° Montrer que l'un des points A, B, C et D est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.

651. On considère un angle droit fixe xOy et un point fixe I intérieur. Un angle droit mobile uIv tourne autour de son sommet I et Ou coupe Ox en A tandis que Ov coupe Oy en B.

1° Lieu géométrique du milieu M de AB.

2° On termine les rectangles AOBP et AIBQ. Trouver les lieux de P et Q.

3° Comparer en grandeur et en direction les segments IO et PQ.

652. Connaissant les angles A, B et C d'un triangle ABC, évaluer :

1° L'angle de la hauteur AA′ et de la bissectrice intérieure AD en fonction des angles B et C.

2° L'angle BIC des bissectrices intérieures de B et C en fonction de A.

3° L'angle BHC des hauteurs BH et CH en fonction de A.

Application numérique : B = 78°, C = 46°.

653. Soient deux droites Δ et Δ' et un point quelconque O. Une sécante passant par O coupe la droite Δ en A et la droite Δ' en B de façon que O soit le milieu de AB.

1° Montrer que la droite symétrique de Δ par rapport au point O coupe Δ' en B. En déduire la construction de la droite AB lorsqu'on donne Δ, Δ' et O.

2° Construire un parallélogramme ABCD connaissant les sommets B et D et sachant que les sommets A et C appartiennent respectivement aux droites données Δ et Δ'.

654. On considère un cercle O, un diamètre xy, deux points A et B sur l'un des demi-cercles limités par xy et un point C sur l'autre demi-cercle; CA et CB coupent xy en P et Q de façon, que O soit le milieu de PQ.

1° Soit B′ le point diamétralement opposé à B sur le cercle O. Que peut-on dire du quadrilatère BPB′Q? Comparer les angles B′PC et ACB.

2° Les points A et B étant donnés sur le cercle O ainsi que le diamètre xy, construire le point C de façon que OP = OQ.

655. Un triangle ABC est inscrit dans un cercle O. On mène les hauteurs BB′ et CC′ qui se coupent en H. La droite B′C′ coupe le cercle O en M et N; AH coupe BC en A′.

1° Montrer que B′C′ est parallèle à la tangente en A au cercle O. En déduire que le triangle AMN est isocèle.

2° Comparer les triangles AMC′ et ABM. En déduire les relations :

$$\overline{AM}^2 = \overline{AC'}.\overline{AB} = \overline{AH}.\overline{AA'}.$$

3° Lieu géométrique des points M et N quand les points A, H et A′ restent fixes.

656. Soit un triangle ABC, de hauteurs AA′, BB′, CC′ et d'orthocentre H; B′C′ coupe AA′ en I.

1° Montrer que la division AHIA′ est harmonique.

2° Les points A, H et A′ étant fixes, montrer que la droite B′C′ passe par un point fixe.

657. On considère un parallélogramme ABCD. Une sécante coupe respectivement les droites AB, CD, BC et AD en P, Q, R et S de telle sorte, que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$.

1° Quel est le transformé de B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$?

2° En déduire que la sécante PQ est parallèle à la diagonale BD.

3° Mener par un point donné O une droite Δ qui coupe les côtés AB, CD, BC et AD du parallèlogramme respectivement en P, Q, R et S de façon que l'on ait PQ = RS (2 solutions).

658. Soit un triangle ABC dans lequel on mène la médiane AM et la hauteur AH; on désigne par K le conjugué harmonique de H par rapport à BC. Démontrer les relations :

1° $\overline{MB}^2 = \overline{MH}.\overline{MK}.$

2° $\overline{KB}.\overline{KC} = \overline{KM}^2 - \overline{MB}^2.$

3° $\overline{KB}.\overline{KC} = \overline{KH}.\overline{KM}.$

659. Soit un triangle ABC et un point P intérieur. On prend les symétriques A′, B′ et C′ du point P par rapport aux milieux des côtés BC, CA et AB.

1° Montrer que les trois segments AA′, BB′ et CC′ sont concourants et se coupent en leur milieu.

2° Comment faut-il choisir le point P pour que l'hexagone AB′CA′BC′ ait ses côtés égaux. A quelle condition l'hexagone est-il régulier?

660. On considère un cercle fixe O et une corde variable PQ passant par un point fixe A intérieur au cercle O. On mène le cercle de diamètre PQ et on considère les points M et N de ce cercle situés sur la perpendiculaire en A à PQ.

1° Démontrer la relation $\overline{AM}^2 = \overline{AN}^2 = -\overline{AP}.\overline{AQ}$.

2° Trouver le lieu des points M et N quand la corde PQ tourne autour de A.

661. Dans un triangle ABC les sommets B et C sont fixes ainsi que le point I où la bissectrice intérieure de l'angle A coupe BC.

1° Montrer que le point J où la bissectrice extérieure de l'angle A coupe BC est lui-même fixe. En déduire le lieu de A.

2° Construire le triangle ABC connaissant les points B, C, I et le point H où la hauteur issue de A coupe BC.

662. On considère un quart de cercle de centre O et de rayon R limité par les rayons OA et OB. La tangente en M coupe la droite OA en T et la droite OB en U. Soit H la projection de M sur OA, on pose OH = x.

1° Calculer en fonction de R et de x les longueurs OT, OU et TU.

2° Déterminer x pour que l'on ait TU = 2R.

663. On considère un triangle ABC de côtés a, b et c et on désigne par A′ et A″ les pieds des bissectrices de l'angle A, par B′ et B″ les pieds des bissectrices de l'angle B, par C′ et C″ les pieds des bissectrices de l'angle C.

1° Soit M un point commun aux cercles de diamètre A'A'' et B'B''. Démontrer les relations :

$$a\text{MA} = b\text{MB} = c\text{MC}.$$

2° Montrer que le cercle de diamètre C'C'' passe par M. En déduire que les cercles de diamètre A'A'', B'B'' et C'C'' ont deux points communs et que leurs centres sont alignés.

664. On considère un triangle ABC et ses hauteurs AA', BB', CC' qui se coupent en H. La perpendiculaire menée de A' à AB et la hauteur CH coupent la perpendiculaire menée en B à BC aux points M et P. La perpendiculaire menée de A' à AC et la hauteur BH coupent la perpendiculaire menée en C à BC aux points N et Q.

1° Comparer les segments MP, A'H et NQ.

2° Démontrer les relations : $\dfrac{\text{BM}}{\text{A'H}} = \dfrac{\text{A'H}}{\text{CN}} = \dfrac{\text{BA'}}{\text{A'C}}$.

3° Montrer que les points M, N et H sont alignés.

665. Soit un triangle ABC, AA' la hauteur issue de A et H l'orthocentre. Le cercle de diamètre BC coupe la droite AA' et I et J.

1° Démontrer la relation : $\overline{\text{A'H}}.\overline{\text{A'A}} = -\overline{\text{A'B}}.\overline{\text{A'C}}$.

2° Montrer que la division AA'IJ est harmonique.

3° B' et C' désignant les pieds des hauteurs issues de B et C, montrer que B'H et C'H sont respectivement bissectrices des angles IB'J et IC'J.

666. Un cercle variable de centre M passe par un point fixe A et les tangentes menées d'un point fixe B au cercle M font entre elles un angle constant 2α.

1° Démontrer la relation : $\text{MA} = \text{MB} \sin\alpha$.

2° Trouver le lieu de M. Ce lieu peut-il être une droite?

667. Deux cercles O et O' sont tangents extérieurement en A. On mène dans le premier une corde variable AP et dans le second une corde variable AP' telles que $\text{AP} = k.\text{AP}'$ où k est un nombre constant. Les perpendiculaires menées de O à AP et de O' à AP' se coupent en M et M se projette en K sur OO'; OM coupe AP en H et O'M coupe AP' en H'.

1° Démontrer les relations : OM. AH = OA.MK et O'A.MH' = O'A.MK.

2° Évaluer le rapport $\dfrac{\text{MO}}{\text{MO'}}$ et trouver le lieu de M.

668. On donne trois points fixes alignés A, B et C. On projette B en B' et C en C' sur une droite variable Ax; les droites BC' et CB' se coupent en M; la droite AM coupe BB' en H et CC' en K; la parallèle menée par M à BB' coupe AB en P et AB' en P'.

1° Montrer que la division AMHK est harmonique. En déduire que le point P est fixe.

2° Montrer que M est le milieu de PP'.

3° Lieux de P' et de M quand la droite Ax tourne autour de A.

669. Soit un triangle ABC, I le centre du cercle inscrit J, K, L les centres des cercles exinscrits dans les angles A, B et C, O le centre du cercle circonscrit.

1° Montrer que la médiatrice de BC coupe IJ en son milieu. En déduire que la perpendiculaire menée de J à BC passe par le symétrique de I par rapport à O.

2° Que peut-on dire des perpendiculaires menées de J à BC, de K à AC et de L à AB?

670. On donne un angle droit $x\text{O}y$ et un cercle de centre C et de rayon a tangent en P à $\text{O}x$ et en Q à $\text{O}y$. Soit une tangente variable à ce cercle coupant $\text{O}x$ en A et $\text{O}y$ en B, de façon que le point C soit intérieur au triangle OAB.

1° Trouver la relation qui existe entre $\text{OA} = x$, $\text{OB} = y$ et a.

2° Construire le triangle OAB connaissant son périmètre $2p$.

671. On mène les hauteurs BD et CE d'un triangle ABC et on porte sur BA une longueur BF = BD et sur CA une longueur CG = CE.

1° Comparer les triangles BDF et GGE et montrer que le quadrilatère DEFG est inscriptible.

2° Montrer que le segment GF est parallèle à BC.

672. Soit un triangle ABC et la médiane AM. On suppose que le triangle MBA est semblable au triangle ABC.

1° Calculer le rapport $\frac{BA}{BC}$ et montrer que le cercle AMC est tangent en A à AB.

2° A et C étant donnés, déterminer le lieu géométrique du sommet B.

3° Le triangle ABC peut-il être rectangle et de quelles manières? S'il en est ainsi, calculer AB et AC en fonction de BC = a.

673. Par les extrémités d'un segment AB on mène d'un même côté de AB deux segments AA′ et BB′ perpendiculaires à AB et tels que $\overline{AA'}.\overline{BB'} = \overline{AB}^2$.

1° Montrer que AB′ et BA′ sont perpendiculaires. Lieu du point M d'intersection.

2° La tangente en M au lieu précédent coupe AA′ en P et BB′ en Q. Montrer que le cercle de diamètre PQ est tangent à AB en son milieu O.

3° Montrer que P et Q sont les milieux de AA′ et BB′ et que AB, A′B′ et PQ sont concourants.

674. Soit un angle droit xOy, un point A variable sur Ox et un point B variable sur Oy tels que OA + OB = l. On désigne par H et K les points de Ox et Oy tels que OH = OK = l.

1° Trouver le lieu du sommet C du rectangle AOBC et montrer que le cercle circonscrit à ce rectangle passe par le milieu I de HK.

2° Soit OM la corde parallèle à AB. Montrer que le triangle IOM est isocèle et en déduire le lieu de M.

3° Comparer les triangles MAH et MBK. En déduire la valeur de l'angle HMK et retrouver ainsi le lieu de M, puis montrer que MC passe par un point fixe P.

675. On donne un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2R. D'un point M variable sur ce demi-cercle comme centre on trace le cercle tangent en H à AB, et on mène à ce cercle les tangentes AC et BD.

1° Montrer que les points C, M et D sont alignés sur la tangente en M au demi-cercle.

2° Montrer que AC + BD est constant et comparer $\overline{CD}^2$ au produit $\overline{AC}.\overline{BD}$.

3° CD coupe AB en K. Montrer que la division ABKH est harmonique.

676. On considère un cercle de centre O et de rayon R et un point A sur ce cercle. On trace un cercle de rayon r et de centre A coupant le cercle O en B et B′, puis les cercles de rayon r de centres B et B′ qui se coupent en O′ et le cercle de centre O′ et de rayon O′A = R′ qui coupe le cercle A en C et C′.

1° Montrer que BB′ est médiatrice de O′A et que $r^2 = RR'$.

2° En déduire que CC′ est médiatrice de AO et que les cercles de rayon r et de centres C et C′ se coupent en O.

3° Montrer que l'on peut déterminer le centre d'un cercle donné à l'aide d'un compas seulement.

677. Deux cercles O et O′ se coupent en A et B. D'un point I de la droite AB on mène la sécante PQ dans le premier cercle et la sécante P′Q′ dans le deuxième.

1° Montrer que les quatre points P, Q, P′ et Q′ sont sur un même cercle.

2° On suppose I extérieur et on mène les tangentes IT au premier cercle et IT′ au second. Montrer que le cercle PQT′ est tangent en T′ au cercle O′.

3° Construire un cercle tangent aux cercles O et O′ connaissant l'un des points de contact.

678. On considère un triangle isocèle OAB de base AB. Des points A et B, on mène à un cercle variable de centre O, les tangentes AC et BD non symétriques qui se coupent en M.

1° Comparer les triangles OCA et OBD. Montrer que le quadrilatère OAMB est inscriptible et trouver le lieu du point M.

2° On prolonge AM d'une longueur MP = MB. Trouver le lieu du point P.

679. On considère un cercle de centre O et de rayon R, un diamètre AB de ce cercle et un point M quelconque. La droite OM recoupe en M' le cercle ABM.

1° Démontrer que $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = -R^2$.

2° Soient H et H' deux positions correspondantes de M et M'. Montrer que le quadrilatère MM'HH' est inscriptible et comparer les triangles OHM et OM'H'.

3° Trouver le lieu du point M' lorsque M décrit le cercle du diamètre OH ou lorsqu'il décrit la droite Δ perpendiculaire en H à OH.

680. Soit un cercle variable de centre O passant par deux points fixes A et B. Par un point donné C du segment AB on mène la corde PP' perpendiculaire à OC. Les tangentes en P et P' se coupent en M et la perpendiculaire en M à MO coupe AB en D.

1° Comparer les produits $\overline{CP}\cdot\overline{CP'}$, $\overline{CA}\cdot\overline{CB}$ et $\overline{CO}\cdot\overline{CM}$. En déduire que le quadrilatère AOBM est inscriptible et que MC est bissectrice de l'angle AMB.

2° Soit I le milieu de AB. Montrer que le quadrilatère OIMD est inscriptible et que $\overline{CI}\cdot\overline{CD} = \overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

3° Montrer que la division ABCD est harmonique et trouver le lieu du point M.

681. Sur la tangente en A à un cercle de centre O et de rayon R on porte une longueur AB = $2a$, puis on considère un cercle variable de centre O' et de rayon R' tangent en B à AB et coupant le cercle O en C et D.

1° Calculer la valeur minimum de R' pour que C et D existent.

2° Montrer que CD passe par un point fixe I et trouver le lieu du milieu M et CD.

3° On suppose que l'angle OCO' est droit. Quelle relation vérifient alors R, R' et a? Montrer que AO' est alors perpendiculaire à OI et que AO', BO et CD sont concourants.

682. Soit un cercle de centre O, un point fixe extérieur A et un diamètre mobile BC.

1° Montrer que le cercle circonscrit au triangle ABC passe par un deuxième point fixe I. Lieu de son centre.

2° AB et AC recoupent le cercle O aux points D et E et DE coupe OA en P. Comparer les angles BIA, BCA et BDE et montrer que le quadrilatère IBDP est inscriptible, puis que le point P est fixe.

3° Montrer que le cercle ADE passe par un deuxième point fixe J. Soit R le point de rencontre des deux cercles ABC et ADE. Montrer que AR, BC et DE sont concourants.

683. D'un point fixe P on mène une sécante variable PAB à un cercle de centre O. Le cercle AOB recoupe en H la droite PO et on désigne par E et F les intersections de PO avec le cercle donné.

1° Démontrer que $\overline{PO}\cdot\overline{PH} = \overline{PE}\cdot\overline{PF}$. En déduire que le point H est fixe et conjugué harmonique de P par rapport à E et F.

2° Le point O est le milieu de l'arc AOB. Montrer que PO est bissectrice de l'angle AHB.

3° Soit M le conjugué harmonique de P par rapport à A et B. Montrer que HM est la seconde bissectrice de l'angle AHB et trouver le lieu de M.

684. Soit un segment AB et un point fixe F de ce segment. On mène les perpendiculaires Ax et By à AB et on prend le point M sur Ax et le point N sur By qui se déplacent de façon que l'angle MFN reste droit.

1° Montrer que le cercle MFN passe par un second point fixe F' symétrique de F par rapport au milieu de AB et comparer les produits $\overline{AM}\cdot\overline{BN}$ et $\overline{FA}\cdot\overline{FB}$.

2° Soient P et P' les projections de F et F' sur MN. Montrer que les quadrilatères FAMP et FBNP sont inscriptibles et comparer les triangles APB et MFN. Lieu des points P et P'.

3° Démontrer la relation $\overline{FP}\cdot\overline{F'P'} = -\overline{FA}\cdot\overline{FB}$.

II. GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

685. 1° Soient trois demi-droites Sx, Sy, Sz issues d'un point S et non situées dans un même plan. Dans le plan (Sy, Sz) on considère la bissectrice intérieure (α) et la bissectrice extérieure (α_1) de l'angle ySz. On définit de même dans le plan (Sz, Sx) la bissectrice intérieure (β) et la bissectrice extérieure (β_1) de l'angle zSx; et dans le plan (Sx, Sy), la bissectrice intérieure (γ) et la bissectrice extérieure (γ_1) de l'angle xSy.

a) On considère des points A, B, C situés recpectivement sur les demi-droites Sx, Sy, Sz et tels que SA = SB = SC. Montrer que BC est parallèle à (α_1), CA est parallèle à (β_1), AB est parallèle à (γ_1). En déduire que les droites (α_1), (β_1), (γ_1) sont situées dans un même plan.

b) Établir de façon analogue que les droites (α_1), (β), (γ) sont dans un même plan. Il en est de même des droites (β_1), (γ), (β) et des droites (γ_1), (α), (β).

686. Sur une demi-droite AX perpendiculaire en A au plan (P) d'un carré ABCD on considère un point M défini par AM = x. On désigne par a la longueur du côté du carré.

1° Soit R le point où la perpendiculaire en M au plan MBC coupe le plan (P); soit S le point où la perpendiculaire en M au plan MCD coupe le plan (P.). Montrer que les points A, B, R sont alignés, ainsi que les points A, D, S.

2° Calculer AR et AS en fonction de a et x.

3° Qule est le lieu géométrique du milieu I de RS lorsque M décrit AX?

4° Démontrer que MC est perpendiculaire au plan MRS.

5° Soit AH la hauteur issue de A dans le triangle MAI. Montrer que AH est hauteur du tétraède ARMS et que H est l'orthocentre du triangle MRS.

687. On donne dans l'espace deux axes, Δ et Δ', faisant entre eux un angle de $\frac{\pi}{3}$ et respectivement perpendiculaires en O et O' au segment OO' qui a pour longueur $3a$. Soit M un point de Δ, d'abscisse $2x$. De M, on mène le plan perpendiculaire à Δ' qui le coupe en M'.

1° Donner une détermination exacte de ce plan. Relation entre $\overline{OM}$ et $\overline{O'M'}$. Calculer la longueur de MM' en fonction de x et a. Étude de la variation et représentation graphique de la fonction $y = \overline{MM'}^2$.

2° Soit I le point de OO' tel que $\frac{\overline{IO}}{\overline{IO'}} = -2$.

Le plan perpendiculaire en I à OO' coupe MM' en I'. Lieu de I' quand M décrit Δ.

3° Déterminer x de manière que l'angle MIM' soit droit et montrer qu'il existe alors sur OO' un autre point, I", tel que MI"M' soit également droit.

688. On donne un angle droit XOY et la perpendiculaire OZ à son plan. Soient A, B, C trois points fixes : A situé sur OX, B sur OY, C sur OZ, tels que OB = 2 OA. Une droite du plan XOY varie en restant parallèle à AB; elle coupe OX en M, OY en N.

1° Calculer OM = x et ON = y, sachant que MN = l, l étant une longueur donnée.

2° Démontrer que le plan variable défini par les trois points C, M, N contient une droite fixe, que l'on déterminera.

3° Lieux des milieux des côtés et du centre de gravité du triangle CMN.

4° Démontrer que la médiane du triangle CMN issue de M reste orthogonale à la bissectrice intérieure de l'angle XOY.

689. On obtient un tétraèdre SABC en joignant un point S à trois points non alignés d'un plan P qui ne contient pas S. Un plan P′ non parallèle à P coupe SA en A′, SB en B′, SC en C′.

1° Démontrer que les intersections de A′C′ et AC, B′C′ et BC, A′B′ et AB sont trois points en ligne droite.

2° On mène la hauteur SH du tétraèdre SABC, qui coupe le plan P′ en L, et la hauteur SH′ du tétraèdre SA′B′C′, qui coupe le plan P en K. Montrer que HK est perpendiculaire en I à l'intersection Δ des plans P et P′ et que SI est aussi perpendiculaire à Δ.

3° (P′) restant parallèle à un plan donné (Π), quelle est la ligne fixe décrite par L?

4° H étant situé entre I et K, L entre S et H et sachant que SH = l, calculer en fonction de IH = x le segment SH′ si l'angle aigu des deux plans P et Π vaut 30°.

690. Dans un plan P on donne un triangle ABC rectangle en A et tel que AB = a et $\widehat{B}$ = 60°. Sur la perpendiculaire en C au plan P on porte un segment CD = $a\sqrt{2}$.

Un plan Q passant par C et parallèle à AB coupe AD en H et BD en E (H entre A et D, E entre B et D). Soient H′ et E′ les projections des points H et E sur le plan P.

1° Démontrer que les faces du tétraèdre ABCD sont des triangles rectangles. Évaluer ses arêtes et les classer dans un ordre remarquable.

2° Prouver que le triangle CEH est rectangle.

3° Calculer le rectiligne α du dièdre formé par les plans P et Q dans le cas où le quadrilatère EE′H′H est un carré.

4° Dans cette hypothèse, préciser la position du point H sur AD (on posera EH = x).

691. 1° Un triangle isocèle ABC a pour base BC = 6 cm et pour angle au sommet A = 120°.

Calculer les longueurs de ses côtés et sa hauteur.

2° Par les sommets B et C, on mène les demi-droites Bx, Cy, perpendiculaires au plan du triangle et du même côté par rapport à ce plan.

On prend sur Bx le point B′ et, sur Cy le point C′ tels que BB′ = x et CC′ = y.

Calculer, en fonction de x et de y, les carrés des côtés du triangle AB′C′.

Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que ce triangle soit rectangle en A s'écrit $xy = 6$.

3° Déterminer les valeurs de x et de y pour que le triangle AB′C′ soit rectangle en A et que le carré de son hypoténuse ait pour mesure 37. ($\overline{B'C'}^2 = 37$.)

692. Dans un plan P on donne un triangle isocèle OAB, de côtés OA = OB = a, AB = b. Sur les perpendiculaires en A et en B à P, et d'un même côté de P, on porte les longueurs AM = x et BN = y.

1° Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'angle MON soit droit est : $2xy = b^2 - 2a^2$.

a étant donné, comment faut-il choisir b pour que cette condition puisse être remplie?

Dans toute la suite du problème on suppose que l'angle MON est droit et que $b = a\sqrt{3}$.

2° Déterminer x et y de manière que $x + y$ ait une valeur donnée l. Discuter.

3° On suppose $x = a$. Calculer le cosinus du rectiligne du dièdre formé par le plan P et le plan MON. Donner une valeur approchée de ce rectiligne.

693. On donne un triangle équilatéral ABC de côté 2 cm. Sur la perpendiculaire au plan du triangle menée par A on prend un point S tel que SA = 1 cm. La perpendiculaire menée de S à BC coupe BC en H.

1° Montrer que AH est perpendiculaire à BC. Calculer les longueurs de SH et AH.

2° Soit K le milieu de AB. On prend sur AK un point M situé entre A et K. On mène par M le plan perpendiculaire à AB, qui coupe AC en Q, SB en N, SC en P. Montrer que MN et PQ sont parallèles et qu'elles sont perpendiculaires à MQ.

3° On désigne par x la distance AM. Calculer en fonction de x les côtés du quadrilatère MNPQ et le produit $y = \text{MN.MQ}$.

4° Étudier les variations de y en fonction de x et tracer la courbe représentative. Indiquer sur cette courbe l'arc qui correspond aux conditions géométriques du problème.

694. On considère un plan fixe (P) et sur ce plan un segment de droite fixe AB. On donne deux droites fixes quelconques de l'espace, D_1 et D_2, perpendiculaires respectivement aux points A et B au segment AB.

On considère un segment de droite variable MN parallèle au plan (P), les points M et N étant respectivement sur les droites D_1 et D_2.

1° Lieux géométriques des points M′ et N′, projections des points M et N sur le plan P. Nature du quadrilatère MN′N′N.

2° Construire le segment MN tel qu'il soit parallèle à une droite donnée quelconque du plan (P).

3° Construire le segment MN tel qu'il soit d'une longueur donnée l. Discussion.

695. Dans un plan, on donne deux axes rectangulaires Ox, Oy. Sur la perpendiculaire en O au plan xOy on porte $OA = 1$; sur la parallèle en A à Oy et dans le sens positif Oy on porte $AS = 1$. Une droite variable Ou pivote autour de O dans le plan AOx. Soient H la projection orthogonale de S sur Ou et M le point où la droite SH perce le plan xOy. On désigne par P le point de rencontre de AH et Ox.

1° Montrer que le lieu géométrique de H est une circonférence, que l'on précisera.

2° Montrer que PM et AS sont parallèles. Les coordonnées de M sont alors

$$\overline{OP} = x. \qquad \overline{PM} = y.$$

Établir la relation $y = -x^2$, en évaluant le rapport $\frac{\overline{PM}}{\overline{AS}}$ et en utilisant les propriétés du triangle rectangle AOP. Le lieu de M est une courbe (C), que l'on précisera. Une droite de coefficient directeur m pivote autour du point P_1 d'abscisse 1 ($\overline{OP_1} = 1$.) Former l'équation de cette droite. Pour quelle valeur de m est-elle tangente au lieu de M?

3° Si AK est hauteur du triangle SAH, montrer que AK est perpendiculaire au plan OSH.

696. On donne un carré ABCD, de côté a. Sur la perpendiculaire en A au plan ABCD on prend un point S tel que $AS = a$.

Soient A′ et B′ les milieux des segments SA et SB. Un plan variable passe par A′B′ et coupe les segments SC et SD en C′ et D′.

1° Démontrer que le quadrilatère A′B′C′D′ est un trapèze rectangle. Peut-il être un carré?

2° Quelle est la droite d'intersection des deux plans SAD et SBC?

En déduire le lieu géométrique du point I commun aux deux droites A′D′ et B′C′ lorsque D′ décrit le segment SD.

3° Quelle est la droite d'intersection des deux plans SAC et SBD?

En déduire le lieu géométrique du point J commun aux deux droites A′C′ et B′D′ lorsque D′ décrit le segment SD.

4° On pose $SD' = x$. Évaluer $y = \overline{A'D'}^2$ en fonction de x et de a.

Étudier les variations de y, lorsque D′ décrit le segment SD, et tracer la courbe représentative.

697. On considère deux plans parallèles fixes (P) et (Q) et une droite fixe, perpendiculaire à ces plans, coupant (P) en A et (Q) en B. D'autre part, on considère sur le plan (P), un point M, et sur le plan (Q), un point N.

1° Si l'angle AMN est droit et le point M fixe, quel est le lieu du point N?

2° Si l'angle AMN est droit et le point N fixe, quel est le lieu du point M?

3° Si l'angle AMN est droit et la droite MN astreinte à passer par un point fixe de l'espace, O, quels sont les lieux de M et N?

698. AB est un segment fixe, de longueur a, situé dans un plan (Π) donné. Par A on trace la droite $x'Ax$, située dans (Π) et perpendiculaire à AB. Par B on trace la droite $y'By$ perpendiculaire au plan (Π).

M est un point variable sur $x'Ax$ et N un point variable sur $y'By$.

1° Montrer que les faces du tétraède ABMN sont des triangles rectangles.

2° Dans cette partie, on suppose que $MN = a\sqrt{2}$.

a) Quelle relation existe-t-il alors entre les longueurs de AM et de BN?

b) Montrer que la somme des carrés des longueurs des arêtes du tétraèdre ABMN est constante.

c) Quel est le lieu du quatrième sommet, P, du parallélogramme qui a pour côtés MN et MA?

d) Montrer que MN fait un angle constant avec AB.

699. On considère dans un plan P un cercle de centre O et de rayon R, un rayon OA de ce cercle et le diamètre BC perpendiculaire à OA. La médiatrice du rayon OA située dans le plan P coupe le cercle en E et F. Sur la perpendiculaire en A au plan de ce cercle, on prend un point S, que l'on joint aux trois points O, E et F.

1° Démontrer que les deux droites SO et EF sont orthogonales.

2° On appelle I le milieu de OE, J celui de OF, K celui de SE et L celui de SF. Montrer que les droites IJ et KL sont parallèles. En déduire que le quadrilatère IJKL est un rectangle. Quelle longueur faut-il donner au segment SA pour que ce rectangle devienne un carré?

3° Oh suppose maintenant que $SA = R\sqrt{2}$. Dans le plan déterminé par le point S et le diamètre OA on mène par S la perpendiculaire à la droite SO. Montrer que cette perpendiculaire rencontre le plan P en un point T. Calculer la longueur du segment AT et montrer que la droite AB passe par le milieu du segment TC.

700. On considère deux droites parallèles D et Δ d'un plan (P) et la droite $x'Ox$ perpendiculaire au plan (P) menée par un point O donné de D.

Un segment de droite AB, *de longueur constante l*, se déplace de façon que ses extrémités A et B se trouvent respectivement sur $x'Ox$ et sur Δ.

On désignera par H la projection orthogonale de O sur la droite Δ et par B' la projection orthogonale de B sur la droite D; on posera $OH = d$, avec $d < l$.

1° Montrer que le triangle AHB (quand il existe) et le triangle AB'B sont rectangles. Calculer, en fonction de d et de l, la longueur du segment AB'; en déduire que cette longueur reste constante quand le segment AB se déplace. Déterminer le lieu géométrique (C) du milieu M de AB' quand AB se déplace.

2° Déterminer les extrémités A_1 et A_2 du segment de $x'Ox$ décrit par le point A ainsi que les extrémités B_1 et B_2 du segment décrit par B sur Δ; calculer la longueur des segments A_1A_2 et B_1B_2.

3° Montrer que le milieu N de AB se trouve dans le plan médiateur du segment OH; en déduire le lieu géométrique de N. Montrer que le vecteur MN reste équipollent à un vecteur fixe et indiquer comment on peut passer du lieu de M à celui de N.

701. On donne, dans un plan (H), un triangle isocèle AOB tel que OA = OB = a et AOB = 2α. Soient I le milieu de AB, uOv la perpendiculaire en O au plan (H).

Un plan variable (P) passant par AB coupe uv en un point M. On désigne par x l'angle aigu des plans (H) et (P), par y la longueur OM et par $2z$ l'angle AMB.

1° Montrer que, quel que soit l'angle x, la droite IM est perpendiculaire à AB.

2° Calculer en fonction de a, y et α les tangentes des angles x et z.

3° On considère deux plans P′ et P″ passant par AB et coupant uv en M′ et M″. Quelle relation y a-t-il entre y' = OM′ et y'' = OM″, a et α lorsque ces deux plans sont perpendiculaires?

La condition obtenue est-elle suffisante?

4° Construire géométriquement les points M′ et M″ de façon que les deux plans (P′) et (P″) soient perpendiculaires et que M′M″ soit égal à une longueur donnée b.

A quelle condition le problème est-il possible?

Faire le dessin en supposant a = 4 cm, $\alpha = 30°$, b = 8 cm.

702. Dans un plan (P) un angle droit est mobile autour de son sommet fixe O et les côtés de cet angle coupent une droite fixe (D) de ce plan en A et B. On désigne par a la distance de O à (D) et par α l'angle aigu OAB. Sur la perpendiculaire en O au plan (P) on marque un point S tel que OS = h.

1° Calculer en fonction de a, h et α les arêtes du tétraèdre SOAB. Dans le cas particulier où $h = \frac{8a}{3}$, calculer α de façon que $SA = \frac{5}{3}$ OA.

2° h reprenant une valeur quelconque, déterminer la position de l'angle droit AOB de façon que le triangle SAB soit isocèle, le triangle OAB n'étant pas isocèle; discuter. (On pourra donner une solution géométrique ou calculer cos α.) Quelle relation doit-il exister entre a et h pour que le triangle SAB puisse être équilatéral?

3° Montrer que la projection orthogonale de O sur le plan défini par S et (D) est l'orthocentre du triangle SAB. O se projette en I sur SA et en J sur SB. Lieu des points I et J quand α varie.

703. Soient dans l'espace deux demi-droites Ax, By respectivement perpendiculaires au segment AB. On désigne par h la distance AB et par α l'angle des deux demi-droites, supposé différent de 0 et de 180°

1° On marque sur Ax un point M tel que AM = x, et sur By un point N tel que BN = y. Exprimer en fonction de x, y, h, α la distance MN. Il pourra être utile de considérer la demi-droite Bx' directement parallèle à Ax.

2° Trouver le lieu géométrique du milieu I de MN lorsque x et y varient arbitrairement d'une manière indépendante; ou lorsqu'ils varient de telle sorte que leur rapport reste constant; ou enfin, mais seulement dans le cas particulier où $\alpha = 90°$ lorsque la distance MN conserve une valeur constante a.

3° L'angle α étant aigu, on fait correspondre à tout point M de Ax le point N de By tel que la droite MN soit perpendiculaire à Ax, puis le point M′ de Ax tel que la droite NM′ soit perpendiculaire à By.

Indiquer une détermination simple des points N et M′. Calculer en fonction de α les rapports $\frac{AM}{AM'}$, $\frac{MM'}{AM'}$ et $\frac{MM'}{AM}$.

704. On envisage un plan (P), un point S extérieur à (P), (a) une droite du plan (P). On mène par S la perpendiculaire au plan défini par S et (a) et l'on appelle A l'intersection de cette perpendiculaire avec P; Nous dirons, dans la suite, que le point A et la droite (a) sont associés.

1° Réciproquement, le point A étant donné dans P, trouver la droite (a) admettant A pour point associé. Les définitions précédentes associent-elles à tout point de (P) une droite de ce plan et à toute droite de (P) un point de ce plan?

2° Soit A′ le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur (a); montrer que, quel que soit (a), la droite AA′ passe par un point fixe O. Montrer que le produit $\overline{OA}.\overline{OA'}$ est indépendant de (a).

3° On considère les droites (*a*) qui passent par un point fixe B du plan (P); trouver le lieu des points A correspondants. Préciser la position de B par rapport au lieu trouvé.

4° Soient (*a*) une droite arbitraire de (P), A son point associé. On mène par A une droite arbitraire (*b*); montrer que l'associé B de (*b*) est situé sur (*a*). On appelle (*c*) la droite AB; déterminer son point associé C.

5° Le triangle ABC étant défini comme il a été dit au précédent alinéa, montrer que le trièdre SABC (de sommet S) est trirectangle, c'est-à-dire que chaque arête (SA, par exemple) est perpendiculaire à la face opposée (SB, SC).

TABLES

TRIGONOMÉTRIQUES

Rapports trigonométriques naturels de DEGRÉ en DEGRÉ

Deg.	Radians	Sin.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Tang.	Cotg.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cos.		
0	0,0000	0,0000	infini	0,000	infini	1,000	1,0000	1,5708*	**90**
1	0,0175*	0,0175*	57,30*	0,0175*	57,29*	1,000	0,9998	1,5533	**89**
2	0,0349	0,0349*	28,65	0,0349	28,64*	1,001*	0,9994*	1,5359*	**88**
3	0,0524*	0,0523	19,11*	0,0524	19,08	1,001	0,9986	1,5184	**87**
4	0,0698	0,0698*	14,34*	0,0699	14,30	1,002	0,9976*	1,5010*	**86**
5	0,0873*	0,0872*	11,47	0,0875*	11,43	1,004*	0,9962*	1,4835	**85**
6	0,1047	0,1045	9,567*	0,1051	9,514	1,006*	0,9945	1,4661*	**84**
7	0,1222*	0,1219*	8,206*	0,1228*	8,144	1,008*	0,9925	1,4486	**83**
8	0,1396	0,1392*	7,185	0,1405	7,115	1,010*	0,9903*	1,4312*	**82**
9	0,1571*	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,4137	**81**
10	0,1745	0,1736	5,759*	0,1763	5,671	1,015	0,9848	1,3963*	**80**
11	0,1920*	0,1908	5,241*	0,1944*	5,145*	1,019*	0,9816	1,3788	**79**
12	0,2094	0,2079	4,810*	0,2126*	4,705*	1,022	0,9781	1,3614*	**78**
13	0,2269*	0,2250*	4,445	0,2309*	4,331	1,026	0,9744*	1,3439	**77**
14	0,2443	0,2419	4,134*	0,2493	4,011*	1,031*	0,9703*	1,3265*	**76**
15	0,2618*	0,2588	3,864*	0,2679	3,732	1,035	0,9659	1,3090*	**75**
16	0,2793*	0,2756	3 628*	0,2867	3,487	1,040	0,9613*	1,2915	**74**
17	0,2967	0,2924*	3,420	0,3057	3,271*	1,046*	0,9563	1,2741*	**73**
18	0,3142*	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,2566	**72**
19	0,3316	0,3256*	3,072*	0,3443	2,904	1,058*	0,9455	1,2392*	**71**
20	0,3491*	0,3420	2,924*	0,3640*	2,747	1,064	0,9397*	1,2217	**70**
21	0,3665	0,3584*	2,790	0,3839*	2,605	1,071	0,9336*	1,2043*	**69**
22	0,3840*	0,3746	2,669	0,4040	2,475	1,079*	0,9272*	1,1868	**68**
23	0,4014	0,3907	2,559	0,4245*	2,356*	1,086	0,9205	1,1694*	**67**
24	0,4189*	0,4067	2,459*	0,4452	2,246	1,095*	0,9135	1,1519	**66**
25	0,4363	0,4226	2,366	0,4663	2,145*	1,103	0,9063	1,1345*	**65**
26	0,4538*	0,4384*	2,281	0,4877	2,050	1,113*	0,8988*	1,1170	**64**
27	0,4712	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,0996*	**63**
28	0,4887*	0,4695*	2,130	0,5317	1,881*	1,133*	0,8829	1,0821	**62**
29	0,5061	0,4848	2,063*	0,5543	1,804	1,143	0,8746	1,0647*	**61**
30	0,5236*	0,5000	2,000	0,5774*	1,732	1,155*	0,8660	1,0472*	**60**
31	0,5411*	0,5150	1,942*	0,6009*	1,664	1,167*	0,8572*	1,0297	**59**
32	0,5585	0,5299	1,887	0,6249*	1,600	1,179	0,8480	1,0123*	**58**
33	0,5760*	0,5446	1,836	0,6494	1,540*	1,192	0,8387*	0,9948	**57**
34	0,5934	0,5592*	1,788	0,6745	1,483*	1,206	0,8290	0,9774*	**56**
35	0,6109*	0,5736*	1,743	0,7002	1,428	1,221*	0,8192*	0,9599	**55**
36	0,6283	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,9425*	**54**
37	0,6458*	0,6018	1,662*	0,7536*	1,327	1,252	0,7986	0,9250	**53**
38	0,6632	0,6157*	1,624	0,7813*	1,280*	1,269	0,7880	0,9076*	**52**
39	0,6807*	0,6293	1,589	0,8098*	1,235*	1,287*	0,7771	0,8901	**51**
40	0,6981	0,6428*	1,556*	0,8391*	1,192*	1,305	0,7660	0,8727	**50**
41	0,7156*	0,6561*	1,524	0,8693*	1,150	1,325	0,7547	0,8552	**49**
42	0,7330	0,6691	1,494	0,9004	1,111*	1,346*	0,7431	0,8378*	**48**
43	0,7505*	0,6820*	1,466	0,9325	1,072	1,367	0,7314*	0,8203	**47**
44	0,7679	0,6947*	1,440*	0,9657*	1,036*	1,390	0,7193	0,8029*	**46**
45	0,7854*	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,7854*	**45**
		Cos.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cotg.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Sin.	Radians	Deg.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

Rapports trigonométriques naturels de GRADE en GRADE

Grad.	Radians	Sin.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Tang.	Cotg.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cos.		
0	0,000	0,0000	infini	0,0000	infini	1,000	1,000	1,571*	**100**
1	0,016*	0,0157	63,66	0,0157	63,66*	1,000	0,9999*	1,555	**99**
2	0,031	0,0314	31,84*	0,0314	31,82	1,000	0,9995	1,539	**98**
3	0,047	0,0471	21,23*	0,0472*	21,20	1,001	0,9989*	1,524*	**97**
4	0,063*	0,0628*	15,93*	0,0629	15,89	1,002*	0,9980	1,508*	**96**
5	0,079*	0,0785*	12,75*	0,0787	12,71*	1,003	0,9969	1,492	**95**
6	0,094	0,0941	10,63*	0,0945	10,58*	1,004	0,9956*	1,477*	**94**
7	0,110*	0,1097	9,113*	0,1104	9,058*	1,006	0,9940*	1,461*	**93**
8	0,126*	0,1253	7,979*	0,1263	7,916*	1,008*	0,9921	1,445	**92**
9	0,141	0,1409	7,097	0,1423	7,026	1,010	0,9900	1,429	**91**
10	0,157	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,414*	**90**
11	0,173*	0,1719	5,816	0,1745	5,730*	1,015	0,9851	1,398	**89**
12	0,188	0,1874*	5,337*	0,1908	5,242	1,018	0,9823*	1,382	**88**
13	0,204	0,2028*	4,931	0,2071*	4,829*	1,021	0,9792	1,367*	**87**
14	0,220*	0,2181	4,584	0,2235	4,474*	1,025*	0,9759	1,351*	**86**
15	0,236*	0,2334	4,284*	0,2401*	4,165	1,028	0,9724*	1,335	**85**
16	0,251	0,2487*	4,021	0,2568*	3,895*	1,032	0,9686*	1,319	**84**
17	0,267	0,2639*	3,790*	0,2736*	3,655	1,037*	0,9646*	1,304*	**83**
18	0,283*	0,2790*	3,584	0,2905	3,442	1,041	0,9603*	1,288	**82**
19	0,298	0,2940	3,401*	0 3076	3,251*	1,046	0,9558*	1,272	**81**
20	0,314	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,257*	**80**
21	0,330*	0,3239	3,087	0,3424*	2,921*	1,057*	0,9461*	1,241*	**79**
22	0,346*	0,3387	2,952	0,3600	2,778*	1,063*	0,9409*	1,225	**78**
23	0,361	0,3535*	2,829	0,3779*	2,646	1,069	0,9354	1,210*	**77**
24	0,377*	0,3681	2,716	0,3959	2,526*	1,076*	0,9298*	1,194*	**76**
25	0,393*	0,3827*	2,613	0,4142	2,414	1,082	0,9239*	1,178	**75**
26	0,408	0,3971	2,518*	0,4327	2,311*	1,090*	0,9178*	1,162	**74**
27	0,424	0,4115	2,430	0,4515	2,215*	1,097	0,9114	1,147*	**73**
28	0,440*	0,4258*	2,349*	0,4706*	2,125	1,105	0,9048	1,131*	**72**
29	0,456*	0,4399	2,273	0,4899*	2,041	1,114*	0,8980	1,115	**71**
30	0,471	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,100*	**70**
31	0,487*	0,4679	2,137	0,5295*	1,889*	1,132*	0,8838*	1,084*	**69**
32	0,503*	0,4818*	2,076*	0,5498*	1,819*	1,141	0,8763	1,068	**68**
33	0,518	0,4955*	2,018	0,5704*	1,753	1,151	0,8686	1,052	**67**
34	0,534	0,5090	1,964	0,5914*	1,691*	1,162*	0,8607	1,037*	**66**
35	0,550*	0,5225*	1,914*	0,6128	1,632*	1,173*	0,8526	1,021	**65**
36	0,565	0,5358	1,866	0,6346	1,576*	1,184	0,8443	1,005	**64**
37	0,581	0,5490	1,821	0,6569*	1,522	1,196	0,8358	0,990*	**63**
38	0,597*	0,5621*	1,779	0,6796*	1,471	1,209	0,8271*	0,974*	**62**
39	0,613*	0,5750	1,739	0,7028	1,423*	1,222	0,8181	0,958	**61**
40	0,628	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1 236	0,8090	0,942	**60**
41	0,644	0,6004	1,666*	0,7508	1,332*	1,250	0,7997*	0,927*	**59**
42	0,660*	0,6129	1,632*	0,7757*	1,289	1,266*	0,7902*	0,911	**58**
43	0,675	0,6252	1,599	0,8012*	1,248	1,281	0,7804	0,895	**57**
44	0,691	0,6374	1,569*	0,8273*	1,209*	1,298*	0,7705	0,880*	**56**
45	0,707*	0,6494	1,540*	0,8541*	1,171*	1,315	0,7604	0,864*	**55**
46	0,723*	0,6613	1,512	0,8816	1,134	1,333	0,7501	0,848	**54**
47	0,738	0,6730	1,486*	0,9099	1,099*	1 352	0,7396	0,833*	**53**
48	0,754*	0,6845	1,461*	0,9391*	1,065*	1,372*	0,7290*	0,817*	**52**
49	0,770*	0,6959	1,437*	0,9691*	1,032*	1,393*	0,7181	0,801	**51**
50	0,785	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,785	**50**
		Cos.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cotg	Tang.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Sin.	Radians	Grad.

L'astérisque indique qu e le dernier chiffre est pris par excès.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

Notions préliminaires..... 10

I. GÉOMÉTRIE PLANE.

Première leçon. — *Segments de droite. Angles. Cercle*..... 13
Deuxième leçon. — *Symétries. Polygones. Triangle isocèle. Constructions fondamentales*..... 24
Troisième leçon. — *Égalité des triangles. Inégalités dans le triangle*.. 34
Quatrième leçon. — *Parallèles. Somme des angles d'un polygone*..... 47
Cinquième leçon. — *Parallélogramme. Rectangle. Losange. Carré*..... 56
Sixième leçon. — *Trapèze. Parallèles équidistantes. Droites concourantes dans le triangle*..... 67
Septième leçon. — *Cercle. Droite et cercle. Positions relatives de deux cercles. Mesure des arcs. Cordes*..... 76
Huitième leçon. — *Angle inscrit*..... 89
Neuvième leçon. — *Lieux géométriques. Arc capable*..... 96
Dixième leçon. — *Constructions géométriques*..... 106
Onzième leçon. — *Rapport de deux segments. Division harmonique.* 116
Douzième leçon. — *Théorème de Thalès. Applications*..... 125

II. GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Treizième leçon. — *Généralités sur le plan*..... 132
Quatorzième leçon. — *Droites parallèles. Angle de deux droites. Droite et plan parallèles*..... 140
Quinzième leçon. — *Plans parallèles*..... 148
Seizième leçon. — *Droite et plan perpendiculaires*..... 155
Dix-septième leçon. — *Perpendiculaire et obliques. Applications*..... 162
Dix-huitième leçon. — *Angles dièdres. Plans perpendiculaires*..... 167
Dix-neuvième leçon. — *Projection sur un plan*..... 177
Vingtième leçon. — *Tièdres. Angles polyèdres. Symétries*..... 184
Vingt et unième leçon. — *Vecteurs. Produit d'un vecteur par un nombre. Sommes vectorielles*..... 191
Vingt-deuxième leçon. — *Projection d'un vecteur. Translation*..... 201
Vingt-troisième leçon. — *Homothétie*..... 210

III. SIMILITUDE.

Vingt-quatrième leçon. — *Triangles semblables*..... 224
Vingt-cinquième leçon. — *Relations métriques dans le cercle. Polygones semblables. Lieux géométriques*..... 233
Vingt-sixième leçon. — *Relations métriques dans le triangle rectangle. Constructions*..... 241
Vingt-septième leçon. — *Éléments de trigonométrie.*..... 250
Vingt-huitième leçon, — *Relations trigonométriques dans le triangle rectangle et dans le triangle quelconque.*..... 257
Problèmes de revision..... 268
Tables trigonométriques..... 281

Imprimé en France
IMPRIMERIE FIRMIN-DIDOT. – PARIS - MESNIL - IVRY – 3075
Dépôt légal : 2e trimestre 1965.