JOKERS

MATHÉMATIQUES

2de



Exercices corrigés

BORDAS

N

Norme 118

O

Orthonormé(e) 141

P

Parallélépipède rectangle 214
Plan médiateur 214
Pourcentage 212
Prisme droit 73
Puissance d'un réel 214
Pyramide 7

R

Radians 214
Réflexion 188
Repère 162
Représentation graphique (fonction) 139, 140
Rotation 89

S

Sinus 163
Sphère 186, 189
Symétrie orthogonale 214
Systèmes 162

T

Tangente 53, 56, 57

Thalès 186
Translation 121
Trigonométrie 164

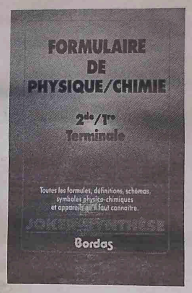
V

Valeur absolue 186

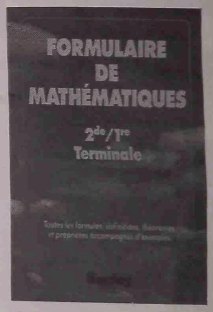
Variance 8
Vecteur 77
Vecteurs colinéaires 117
Vecteurs orthogonaux 120, 141
Vecteurs directeurs d'une droite 121, 141
141

JOKER-SYNTHÈSE

Pour apprendre, retenir, retrouver...



FORMULAIRE DE PHYSIQUE ET CHIMIE
2de, 1re, TERMINALE
par Y. Delsaux
cartonné, 160 pages



Pour les élèves de seconde, première et terminale, deux formulaires concis et indispensables pour mémoriser et retrouver facilement tous les théorèmes, formules, définitions et propriétés essentiels en mathématiques, physique et chimie.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES
2de, 1re, TERMINALE
par A. Deville, D. Cahour
cartonné, 160 pages

BORDAS

12 1° La figure 28 représente un plan méridien, c'est-à-dire un plan contenant le pôle nord N et le pôle sud S. Ce plan coupe le 50e parallèle en M et P; il coupe l'équateur en A et B.

Par définition de la latitude, on a $\widehat{AOM} = 50°$.

Le 50e parallèle est le cercle de centre Ω, milieu de $[PM]$, et de rayon ΩM.

Calculons ΩM. Soit H la projection orthogonale de M sur (AB).

On a $\Omega M = OH = OM \cos 50° = R \cos 50°$.

La longueur du 50e parallèle est donc :

$2\pi\Omega M = 2\pi R \cos 50° \approx 2\pi \times 6\,400 \times 0{,}643 \approx 26\,000$ km.

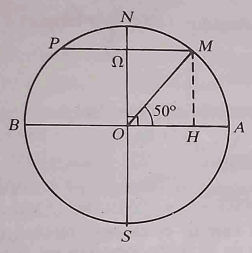


Fig. 28

2° En raisonnant comme au 1°, on démontre que si x est un réel compris entre 0 et 90, la longueur du parallèle à la latitude x^0 est $2\pi R \cos x^0$.

On doit donc avoir $2\pi R \cos x^0 = 10\,000$,

$$\cos x^0 = \frac{10\,000}{2\pi \times 6\,400} \approx 0{,}249.$$

A l'aide d'une calculatrice, on trouve $x = 76$.

Les parallèles de longueur 10 000 km sont les 76e parallèles (nord et sud).

Index

A

Angles (orientés) 188

B

Base (du plan) 140

C

Centre de gravité (d'un triangle) 123
Coefficient directeur 26
Cône 214
Coordonnées 140
Cosinus 186, 189
Cylindre droit 214

E

Écart-type 77
Effectif 72
Effectif cumulé 73
Équation d'une droite 141

F

Fonction 89
Fonction affine 26, 92
Fonction constante 91
Fonction croissante (strictement) 90
Fonction décroissante (strictement) 90
Fonction impaire 91
Fonction linéaire 27
Fonction paire 91
Fonction périodique 191, 192
Fréquence 72

H

Histogramme 74
Homothétie 165

M

Maximum 96
Médiane 75, 123
Mesure algébrique 139
Mesure d'un angle 188
Mesure principale (angle) 189
Milieu 122
Minimum 96
Moyenne arithmétique 76

$50 + x^2 = 100 - 20x + x^2$,
$20x = 100 - 50 = 50$.
D'où $x = 2{,}5$.

10 1° Le tétraèdre $ABCD$ est représenté à la figure 27.

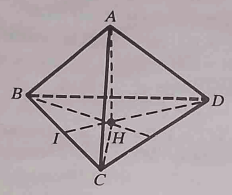


Fig. 27

a) La droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).
Le triangle BHA est donc rectangle en H et $BH^2 + HA^2 = AB^2$.
On en déduit que $HB^2 = AB^2 - AH^2 = l^2 - AH^2$.
De même, en considérant les triangles rectangles CHA et DHA, on obtient $HC^2 = l^2 - AH^2$ et $HD^2 = l^2 - AH^2$.
Par conséquent, $HB = HC = HD$.

b)

Le point H est équidistant des points B, C et D. C'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle BCD, c'est-à-dire le point d'intersection des médiatrices de ce triangle.

Or le triangle BCD est équilatéral, car par hypothèse,
$BC = CD = DB = l$.
Une médiatrice du triangle BCD est donc aussi médiane (et hauteur et bissectrice). Le point H est donc aussi centre de gravité du triangle BCD (et orthocentre et centre du cercle inscrit).

2° — D'après le 1° *b*), on a $(DI) \perp (BC)$ et $IC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} l$.

Dans le triangle DIC, le théorème de Pythagore donne :
$DI^2 + IC^2 = DC^2$.

D'où $DI^2 = DC^2 - IC^2 = l^2 - \left(\frac{1}{2} l\right)^2 = l^2 - \frac{1}{4} l^2 = \frac{3}{4} l^2$

et $DI = \frac{\sqrt{3}\, l}{2}$.

— Comme H est le centre de gravité du triangle BCD,

on a $DH = \frac{2}{3} DI = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}\, l}{2} = \frac{\sqrt{3}\, l}{3}$.

— Dans le triangle DHA, rectangle en H, on a $AH^2 + HD^2 = AD^2$.

D'où $AH^2 = AD^2 - HD^2 = l^2 - \left(\frac{\sqrt{3}\, l}{3}\right)^2 = l^2 - \frac{1}{3} l^2 = \frac{2}{3} l^2$.

On en déduit que $AH = \sqrt{\frac{2}{3}}\, l$.

3° La surface de la base triangulaire BCD est égale à :

$\frac{1}{2} BC \cdot DI = \frac{1}{2} l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$.

La hauteur du tétraèdre $ABCD$, par rapport à la base BCD est

$AH = \sqrt{\frac{2}{3}}\, l$.

Le volume du tétraèdre est donc égal à :

$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} l = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$.

11 Sur la figure 19, l'arc de cercle AA' représente le développement du cercle de la base du cône. Sa longueur est donc $2\pi R$.
Soit x la mesure en radians de l'angle du secteur de sommet S et contenant l'arc AA' ; soit y sa surface. Considérons le tableau suivant :

Mesure en radians de l'angle de secteur	Longueur de l'arc intercepté	Surface du secteur
x / 2π	$2\pi R$ / $2\pi a$	y / πa^2

1°

Les mesures des angles de secteurs sont proportionnelles aux longueurs des arcs interceptés, donc :

$\frac{x}{2\pi} = \frac{2\pi R}{2\pi a}$ et $x = 2\pi \frac{R}{a}$.

2°

Les mesures des angles de secteurs sont proportionnelles aux surfaces des secteurs, donc :

$\frac{x}{2\pi} = \frac{y}{\pi a^2}$ et $y = \frac{\pi a^2 x}{2\pi} = \frac{a^2 x}{2} = \frac{a^2 2\pi R}{2a}$,

c'est-à-dire finalement $y = \pi R a$.
La surface latérale du cône est donc égale à $\pi R a$.

Posons $AB = BC = CA = a = 3$ cm.

Alors $AB^2 = BH^2 + AH^2$ (Pythagore).

Donc $AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$.

D'où $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

La surface du triangle ABC est

$S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

Volume du prisme :

On obtient $V = S \times AA' = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 11 = \frac{99\sqrt{3}}{4}$ cm^3,

$V \approx 42{,}8$ cm^3 à 0,1 cm^3 près.

9

1° Le carré $ABCD$ a pour surface $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$.
La hauteur de la pyramide est $SI = 10$ cm.
Le volume de la pyramide est donc égal à :

$\frac{1}{3} \times 100 \times 10 = \frac{1\,000}{3}$ cm^3 (≈ 333 cm^3).

2° On a $SA = SB = SC = SD$.
(Ce résultat «se voit» sur la figure. Pour le démontrer, voir par exemple le 3° *a*).)

Les triangles SAB, SBC, SCD et SDA ayant les mêmes dimensions, ils ont la même surface s et la surface latérale de la pyramide est égale à $4s$.
Calculons par exemple la surface du triangle SBC.
Soit H le pied de la hauteur issue de S dans ce triangle.
Comme le triangle SBC est isocèle, le point H est aussi le milieu de $[BC]$ (fig. 26).

La surface du triangle SBC est $s = \frac{1}{2}SH \cdot BC$.

Calcul de *SH* :

Dans le triangle SIH, rectangle en I, on a :

$SH^2 = SI^2 + IH^2 = 10^2 + 5^2 = 125$.

D'où $SH = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ cm.

Surface du triangle *SBC* :

C'est $s = \frac{1}{2}SH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times 10 = 25\sqrt{5}$ cm^2.

Conclusion : la surface latérale de la pyramide vaut :

$4 \times 25\sqrt{5} = 100\sqrt{5}$ cm^2 (≈ 224 cm^2).

3° *a*) Dans le triangle MIA, rectangle en I (fig. 26), on a :

$AM^2 = IA^2 + IM^2 = IA^2 + x^2$.

De même, $BM^2 = IB^2 + IM^2 = IB^2 + x^2$,
$CM^2 = IC^2 + IM^2 = IC^2 + x^2$,
$DM^2 = ID^2 + IM^2 = ID^2 + x^2$.

Or $IA = IB = IC = ID$, car I est le centre du carré $ABCD$.
Donc $AM = BM = CM = DM$.

Remarque : en particulier, si $x = 10$, alors $M = S$.
Donc $AS = BS = CS = DS$.

b) Pour avoir $MA = MB = MC = MD = MS$, il suffit, d'après ce qui précède, que $MA = MS$ (par exemple).

Calcul de *MA* :

On a $MA^2 = IA^2 + x^2$, d'après le 3° *a*).

Or $IA = \frac{1}{2}AC$.

Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 10^2 + 10^2 = 200$,

d'où $AC = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

On en déduit que $IA = \frac{1}{2}AC = 5\sqrt{2}$

et que $MA^2 = IA^2 + x^2 = 50 + x^2$.

Calcul de *MS* :

On a $MS = IS - IM = 10 - x$ (fig. 26).

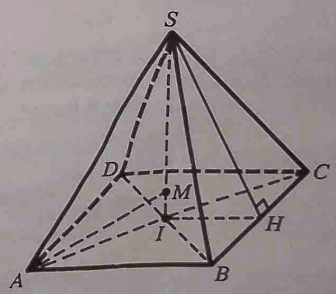


Fig. 26

La condition $MA = MS$ équivaut successivement à :

$MA^2 = MS^2$,
$50 + x^2 = (10 - x)^2$,

5 L'ensemble des points équidistants de A et B est le plan médiateur de $[AB]$. Notons $\mathcal{P}_1$ ce plan; soient $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ respectivement les plans médiateurs de $[AC]$ et $[BC]$.

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles. En effet, sinon, les droites (AB) et (AC) respectivement orthogonales à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ seraient parallèles donc les points A, B et C seraient alignés, ce qui est exclu. Soit Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Tout point M de Δ vérifie alors $MA = MB$ d'une part, et $MA = MC$ d'autre part. On a donc $MB = MC$, ce qui prouve que M appartient à $\mathcal{P}_3$. La droite $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ est l'ensemble cherché.
Soit O le point d'intersection de Δ avec $\mathcal{P}$. Comme O est équidistant de A, B, C, c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Remarque : les intersections des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ avec $\mathcal{P}$ sont les médiatrices respectives de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ dans le plan $\mathcal{P}$ (fig. 23).

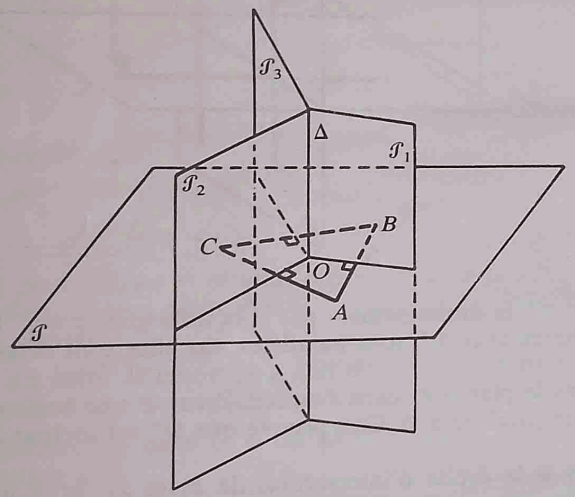


Fig. 23

6 Dans la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à (IJ), la droite (IJ) se projette en un point K.

De plus, la projection du milieu d'un segment est le milieu de la projection du segment.

Comme le point I est le milieu de $[AB]$, sa projection K est le milieu de $[A'B']$.
De même, le point J étant le milieu de $[CD]$, sa projection, qui est aussi K, est le milieu de $[C'D']$.
Les segments $[A'B']$ et $[C'D']$ ont même milieu K, donc $A'D'B'C'$ est un parallélogramme (fig. 24).

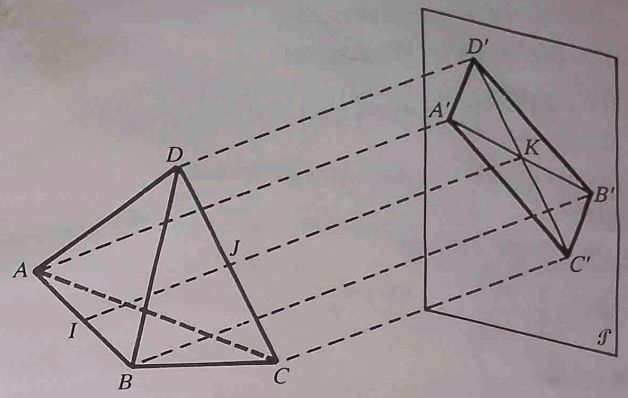


Fig. 24

7 1° Dans le triangle ABC, rectangle en B, on a :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$.

Donc $AC = l\sqrt{2}$.
Dans le triangle ACG, rectangle en C, on a :
$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2l^2 + l^2 = 3l^2$.

Donc $AG = l\sqrt{3}$.

2° Dans le triangle ACG, rectangle en C, on peut écrire par exemple :

$$\tan \widehat{CAG} = \frac{CG}{AC} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,1.$$

A l'aide d'une table trigonométrique ou d'une calculatrice, on obtient $\widehat{CAG} \approx 35°$.

8 Le volume V s'obtient en multipliant la surface de la base ABC par la hauteur AA'.

Surface du triangle ABC :
Dans le triangle ABC, soit H le pied de la hauteur issue de A. Le point H est aussi le milieu de $[BC]$ car le triangle ABC est équilatéral (fig. 25).

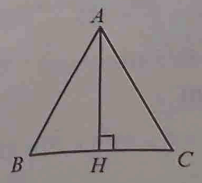


Fig. 25

3 1° Soit M un point commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Soit $\mathcal{D}'$ la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par M. Démontrons que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{D}'$.

Comme M est un point de $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{P}$ est parallèle à $\mathcal{D}$, la droite $\mathcal{D}'$ est incluse dans $\mathcal{P}$ (on utilise le rappel de l'énoncé).

Mais M est aussi un point de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}$ est aussi parallèle à $\mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}'$ est aussi incluse dans $\mathcal{Q}$.

On en déduit que $\mathcal{D}' = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, ce qui prouve que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est bien une droite parallèle à $\mathcal{D}$ (fig. 20).

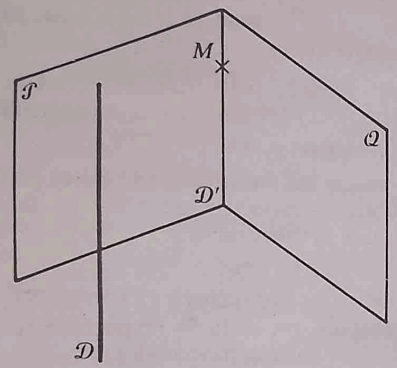


Fig. 20

2°

On peut utiliser le résultat précédent pour déterminer l'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.
On cherche :

— un point M commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$;
— une droite $\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$.

L'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est alors la droite passant par M et parallèle à $\mathcal{D}$.

a) Le point C appartient aux plans $(ABCD)$ et (HCE).
La droite (AD) est parallèle au plan $(ABCD)$, car elle est incluse dans ce plan.
La droite (AD) est aussi parallèle au plan (HCE), car elle est parallèle à la droite (HE) du plan (HCE).
Donc $(ABCD) \cap (HCE)$ est la droite passant par C et parallèle à (AD), c'est-à-dire que : $(ABCD) \cap (HCE) = (BC)$.

b) De même, le point B appartient aux plans $(ABCD)$ et (BEG). La droite (EG) est parallèle au plan (BEG), car elle est incluse dans ce plan.
La droite (EG) est aussi parallèle au plan $(ABCD)$, car elle est parallèle à la droite (AC) du plan $(ABCD)$.
Donc $(ABCD) \cap (BEG)$ est la droite passant par B et parallèle à (EG).

4 1° Soit $\mathcal{P}$ un plan perpendiculaire à $\mathcal{P}'$. On note $\mathcal{D}$ la droite orthogonale à $\mathcal{P}'$ contenue dans $\mathcal{P}$, O le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}'$, et Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ (voir fig. 21).
Soit $\mathcal{D}'$ la droite du plan $\mathcal{P}'$ orthogonale en O à Δ.
D'une part, on a $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$,
car la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}'$, donc à $\mathcal{D}'$.
D'autre part, on a par hypothèse $\mathcal{D}' \perp \Delta$.
La droite $\mathcal{D}'$ est orthogonale à deux droites concourantes de $\mathcal{P}$, donc au plan $\mathcal{P}$ lui-même. Le plan $\mathcal{P}'$ contient bien une droite orthogonale à $\mathcal{P}$. Il est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
On dira par la suite que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.

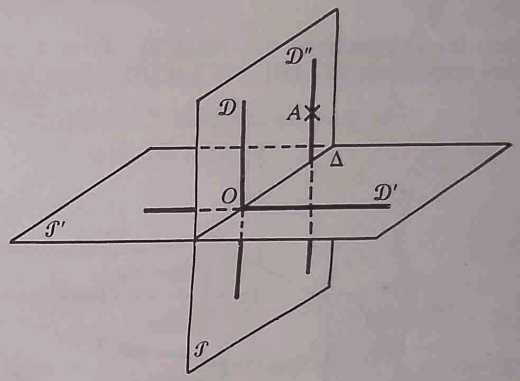


Fig. 21

2° Soit $\mathcal{D}''$ la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}'$ (fig. 21).
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont parallèles, car elles sont orthogonales à un même plan $\mathcal{P}'$.
Or dans le plan $\mathcal{P}$ et dans l'espace, il existe une seule droite passant par A et parallèle à $\mathcal{D}$. Ceci prouve que $\mathcal{D}''$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

3° Soit $\mathcal{D}$ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, et A un point de $\mathcal{D}$ (voir fig. 22).
D'après le 2°, la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}'$ est incluse dans $\mathcal{P}_1$ d'une part, et dans $\mathcal{P}_2$ d'autre part. Elle est par conséquent confondue avec $\mathcal{D}$, ce qui démontre que $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}'$.

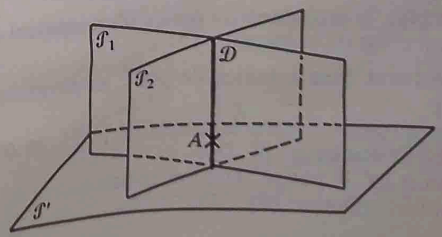


Fig. 22

3° Soit M un point du segment $[SI]$.

a) Démontrer que M est équidistant de A, B, C et D.

b) On pose $IM = x$ cm, avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.
Pour quelle valeur de x le point M est-il équidistant de A, B, C, D et S?

10 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont même longueur l).

1° Soit H la projection orthogonale de A sur le plan BCD.

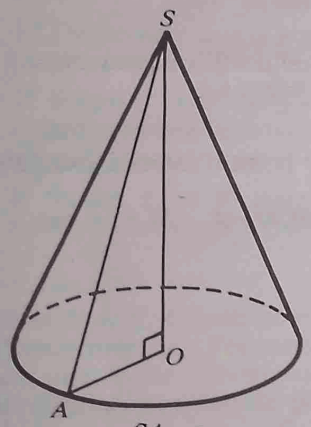
a) Démontrer que $HB = HC = HD$.

b) En déduire que H est aussi le centre de gravité du triangle BCD.

2° Soit I le milieu de $[BC]$.
Calculer DI, DH et AH en fonction de l.

3° En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$ en fonction de l.

11 Un cône de révolution est engendré par un segment $[SA]$ tournant autour d'une droite (SO) en faisant avec elle un angle constant (voir fig. 18). Si l'on développe ce cône, on obtient donc un secteur circulaire (voir fig. 19).



$SA = a$

$OA = R$

Fig. 18

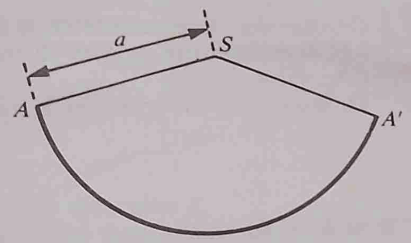


Fig. 19

1° Calculer l'angle $\widehat{S}$ de ce secteur circulaire en fonction de R et a.

2° En déduire la surface latérale du cône.

12 On considère que la terre est une sphère de rayon $R = 6\,400$ km.

1° Calculer la longueur du 50e parallèle.

2° Existe-t-il un parallèle de longueur 10 000 km?

CORRIGÉS

1 1° La propriété $(AE) /\!/ (GC)$ est vraie.

2° La propriété $(DH) /\!/ (BG)$ est fausse.
Les droites (DH) et (BG) n'ont pas la même direction.

3° $EHCB$ est un parallélogramme.
En effet, on a par exemple $(EH) /\!/ (BC)$ et $(EB) /\!/ (HC)$.

4° La propriété $(FG) /\!/$ plan $(EHDA)$ est vraie.
En effet, la droite (FG) est parallèle à la droite (EH) du plan $(EHDA)$.

5° La propriété $(FG) /\!/$ plan $(EHCB)$ est vraie.
En effet, la droite (FG) est parallèle à la droite (EH) du plan $(EHCB)$.

6° La propriété $(EB) \perp (HG)$ est fausse.
En effet, si on mène les parallèles à (EB) et (HG) par le point E (par exemple), on obtient respectivement les droites (EB) et (EF). Or ces droites ne sont pas orthogonales.

7° La propriété $(EB) \perp (DG)$ est vraie.
En effet, si on mène les parallèles à (EB) et (DG) par le centre du carré $ABFE$ (par exemple), on obtient respectivement les droites (EB) et (AF). Or ces droites sont orthogonales.

8° La propriété $(AB) \perp$ plan $(EHCB)$ est fausse.
En effet, (AB) n'est pas orthogonale à toute droite du plan $(EHCB)$: par exemple (AB) n'est pas orthogonale à (EB).

9° La propriété $(BC) \perp$ plan $(DCGH)$ est vraie.
En effet, (BC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan $(DCGH)$: par exemple les droites (DC) et (CG).

10° La propriété $(BC) \perp (DG)$ est vraie.
En effet, la droite (BC) est orthogonale au plan $(DCGH)$, d'après le 9°. Elle est donc orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier $(BC) \perp (DG)$.

2 1° La propriété est vraie.

2° La propriété est fausse. Par exemple, sur la figure 14, les droites (EF) et (EG) sont toutes les deux parallèles au plan $(ABCD)$. Mais ces droites ne sont pas parallèles entre elles.

3° La propriété est vraie.

4° La propriété est fausse. Par exemple, sur la figure 14, les plans $(ABCD)$ et $(ADHE)$ sont tous les deux parallèles à la droite (FG).
Mais ces plans ne sont pas parallèles entre eux.

5° La propriété est fausse. Par exemple, sur la figure 14, les droites (AB) et (AD) sont toutes les deux orthogonales à la droite (AE).
Mais ces droites ne sont pas parallèles entre elles.

6° La propriété est vraie.

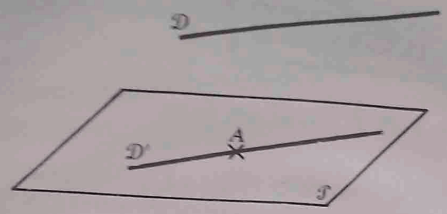


Fig. 15

1° A l'aide du résultat de la page précédente, démontrer que si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des plans sécants (distincts) parallèles à une même droite $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}$.

2° On considère le cube de la figure 14.

a) Déterminer l'intersection des plans $(ABCD)$ et (HCE).

b) Déterminer l'intersection des plans $(ABCD)$ et (BEG).

4 *Plans perpendiculaires*

On dit qu'un plan $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}'$ si et seulement si $\mathcal{P}$ contient une droite orthogonale à $\mathcal{P}'$.

1° Démontrer que « $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}'$ » équivaut à « $\mathcal{P}'$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ ».

2° Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans perpendiculaires et A un point de $\mathcal{P}$. Démontrer que la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}'$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

3° Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans non parallèles perpendiculaires à un même troisième $\mathcal{P}'$. Que peut-on dire de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$?

5 Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan $\mathcal{P}$.
Démontrer que l'ensemble Δ des points équidistants de A, B et C est une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.
Préciser la position du point d'intersection O de Δ et $\mathcal{P}$.

6 *Projection*

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.
Soit $\mathcal{P}$ un plan non parallèle à la droite (IJ). On note A', B', C', D' les projections respectives de A, B, C, D sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite (IJ).
Démontrer que $A'D'B'C'$ est un parallélogramme.

Indication : considérer les projections de I et J sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à (IJ).

Exercices 7 à 12 : longueurs, surfaces, volumes

7 On considère le cube de la figure 14. On note l la longueur d'un de ses côtés.

1° Calculer AC et AG en fonction de l.

2° Donner une mesure à un degré près de $\widehat{CAG}$.

8 La figure 16 représente un prisme droit, posé sur une de ses faces.
Les sections droites ABC et $A'B'C'$ sont des triangles équilatéraux.

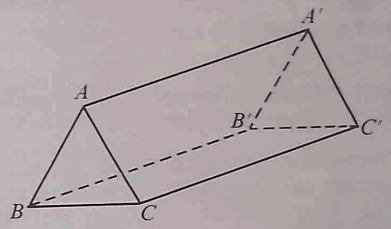


Fig. 16

On sait que $AB = 3$ cm et $AA' = 11$ cm.
Calculer le volume V de ce prisme à 10^{-1} cm^3 près.

9 On considère la pyramide de la figure 17.
$ABCD$ est un carré de côté 10 cm ; I est le point d'intersection de ses diagonales.
La droite (SI) est orthogonale au plan $(ABCD)$ et $SI = 10$ cm.

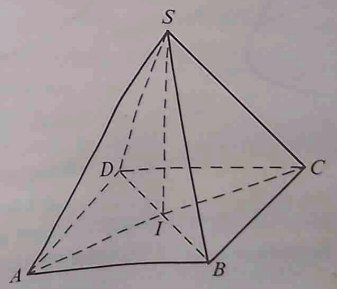


Fig. 17

1° Calculer le volume de cette pyramide.

2° Calculer la surface latérale de cette pyramide.

• La projection conserve le milieu : soit I le milieu de $[AB]$; notons I', A', B' les projections respectives de I, A, B ; alors I' est le milieu de $[A'B']$ (fig. 13).

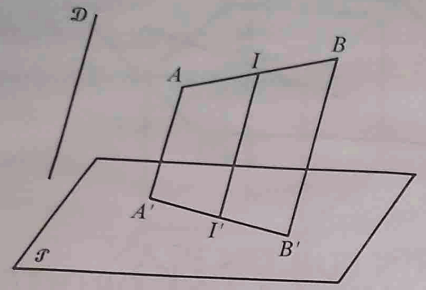
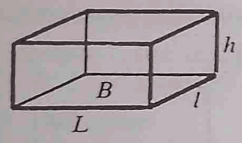
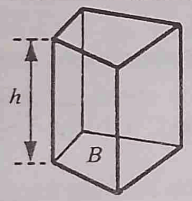
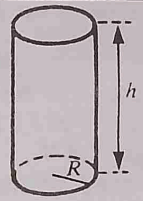
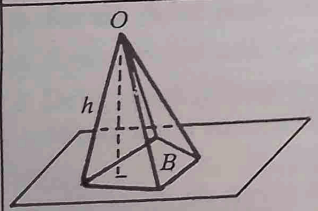
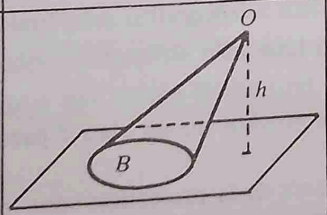
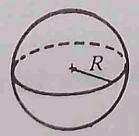


Fig. 13

IV — AIRES ET VOLUMES DES SOLIDES USUELS

Dans les formules suivantes, V désigne le volume, S la surface latérale, B la surface de base et P le périmètre de base.

Parallélépipède rectangle	Prisme droit	Cylindre droit
		
$V = L \times l \times h$ $S = 2(L + l)h$	$V = Bh$ $S = Ph$	$V = \pi R^2 h$ $S = 2\pi Rh$
$V = Bh$ et $S = Ph$		

Pyramide	Cône	Sphère
		
$V = \frac{1}{3} Bh$		$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
h désigne la distance de O au plan de base.		

EXERCICES

Exercices 1 et 2 : vrai ou faux

1 On considère le cube de la figure 14.
Indiquer pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse, sans justifier la réponse.

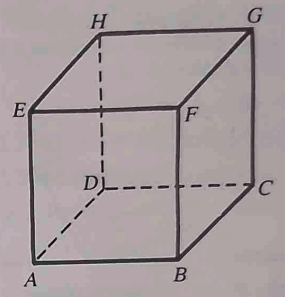


Fig. 14

1° $(AE) \parallel (GC)$.
2° $(DH) \parallel (BG)$.
3° $EHCB$ est un parallélogramme.
4° $(FG) \parallel$ plan $(EHDA)$.
5° $(FG) \parallel$ plan $(EHCB)$.
6° $(EB) \perp (HG)$.
7° $(EB) \perp (DG)$.
8° $(AB) \perp$ plan $(EHCB)$.
9° $(BC) \perp$ plan $(DCGH)$.
10° $(BC) \perp (DG)$.

2 Indiquer pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie (sans justification) ou fausse (donner un contre-exemple).

1° Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles.

2° Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles.

3° Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles.

4° Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles.

5° Deux droites orthogonales à une même troisième droite sont parallèles.

6° Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

Exercices 3 à 6 : démonstrations

3 *On rappelle le résultat suivant.*
Soit $\mathcal{D}$ une droite parallèle à un plan $\mathcal{P}$ et A un point de $\mathcal{P}$.
La droite $\mathcal{D}'$ passant par A et parallèle à $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$ (fig. 15).

Exemple : on considère le cube de la figure 9.

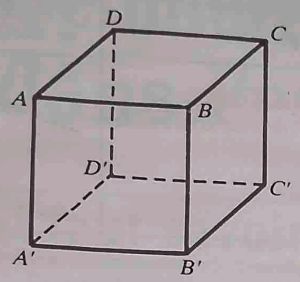


Fig. 9

On a $(DD') \perp (A'B')$. En effet, les parallèles à (DD') et $(A'B')$ menées par D (par exemple) sont respectivement (DD') et (DC), et ces droites sont orthogonales dans le plan $(D'DCC')$.
De même $(DD') \perp (B'C')$, etc.

2° Droite et plan orthogonaux

***a)* Définition**

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Exemple : sur la figure 9, la droite (DD') est orthogonale au plan $(A'B'C'D')$, car on a $(DD') \perp (A'B')$ et $(DD') \perp (A'D')$ par exemple.

***b)* Théorème**

Une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toute droite de ce plan.

3° Quelques propriétés

- Par un point passe une seule droite orthogonale à un plan donné.
- Par un point passe un seul plan orthogonal à une droite donnée.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

4° Plan médiateur

Soient A et B des points distincts de l'espace. L'ensemble des points équidistants de A et B est le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $[AB]$ en son milieu I. Ce plan $\mathcal{P}$ s'appelle le plan médiateur de $[AB]$; il est la réunion de toutes les médiatrices de $[AB]$ (fig. 10).

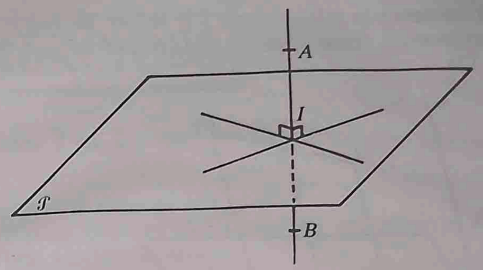


Fig. 10

III — PROJECTION SUR UN PLAN PARALLÈLEMENT A UNE DROITE

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{D}$ une droite non parallèle à $\mathcal{P}$.

1° Définition

— La projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$ est l'application qui, à tout point M de l'espace, associe le point M', intersection de $\mathcal{P}$ et de la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par M (fig. 11).

— Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux, on dit que la projection est la **projection orthogonale sur** $\mathcal{P}$ (fig. 12).

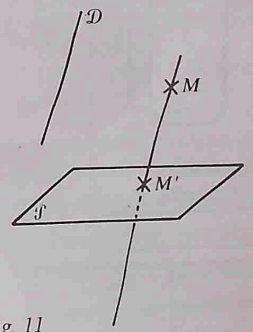


Fig. 11

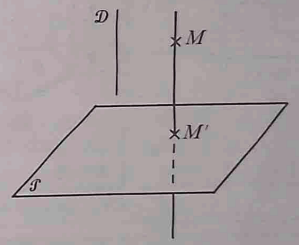


Fig. 12

2° Propriétés

On considère une projection sur un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une droite $\mathcal{D}$.

- Les points invariants de la projection sont les points de $\mathcal{P}$.
- Une droite parallèle à $\mathcal{D}$ se projette suivant un point ; une droite non parallèle à $\mathcal{D}$ se projette suivant une droite.
- Deux droites parallèles (et non parallèles à $\mathcal{D}$) se projettent suivant deux droites parallèles.

10 Géométrie dans l'espace

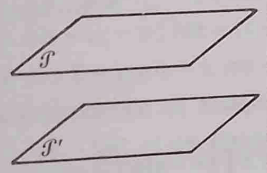
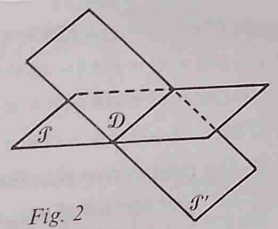
Ce qu'il faut savoir

I — DROITES ET PLANS

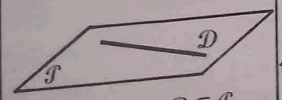
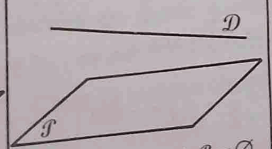
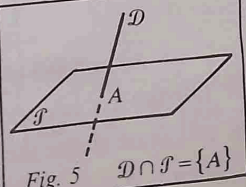
Les droites et les plans sont des sous-ensembles particuliers de l'espace. Ils vérifient notamment les propriétés suivantes.

- Par deux points distincts passe une droite et une seule.
- Par trois points non alignés passe un plan et un seul (ce qui peut aussi s'énoncer : il existe un plan et un seul contenant deux droites sécantes).
- Dans tout plan de l'espace, les théorèmes de géométrie plane sont vrais.

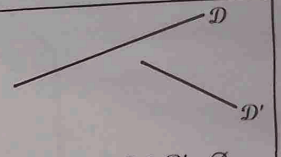
1° Position relative de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

$\mathcal{P}$ parallèle à $\mathcal{P}'$		$\mathcal{P}$ non parallèle à $\mathcal{P}'$
$\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ les plans sont confondus	 Fig. 1 $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \varnothing$	 Fig. 2 $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite $\mathcal{D}$

2° Position relative d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un plan $\mathcal{P}$

$\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{P}$		$\mathcal{D}$ non parallèle à $\mathcal{P}$
 Fig. 3 $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$	 Fig. 4 $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing$	 Fig. 5 $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{A\}$

3° Position relative de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires[1]
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ peuvent être confondues strictement parallèles ou sécantes en un point.	 Fig. 6 $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$

4° Quelques propriétés

- Par un point, on peut mener une seule droite parallèle à une droite donnée.
- Par un point, on peut mener un seul plan parallèle à un plan donné.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles (voir fig. 7).

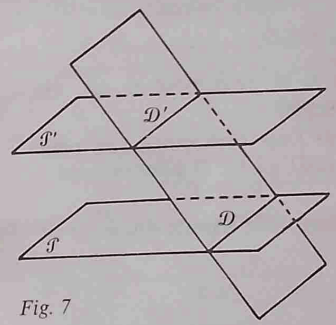


Fig. 7

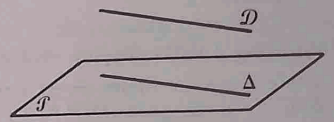


Fig. 8

- Une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est parallèle à une droite Δ de $\mathcal{P}$ (fig. 8).

II — ORTHOGONALITÉ

1° Droites orthogonales

On dit que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales si et seulement si les parallèles à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ menées par un point O sont orthogonales dans le plan qu'elles déterminent. (Cette définition ne dépend pas du point O choisi.)
On écrit $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$.

(1) Penser par exemple à un pont qui permet à une route $\mathcal{D}$ de franchir une voie ferrée $\mathcal{D}'$.

4° Le point D est représenté à la figure 23. Son ordonnée est $\frac{3}{5}$ et son abscisse est négative, car $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

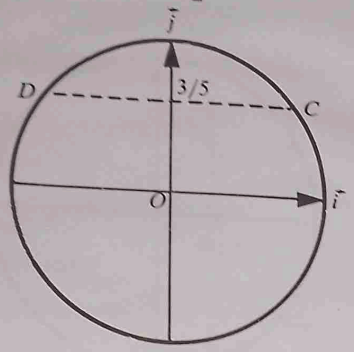


Fig. 23

Graphiquement :
Les points C et D sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc $\cos t = -\cos z = -\frac{4}{5}$.

Par le calcul :
En procédant comme au 3°, on obtient :

$\cos^2 t = \frac{16}{25}$, donc $\cos t = \frac{4}{5}$ ou $\cos t = -\frac{4}{5}$.

Cette fois-ci, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, donc $\cos t \leqslant 0$ et $\cos t = -\frac{4}{5}$.

13

1°

On met la calculatrice en mode « degrés ».
On affiche 0,325 1 et on appuie sur la touche $\boxed{\cos^{-1}}$.

On obtient $x \approx 71$. C'est la valeur cherchée, car $x \in [0, 180]$.

2° Soit x un réel. Les angles $x°$ et $(-x)°$ ont même cosinus (fig. 24).
On a donc $\cos(-71°) = \cos 71° \approx 0{,}325\,1$ (d'après le 1°).
Comme $-71 \in [-180, 0]$, la valeur cherchée est $x \approx -71$.

3°

On met la calculatrice en mode « degrés ».
On affiche 0,838 7 et on appuie sur la touche $\boxed{\sin^{-1}}$.

On obtient $x \approx 57$. C'est la valeur cherchée, car $x \in [-90, 90]$.

4° Soit x un réel. Les angles $x°$ et $(180 - x)°$ ont même sinus (fig. 24).
On a donc $\sin(180 - 57)° = \sin 57° \approx 0{,}838\,7$.

Or $180 - 57 = 123$ est un élément de l'intervalle $[90, 270]$.
Par conséquent, la valeur cherchée est $x \approx 123$.

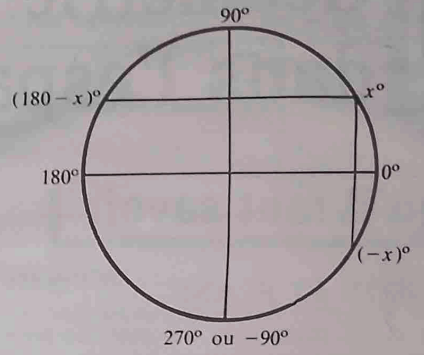


Fig. 24

5°

On met la calculatrice en mode « radians ».
On affiche $-0{,}614\,2$ et on appuie sur la touche $\boxed{\cos^{-1}}$.

On obtient $x \approx 2{,}232$. C'est la valeur cherchée, car $x \in [0, \pi]$.
(Rappel : $\pi \approx 3{,}14$.)

14

On utilise les formules des pages 190 et 191.

1° On peut écrire par exemple :
$\cos(2\pi + x) = \cos x$;
$\cos(3\pi + x) = \cos(2\pi + \pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$;
$\sin(4\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$;
$\sin(5\pi - x) = \sin(4\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$.
D'où $A = \cos x + \cos x - \sin x - \sin x = 2\cos x - 2\sin x$.

2° On peut écrire par exemple :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x ;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x ;$$

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x ;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

D'où $B = -\cos x + \sin x + \sin x - \cos x = 2\sin x - 2\cos x$.

11 1°

Pour chaque calcul, on commence par mettre la calculatrice dans le mode correspondant (degrés, grades ou radians). Les résultats sont demandés à 10^{-2} près, c'est-à-dire avec deux chiffres après la virgule.

a) On a $\cos 117^\circ \approx -0{,}45$ et $\sin 117^\circ \approx 0{,}89$.

b) On a $\cos 310 \text{ gr} \approx 0{,}16$ et $\sin 310 \text{ gr} \approx -0{,}99$.

c) On a $\cos 1{,}2\pi = -0{,}81$ et $\sin 1{,}2\pi \approx -0{,}59$.

2° Les points A, B, C sont représentés à la figure 21.

Il n'est pas nécessaire d'utiliser un rapporteur, car on connaît les coordonnées de ces points dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la figure 21.

Par exemple A a pour coordonnées (cos 117°, sin 117°), c'est-à-dire environ $(-0{,}45\,;\,0{,}89)$.

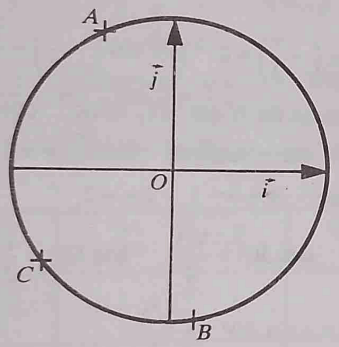


Fig. 21

12 1° Le point A est représenté à la figure 22. Son abscisse est $-\frac{1}{3}$ et son ordonnée est positive, car $x \in [0, \pi]$.

On utilise la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

On en déduit que $\sin x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou que $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Comme $x \in [0, \pi]$, on a $\sin x \geqslant 0$. Donc $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2° Le point B est représenté à la figure 22. Son abscisse est $-\frac{1}{3}$ et son ordonnée est négative, car $y \in [-\pi, 0]$.

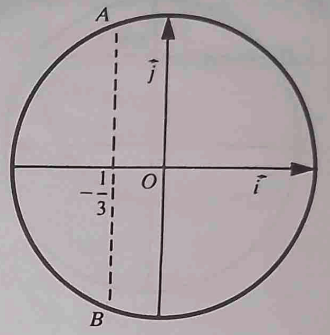


Fig. 22

Graphiquement :
Le point B est symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.

Donc $\cos y = -\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Par le calcul :
En procédant comme au 1°, on obtient :

$\sin^2 y = \frac{8}{9}$, donc $\sin y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\sin y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Cette fois-ci $y \in [-\pi, 0]$, donc $\sin y \leqslant 0$ et $\sin y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3° Le point C est représenté à la figure 23. Son ordonnée est $\frac{3}{5}$ et son abscisse est positive, car $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Donc $\cos^2 z = 1 - \sin^2 z = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

On en déduit que $\cos z = \frac{4}{5}$ ou $\cos z = -\frac{4}{5}$.

Comme $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos z \geqslant 0$. Donc $\cos z = \frac{4}{5}$.

Les points A à L sont représentés à la figure 19.
(On rappelle que $\frac{\pi}{6}$ rad = 30°.)

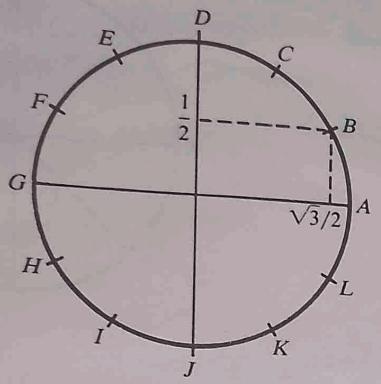


Fig. 19

2° On a $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

On a aussi $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En considérant les symétries de la figure 19, on peut remplir les tableaux suivants :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

α	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

10 1° On utilise le cerle trigonométrique.
Les angles de $-\frac{\pi}{2}$ rad, π rad et $\frac{3\pi}{2}$ rad correspondent respectivement aux points M, N et à nouveau M de la figure 20.

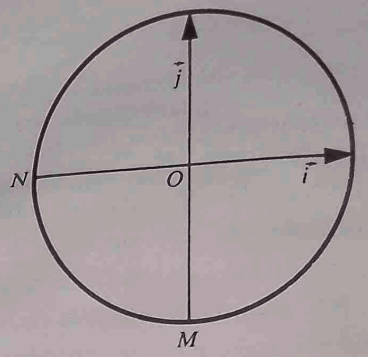


Fig. 20

On sait que les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

On a donc $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ $\left(\text{et } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\right)$.

De même, l'abscisse de N est -1, donc $\cos\pi=-1$.
L'ordonnée de M est -1, donc $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.
On en déduit que $A=0-1-1=-2$.

2° On sait que $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

et $\sin(-60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$.

3° On sait que 50 gr = 45° = $\frac{\pi}{4}$ rad.

Donc $\sin 50\text{ gr}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En considérant respectivement les points D et F de la figure 18, on voit que :

$\cos 150\text{ gr}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin 250\text{ gr}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $C=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

On cherche à ajouter ou retrancher des multiples de 2π aux mesures proposées de α pour obtenir une nouvelle mesure dans $]-\pi, \pi]$.

1° On peut écrire : $6\pi \text{ rad} = 6\pi \text{ rad} - 3 \times 2\pi \text{ rad} = 0 \text{ rad}$.
Comme $0 \in]-\pi, \pi]$, la mesure principale de α est 0.

2° On peut écrire : $-3\pi \text{ rad} = -3\pi \text{ rad} + 2 \times 2\pi \text{ rad} = \pi \text{ rad}$.
Comme $\pi \in]-\pi, \pi]$, la mesure principale de α est π.

3° On peut écrire : $500\pi \text{ rad} = 500\pi \text{ rad} - 250 \times 2\pi \text{ rad} = 0 \text{ rad}$.
Comme $0 \in]-\pi, \pi]$, la mesure principale de α est 0.

4° On a $\frac{17\pi}{2} = 8{,}5\pi$. En retranchant $8\pi = 4 \times 2\pi$, on obtient :

$$\frac{17\pi}{2} \text{ rad} = \frac{17\pi}{2} \text{ rad} - 8\pi \text{ rad} = \left(\frac{17\pi - 16\pi}{2}\right) \text{rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Comme $\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi]$, la mesure principale de α est $\frac{\pi}{2}$.

5° On peut écrire :
$-5{,}1\pi \text{ rad} = -5{,}1\pi \text{ rad} + 3 \times 2\pi \text{ rad} = 0{,}9\pi \text{ rad}$.
Comme $0{,}9\pi \in]-\pi, \pi]$, la mesure principale de α est $0{,}9\pi$.

6° On a $\frac{51}{7} \approx 7{,}3$ donc $\frac{51\pi}{7} \approx 7{,}3\pi$.

En retranchant $8\pi = 4 \times 2\pi$, on obtient :

$$\frac{51\pi}{7} \text{ rad} = \left(\frac{51\pi}{7} - 8\pi\right) \text{rad} = \left(\frac{51\pi - 56\pi}{7}\right) \text{rad} = \frac{-5\pi}{7} \text{ rad}.$$

Or $-\frac{5\pi}{7} \in]-\pi, \pi]$, car $-1 < -\frac{5}{7} \leqslant 1$.

La mesure principale de α est donc $-\frac{5\pi}{7}$.

8 1° Considérons le tableau suivant :

Valeur de k	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de $\frac{k\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
Point correspondant	A	B	C	D	E	F	G	H

Les points A à H sont représentés à la figure 18.

(On rappelle que $\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45°$.)

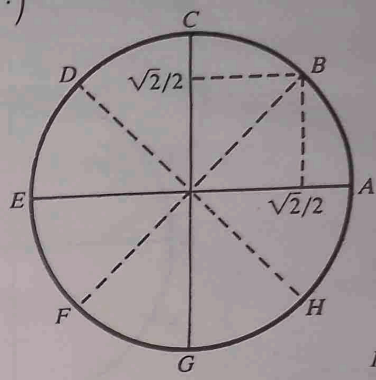


Fig. 18

2° On a $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En considérant les symétries de la figure 18, on peut remplir le tableau suivant :

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

9 1° Considérons les tableaux suivants :

Valeur de k	0	1	2	3	4	5
Valeur de $\frac{k\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
Point correspondant	A	B	C	D	E	F

Valeur de k	6	7	8	9	10	11
Valeur de $\frac{k\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Point correspondant	G	H	I	J	K	L

4

On va calculer successivement :
- AD (trigonométrie dans le triangle ADB) ;
- AC (trigonométrie dans le triangle ADC) ;
- BC, qui est égal à $AC - AB$.

Calcul de AD :

On a $\tan \widehat{ADB} = \dfrac{AB}{AD}$.

Donc $AD \cdot \tan \widehat{ADB} = AB$

et $AD = \dfrac{AB}{\tan \widehat{ADB}} = \dfrac{40}{\tan 23^\circ} \approx \dfrac{40}{0{,}424\,5} \approx 94{,}23$ m.

Calcul de AC :

On a $\tan \widehat{ADC} = \dfrac{AC}{AD}$.

Donc

$AC = AD \cdot \tan \widehat{ADC} = AD \cdot \tan 31^\circ \approx 94{,}23 \times 0{,}600\,9 \approx 56{,}62$ m.

Calcul de BC :

$BC = AC - AB \approx 56{,}6 - 40 \approx 16{,}6$ m.

5

1° **Calcul de $\widehat{BAH}$:**

Dans le triangle rectangle ABH, on a :

$\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ = 100$ gr.

Donc $\widehat{BAH} = 100$ gr $- \widehat{ABH} = 100$ gr $- 31$ gr $= 69$ gr.

Calcul de AH :

On a $\sin \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{AB}$.

Donc $AH = AB \cdot \sin \widehat{ABH} = 6{,}3 \cdot \sin 31$ gr.

En mettant la calculatrice sur le mode «grades», on obtient

$AH \approx 6{,}3 \times 0{,}467\,9 \approx 2{,}9$.

(Pour avoir plus de précision dans la suite des calculs, il vaut mieux prendre $AH \approx 2{,}948$.)

2° Dans le triangle rectangle HAC, on a :

$\cos \widehat{HAC} = \dfrac{AH}{AC} \approx \dfrac{2{,}948}{5{,}1} \approx 0{,}578\,0$.

A l'aide de la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ de la calculatrice, on obtient :

$\widehat{HAC} \approx 61$ gr.

3° On a $\widehat{BAC} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC} \approx 69$ gr $+ 61$ gr ≈ 130 gr.

6 Les points A et H sont représentés sur la figure 17.

Quelques conseils

— On tourne dans le sens trigonométrique si la mesure de l'angle est positive, dans le sens contraire si la mesure est négative.

— On a $\dfrac{\pi}{2}$ rad $= 90^\circ$, π rad $= 180^\circ$, $\dfrac{\pi}{4}$ rad $= 45^\circ$.

— Pour le point E, on a :

$-\dfrac{7\pi}{2}$ rad $= -\dfrac{8\pi}{2}$ rad $+ \dfrac{\pi}{2}$ rad $= -4\pi$ rad $+ \dfrac{\pi}{2}$ rad $= \dfrac{\pi}{2}$ rad.

— Pour le point G, on a $\dfrac{7\pi}{4}$ rad $= 7 \times 45^\circ = 315^\circ$.

On peut aussi écrire :

$\dfrac{7\pi}{4}$ rad $= \dfrac{7\pi}{4}$ rad $- 2\pi$ rad $= -\dfrac{\pi}{4}$ rad $= -45^\circ$.

— Pour le point H, on peut écrire :

$\dfrac{39\pi}{2}$ rad $= \dfrac{40\pi}{2}$ rad $- \dfrac{\pi}{2}$ rad $= 20\pi$ rad $- \dfrac{\pi}{2}$ rad.

Mais 20π rad représente l'angle nul (car $20\pi = 10 \times 2\pi$).

Donc $\dfrac{39\pi}{2}$ rad $= -\dfrac{\pi}{2}$ rad. Les points A et H (et B) sont confondus.

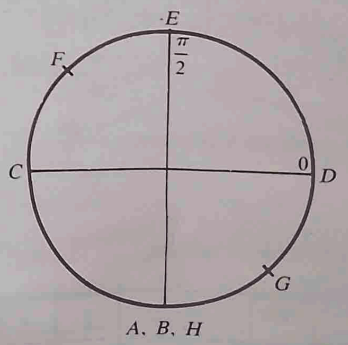


Fig. 17

7 La mesure principale en radians d'un angle est sa mesure x élément de $]-\pi, \pi]$.
(Le réel x peut s'écrire $x = a\pi$ avec $-1 < a \leqslant 1$.)

Donc $\tan \beta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{15}{100} = 0{,}15$.

Sur une calculatrice, on affiche 0,15 et on appuie sur la touche $\boxed{\tan^{-1}}$ (ou $\boxed{\text{Inv}}$ $\boxed{\tan}$ ou $\boxed{\text{Arc}}$ $\boxed{\tan}$, etc.).

On obtient $\beta \approx 8{,}53^\circ$ (à 10^{-2} degré près par défaut).

3 1° Le triangle MNP considéré est représenté à la figure 14.

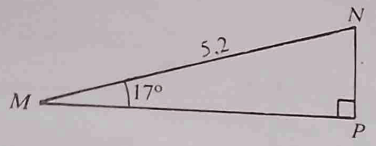


Fig. 14

Calcul de $\widehat{N}$:

On a : $\widehat{M} + \widehat{N} = 90^\circ$, donc $\widehat{N} = 90^\circ - \widehat{M} = 90^\circ - 17^\circ = 73^\circ$.

Calcul de *MP* :

On a $\cos \widehat{M} = \dfrac{MP}{MN}$.

D'où $MP = MN \cdot \cos \widehat{M} = 5{,}2 \cdot \cos 17^\circ \approx 5{,}2 \times 0{,}956\,3 \approx 5{,}0$.

Calcul de *NP* :

On a $\sin \widehat{M} = \dfrac{NP}{MN}$.

D'où $NP = MN \cdot \sin \widehat{M} = 5{,}2 \cdot \sin 17^\circ \approx 5{,}2 \times 0{,}292\,4 \approx 1{,}5$.

2° Le triangle MNP considéré est représenté à la figure 15.

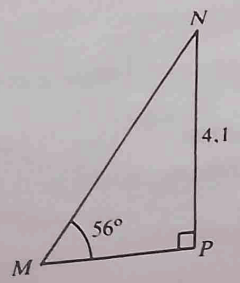


Fig. 15

Calcul de $\widehat{N}$:

On a $\widehat{N} = 90^\circ - \widehat{M} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$.

Calcul de *MN* :

On a $\sin \widehat{M} = \dfrac{NP}{MN}$.

Donc $MN \cdot \sin \widehat{M} = NP$ et $MN = \dfrac{NP}{\sin \widehat{M}} = \dfrac{4{,}1}{\sin 56^\circ} \approx \dfrac{4{,}1}{0{,}829\,0} \approx 4{,}9$.

Calcul de *MP* :

On a $\tan \widehat{M} = \dfrac{NP}{MP}$.

Donc $MP \cdot \tan \widehat{M} = NP$ et $MP = \dfrac{NP}{\tan \widehat{M}} = \dfrac{4{,}1}{\tan 56^\circ} \approx \dfrac{4{,}1}{1{,}482\,6} \approx 2{,}8$.

3° Le triangle MNP considéré est représenté à la figure 16.

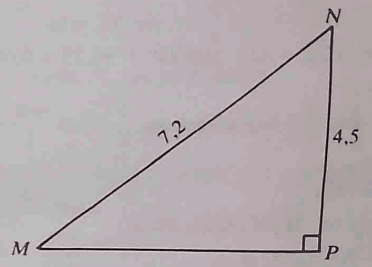


Fig. 16

Calcul de $\widehat{M}$ et $\widehat{N}$:

On a $\sin \widehat{M} = \dfrac{NP}{MN} = \dfrac{4{,}5}{7{,}2} = 0{,}625$.

A l'aide de la touche $\boxed{\sin^{-1}}$ de la calculatrice, on obtient $\widehat{M} \approx 39^\circ$.

On en déduit que $\widehat{N} = 90^\circ - \widehat{M} \approx 90^\circ - 39^\circ \approx 51^\circ$.

Calcul de *MP* :

On peut utiliser le théorème de Pythagore :

$MP^2 + NP^2 = MN^2$.

D'où $MP^2 = MN^2 - NP^2 = 7{,}2^2 - 4{,}5^2 = 31{,}59$

et $MP = \sqrt{31{,}59} \approx 5{,}6$.

Autre méthode : on a $\cos \widehat{M} = \dfrac{MP}{MN}$.

D'où $MP = MN \cdot \cos \widehat{M} \approx 7{,}2 \cdot \cos 39^\circ \approx 7{,}2 \times 0{,}777\,1 \approx 5{,}6$.

2° On sait que $y \in [-\pi, 0]$ et que $\cos y = -\frac{1}{3}$.

Placer sur le cercle trigonométrique le point B correspondant à y rad.
Calculer la valeur exacte de $\sin y$.

3° On sait que $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\sin z = \frac{3}{5}$.

Placer sur le cercle trigonométrique le point C correspondant à z rad.
Calculer la valeur exacte de $\cos z$.

4° On sait que $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et que $\sin t = \frac{3}{5}$.

Placer sur le cercle trigonométrique le point D correspondant à t rad.
Calculer la valeur exacte de $\cos t$.

13

Usage des touches [cos⁻¹] et [sin⁻¹] *de la calculatrice ou selon les modèles,* [Inv] [sin] et [Inv] [cos]

La calculatrice affiche dans les intervalles précisés ci-dessous le réel ayant un sinus ou un cosinus donné (compris entre − 1 et 1).

Touche	Ensemble de définition	Ensemble de valeurs (en radians)	Ensemble de valeurs (en degrés)
[sin⁻¹]	[− 1, 1]	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	[− 90, 90]
[cos⁻¹]	[− 1, 1]	[0, π]	]0, 180]

Donner une valeur approchée de x dans les cas suivants :

1° $\cos(x°) = 0{,}325\,1$ et $x \in [0, 180]$.
2° $\cos(x°) = 0{,}325\,1$ et $x \in [-180, 0]$.
3° $\sin(x°) = 0{,}838\,7$ et $x \in [-90, 90]$.
4° $\sin(x°) = 0{,}838\,7$ et $x \in [90, 270]$.
5° $\cos x = -0{,}614\,2$ et $x \in [0, \pi]$.

14

Soit x un réel. Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les réels suivants.

1° $A = \cos(2\pi + x) - \cos(3\pi + x) + \sin(4\pi - x) - \sin(5\pi - x)$.

2° $B = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

CORRIGÉS

1

La figure 13 schématise la situation.
On connaît $AE = CD = 1{,}5$ m et $AC = ED = 30$ m.
La hauteur de la tour est $BD = BC + CD$.
Il faut donc calculer BC.

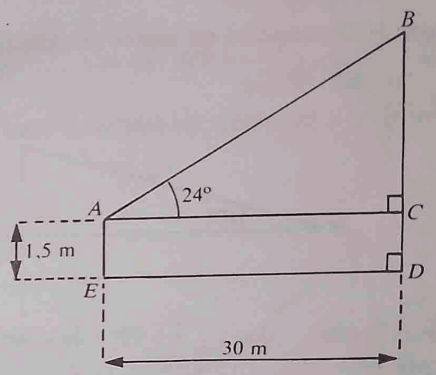


Fig. 13

Dans le triangle rectangle ABC, on connaît l'angle $\widehat{A} = 24°$, et la longueur du côté adjacent à $\widehat{A}$ qui est $AC = 30$ m.
On cherche BC, qui est la longueur du côté opposé à $\widehat{A}$.
On fait donc intervenir la tangente de $\widehat{A}$.

On a $\tan \widehat{A} = \frac{BC}{AC}$.

D'où $BC = AC \cdot \tan \widehat{A} = 30 \cdot \tan 24° \approx 30 \times 0{,}445\,2 \approx 13{,}4$ m.

On en déduit que $BD = BC + CD \approx 13{,}4 + 1{,}5 \approx 14{,}9$ m.
La hauteur de la tour est environ 14,9 m.

2

1° $[AC]$ est le côté opposé à l'angle α et $[BC]$ est l'hypoténuse.

Donc $\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{100} = 0{,}15$.

Sur une calculatrice, on affiche 0,15 et on appuie sur la touche [sin⁻¹] (ou [Inv] [sin] ou [Arc] [sin], etc., selon les modèles).

On obtient $\alpha \approx 8{,}62°$ (à 10^{-2} degré près par défaut, ce qui signifie que $8{,}62° < \alpha < 8{,}63°$).

2° $[AC]$ est le côté opposé à l'angle β et $[AB]$ est le côté adjacent à β.

4 On considère la figure 11. Calculer BC.

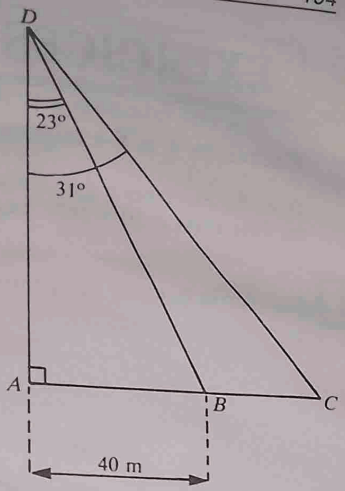


Fig. 11

5 On considère la figure 12. On se propose de calculer l'angle $\widehat{BAC}$.

1° Calculer $\widehat{BAH}$ et AH.
2° Calculer $\widehat{HAC}$.
3° En déduire $\widehat{BAC}$.

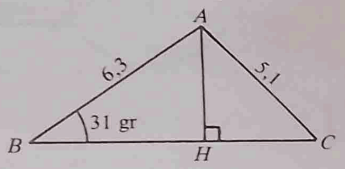


Fig. 12

Exercices 6 à 14 : le cercle trigonométrique

6 *Placer des points*

Placer sur le cercle trigonométrique les points A à H correspondant aux angles suivants exprimés en radians.

Point	A	B	C	D	E	F	G	H
Angle (radians)	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	5π	-4π	$-\frac{7\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{39\pi}{2}$

7 *Mesure principale*

Donner la mesure principale en radians de chacun des angles α suivants.

1° $\alpha = 6\pi$ rad.
2° $\alpha = -3\pi$ rad.
3° $\alpha = 500\pi$ rad.
4° $\alpha = \frac{17\pi}{2}$ rad.
5° $\alpha = -5{,}1\pi$ rad.
6° $\alpha = \frac{51\pi}{7}$ rad.

8 *Multiples de* $\frac{\pi}{4}$

1° Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant aux angles de $\frac{k\pi}{4}$ radians, où k est un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 7$.

2° Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{k\pi}{4}$ et $\sin\frac{k\pi}{4}$ pour toutes les valeurs de k précédentes.

9 *Multiples de* $\frac{\pi}{6}$

1° Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant aux angles de $\frac{k\pi}{6}$ radians, où k est un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 11$.

2° Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{k\pi}{6}$ et $\sin\frac{k\pi}{6}$ pour toutes les valeurs de k précédentes.

10 *Angles remarquables*

Sans utiliser de calculatrice ou de table trigonométrique, donner les valeurs exactes des expressions suivantes :

1° $A = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\pi + \sin\frac{3\pi}{2}$.

2° $B = \cos 30° + \cos 60° + \sin(-60°)$.

3° $C = \sin 50\text{ gr} - \cos 150\text{ gr} - \sin 250\text{ gr}$.

11 1° A l'aide d'une calculatrice, donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de :

a) cos 117° et sin 117° ;

b) cos 310 gr et sin 310 gr ;

c) cos 1,2π et sin 1,2π.

2° Sans rapporteur, placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, et C correspondant respectivement à 117°, 310 gr et 1,2π rad.

12 *Relation entre* cos x *et* sin x

1° On sait que $x \in [0, \pi]$ et que $\cos x = -\frac{1}{3}$.

Placer sur le cercle trigonométrique le point A correspondant à x rad. Calculer la valeur exacte de sin x.

Première Appa

2° Fonction $f : x \mapsto \cos x$

— La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

— Elle a pour période 2π, c'est-à-dire que pour tout réel x : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

— La fonction f est paire.

— Tableau de variations sur $[0, \pi]$:

x	0		π
$f(x)$	1	↘	-1

— Courbe représentative (fig. 8).

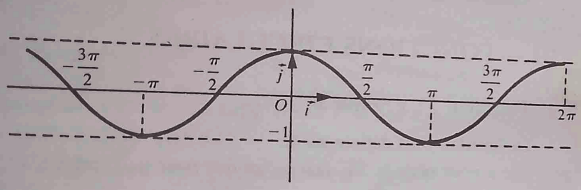


Fig. 8

EXERCICES

Exercices 1 à 5 : trigonométrie dans le triangle rectangle

Dans les exercices 1 à 5, les angles seront donnés à 1° ou à 1 gr près et les longueurs à 10^{-1} près, sauf précision contraire.

1 Calculer la hauteur de la tour représentée à la figure 9.

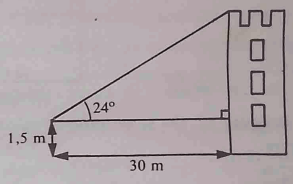


Fig. 9

2 *Pente d'une droite.*

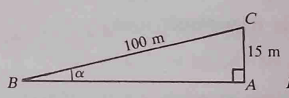


Fig. 10

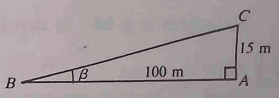


Fig. 10 bis

1° Sur la figure 10, on dit que la pente (au sens physique) de la droite (BC) est égale à 15 %.
Calculer l'angle α à 10^{-2} degré près par défaut.

2° Sur la figure 10 bis, on dit que la pente (au sens mathématique) de la droite (BC) est égale à 15 %.
Calculer l'angle β à 10^{-2} degré près par défaut.

3 Le triangle MNP est rectangle en P.

1° On sait que $\widehat{M} = 17^o$ et $MN = 5{,}2$. Calculer $\widehat{N}$, MP et NP.

2° On sait que $\widehat{M} = 56^o$ et $NP = 4{,}1$. Calculer $\widehat{N}$, MN et MP.

3° On sait que $MN = 7{,}2$ et $NP = 4{,}5$. Calculer $\widehat{M}$, $\widehat{N}$ et MP.

Exemples :

• Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $M = B$. Donc $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

• Pour $x = \pi$, on a $M = C$. Donc $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$.

Remarques :

• Il est commode de noter x rad l'angle orienté dont une mesure en radians est x.
Le cosinus et le sinus d'un angle orienté quelconque x rad sont alors définis par :

$\cos (x \text{ rad}) = \cos x$ et **$\sin (x \text{ rad}) = \sin x$.**

• Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les valeurs de $\cos (x \text{ rad})$ et $\sin (x \text{ rad})$ sont les mêmes que celles que l'on obtient avec le triangle rectangle (*cf.* I, p. 186).

4° Propriétés

• Des réels x et y ont à la fois même cosinus et même sinus si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = y + 2k\pi$.

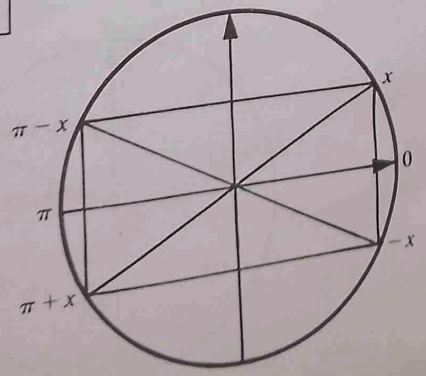
• Pour tout réel x, on a :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1.$$

• Pour tour réel x, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

• Pour tour réel x, on a (fig. 5) :

$$\begin{aligned}
&\cos(-x) = \cos x \\
&\sin(-x) = -\sin x \\
&\cos(\pi + x) = -\cos x \\
&\sin(\pi + x) = -\sin x \\
&\cos(\pi - x) = -\cos x \\
&\sin(\pi - x) = \sin x.
\end{aligned}$$



• Pour tout réel x, on a (fig. 6) :

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\
&\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\
&\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\
&\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x
\end{aligned}$$

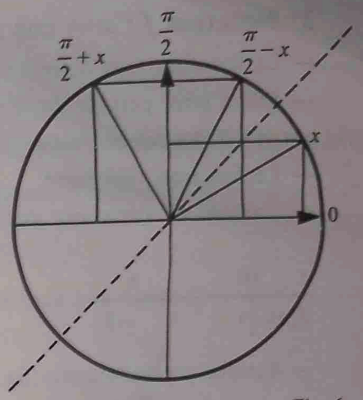


Fig. 6

III — FONCTIONS CIRCULAIRES

1° Fonction $f : x \mapsto \sin x$

— La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

— Elle a pour période 2π, c'est-à-dire que pour tout réel x :
$\sin (x + 2\pi) = \sin x$.

— La fonction f est impaire.

— Tableau de variations sur $[0, \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

— Courbe représentative (fig. 7).

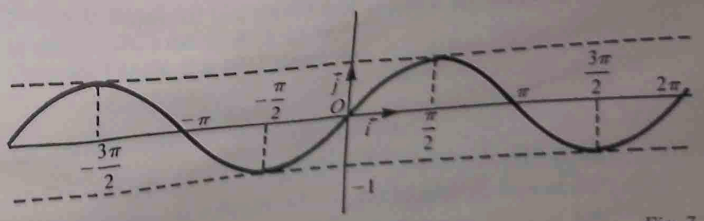


Fig. 7

Exemples :

• Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $M = B$. Donc $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

• Pour $x = \pi$, on a $M = C$. Donc $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$.

Remarques :

• Il est commode de noter x rad l'angle orienté dont une mesure en radians est x.
Le cosinus et le sinus d'un angle orienté quelconque x rad sont alors définis par :

$\cos (x \text{ rad}) = \cos x$ et **$\sin (x \text{ rad}) = \sin x$.**

• Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les valeurs de cos ($x$ rad) et sin (x rad) sont les mêmes que celles que l'on obtient avec le triangle rectangle (*cf.* I, p. 186).

4° Propriétés

• Des réels x et y ont à la fois même cosinus et même sinus si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = y + 2k\pi$.

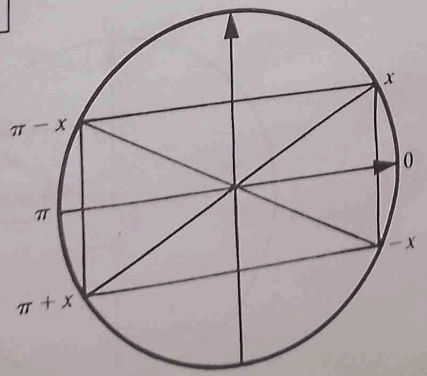
• Pour tout réel x, on a :

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

• Pour tour réel x, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

• Pour tour réel x, on a (fig. 5) :

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$.



• Pour tout réel x, on a (fig. 6) :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

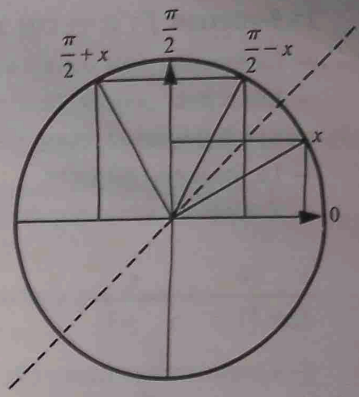


Fig. 6

III — FONCTIONS CIRCULAIRES

1° Fonction $f : x \mapsto \sin x$

— La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

— Elle a pour période 2π, c'est-à-dire que pour tout réel x :
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

— La fonction f est impaire.

— Tableau de variations sur $[0, \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

— Courbe représentative (fig. 7).

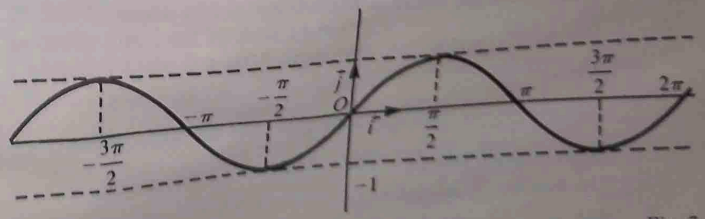


Fig. 7

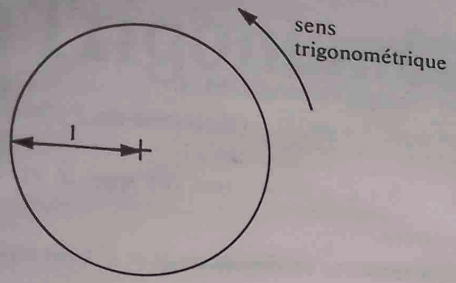


Fig. 2

2° Graduation en radians

On considère le cercle trigonométrique (C) muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ de la figure 3.
Sur la droite (D) tangente à (C) en A, prenons A pour origine, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ comme vecteur unitaire.
On peut alors considérer que la droite (D) représente un fil gradué.
Dans l'enroulement de ce fil sur le cercle, tout réel x de la graduation du fil vient coïncider avec un point M du cercle (fig. 3).
Les réels $x + k \cdot 2\pi$, où k est un entier relatif quelconque, viennent aussi coïncider avec M, car le périmètre du cercle est 2π.
On dit que **les réels $x + k \cdot 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sont les mesures en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$.**

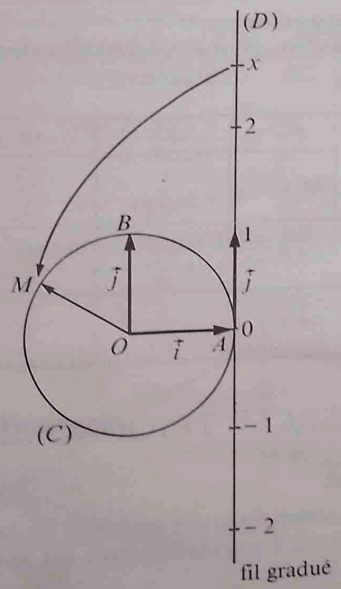


Fig. 3

La **mesure principale** de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ est la mesure en radians de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Exemple :

Le réel $\frac{\pi}{2}$ vient coïncider dans l'enroulement du fil avec le point B.

Les mesures en radians de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ sont $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

La mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ est $\frac{\pi}{2}$, car $\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi]$.

Remarques :

- On peut aussi graduer le cercle en degrés ou en grades. (On rappelle que $180° = 200\ \text{gr} = \pi\ \text{rad}$.)
- En mathématiques, on utilise le radian, car l'unité choisie pour le rayon du cercle trigonométrique est la même que celle choisie pour graduer le fil.
- Sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$, l'enroulement du fil se fait dans le sens trigonométrique de A vers B. On dit que le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un **repère direct.**

3° Cosinus et sinus d'un réel

Le cercle trigonométrique (C) est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ de la figure 4.
Soit x un réel. Soit M le point de (C) tel que :
$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = x$ rad.
Par définition, les coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont $\cos x$ et $\sin x$.

Donc $\boxed{\cos x = \overline{OH}}$ et $\boxed{\sin x = \overline{OK}}$ (fig. 4).

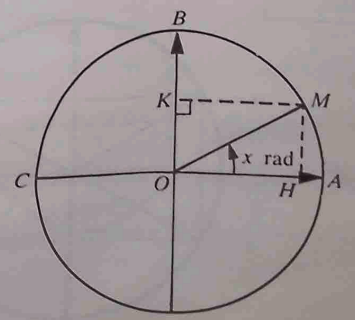


Fig. 4

9 Trigonométrie

Ce qu'il faut savoir

I — TRIGONOMÉTRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Les résultats de ce paragraphe font partie du programme de la classe de Troisième.

1° Définitions

Soit ABC un triangle rectangle en A (fig. 1). On a :

$$\cos \widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à } \widehat{B}} = \frac{AC}{AB}.$$

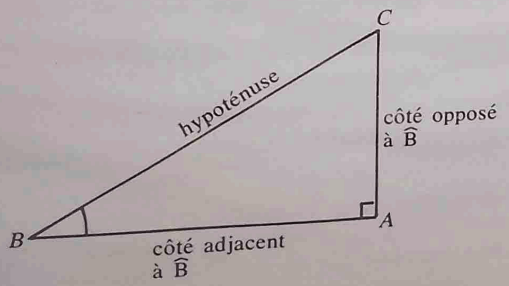


Fig. 1

2° Propriétés

***a)* Rappels**

Soit ABC un triangle rectangle en A.

On a $\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$ (théorème de Pythagore).

On a aussi $\boxed{\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ}$ (on dit que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont des angles complémentaires).

Remarque : les mesures en degrés de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont strictement comprises entre 0 et 90.

***b)* Relations trigonométriques**

Soit α un angle dont la mesure en degrés est strictement comprise entre 0 et 90.

- On a $0 < \cos \alpha < 1$ et $0 < \sin \alpha < 1$.
- On a $\boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.}$
- On a $\boxed{\begin{array}{l}\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.\end{array}}$

Par exemple, sur la figure 1, on a
$\cos \widehat{C} = \sin \widehat{B}$ et $\sin \widehat{C} = \cos \widehat{B}$.

- On a $\boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.}$

***c)* Angles remarquables**

Le tableau suivant donne quelques valeurs de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ à connaître.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

II — LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

1° Définition

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1.
Le sens de parcours trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 2).

• Il existe une homothétie et une seule qui transforme A en C et B en D :
son centre est le point d'intersection I des droites (AC) et (BD) et son rapport est 2 ;

• On montrerait de même qu'il existe une homothétie et une seule qui transforme A en D et B en C :
son centre est le point d'intersection J des droites (AD) et (BC) et son rapport est le réel k tel que :
$\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire : $k = -2$.

Conclusion : il existe exactement deux homothéties qui transforment $[AB]$ en $[CD]$;
l'une de centre I et de rapport 2,
l'autre de centre J et de rapport -2 (fig. 27).

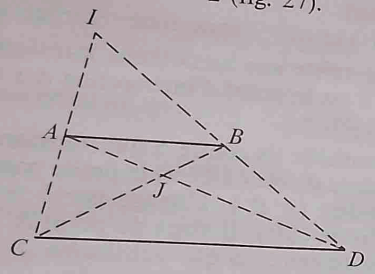


Fig. 27

20 1°

Le quadrilatère $AMBN$ est un parallélogramme lorsque le milieu I de $[AB]$ est aussi celui de $[MN]$.

Ceci signifie encore que N est l'image de M par la symétrie par rapport à I (ou l'homothétie de centre I et de rapport -1).
Lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$, le point N décrit l'image de $\mathcal{C}$ par la symétrie par rapport à I ; il s'agit d'un cercle $\mathcal{C}_1$ de même rayon que $\mathcal{C}$, représenté à la figure 28.

2°

Le point G étant le centre de gravité du triangle ABM et I le milieu de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$.

Cela signifie encore que G est l'image de M par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

Lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$, le point G décrit l'image de $\mathcal{C}$ par cette homothétie ; il s'agit d'un cercle $\mathcal{C}_2$ de rayon égal au tiers de celui de $\mathcal{C}$, représenté à la figure 28. Le centre de $\mathcal{C}_2$ est l'image par h du centre de $\mathcal{C}$.

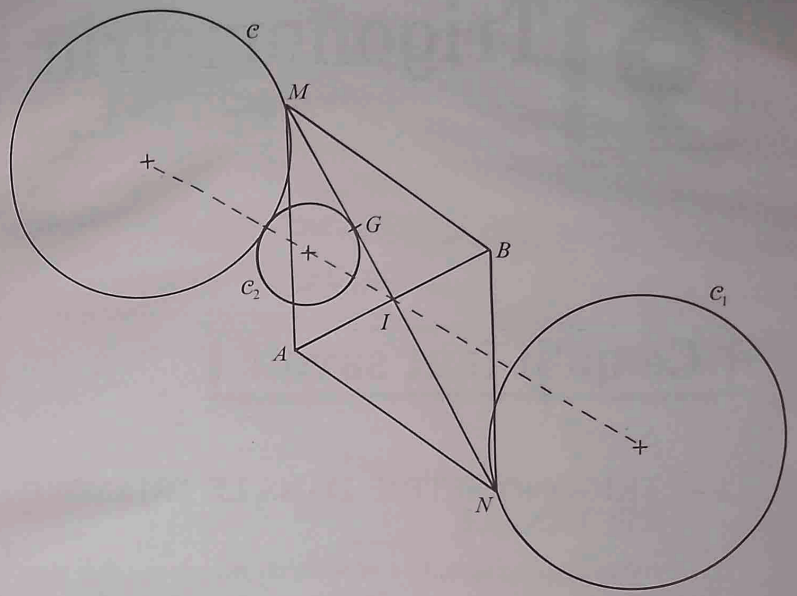


Fig. 28

2° On a : $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$ (1).
Sur la figure 24, on voit que :

$\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega_1 M'}$ et $\overrightarrow{M'M''} = \frac{2}{3}\overrightarrow{M'\Omega_2}$.

On a, en effet :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 M'} = -\overrightarrow{\Omega_1 M} + \overrightarrow{\Omega_1 M'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega_1 M'} + \overrightarrow{\Omega_1 M'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega_1 M'}.$$

$$\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{M'\Omega_2} + \overrightarrow{\Omega_2 M''} = \overrightarrow{M'\Omega_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega_2 M'}$$
$$= \overrightarrow{M'\Omega_2} - \frac{1}{3}\overrightarrow{M'\Omega_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{M'\Omega_2}.$$

La relation (1) donne alors $\overrightarrow{MM''} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega_1 M'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{M'\Omega_2}$,

c'est-à-dire $\overrightarrow{MM''} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{\Omega_1 M'} + \overrightarrow{M'\Omega_2}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.

3° Comme pour tout point M, on a $\overrightarrow{MM''} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$, le vecteur $\overrightarrow{MM''}$ est indépendant du point M choisi.
L'application h qui à tout point M associe le point M'' est donc la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.

17

On a $P = h(A)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{A'P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'A}$.
La construction est faite à la figure 25.

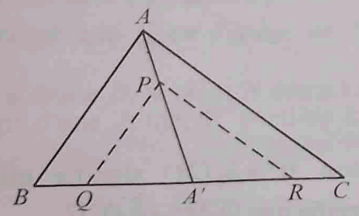


Fig. 25

• L'image par h de la droite (AC) est une droite parallèle passant par $P = h(A)$; il s'agit donc de la droite (PR).
L'image par h de C appartient à cette droite et à la droite $(A'C)$; il s'agit donc du point R.

D'où $\overrightarrow{A'R} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C}$. (1)

Autre méthode : Cette relation découle directement du théorème de Thalès.

• De même, h transforme (AB) en (PQ) et par suite B en Q.

D'où $\overrightarrow{A'Q} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'B}$. (2)

• Comme A' est le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{A'C} = -\overrightarrow{A'B}$.
Les relations (1) et (2) donnent alors $\overrightarrow{A'R} = -\overrightarrow{A'Q}$, ce qui signifie que A' est le milieu de $[QR]$.

18

1° S'il existe une telle homothétie, de rapport k, son centre S doit vérifier :

$\overrightarrow{SA'} = k\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB'} = k\overrightarrow{SB}$.

Il appartient donc aux droites (AA') et (BB'). Comme A, B, A', B' et ne sont pas alignés tels que $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$, le quadrilatère $AA'BB'$ est un trapèze non aplati.
Les droites (AA') et (BB') sont donc sécantes.

Conclusion : s'il existe une homothétie transformant A en A' et B en B', son centre S est le point d'intersection des droites (AA') et (BB') (fig. 26).

2° Soit h l'homothétie de centre S qui transforme A en A'.
L'image par h de la droite (AB) est la droite passant par A' et parallèle à (AB), c'est-à-dire $(A'B')$. L'image par h de B appartient à cette droite et à la droite (SB) ; il s'agit du point B'.
L'homothétie h de centre S qui transforme A en A' transforme donc aussi B en B'.
Son rapport k est tel que :

$\overrightarrow{SA'} = k\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB'} = k\overrightarrow{SB}$ et par suite $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Or, on a : $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$.

D'où : $k = 2$.

Conclusion : il existe une homothétie et une seule qui transforme A en A' et B en B' ; son centre est S et son rapport 2 (fig. 26).

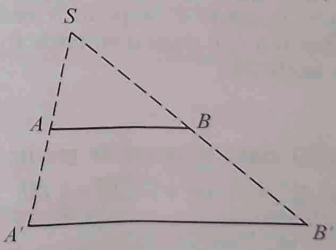


Fig. 26

19

S'il existe une homothétie qui transforme le segment $[AB]$ en $[CD]$, elle transforme :

— A en C et B en D,

— ou A en D et B en C.

D'après l'exercice 18, p. 170.

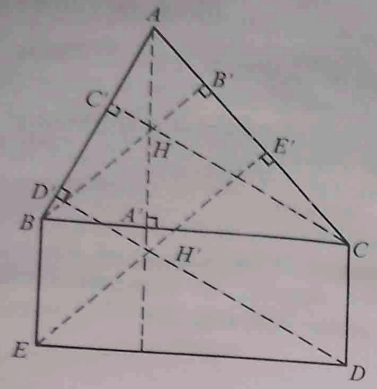


Fig. 21

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$:
C a pour image D, puisque $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$, et la droite (CC') est transformée en une droite parallèle à (CC') passant par D, c'est-à-dire en (DD').

• Les droites (AA') et (BE) toutes deux perpendiculaires à (BC) sont parallèles.
Par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$ la droite (AA') est donc transformée en elle-même.

2° Les droites (DD'), (EE') et (AA') sont donc les images des hauteurs du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.
Elles contiennent toutes l'image H' du point H par cette translation.
Les droites (DD'), (EE') et (AA') sont donc concourantes en H'.

14 1°

Comme $ABMN$ est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$.

Ce qui signifie encore que N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
Lorsque M décrit la droite D, le point N décrit l'image de D par cette translation ; il s'agit d'une droite D' parallèle à D, représentée à la figure 22.

2°

Comme I est le milieu de $[MN]$, on a : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.

Par suite $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Ceci signifie encore que I est l'image de M par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Lorsque M décrit la droite D, le point I décrit l'image de D par cette translation ; il s'agit d'une droite D'' parallèle à D (et à D'), représentée à la figure 22.

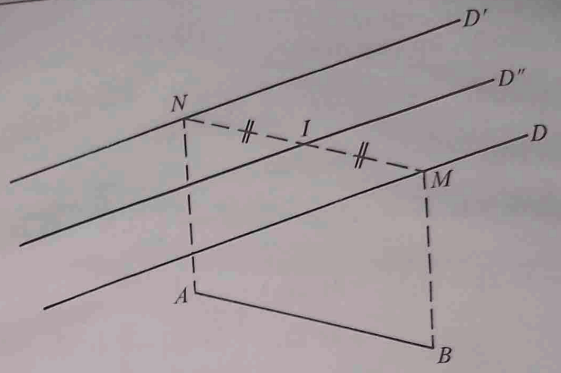


Fig. 22

15 Comme Ω, A, A' sont alignés et distincts, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}$.

L'homothétie h de centre Ω et de rapport k qui transforme A en A', transforme M en un point M' tel que :
$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$.

Le point M' appartient donc à la droite (ΩM) et à la parallèle à (AM) passant par A'
C'est le point d'intersection de ces deux droites.
On l'a construit à la figure 23.

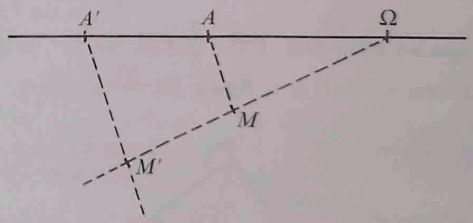


Fig. 23

16 1° Par définition $M' = h_1(M)$ signifie que $\overrightarrow{\Omega_1 M'} = 3\overrightarrow{\Omega_1 M}$ et $M'' = h_2(M')$ signifie que $\overrightarrow{\Omega_2 M''} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega_2 M'}$.

Les points Ω_1, Ω_2, M, M' et M'' sont représentés à la figure 24.

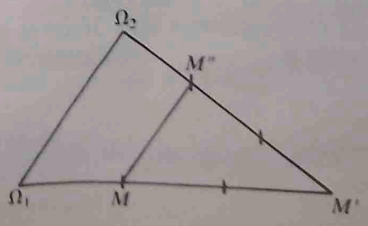


Fig. 24

On en déduit que :

- S est l'image de M par le quart de tour direct de centre A,
- S' est l'image de M par le quart de tour indirect de centre A.

2° Comme le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé du point A :

- S décrit l'image de $\mathcal{C}$ par le quart de tour direct de centre A, privé de l'image de A ; il s'agit du cercle $\mathcal{C}_1$ privé du point A (fig. 18).
- S' décrit l'image de $\mathcal{C}$ par le quart de tour indirect de centre A, privé de l'image de A ; il s'agit du cercle $\mathcal{C}_2$ privé du point A (fig. 18).

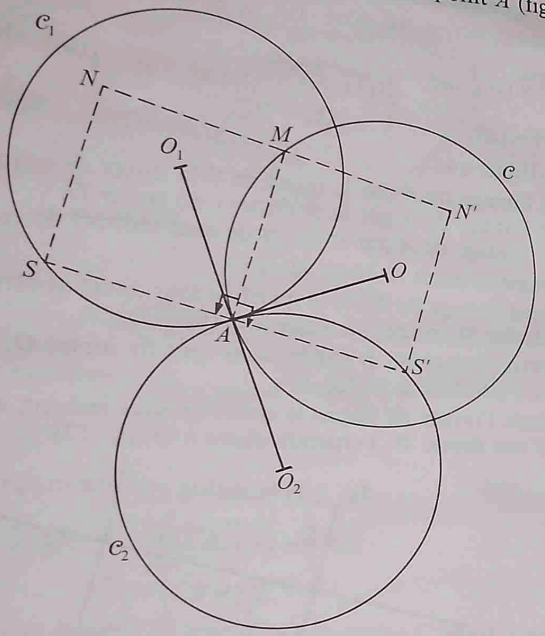


Fig. 18

11 Les points A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' sont représentés à la figure 19.
Par construction, on a : $A' = B$, $B'' = C'$ et $A'' = C$.

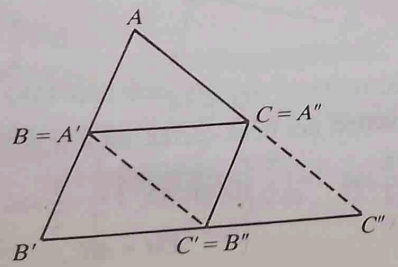


Fig. 19

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: A' est l'image de A et C' l'image de C ; d'où $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ (1).
Par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$: A'' est l'image de A' et C'' l'image de C' ; d'où $\overrightarrow{A''C''} = \overrightarrow{A'C'}$ (2).
Des relations (1) et (2), on tire : $\overrightarrow{A''C''} = \overrightarrow{AC}$. Les points A'' et C étant confondus, cette relation équivaut à $\overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{AC}$, ce qui revient à dire que C est le milieu de $[AC'']$.

12 Selon l'indication donnée, on construit l'image A' de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ (fig. 20).

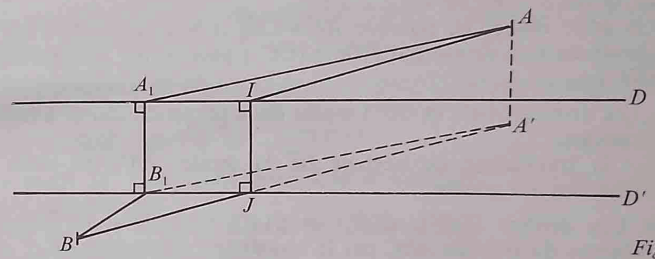


Fig. 20

On a : $AA_1 = A'B_1$.
Comme A_1B_1 est indépendant de la position du point A_1 sur D, la distance $AA_1 + A_1B_1 + B_1B$ est minimum lorsque $AA_1 + B_1B$ est minimum, c'est-à-dire lorsque $A'B_1 + B_1B$ est minimum.

Or, la distance $A'B_1 + B_1B$ est minimum lorsque les points A', B_1, B sont alignés.

Conclusion : soit J le point d'intersection des droites $(A'B)$ et D', et I le projeté orthogonal de J sur D, le trajet $AIJB$ est de longueur minimale (fig. 20).

13 Voir la représentation à la figure 21.

1° • Les droites (BB') et (EE') étant toutes deux perpendiculaires à (AC), sont parallèles.
Par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$:
B a pour image E et la droite (BB') est transformée en une droite parallèle à (BB') passant par E, c'est-à-dire en (EE').

• De même, les droites (CC') et (DD') toutes deux perpendiculaires à (AB) sont parallèles.

Les points A, C', C'' sont donc alignés et A est le milieu de $[C'C'']$.

4° On applique le théorème de Thalès dans le triangle $C''B'C'$: la droite (AH) qui est parallèle à $(B'C')$ et qui passe par le milieu de $[C''C']$, coupe $[B'C'']$ en son milieu.

La droite (AH) est donc une médiane du triangle $AB'C''$.

8 Voir la construction à la figure 16.

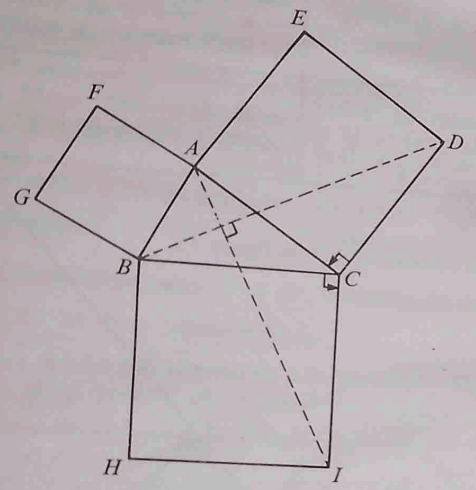


Fig. 16

1° *a*) Par construction des points D et I, on a :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ AC' = AC, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CI}) = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ CB = CI. \end{cases}$$

On en déduit que le quart de tour direct de centre C transforme D en A et B en I.

b) Comme de plus le centre C est invariant par ce quart de tour, le triangle DCB a pour image le triangle ACI.

c) Les points A et I sont les images de D et B par un quart de tour direct (de centre C),

d'où : $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AI}) = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

Les droites (DB) et (AI) sont donc perpendiculaires.

2° Par construction des points G et H, on a :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BA}) = -\dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ BG = BA \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH}) = -\dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ BC = BH. \end{cases}$$

On en déduit que le quart de tour indirect de centre B transforme G en A et C en H.

D'où : $(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AH}) = -\dfrac{\pi}{2}$ rad.

Les droites (GC) et (AH) sont perpendiculaires.

9

1° Voir la construction à la figure 17.

2° Par construction du carré $ABCD$, on a :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ OA = OB, \end{cases} \quad \begin{cases} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \pi \text{ rad} \\ OA = OC \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = -\dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ OA = OD \end{cases}.$$

On en déduit que :

- B est l'image de A par le quart de tour direct de centre O,
- C est l'image de A par le demi-tour de centre O,
- D est l'image de A par le quart de tour indirect de centre O.

3° Comme le point A décrit la droite $\mathcal{D}$:

- B décrit l'image de $\mathcal{D}$ par le quart de tour direct de centre O; il s'agit d'une droite $\mathcal{D}_1$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ (fig. 17),
- C décrit l'image de $\mathcal{D}$ par le demi tour de centre O; il s'agit d'une droite $\mathcal{D}_2$ parallèle à $\mathcal{D}$ (fig. 17),
- D décrit l'image de $\mathcal{D}$ par le quart de tour indirect de centre O; il s'agit d'une droite $\mathcal{D}_3$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ (fig. 17).

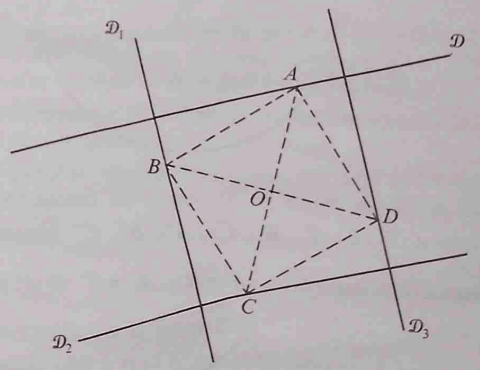


Fig. 17

10 Voir la construction à la figure 18.

1° Par construction des deux carrés, on a :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AS}) = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ AM = AS \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AS'}) = -\dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \\ AM = AS'. \end{cases}$$

5 1°

L'ensemble des points équidistants de deux droites parallèles D et D' est une droite D'' parallèle à D (et à D').

S'il existe un cercle tangent à D et à D', passant par A, son centre I équidistant de D et de D' se trouve donc sur D'' (fig. 14).

Il se projette en H sur D et en H' sur D' de façon à ce que : $IH = IH' = \frac{d}{2}$, où d est la distance HH' (distance de la droite D à la droite D').

Le rayon d'un tel cercle est alors : $IA = IH = \frac{d}{2}$.

Le point I est donc situé à une distance égale à $\frac{d}{2}$ du point A.

Conclusion : le centre d'un tel cercle est situé sur D'' et sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{d}{2}$.

2° Le point A étant situé entre D et D', le cercle de centre A et de rayon $\frac{d}{2}$ coupe D'' en deux points I_1 et I_2.

Il y a donc deux cercles qui répondent à la question : les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres I_1 et I_2, passant par A (fig. 14).

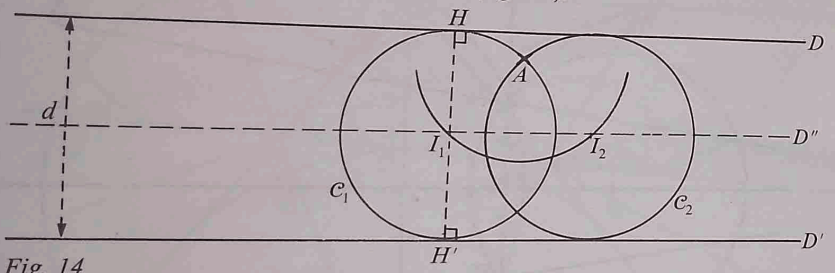


Fig. 14

6

Figure formée par :	Invariante par :
deux droites D et Δ perpendiculaires en I	— les quarts de tour direct et indirect de centre I ; — le demi-tour de centre I
deux droites parallèles D et D'	— tout demi-tour ayant son centre sur la droite D'' ensemble des points équidistants de D et de D'

Figure formée par :	Invariante par :
un carré de centre O	— les quarts de tour direct et indirect de centre O : — le demi-tour de centre O
un cercle de centre Ω	— les quarts de tour direct et indirect de centre Ω ; — le demi-tour de centre Ω (et toute rotation de centre Ω)
deux cercles de même rayon, de centres Ω et Ω'	— le demi-tour ayant pour centre le milieu de $[\Omega\Omega']$

7 1° Voir la construction à la figure 15.

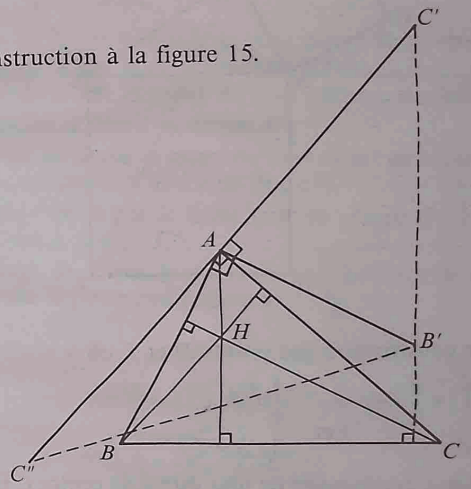


Fig. 15

2° Comme B' et C' sont les images de B et C par un quart de tour direct (de centre A), on a :

$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}}) = \frac{\pi}{2}$ rad, d'où $\overrightarrow{B'C'} \perp \overrightarrow{BC}$.

Les droites (AH) et $(B'C')$ toutes deux perpendiculaires à (BC) sont donc parallèles.

3° Par construction des points C' et C'', on a :

$\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}}) = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ AC' = AC, \end{cases}$ $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC''}}) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad.} \\ AC'' = AC, \end{cases}$

On en déduit que : $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AC''}}) = \pi \text{ rad.} \\ AC'' = AC' \end{cases}$

Or, la distance $AM + MB'$ est minimum lorsque les points A, M, B' sont alignés.

Conclusion : soit I le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (AB').
Le trajet AIB est de longueur minimale (fig. 11).

3 Voir la figure 12.

Soient D et Δ deux droites sécantes.
La réunion des deux bissectrices des angles formés par D et Δ est l'ensemble des points équidistants de D et de Δ.

1° Le point d'intersection I de $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ est donc équidistant de (AC) et de (AB) d'une part, de (AB) et de (BC) d'autre part.
Il est donc équidistant de (AC) et de (BC). D'où : I appartient aussi à $\mathcal{D}_C$.

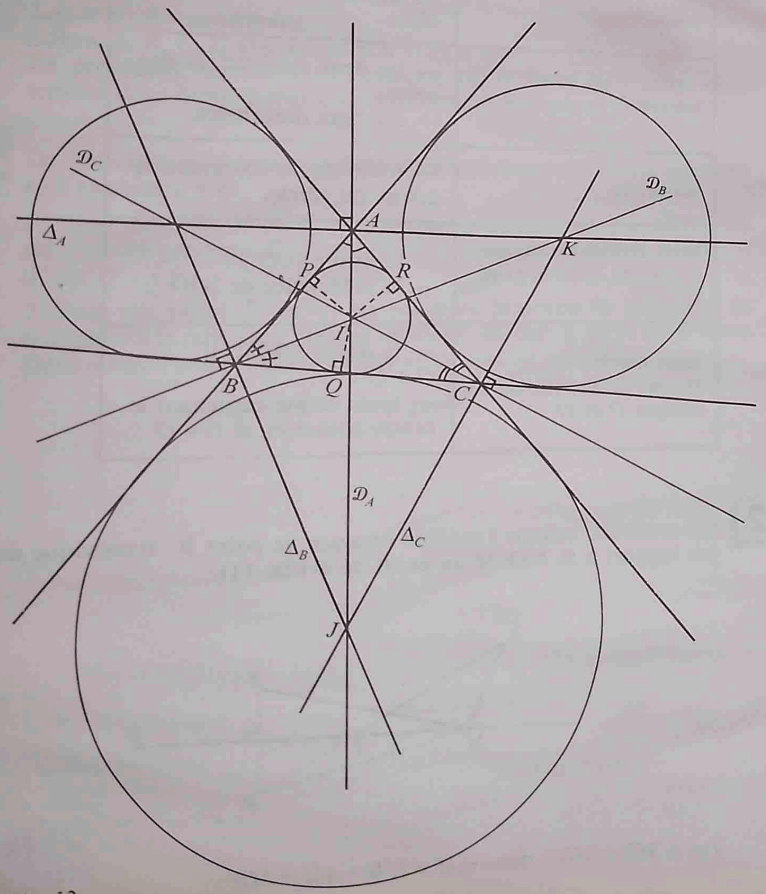


Fig. 12

Les droites $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$, $\mathcal{D}_C$ se coupent donc en un même point.
Soient P, Q et R les projetés du point I respectivement sur (AB), (BC) et (AC).
Comme I est équidistant de ces trois droites, on a : $IP = IQ = IR$.
Le cercle de centre I, tangent à (AB) passe donc par les points P, Q, R.
Il est donc aussi tangent à (AC) et (BC) (fig. 12).

2° • On procède comme au 1° en considérant le point d'intersection J de $\mathcal{D}_A$ et Δ_B.
Il est équidistant de (AC) et de (AB) d'une part, de (AB) et de (BC) d'autre part, donc de (AC) et de (BC).
On en déduit que J appartient aussi à Δ_C.

• De même, Δ_A, $\mathcal{D}_B$ et Δ_C se coupent en un point K équidistant de (AB), (AC) et (BC).

• De même, Δ_A, Δ_B et $\mathcal{D}_C$ se coupent en un point L équidistant de (AB), (AC) et (BC).

3° On en déduit, comme au 1°, que le cercle de centre J (ou K ou L), tangent à (AB), est aussi tangent à (AC) et à (BC) (fig. 12).

4 Voir la figure 13.

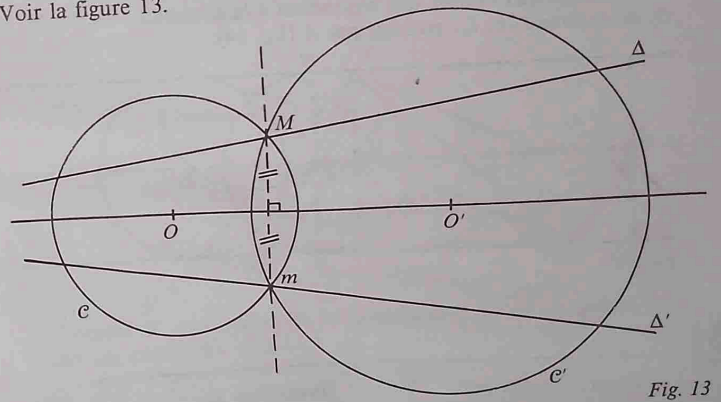


Fig. 13

1°

Si deux cercles de centres O et O' sont sécants en m et M, alors la droite (OO') est médiatrice du segment $[mM]$.

Le point m est donc l'image du point M par la réflexion par rapport à (OO').

2° Lorsque M décrit la droite Δ, le point m décrit donc l'image de cette droite par la réflexion par rapport à (OO').
Il s'agit d'une droite Δ', représentée à la figure 13.

— la parallèle à (AB) qui coupe (BC) en Q;
— la parallèle à (AC) qui coupe (BC) en R.
Montrer que A' est le milieu de (Q, R).

18 Soient A, B, A', B' des points non alignés tels que $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$.
On veut montrer qu'il existe une homothétie et une seule qui transforme A en A' et B en B'.

1° On suppose qu'il existe une telle homothétie. Déterminer son centre S.

2° Montrer que l'homothétie de centre S qui transforme A en A', transforme aussi B en B'. Préciser son rapport.
Conclure.

19 *Segments homothétiques.*
Soient A, B, C, D des points non alignés tels que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.
En procédant comme dans l'exercice 18, montrer qu'il existe exactement deux homothéties qui transforment le segment $[AB]$ en $[CD]$.

20 On considère un cercle $\mathcal{C}$ et deux points distincts A et B tels que (AB) soit extérieure à $\mathcal{C}$.

1° Pour un point M de $\mathcal{C}$, on construit le point N tel que $AMBN$ soit un parallélogramme. Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

2° Pour un point M de $\mathcal{C}$, on construit le centre de gravité G du triangle ABM (situé sur chaque médiane, au tiers à partir de la base). Déterminer l'ensemble des points G lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

CORRIGÉS

1

Figure formée par :	Axes de symétrie :
un segment $[AB]$	— la droite (AB); — la médiatrice de $[AB]$.
un triangle équilatéral	— les trois médiatrices du triangle
un rectangle	— les deux médiatrices des côtés
un carré	— les deux médiatrices des côtés; — les deux diagonales.
un cercle	— toute droite contenant le centre du cercle.
deux cercles de même rayon, de centres O et O'	— la droite (OO'); — la médiatrice de $[OO']$.
deux cercles de rayons différents, de centres O et O'	— la droite (OO'), si $O \neq O'$ — toute droite contenant le centre commun, si $O = O'$.

2 On construit, comme l'indique l'énoncé, le point B' symétrique de B par rapport à $\mathcal{D}$. Soit M un point de $\mathcal{D}$ (fig. 11).

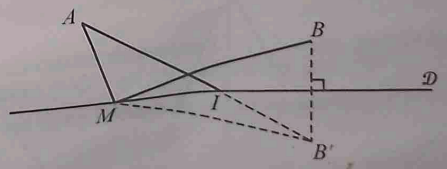


Fig. 11

On a $MB = MB'$, donc $AM + MB = AM + MB'$.

2° Reconnaître chacune des rotations de centre O qui transforme respectivement A en B, A en C et A en D.

3° En déduire que B, C et D décrivent des droites qu'on précisera, lorsque A décrit $\mathcal{D}$.

10 $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, contenant le point A. A tout point M de $\mathcal{C}$, distinct de A, on associe :

— le carré $AMNS$, tel que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AS}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

— le carré $AMN'S'$, tel que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AS'}) = -\frac{\pi}{2}$ rad.

1° Reconnaître les rotations de centre A qui transforment M en S d'une part et M en S' d'autre part.

2° En déduire l'ensemble des points S et l'ensemble des points S', lorsque M parcourt le cercle $\mathcal{C}$ privé du point A.

Exercices 11 à 14 : translations

11 Soit ABC un triangle.
Construire les images A', B', C' de A, B, C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Construire ensuite les images A'', B'', C'' de A', B', C' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que C est le milieu de $[A, C'']$.

12 Une rivière a des berges parallèles D et D' (fig. 9).
Deux points A et B sont séparés par la rivière.
On veut rejoindre A à B en traversant la rivière perpendiculairement aux berges.
Où placer le point A_1 de la figure 9 pour que le trajet ait une longueur minimale ?

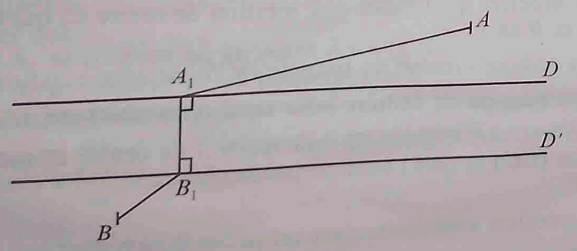


Fig. 9

Indication : on pourra faire intervenir l'image A' de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$.

13 Soit ABC un triangle et $BCDE$ un rectangle construit sur $[BC]$.
On note A', B', C' les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B, C. On note E' et D' les projetés orthogonaux de E sur $[AC]$ et de D sur $[AB]$.
On veut montrer que les droites (AA'), (DD') et (EE') sont concourantes.

1° Déterminer l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$ (ou $\overrightarrow{CD}$) de chacune des hauteurs du triangle ABC.

2° Que peut-on en déduire pour l'image par cette translation de l'orthocentre H du triangle ABC? Conclure.

14 Dans le plan, on considère deux points A, B et une droite D.
Pour un point M quelconque de D, on construit le point N tel que $ABMN$ soit un parallélogramme. Déterminer, lorsque M décrit D :

1° l'ensemble des points N;

2° l'ensemble des milieux I de $[MN]$.

Exercices 15 à 20 : homothéties

15 Soient Ω, A, A' trois points alignés et M un point du plan, comme sur la figure 10.
Construire l'image M' du point M par l'homothétie h de centre Ω qui transforme A et A'.

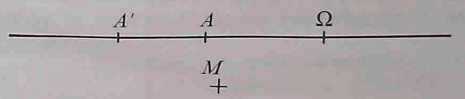


Fig. 10

16 Soient h_1 l'homothétie de centre Ω_1, de rapport 3 et h_2 l'homothétie de centre Ω_2, de rapport $\frac{1}{3}$.

1° Pour un point M du plan, construire :
— son image M' par h_1 ;
— l'image M'' de M' par h_2.

2° Calculer $\overrightarrow{MM''}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.

3° Soit h l'application qui, à tout point M du plan, associe M''.
Quelle est la nature de l'application h?

17 Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Construire le point P, image du point A par l'homothétie h de centre A' et de rapport $\frac{2}{3}$. Par ce point P, on trace :

EXERCICES

Exercices 1 à 5 : réflexions

1 Énoncer les axes de symétrie de chacune des figures suivantes formées par :

a) un segment $[AB]$,

b) un triangle équilatéral,

c) un rectangle,

d) un carré,

e) un cercle,

f) deux cercles de même rayon, de centres O et O' distincts,

g) deux cercles de rayons différents, de centres O et O'.

2 Soient $\mathcal{D}$ une droite et A, B deux points distincts du même demi-plan de bord $\mathcal{D}$. Quel est le chemin le plus court pour aller de A en B, en passant par un point de $\mathcal{D}$?

Indication : faire intervenir le symétrique de B (par exemple) par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

3 *Bissectrices d'un triangle*

Construire les bissectrices intérieures $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ d'un triangle ABC.

1° Montrer que leur point d'intersection I appartient aussi à la bissectrice intérieure $\mathcal{D}_C$ de l'angle $\widehat{C}$ du triangle.
Que peut-on en déduire pour le cercle de centre I et tangent à (AB)?
Construire les bissectrices extérieures Δ_A, Δ_B et Δ_C des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle.

2° Montrer que :
$\mathcal{D}_A$, Δ_B et Δ_C se coupent en un point J.
Δ_A, $\mathcal{D}_B$ et Δ_C se coupent en un point K.
Δ_A, Δ_B et $\mathcal{D}_C$ se coupent en un point L.

3° Que peut-on dire des cercles ayant respectivement pour centre J, K, L et tangents à (AB)?

4 Soient O, O' deux points distincts et Δ une droite.
Un point M décrit la droite Δ.
Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O', passant par M, se recoupent en m.

1° Déterminer par quelle transformation M a pour image m.

2° En déduire l'ensemble des points m lorsque M décrit Δ.

5 Les droites D et D' sont parallèles et A est un point intérieur à la bande de plan bordée par ces droites.
On veut construire les cercles tangents à D et à D', passant par A.

1° On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ de centre I répondant à la question.
Calculer IA et préciser la position du centre I.

2° En déduire la construction demandée.

Exercices 6 à 10 : rotations

6 Donner des exemples de rotations laissant invariante chacune des figures suivantes formées par :

a) deux droites D et Δ perpendiculaires en I;

b) deux droites strictement parallèles D et D' ;

c) un carré de centre O;

d) un cercle de centre Ω;

e) deux cercles de même rayon, de centres Ω et Ω' distincts.

7 On considère un triangle ABC, d'orthocentre H.

1° Construire B' et C', images de B et C par le quart de tour direct de centre A.
Construire C'' l'image de C par le quart de tour indirect de centre A.

2° Montrer que : $(B'C') \parallel (AH)$.

3° Montrer que A est le milieu de $[C'C'']$.

4° En déduire que (AH) est une médiane du triangle $AB'C''$.

8 Extérieurement à un triangle ABC direct, on construit les carrés $ACDE$, $BAFG$ et $CBHI$.

1° *a*) Montrer qu'il existe une rotation de centre C, qui transforme D en A et B en I.

b) En déduire l'image du triangle DCB par cette rotation.

c) Que peut-on en déduire pour les droites (DB) et (AI)?

2° En utilisant le quart de tour indirect de centre B, montrer que les droites (GC) et (AH) sont perpendiculaires.

9 On considère une droite $\mathcal{D}$ et un point O non situé sur $\mathcal{D}$.

1° Pour un point A de $\mathcal{D}$, construire le carré $ABCD$ de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

EXERCICES

Exercices 1 à 5 : réflexions

1 Énoncer les axes de symétrie de chacune des figures suivantes formées par :

a) un segment $[AB]$,

b) un triangle équilatéral,

c) un rectangle,

d) un carré,

e) un cercle,

f) deux cercles de même rayon, de centres O et O' distincts,

g) deux cercles de rayons différents, de centres O et O'.

2 Soient $\mathcal{D}$ une droite et A, B deux points distincts du même demi-plan de bord $\mathcal{D}$. Quel est le chemin le plus court pour aller de A en B, en passant par un point de $\mathcal{D}$?

Indication : faire intervenir le symétrique de B (par exemple) par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

3 *Bissectrices d'un triangle*

Construire les bissectrices intérieures $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ d'un triangle ABC.

1° Montrer que leur point d'intersection I appartient aussi à la bissectrice intérieure $\mathcal{D}_C$ de l'angle $\widehat{C}$ du triangle.
Que peut-on en déduire pour le cercle de centre I et tangent à (AB)?
Construire les bissectrices extérieures Δ_A, Δ_B et Δ_C des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle.

2° Montrer que :
$\mathcal{D}_A$, Δ_B et Δ_C se coupent en un point J.
Δ_A, $\mathcal{D}_B$ et Δ_C se coupent en un point K.
Δ_A, Δ_B et $\mathcal{D}_C$ se coupent en un point L.

3° Que peut-on dire des cercles ayant respectivement pour centre J, K, L et tangents à (AB)?

4 Soient O, O' deux points distincts et Δ une droite.
Un point M décrit la droite Δ.
Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O', passant par M, se recoupent en m.

1° Déterminer par quelle transformation M a pour image m.

2° En déduire l'ensemble des points m lorsque M décrit Δ.

5 Les droites D et D' sont parallèles et A est un point intérieur à la bande de plan bordée par ces droites.
On veut construire les cercles tangents à D et à D', passant par A.

1° On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ de centre I répondant à la question.
Calculer IA et préciser la position du centre I.

2° En déduire la construction demandée.

Exercices 6 à 10 : rotations

6 Donner des exemples de rotations laissant invariante chacune des figures suivantes formées par :

a) deux droites D et Δ perpendiculaires en I;

b) deux droites strictement parallèles D et D' ;

c) un carré de centre O;

d) un cercle de centre Ω;

e) deux cercles de même rayon, de centres Ω et Ω' distincts.

7 On considère un triangle ABC, d'orthocentre H.

1° Construire B' et C', images de B et C par le quart de tour direct de centre A.
Construire C'' l'image de C par le quart de tour indirect de centre A.

2° Montrer que : $(B'C') \parallel (AH)$.

3° Montrer que A est le milieu de $[C'C'']$.

4° En déduire que (AH) est une médiane du triangle $AB'C''$.

8 Extérieurement à un triangle ABC direct, on construit les carrés $ACDE$, $BAFG$ et $CBHI$.

1° *a*) Montrer qu'il existe une rotation de centre C, qui transforme D en A et B en I.

b) En déduire l'image du triangle DCB par cette rotation.

c) Que peut-on en déduire pour les droites (DB) et (AI)?

2° En utilisant le quart de tour indirect de centre B, montrer que les droites (GC) et (AH) sont perpendiculaires.

9 On considère une droite $\mathcal{D}$ et un point O non situé sur $\mathcal{D}$.

1° Pour un point A de $\mathcal{D}$, construire le carré $ABCD$ de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$ rad.

$\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$.

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad, il s'agit du quart de tour direct de centre Ω (fig. 4).

Si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ rad, il s'agit du quart de tour indirect de centre Ω (fig. 5).

Si $\alpha = \pi$ rad, il s'agit du demi-tour de centre Ω (ou de la symétrie centrale par rapport à Ω) (fig. 6).

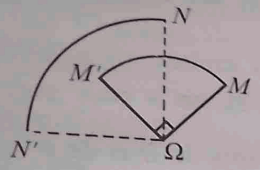


Fig. 4

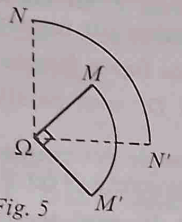


Fig. 5

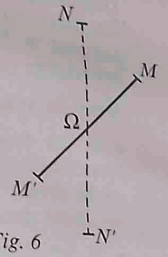


Fig. 6

Remarque : on définirait de même une rotation d'angle α quelconque.

2° Propriétés

- Le centre Ω est le seul point invariant par r.
- Si $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$, alors :

$M'N' = MN$ et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$ (fig. 4, 5, 6).

- Voir d'autres propriétés dans le tableau page 165.

III — TRANSLATIONS

1° Définition

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application, notée t, qui, à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ (fig. 7).

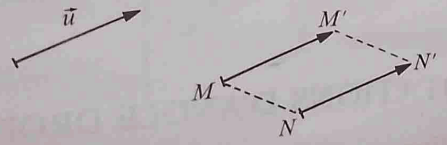


Fig. 7

2° Propriétés

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, tout point est invariant par t (il s'agit de l'identité du plan).
Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, il n'y a pas de point invariant par t.
- Si $M' = t(M)$ et $N' = t(N)$, alors : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ (fig. 7).

- Voir d'autres propriétés dans le tableau ci-dessous.

IV — HOMOTHÉTIES

1° Définition

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k (réel non nul) l'application, notée h, qui, à tout point M, associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ (fig. 8)

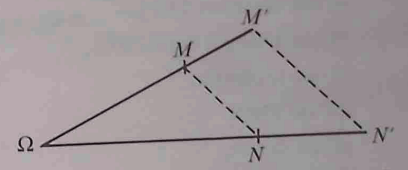


Fig. 8

2° Propriétés

- Si $k = 1$, tout point est invariant par h (il s'agit de l'identité du plan).
Si $k \neq 1$, le centre Ω est le seul point invariant par h.
- Si $M' = h(M)$ et $N' = k(N)$, alors : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ (fig. 8).
- Voir d'autres propriétés dans le tableau ci-dessous.

V — TABLEAU COMPARATIF

On a mis «non» chaque fois que la propriété n'est pas vérifiée «en général».

Conservation :	Réflexion	Rotation	Translation	Homothétie
• de la distance	oui	oui	oui	non
• du milieu	oui	oui	oui	oui
• des angles géométriques	oui	oui	oui	oui
• des angles orientés	non	oui	oui	oui
• de l'alignement	oui	oui	oui	oui
• du parallélisme	oui	oui	oui	oui
• de l'orthogonalité	oui	oui	oui	oui

Transformation :	Réflexion	Rotation	Translation	Homothétie
• d'une droite en une droite	oui	oui	oui	oui
• d'un segment en un segment	oui	oui	oui	oui
• d'un triangle, d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un carré, d'un cercle, en une figure :				
de même forme	oui	oui	oui	oui
de même aire	oui	oui	oui	non

8 Quelques transformations du plan

Ce qu'il faut savoir

I — RÉFLEXIONS (OU SYMÉTRIES ORTHOGONALES)

1° Définition

Pour tout point M du plan, on note M_1 son projeté orthogonal sur la droite D.
On appelle réflexion (ou symétrie orthogonale) par rapport à D l'application S qui à tout point M associe le point M' tel que M_1 soit le milieu de $[MM']$ (fig. 1).

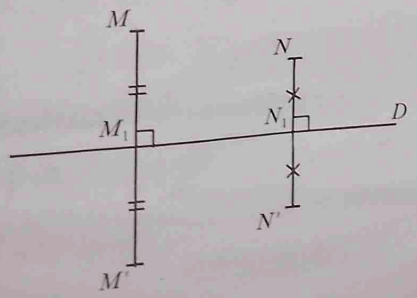


Fig. 1

Remarque :

$M' = S(M)$ équivaut à $\overline{MM'}$ est orthogonal à D et le milieu de $[MM']$ appartient à D.

2° Propriétés

- L'ensemble des points invariants par S est la droite D.
- Voir d'autres propriétés dans le tableau page 165.

3° Axes de symétrie

Définition :
La droite D est un axe de symétrie de la figure F si la réflexion par rapport à D transforme F en elle-même (on dit aussi que F est invariante par la réflexion par rapport à D).

Axes de symétrie d'une figure formée par deux droites

- Si les droites D et D' sont parallèles (fig. 2), on a pour axes de symétrie :
— la droite D'', ensemble des points équidistants de D et de D' ;
— toute droite orthogonale à D (et à D').

- Si les droites D et D' sont sécantes (fig. 3), on a pour axes de symétrie :
les deux bissectrices des angles formés par D et D', ensemble des points équidistants de D et de D'.

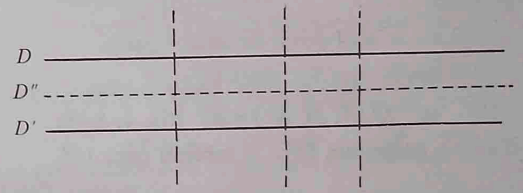


Fig. 2

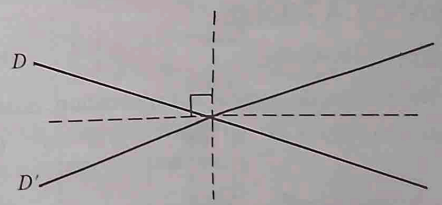


Fig. 3

II — ROTATIONS D'ANGLE DROIT OU PLAT

1° Définition

Soit α un angle droit ou plat.
On appelle rotation de centre Ω et d'angle α l'application, notée r, qui laisse le point Ω invariant et qui, à tout autre point M, associe le point M' tel que :

16 1° Voir la figure 22.

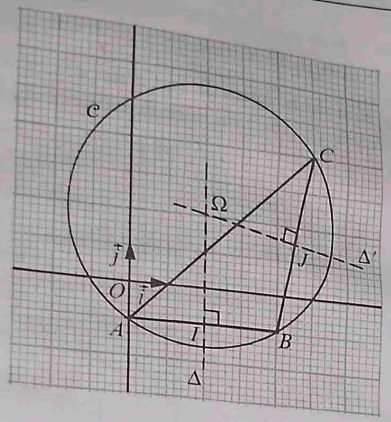


Fig. 22

2° **Médiatrice de [AB]**
Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-1-1}{2}\right)$, soit $I(2, -1)$.

Comme A et B ont la même ordonnée, la médiatrice Δ de $[AB]$ est la droite passant par I et parallèle à l'axe des ordonnées.
Elle a donc pour équation $x = 2$ (fig. 22).

Médiatrice de [BC]
Le milieu J de $[BC]$ a pour coordonnées :

$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$, soit $J\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Un point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice Δ' de $[BC]$ si et seulement si $\overrightarrow{JM} \perp \overrightarrow{BC}$. (1)

On a $\overrightarrow{JM}\left(x - \frac{9}{2}, y - \frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BC}(1, 5)$.

La condition (1) équivaut successivement à :

$$\left(x - \frac{9}{2}\right) + 5\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$x + 5y - \frac{9}{2} - \frac{15}{2} = 0,$$

$$x + 5y - 12 = 0.$$

C'est une équation de Δ'.

3° Un point appartient à Δ et à Δ' si, et seulement si, ses coordonnées x et y vérifient : $\begin{cases} x = 2 \\ x + 5y - 12 = 0. \end{cases}$

En remplaçant x par 2 dans la deuxième, on trouve :

$$2 + 5y - 12 = 0,$$

$$5y = 10,$$

$$y = 2.$$

Les droites Δ et Δ' sont donc sécantes en $\Omega(2, 2)$. Le milieu K de $[AC]$ a pour coordonnées :

$\left(\frac{0+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$, soit $K\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Le point Ω appartient aussi à la médiatrice de $[AC]$ s'il vérifie $\overrightarrow{\Omega K} \perp \overrightarrow{AC}$.

Comme : $\overrightarrow{\Omega K}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}(5, 5)$,

on a : $\frac{1}{2} \times 5 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 5 = 0$;

donc on a bien $\overrightarrow{\Omega K} \perp \overrightarrow{AC}$.

Conclusion : on retrouve que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un même point. On sait qu'il est à égale distance de chaque sommet : c'est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Le cercle de centre Ω passant par A, contient donc aussi les points B et C ; il s'agit du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC (fig. 22).

On résout ce système par substitution puisqu'on a déjà y en fonction de x. On obtient :

$$\begin{cases} x - 3\left(-3x + \frac{15}{2}\right) + \frac{5}{2} = 0 \\ y = -3x + \frac{15}{2}. \end{cases}$$

La première équation équivaut à : $x + 9x - \frac{45}{2} + \frac{5}{2} = 0$,

$$10x - \frac{40}{2} = 0,$$

$$10x = 20,$$

$$x = 2.$$

En remplaçant x par 2 dans la deuxième équation du système, on trouve : $y = -3 \times 2 + \frac{15}{2} = -6 + \frac{15}{2} = \frac{3}{2}$.

Le couple $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ est donc la solution du système. D'où $I\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

3° En remplaçant y par zéro (par exemple) dans l'équation de D, on trouve : $x + \frac{5}{2} = 0$, soit $x = -\frac{5}{2}$.

La droite D passe donc par le point $A\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ et par I.

En remplaçant x par zéro (par exemple) dans l'équation de Δ, on trouve : $y = \frac{15}{2}$.

La droite Δ passe donc par le point $B\left(0, \frac{15}{2}\right)$ et par I.

A la figure 20, on a ainsi représenté D et Δ qui sont bien perpendiculaires en I.

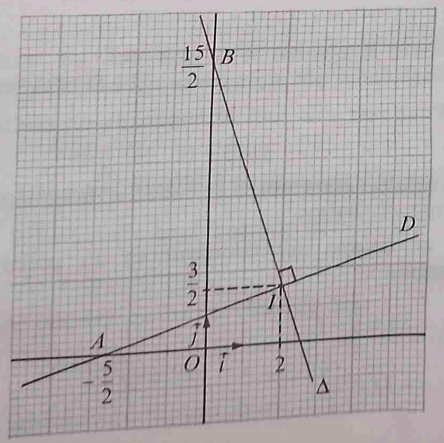


Fig. 20

15 1° Les points A, B, C ont été construits à la figure 21.

2° **Équation de la hauteur issue de A.**
Sur la figure 21, on voit que la hauteur h_A issue de A a une équation simple.

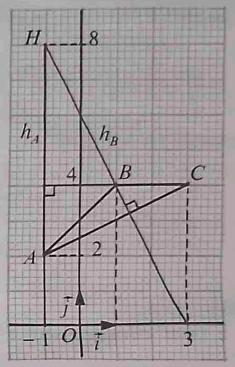


Fig. 21

En effet, les points B et C ayant même ordonnée, la droite (BC) est parallèle à l'axe des abscisses et la hauteur h_A est donc parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est $x = x_A$, c'est-à-dire $x = -1$.

Équation de la hauteur issue de B

Un point $M(x, y)$ appartient à la hauteur h_B issue de B si, et seulement si, on a $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$.

Comme $\overrightarrow{BM}(x - 1, y - 4)$ et $\overrightarrow{AC}(4, 2)$,
cette condition équivaut à $4(x - 1) + 2(y - 4) = 0$.

Après avoir simplifié par 2, on trouve $2x + y - 6 = 0$; c'est une équation de h_B.

3° On en déduit que les coordonnées du point H sont telles que :
$x = -1$ et $2x + y - 6 = 0$.

On obtient $H(-1, 8)$.
Ce point appartient aussi à la hauteur issue de C s'il vérifie :
$\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$.

Comme $\overrightarrow{HC}(4, -4)$ et $\overrightarrow{AB}(2, 2)$, on a : $4 \times 2 + (-4) \times 2 = 0$;
donc on a bien $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$.

Conclusion : on retrouve que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un même point, l'orthocentre de ce triangle.

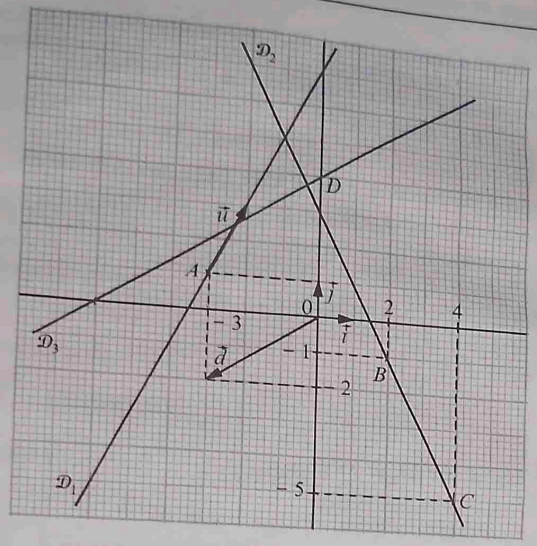


Fig. 18

13 1°

On peut multiplier chaque membre d'une égalité par un même nombre k non nul. Procédons ainsi en prenant pour k des valeurs telles que le coefficient de y devienne 2 (par exemple). On pourra ainsi facilement comparer les équations proposées avec : $-3x + 2y - 12 = 0$.

a) L'équation (1) $y = \frac{3}{2}x + 6$ équivaut, en multipliant chaque membre par 2, à :

$2y = 3x + 12$ donc à $-3x + 2y - 12 = 0$.

L'équation (1) est donc une autre équation de $\mathcal{D}$.

b) L'équation (2) $x = \frac{2}{3}y - 4$ équivaut, en multipliant chaque membre par 3, à :

$3x = 2y - 12$, donc à $-3x + 2y - 12 = 0$.

L'équation (2) est donc une autre équation de $\mathcal{D}$.

c) L'équation (3) $\frac{-x}{4} + \frac{y}{6} + 1 = 0$ équivaut, en multipliant chaque membre par 12, à : $-3x + 2y + 12 = 0$.

L'équation (3) n'est donc pas une autre équation de $\mathcal{D}$.

d) L'équation (4) $1{,}5x - y + 6 = 0$ équivaut, en multipliant chaque membre par -2, à : $-3x + 2y - 12 = 0$.

L'équation (4) est donc une autre équation de $\mathcal{D}$.

2°

Pour représenter $\mathcal{D}$, on cherche deux points de $\mathcal{D}$. Il est commode d'utiliser par exemple l'équation de $\mathcal{D}$ sous la forme $y = \frac{3}{2}x + 6$ et de donner deux valeurs à x.

Si $x = 0$, $y = 6$; si $x = -2$, $y = 3$.

La droite $\mathcal{D}$ est représentée à la figure 19.

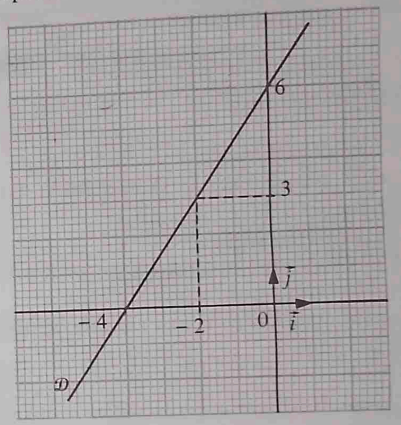


Fig. 19

14 Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b, a)$, et un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$ est $\vec{v}(1, a)$.

1° Donc $\vec{u}(3, 1)$ est un vecteur directeur de D et $\vec{v}(1, -3)$ est un vecteur directeur de Δ.

- Pour voir s'ils sont colinéaires, on calcule :

$3 \times (-3) - 1 \times 1 = -9 - 1 = -10$.

Comme le résultat n'est pas nul, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et par suite les droites D et Δ sont sécantes.

- Pour voir s'ils sont orthogonaux on calcule :

$3 \times 1 + 1 \times (-3) = 3 - 3 = 0$.

Le résultat étant nul, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et les droites D et Δ sont perpendiculaires.

2° Le couple des coordonnées du point I est donc solution du système :

$$\begin{cases} x - 3y + \frac{5}{2} = 0, \\ y = -3x + \frac{15}{2}. \end{cases}$$

2° On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$ pour voir si la condition d'orthogonalité est vérifiée.
On a déjà $\overrightarrow{AB}(2, 1)$.

De même $\overrightarrow{AD}\left(\frac{3}{2} - 1, 1 - 2\right)$, soit $\overrightarrow{AD}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

Comme : $2 \times \frac{1}{2} + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0$,

les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

3° D'après 1° et 2°, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme qui a deux côtés perpendiculaires, c'est-à-dire un rectangle (fig. 16).

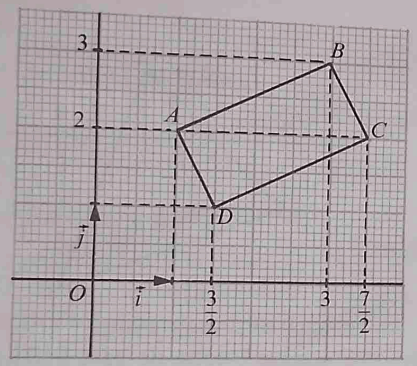


Fig. 16

11 1° Le point A est situé sur $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées $x = 1$ et $y = -2$ vérifient l'équation de $\mathcal{D}$: $x + 2y - 5 = 0$.
On a $x + 2y - 5 = 1 + 2(-2) - 5 = -8 \neq 0$. Donc $A \notin \mathcal{D}$.
Les coordonnées de B sont $x = 3$ et $y = 1$.
On calcule $3 + 2 \times 1 - 5 = 5 - 5 = 0$. Donc $B \in \mathcal{D}$.
Les coordonnées de C sont $x = 1$ et $y = 2$.
On calcule $1 + 2 \times 2 - 5 = 5 - 5 = 0$. Donc $C \in \mathcal{D}$.

2° La droite $\mathcal{D} = (BC)$ est représentée à la figure 17.

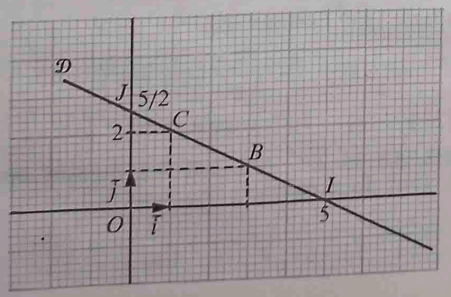


Fig. 17

3° **Point d'intersection I de $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses.**
Son ordonnée est $y = 0$.
En remplaçant dans l'équation de $\mathcal{D}$, on obtient :
$x - 5 = 0$, donc $x = 5$.
D'où $I(5, 0)$.
Point d'intersection J de $\mathcal{D}$ avec l'axe des ordonnées.
Son abscisse est $x = 0$.
En remplaçant dans l'équation de $\mathcal{D}$, on obtient :
$2y - 5 = 0$, donc $y = \frac{5}{2}$.

D'où $J\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

12 1° Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}_1$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
On a $\overrightarrow{AM}(x + 3, y - 1)$ et $\vec{u}(1, 2)$.
Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si :
$2(x + 3) - (y - 1) = 0$,
$2x - y + 7 = 0$.
Ceci est une équation de $\mathcal{D}_1$ (fig. 18).

2° On procède de même en prenant $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.
$M(x, y) \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
On a $\overrightarrow{BM}(x - 2, y + 1)$ et $\overrightarrow{BC}(2, -4)$.
On obtient : $-4(x - 2) - 2(y + 1) = 0$,
$-4x - 2y + 6 = 0$,
$-2x - y + 3 = 0$.
Ceci est une équation de $\mathcal{D}_2$ (fig. 18).

3°

Une droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{d}(-b, a)$.

Donc $\mathcal{D}_3$ a pour vecteur directeur $\vec{d}(-3, -2)$. On en déduit que :
$M(x, y) \in \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires.
On a $\overrightarrow{DM}(x, y - 4)$ et $\vec{d}(-3, -2)$.
On obtient : $-2x + 3(y - 4) = 0$,
$-2x + 3y - 12 = 0$.
Ceci est une équation de $\mathcal{D}_3$ (fig. 18).

7 On utilise les formules valables dans une base orthonormée.

1° Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ on a $\vec{u}(2, -3)$ et $\vec{v}(1, 1)$.
Pour voir si la condition d'orthogonalité est vérifiée, on calcule le réel :
$2 \times 1 + (-3) \times 1 = 2 - 3 = -1$.
Comme il n'est pas nul, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

2° • On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$,
et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

• On sait que $\|k\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$ pour tout réel k, d'où

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v} \right\| = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right| \times \|\vec{v}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\vec{v}\|,$$

et avec le résultat précédent on trouve :

$$\left\| -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1.$$

Le vecteur $-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}$ est donc unitaire.

8 On utilise les formules valables dans une base orthonormée.

1° Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $\vec{u}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

On a $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$,

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2° • On a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{16+9}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6},$$

et $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \sqrt{\frac{9+16}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$.

• Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}, -\frac{1}{2} + 1\right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{17}{12}, \frac{1}{2}\right).$$

Sa norme est alors :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{289}{144} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{325}{144}} = \sqrt{\frac{5^2 \times 13}{144}} = \frac{5\sqrt{13}}{12}.$$

Remarque : du fait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on peut calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ en utilisant le théorème de Pythagore.

On a $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{25}{36} + \frac{25}{16}$

$$= \frac{25}{4}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{4} \times \frac{13}{36}.$$

On retrouve $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\frac{25}{4} \times \frac{13}{36}} = \frac{5\sqrt{13}}{12}$.

9 1° Les points A, B, C sont représentés à la figure 15.

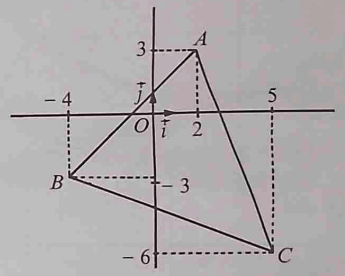


Fig. 15

2° Le triangle ABC semble isocèle de base $[AB]$.
Montrons que $AC = BC$.
D'après la formule donnant la distance de deux points dans un repère orthonormé, on a :

$AC = \sqrt{(5-2)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$,

$BC = \sqrt{(5-(-4))^2 + (-6-(-3))^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$.

Le triangle ABC est bien isocèle de base $[AB]$.
Remarque : il n'est pas équilatéral, car on a :

$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$,

soit $AB \neq AC$.

10 1° Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ on a :

$\overrightarrow{AB}(3-1, 3-2)$ et $\overrightarrow{DC}\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}, 2-1\right)$,

soit $\overrightarrow{AB}(2, 1)$ et $\overrightarrow{DC}(2, 1)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ qui ont les mêmes coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, sont donc égaux.

Clever

La parallèle à (AC) menée par D coupe (AB) en E.
La parallèle à (AB) menée par D coupe (AC) en C.
Dans le parallélogramme $AEDC$, on a :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$ (fig. 12).
Conclusion : les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont $(2, 1)$.

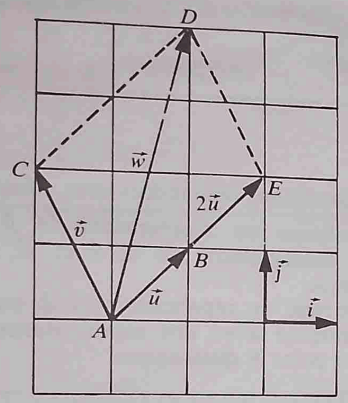


Fig. 12

3° Sur la figure 12, on lit les résultats suivants :
$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + 4\vec{j}$.
On peut vérifier que $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.
En effet $2\vec{u} + \vec{v} = 2(\vec{i} + \vec{j}) + (-\vec{i} + 2\vec{j})$,
$= 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{i} + 2\vec{j} = \vec{i} + 4\vec{j} = \vec{w}$.

5 1° Comme les points A, B, C, D ne sont pas alignés, le parallélogramme $ABCD$ n'est pas aplati et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires. Donc $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan (fig. 13).

2° Dans ce repère :

- on a : $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $D(0, 1)$ et le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(1, 1)$;
- le centre O est aussi le milieu de $[AC]$ et a pour coordonnées la moitié de celles de C, soit $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
- le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ a des coordonnées (x, y) telles que :

$\begin{cases} 1 = 0 - x \\ 0 = 1 - y, \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 ; \end{cases}$

- le point F tel que $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC}$ a des coordonnées opposées à celles de C, soit $(-1, -1)$.

Remarque : on peut lire les coordonnées de tous ces points sur la figure 13.

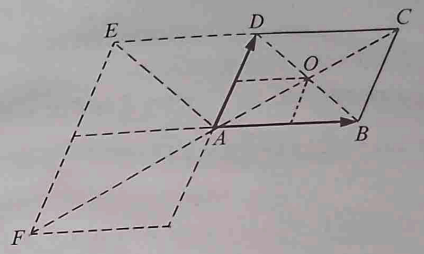


Fig. 13

6 1° Les points A, B, C sont représentés à la figure 14.

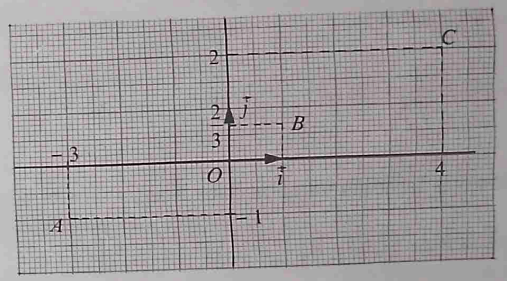


Fig. 14

2°

Les points A, B, C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple) sont colinéaires.

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ pour voir si la condition de colinéarité est vérifiée. On a $\overrightarrow{AB}\left(1 + 3, \frac{2}{3} + 1\right)$ et $\overrightarrow{AC}(4 + 3, 2 + 1)$, soit $\overrightarrow{AB}\left(4, \frac{5}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AC}(7, 3)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

On calcule le réel : $4 \times 3 - \frac{5}{3} \times 7 = 12 - \frac{35}{3} = \frac{1}{3}$.

Comme il n'est pas nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Remarque : sur la figure 14, les points A, B et C semblent alignés.
Le calcul précédent prouve qu'ils ne le sont pas exactement.

CORRIGÉS

1

1° D'après la figure 6, les abscisses des points A, B, C sont :
$x_A = -3$; $x_B = 4$ et $x_C = 5$.
De même, par lecture graphique, on trouve :
$\overline{AB} = 7$; $\overline{BC} = 1$ et $\overline{CA} = -8$.

2° Le point D a été placé sur la figure 9. Son abscisse x_D est telle que $x_D - x_A = 10$, c'est-à-dire
$x_D = x_A + 10 = -3 + 10 = 7$.



Fig. 9

2

1°

On utilise la relation de Chasles $\overline{MB} = \overline{MA} + \overline{AB}$ pour regrouper les $\overline{MA}$ et ne faire ainsi apparaître le point «inconnu» M qu'une seule fois.

L'égalité $\overline{MA} = 3\overline{MB}$ équivaut alors à :

$$\overline{MA} = 3(\overline{MA} + \overline{AB}),$$
$$\overline{MA} = 3\overline{MA} + 3\overline{AB},$$
$$\overline{MA} - 3\overline{MA} = 3\overline{AB},$$
$$-2\overline{MA} = 3\overline{AB},$$
$$2\overline{AM} = 3\overline{AB},$$

soit à : $\overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AB}$.

2° Il existe un unique point M tel que $\overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AB}$.

Son abscisse x est solution de :

$$x - x_A = \frac{3}{2}(x_B - x_A),$$
$$x - (-2) = \frac{3}{2}(4 - (-2)),$$
$$x + 2 = \frac{3}{2} \times 6,$$
$$x = 9 - 2, \quad \text{soit} \quad x = 7.$$

Les relations $\overline{MA} = 3\overline{MB}$ et $\overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AB}$ étant équivalentes, le point M d'abscisse 7 est aussi l'unique point vérifiant la première.

Autre méthode (n'utilisant pas le 1°)

La condition $\overline{MA} = 3\overline{MB}$ équivaut successivement à

$$-2 - x = 3(4 - x),$$
$$-2 - x = 12 - 3x,$$
$$3x - x = 12 + 2$$
$$2x = 14,$$
$$x = 7.$$

3° Voir figure 10.

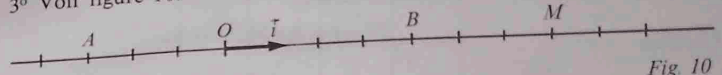


Fig. 10

3

1° et 2° Les constructions demandées sont effectuées à la figure 11.

Pour construire un représentant de $\vec{p}$, on a mis bout à bout des représentants de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, à partir d'un point A quelconque.
Pour construire un représentant de $\vec{q}$, on a utilisé la règle du parallélogramme avec des représentants de $-2\vec{u}$ et $-\vec{v}$, à partir d'un point B quelconque.

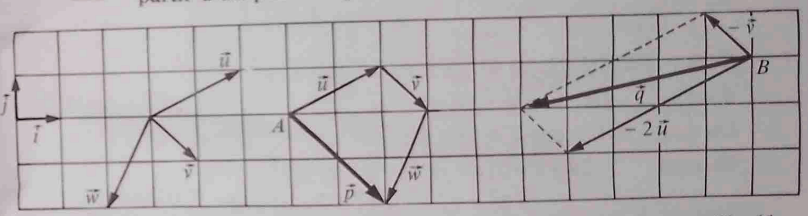


Fig. 11

3° Sur la figure 11, on lit les résultats suivants :
$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{w} = -\vec{i} - 2\vec{j}$,
$\vec{p} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{q} = -5\vec{i} - \vec{j}$.
Remarque : on peut vérifier que
$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{i} - \vec{j} - \vec{i} - 2\vec{j} = 2\vec{i} - 2\vec{j} = \vec{p}$;
$-2\vec{u} - \vec{v} = -2(2\vec{i} + \vec{j}) - (\vec{i} - \vec{j})$,
$= -4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{i} + \vec{j} = -5\vec{i} - \vec{j} = \vec{q}$.

4

1° et 2° Les constructions demandées sont effectuées à la figure 12.
Posons par exemple $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont les réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. On cherche donc à construire un parallélogramme de diagonale $[AD]$ et de côtés portés par les droites (AB) et (AC).

7 Soient $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

1° Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

2° Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, puis $\left\| -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v} \right\|$.

8 Soient $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{i} + \vec{j}$.

1° Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

2° Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercices 9 et 10 : calculs en repère orthonormé

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9 1° Placer les points $A(2, 3)$, $B(-4, -3)$ et $C(5, -6)$.

2° Déterminer la nature du triangle ABC.

10 On considère les points :

$A(1, 2)$, $B(3, 3)$, $C\left(\frac{7}{2}, 2\right)$ et $D\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

1° Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2° Montrer que : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

3° Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

Exercices 11 à 16 : équations de droites

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

11 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + 2y - 5 = 0$.

1° Les points suivants sont-ils situés sur $\mathcal{D}$:

$A(1, -2)$, $B(3, 1)$, $C(1, 2)$?

2° Représenter la droite $\mathcal{D}$.

3° Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec les axes du repère.

12 Donner une équation cartésienne des droites suivantes et les représenter.

1° $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A(-3, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

2° $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par $B(2, -1)$ et $C(4, -5)$.

3° $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par $D(0, 4)$ et parallèle à la droite Δ d'équation $-2x + 3y + 1 = 0$.

13 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $-3x + 2y - 12 = 0$.

1° Les équations suivantes sont-elles d'autres équations de $\mathcal{D}$:

a) $y = \frac{3}{2}x + 6$?

b) $x = \frac{2}{3}y - 4$?

c) $-\frac{x}{4} + \frac{y}{6} + 1 = 0$?

d) $1{,}5x - y + 6 = 0$?

2° Représenter $\mathcal{D}$.

14 Soit D la droite d'équation $x - 3y + \frac{5}{2} = 0$, et Δ la droite d'équation $y = -3x + \frac{15}{2}$.

1° Montrer que D et Δ sont sécantes.
Préciser si elles sont perpendiculaires.

2° Calculer les coordonnées de leur point d'intersection, noté I.

3° Représenter D et Δ.

15 1° Construire $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ et $C(3, 4)$.

2° Déterminer une équation de chacune des hauteurs issues de A et de B, dans le triangle ABC.

3° Vérifier que le point d'intersection H de ces deux hauteurs appartient aussi à la hauteur issue de C.
Quel résultat retrouve-t-on ?

16 1° Construire les points $A(0, -1)$, $B(4, -1)$ et $C(5, 4)$.

2° Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[BC]$.

3° Vérifier qu'elles se coupent en un point Ω qui appartient aussi à la médiatrice de $[AC]$.
Quel résultat retrouve-t-on ?
Que peut-on dire du cercle de centre Ω passant par A ?

EXERCICES

Exercices 1 et 2 : mesure algébrique

1 Les points A, B, C de la figure 6 sont sur la droite de repère $(O, \vec{i})$.



Fig. 6

1° Donner graphiquement les abscisses de chacun des points A, B, C et les mesures algébriques suivantes : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

2° Placer le point D tel que $\overline{AD} = 10$.
Préciser son abscisse.

2 Sur une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère, on considère les points A et B d'abscisses -2 et 4.

1° Montrer que pour tout point M de $\mathcal{D}$:

$\overline{MA} = 3\,\overline{MB}$ équivaut à $\overline{AM} = \frac{3}{2}\,\overline{AB}$.

2° En déduire qu'il existe un unique point M tel que $\overline{MA} = 3\,\overline{MB}$.
Préciser son abscisse.

3° Construire les points A, B, M sur une droite $\mathcal{D}$.

Exercices 3 à 6 : base et repère

3 1° Reproduire la figure 7 sur une feuille quadrillée.

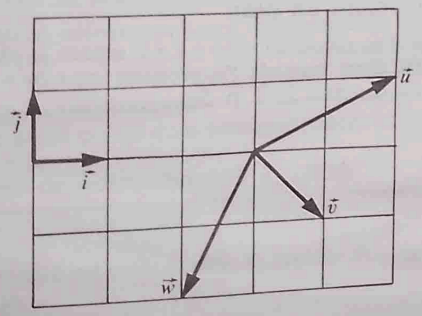


Fig. 7

2° Construire sur la même feuille :

a) un représentant de $\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

b) un représentant de $\vec{q} = -2\vec{u} - \vec{v}$.

3° Exprimer $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

4 1° Reproduire la figure 8 sur une feuille quadrillée.

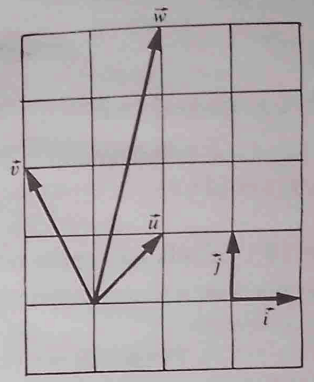


Fig. 8

2° Faire une construction permettant de déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

3° Déterminer graphiquement les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Vérifier alors le résultat du 2°.

5 On considère quatre points A, B, C, D non alignés tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1° Vérifier que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan.

2° Donner, dans ce repère, les coordonnées :
— de chacun des points A, B, C, D ;
— du centre O du parallélogramme $ABCD$;
— du point E tel que $ABDE$ soit un parallélogramme ;
— du point F symétrique de C par rapport à A.

6 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

1° Placer les points $A(-3, -1)$, $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$, $C(4, 2)$.

2° Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exercices 7 et 8 : calculs en base orthonormée

L'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

IV — ÉQUATION D'UNE DROITE

1° Vecteur directeur

Définition : Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe un représentant de $\vec{u}$ porté par $\mathcal{D}$ (fig. 4).

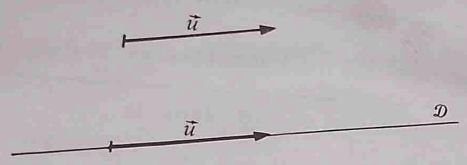


Fig. 4

Propriétés :

- Les autres vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ sont de la forme $k\vec{u}$, où k est un réel non nul.
- Une droite est entièrement définie par la donnée d'un de ses points et d'un vecteur directeur.

2° Équation cartésienne

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$; a et b sont des réels non tous les deux nuls et c un réel quelconque.
- Réciproquement, soient a et b des réels non tous les deux nuls et c un réel quelconque.

> L'ensemble $\mathcal{D}$ des points dont les coordonnées (x, y) vérifient :
> $ax + by + c = 0$,
> est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

Si, de plus, le repère est orthonormé, le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est **orthogonal** (ou **normal**) à $\mathcal{D}$.

b) Formes $y = ax + b$ et $x = k$

Les droites du plan peuvent se répartir en deux catégories :

- Les droites parallèles à l'axe des ordonnées (fig. 5).
Leurs équations sont de la forme $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

- Les droites non parallèles à l'axe des ordonnées (fig. 5).
Leurs équations sont de la forme $y = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$).
Elles représentent la fonction affine $x \mapsto ax + b$ et ont été étudiées dans le chapitre 2, I (voir p. 26).

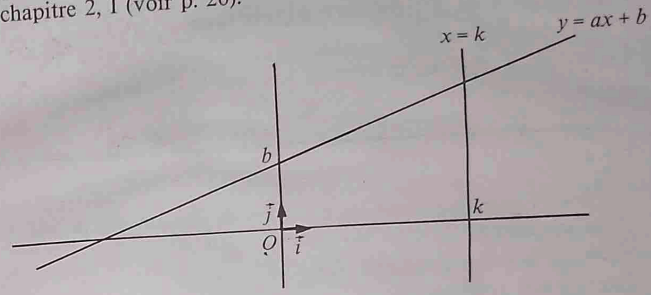


Fig. 5

Remarque : la droite d'équation $y = ax + b$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1, a)$.

3° Position relative de deux droites

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$, et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $a'x + b'y + c' = 0$.

- On a : $\boxed{\mathcal{D} /\!/ \mathcal{D}' \Leftrightarrow ab' - a'b = 0.}$
- Si, de plus, le repère est orthonormé : $\boxed{\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0.}$

4° Régionnement du plan

Toute droite d'équation $ax + by + c = 0$ sépare le plan en deux demi-plans ouverts dans lesquels l'expression $ax + by + c$ garde un signe constant (voir chapitre 3, II, p. 56).

II — BASE ET REPÈRE DU PLAN

1° Définitions

• On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.
Une **base** $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ est un couple de vecteurs non colinéaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On dit que x et y sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
On écrit $\vec{u}(x, y)$.

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$,
$\vec{u}(x, y)$ signifie $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (fig. 2).

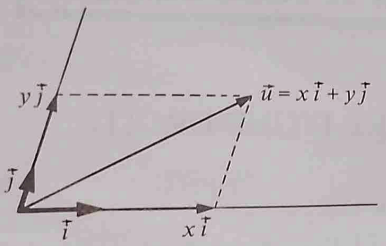


Fig. 2

• Un **repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est constitué d'un point O appelé origine et d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$. Pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On dit que x et y sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On écrit $M(x, y)$.

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
$M(x, y)$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (fig. 3).

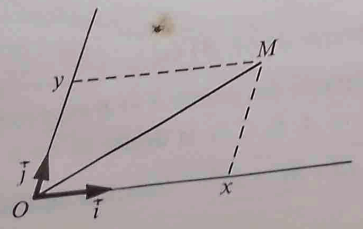


Fig. 3

2° Des formules

• Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$; soit k un réel.

Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{u}'$ sont $(x + x', y + y')$.
Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont (kx, ky).
$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$.

• Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont : $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.
Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont :
$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

III — BASE ET REPÈRE ORTHONORMÉS

1° Définition

• On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base orthonormée** de $\mathcal{V}$ si, et seulement si, on a : $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

• On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé** du plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si :
$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

2° Des formules

• Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$.

La norme de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

• Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

La distance des points A et B est :
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Le trapèze $ABCD$ est représenté à la figure 34.
Comme $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens, leur somme $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$ vérifie $\|2\,\overrightarrow{IJ}\| = \|\overrightarrow{AD}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$, c'est-à-dire $2\,IJ = AD + BC$.

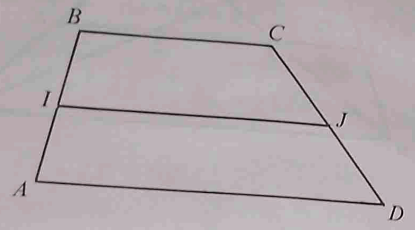


Fig. 34

Remarques :

- (IJ) est parallèle aux bases du trapèze.
- La distance IJ est la moyenne arithmétique des distances BC et AD.

7 Bases et repères du plan

Ce qu'il faut savoir

I — REPÈRE D'UNE DROITE

1° Définition

Un repère $(O, \vec{i})$ d'une droite $\mathcal{D}$ est constitué d'un point O et d'un vecteur directeur $\vec{i}$ de $\mathcal{D}$.
Pour tout point M de $\mathcal{D}$, il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ (fig. 1).
Le réel x est l'abscisse de M dans le repère $(O, \vec{i})$.

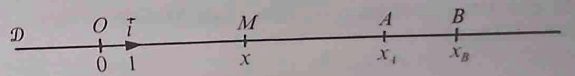


Fig. 1

2° Mesure algébrique

- Soient A et B des points de $\mathcal{D}$ qui ont pour abscisses respectives x_A et x_B.

On a : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i}$.

La mesure algébrique de (A, B) est : $\boxed{\overline{AB} = x_B - x_A}$.

Remarque : la distance des points A et B est : $AB = |x_B - x_A| = |\overline{AB}|$.

- Pour tous points A, B, C de la droite $\mathcal{D}$, on a :

$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}}$ (relation de Chasles).

15 1° Démontrons que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ par exemple (*cf.* exercice 11, p. 126).

• Par hypothèses, on a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

• De même $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, donc que $IJKL$ est un parallélogramme (fig. 30).

Autre méthode :

On établit de même que $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

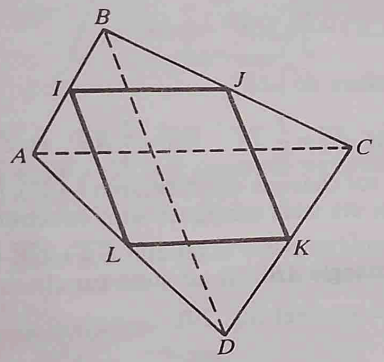


Fig. 30

2° Les propositions suivantes sont équivalentes :

— I, J, K, L sont alignés ;
— le parallélogramme $IJKL$ est aplati ;
— les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires ;
— les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires,

$\left(\text{car} \quad \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$.

La figure 31 représente des points correspondants à ce cas.

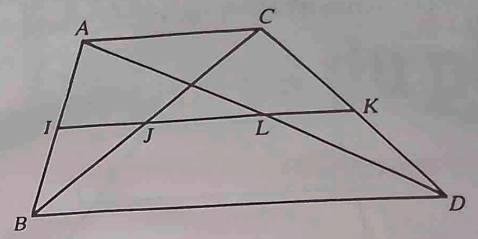


Fig. 31

16 1°

Pour établir que $\vec{u} = \vec{v}$, on peut transformer $\vec{u}$ pour obtenir $\vec{v}$, ou $\vec{v}$ pour obtenir $\vec{u}$.
Il faut utiliser les hypothèses et se guider par le résultat que l'on veut obtenir, ainsi que par la figure.
Voici une méthode qui transforme $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ en $2\overrightarrow{IJ}$.

Par hypothèse, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$.

On peut écrire (fig. 32) :

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}) + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC})$

$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JC}) + 2\overrightarrow{IJ}$

$= \vec{0} + \vec{0} + 2\overrightarrow{IJ}$

$= 2\overrightarrow{IJ}$.

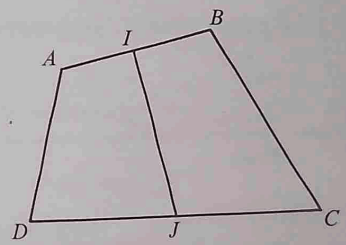


Fig. 32

2°

Si des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} + \vec{v}$ (qui est aussi colinéaire et de même sens que chacun d'entre eux) vérifie $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (fig. 33).

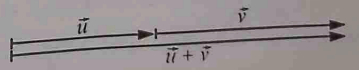


Fig. 33

On en déduit que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

13

Voici une méthode possible.
On cherche une suite de propositions deux à deux équivalentes, la première étant « $BCDE$ est un parallélogramme » et la dernière « $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ ».
Les décompositions des vecteurs, à l'aide de la relation de Chasles, sont guidées par le résultat que l'on veut obtenir.

Les propositions suivantes sont équivalentes :
$BCDE$ est un parallélogramme,
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$ (fig. 28),
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$,
$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA}$,
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

Ceci établit l'équivalence entre « $BCDE$ est un parallélogramme » et « $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ ».

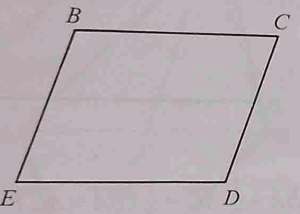


Fig. 28

14

1° La relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut successivement à

$(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$,

$3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$,

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Pour un point O quelconque donné, posons $\vec{u} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Il existe un seul représentant de $\vec{u}$ d'origine O. L'extrémité G de ce représentant de $\vec{u}$ est déterminée de façon unique.
Autrement dit, il existe un seul point G tel que

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

2° Remplaçons O par A dans la relation du 1°.
On obtient :

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$.

En effet : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}) + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C})$

$= 2\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$

$= 2\overrightarrow{AA'}$,

car A' étant le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

Remarque : la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$ découle du résultat de l'exercice 9, p. 126.

Donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} \cdot 2\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

3° En remplaçant O par B dans la relation du 1°, on trouve de même :

$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3} \cdot 2\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$,

car B' est le milieu de $[AC]$.
En remplaçant O par C dans la relation du 1°, on a aussi :

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3} \cdot 2\overrightarrow{CC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$,

car C' est le milieu de $[AB]$.

4° Les relations $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ prouvent que G est situé sur chacune des médianes (AA'), (BB') et (CC'), ce qui redémontre que ces trois médianes sont concourantes (fig. 29).

Conclusion : l'unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ est le centre de gravité du triangle ABC. Il est situé sur chacune des médianes, aux $\frac{2}{3}$ en partant du sommet (fig. 29).

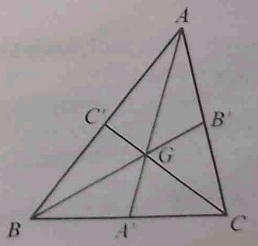


Fig. 29

• **Première méthode :**

équivaut successivement à :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC},$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC},$$

ce qui est vrai.

• **Deuxième méthode :**

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$.

9 Par hypothèse, I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

On peut écrire :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}$.

Autre méthode :

Soit C le point du plan tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ (fig. 25).

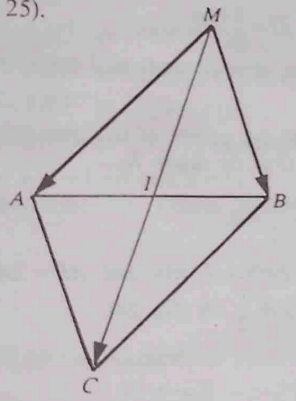


Fig. 25

On sait que $AMBC$ est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent en leur milieu.

Donc $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

10 • **Première méthode :**

Cherchons une expression de $\vec{u}$ ne faisant plus intervenir le point M.

On peut écrire par exemple :

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$,

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ est bien indépendant du point M.

• **Deuxième méthode :**

Démontrons que, pour tous points M et N, on a :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NC}$.

Cette relation équivaut successivement à :

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + 2(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{NC}) = \vec{0}$,

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NM} = \vec{0}$,

$2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NM} = \vec{0}$,

$\vec{0} = \vec{0}$, ce qui est vrai.

Le vecteur $\vec{u}$ est bien indépendant du point M ou N choisi.

11 Par hypothèses, on a :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (fig. 26).

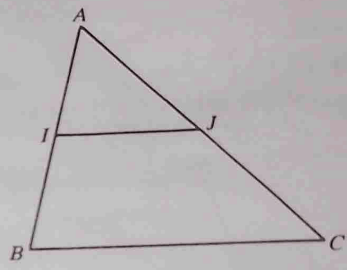


Fig. 26

On peut écrire :

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

12 On peut écrire :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$
$+ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})$

$= 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$= 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$.

Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ se coupent en leur milieu O.

Donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ (fig. 27).

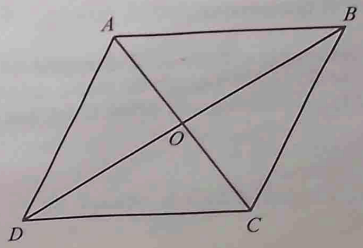


Fig. 27

5 Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.
Donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ (1).
Les droites (AC) et (BD) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès, $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OC}$ (2) (avec le même coefficient k que dans la relation (1)).
Les droites (CE) et (DF) sont parallèles.
De nouveau, le théorème de Thalès permet d'écrire $\overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OE}$ (3).
En utilisant les relations (1) et (3) et la réciproque du théorème de Thalès, on obtient $(AE) \parallel (BF)$ (fig. 17, p. 125).

6 Les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
D'après le théorème de Thalès, on a aussi $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$.
On utilise de nouveau le théorème de Thalès (en faisant attention aux points qui se correspondent).
On obtient successivement

$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}$, car $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ et $(NP) \parallel (AB)$,
$\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BA}$, car $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}$ et $(PQ) \parallel (AC)$,
$\overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{CA}$, car $\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BA}$ et $(QR) \parallel (BC)$.
$\overrightarrow{CS} = k\overrightarrow{CB}$, car $\overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{CA}$ et $(RS) \parallel (AB)$.

2° D'après le 1°, on a $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = k\overrightarrow{CB}$.
La réciproque du théorème de Thalès permet de conclure que $(SM) \parallel (AC)$.

7 1°

Le milieu I de $[AB]$ est caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ par exemple (fig. 22).

a) La relation $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ équivaut successivement à
$\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$,
$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$,
$2\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB}$,
$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ (on a multiplié chaque membre par -1)
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow I$ est le milieu de $[AB]$ (fig. 22).

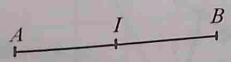


Fig. 22

b) La relation $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$ est vraie pour tous les points I du plan (relation de Chasles).

c)
Ne pas confondre IA (distance) et $\overrightarrow{IA}$ (vecteur).

$IA = IB$ si, et seulement si, I appartient à la médiatrice de $[AB]$, qui est la droite orthogonale à $[AB]$ en son milieu (fig. 23).

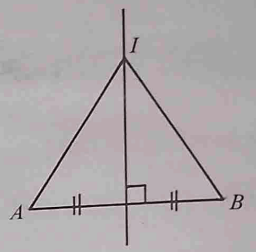


Fig. 23

d) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ si, et seulement si, I est le milieu de $[AB]$ (fig. 22).

e)
L'ensemble des points M tels que $OM = R$ $(R > 0)$ est le cercle de centre O et de rayon R.

$AB = 2AI \Leftrightarrow AI = \frac{1}{2}AB$.

L'ensemble des points I tels que $AB = 2AI$ est donc le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}AB$ (fig. 24).

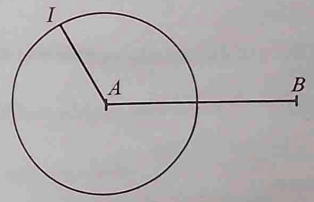


Fig. 24

2° D'après le 1°, la relation $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (1° *a*)) et la relation $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ (1° *d*)) caractérisent chacune le milieu I de $[AB]$.

8 La relation de Chasles $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ permet :
— soit de regrouper la somme $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$ en $\overrightarrow{MP}$,
— soit de décomposer le vecteur $\overrightarrow{MP}$ en $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$.
Il y a ici plusieurs méthodes possibles. En voici deux.

CORRIGÉS

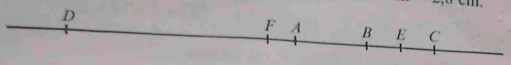
1

Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 0$.
On rappelle que $k\vec{u}$ est un vecteur de même direction que $\vec{u}$, de même sens si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$.
De plus $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$.

Les points A, B, C, D, E, F sont représentés à la figure 19.
On a en particulier :

$AC = 4$ cm, $AD = 6$ cm, $BE = 1$ cm, $BF = 2\sqrt{2}$ cm $\approx 2{,}8$ cm.

Fig. 19



2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, l'un est le produit de l'autre par un réel k.
Le réel k peut se déterminer graphiquement en observant les sens et les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1° Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même sens.
Donc $k > 0$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = k\|\overrightarrow{BC}\|$.
En utilisant l'unité choisie sur la figure 15 p. 124, on obtient $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = 1$.

Donc $k = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = 4$.

Conclusion :

$\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{BC}$, ce qui peut aussi s'écrire $\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

2° On procède de même.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 5$.

Donc $\overrightarrow{AB} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}$, ou $\overrightarrow{AC} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}$.

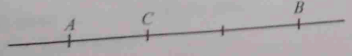
3° $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\|\overrightarrow{CB}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = 5$.

Donc $\overrightarrow{CB} = -\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, ou $\overrightarrow{AC} = -5\overrightarrow{CB}$.

3

1° La figure 20 représente des points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

Fig. 20



2° *a*) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de sens contraire, donc il existe un réel $k < 0$, tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.
Donc $\|\overrightarrow{AB}\| = |k|\|\overrightarrow{BC}\|$.
Prenons alors comme unité $\|\overrightarrow{AC}\| = 1$ par exemple.
D'après la figure 20, $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = 2$.
Donc $|k| = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{3}{2}$ et $k = -\dfrac{3}{2}$.

Conclusion : $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, ou $\overrightarrow{BC} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

b) Utilisons la relation de Chasles.
On sait que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
Donc
$$\overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}),$$
$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC},$$
$$-2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.$$

4

Les constructions demandées sont effectuées à la figure 21.

- Pour construire $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, on a utilisé la règle du parallélogramme.
- Pour construire $\overrightarrow{BE}$, on a mis bout à bout, à partir de B, des représentants de $2\overrightarrow{AB}$ et $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- Pour construire $\overrightarrow{CF}$, on a mis bout à bout, à partir de C, des représentants de $-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

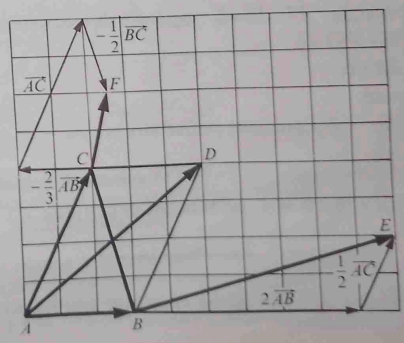


Fig. 21

Exercice 7 : caractérisations du milieu de $[AB]$

7 Soient A et B des points distincts du plan.

1° Déterminer les ensembles des points I du plan vérifiant les égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$,

b) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$,

c) $IA = IB$,

d) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$,

e) $AB = 2AI$.

2° Parmi les égalités du 1°, indiquer celles qui caractérisent le milieu I de $[AB]$.

Exercices 8 à 16 : relation de Chasles

8 Soient A, B, C, D des points quelconques du plan.
Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$.

9 Soient A et B des points du plan et I le milieu de $[AB]$.
Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

10 Soient A, B, C des points quelconques du plan.
Démontrer que le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ ne dépend pas de la position du point M dans le plan.

11 *Droite des milieux*
Soient A, B, C des points du plan.
On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.
Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

12 Soit $ABCD$ un parallélogramme et O le point d'intersection de ses diagonales.
Démontrer que, pour tout point M du plan :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

13 Soient A, B, C, D, E des points du plan.
Démontrer que $BCDE$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

14 *Centre de gravité d'un triangle*
Soit ABC un triangle. On se propose d'établir qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et que G est le point d'intersection des médianes du triangle.

1° Soit O un point quelconque du plan.
Démontrer que
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
En déduire que G existe et est unique.

2° Soit A' le milieu de $[BC]$.
Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
(On pourra remplacer O par A dans la relation du 1°.)

3° Soient B' et C' les milieux respectifs de $[CA]$ et $[AB]$.
Démontrer de même que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

4° Conclure.

15 Soient A, B, C, D des points du plan et soient I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

1° Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

2° Démontrer que I, J, K, L sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

16 Soient A, B, C, D des points du plan.
On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.

1° Démontrer que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

2° On suppose que $ABCD$ est un trapèze, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaires et de même sens.
Démontrer que $2IJ = AD + BC$.

EXERCICES

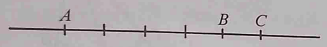
Exercices 1 à 4 : constructions et opérations sur les vecteurs

1 On considère des points A et B tels que $AB = 2$ cm.
Construire les points C, D, E, F définis par

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = -\sqrt{2}\overrightarrow{AB}$.

2 Les points A, B, C de la figure 15 sont sur une droite graduée.

Fig. 15



Déterminer graphiquement une relation entre les vecteurs suivants :
1° $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$;
2° $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
3° $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3 1° Construire des points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
2° *a*) Déterminer graphiquement une relation entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Retrouver le résultat par le calcul.

4 1° Reproduire la figure 16 sur une feuille quadrillée.

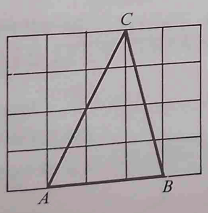


Fig. 16

2° Construire sur la même feuille les points D, E, F définis respectivement par :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Voir aussi l'exercice 3, p. 144.

Exercice 5 et 6 : théorème de Thalès et sa réciproque.

5 Sur la figure 17, on a $(AC) /\!/ (BD)$ et $(CE) /\!/ (DF)$.
Démontrer que $(AE) /\!/ (BF)$.

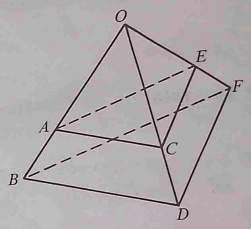


Fig. 17

6 Sur la figure 18, on a $(MN) /\!/ (BC)$, $(NP) /\!/ (AB)$ $(PQ) /\!/ (AC)$, $(QR) /\!/ (BC)$ et $(RS) /\!/ (AB)$.

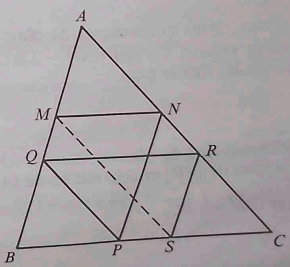


Fig. 18

1° Soit k le réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que k vérifie aussi $\overrightarrow{CS} = k\overrightarrow{CB}$.
2° En déduire que $(SM) /\!/ (AC)$.

Alors, on a aussi $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 11).

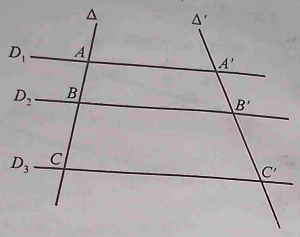


Fig. 11

Remarques :

- Si B est le milieu de $[AC]$, alors $k = \frac{1}{2}$ et B' est le milieu de $[A'C']$.
- Lorsque A et A' sont confondus (fig. 12), le théorème devient : si $(BB') \parallel (CC')$ et si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB'}$.

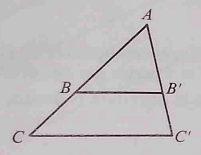


Fig. 12

2° Réciproque, dans le cas où $A = A'$

Si A, B, B', C, C' sont des points distincts tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB'}$, alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles (fig. 12).

Remarque : on a de plus $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{BB'}$ (voir homothéties, p. 165).

VII — MILIEU D'UN SEGMENT, CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRIANGLE

1° Milieu d'un segment

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$.

I est l'unique point du plan tel que $\boxed{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}}$ (fig. 13).

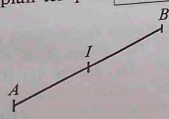


Fig. 13

Remarque : I est aussi caractérisé par la relation $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2° Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle et A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

Les **médianes** (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle ABC (fig. 14).

G est l'unique point du plan tel que $\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}}$ (voir exercice 14, p. 127).

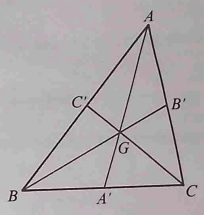


Fig. 14

Remarque : G est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet, c'est-à-dire que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

III — MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

1° Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel.
$k\vec{u}$ est un vecteur défini de la façon suivante (fig. 8).

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k > 0$, alors le vecteur $k\vec{u}$
  — a même direction que $\vec{u}$,
  — a même sens que $\vec{u}$,
  — a pour norme k fois la norme de $\vec{u}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k < 0$, alors le vecteur $k\vec{u}$
  — a même direction que $\vec{u}$,
  — est de sens contraire à $\vec{u}$,
  — a pour norme $(-k)$ fois la norme de $\vec{u}$.

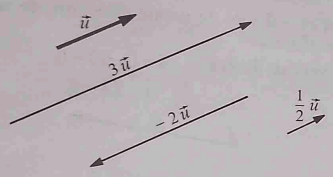


Fig. 8

Remarque : dans tous les cas, on a $\boxed{\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|}$, où $|k|$ désigne la valeur absolue de k (voir chapitre 1, p. 8).

2° Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs, k et k' des réels

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$,

$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

IV — VECTEURS COLINÉAIRES

Voici trois définitions possibles (elles sont bien sûr équivalentes).

Définition 1 :
Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ portés par des droites parallèles.

Définition 2 :
Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :
— soit $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$,
— soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction (fig. 9).

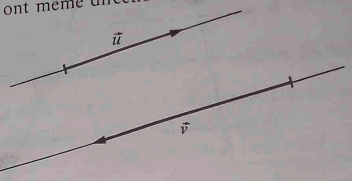


Fig. 9

Définition 3 :
Des vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

V — VECTEURS ORTHOGONAUX

Définition

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, il existe des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ portés par des droites orthogonales (fig. 10).

Remarque : d'après la définition ci-dessus, $\vec{u} = \vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{v}$.

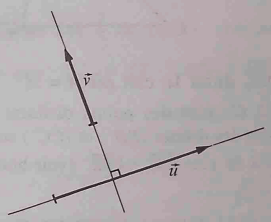


Fig. 10

VI — THÉORÈME DE THALÈS

Les résultats ci-dessous, exprimés à l'aide de vecteurs, généralisent ceux vus en classe de Troisième.

1° Théorème de Thalès

Soient D_1, D_2, D_3 des droites strictement parallèles.
Une droite Δ coupe D_1, D_2, D_3 en A, B, C respectivement.
Une droite Δ' coupe D_1, D_2, D_3 en A', B', C' respectivement.
Soit k le réel tel que $\overline{AC} = k\overline{AB}$.

3° Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur.
La norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.
On écrit $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Remarques :

- $\|\vec{u}\| = 0$ équivaut à $\vec{u} = \vec{0}$.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls.
  $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même sens et même norme.

II — ADDITION DES VECTEURS

1° Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C, on a

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.} \quad \text{(fig. 3)}$$

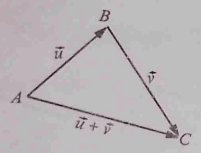


Fig. 3

2° Construction de $\vec{u} + \vec{v}$

Première construction : « bout à bout »
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
D'après la relation de Chasles, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (fig. 3).

Deuxième construction : « le parallélogramme »
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.
Soit P le point tel que $OMPN$ soit un parallélogramme.
On a $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP}$ (fig. 4).

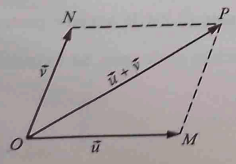


Fig. 4

3° Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.
$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

4° Opposé de $\vec{u}$

Définition :
Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur.
L'opposé de $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.
Donc, par définition $\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$ (fig. 5).

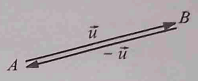


Fig. 5

Propriétés :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, $-\vec{u} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont de même direction, de sens contraire et de même norme (fig. 6).
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
  $-(-\vec{u}) = \vec{u}$.

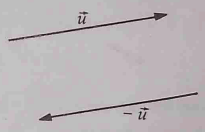


Fig. 6

5° Différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs.
Par définition

$$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).} \quad \text{(fig. 7)}$$

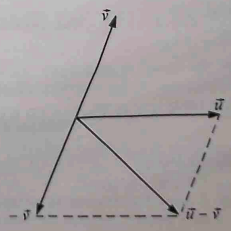


Fig. 7

On calcule alors $f(0,2) \approx -0,272$,
$f(0,4) \approx 0,744$,
$f(0,3) \approx 0,197$.
On en conclut que $0,2 < \alpha < 0,3$.

b)

On calcule $f(x)$ pour des valeurs de x permettant de resserrer l'encadrement de α.
Par exemple :

x	$f(x)$	*Encadrement de* α
0,25	− 0,047	$0,25 < \alpha < 0,3$
0,27	+ 0,048	$0,25 < \alpha < 0,27$
0,26	+ 0,000 3	$0,25 < \alpha < 0,26$
0,259	− 0,004	$0,259 < \alpha < 0,260$

D'où $\alpha \approx 0,259$ à 10^{-3} près.

Remarque :
L'équation $f(\alpha) = 0$ équivaut successivement à :
$(1 + \alpha)^3 = 2$, $1 + \alpha = \sqrt[3]{2}$.
($\sqrt[3]{2}$ désigne la racine cubique de 2, c'est-à-dire le réel dont le cube est 2.)
On en déduit que la valeur exacte de α est $\alpha = \sqrt[3]{2} - 1$.

6 Vecteurs du plan

Ce qu'il faut savoir

I — REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN VECTEUR $\vec{u}$

1° Vecteur non nul

• Un vecteur non nul est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.

• L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABDC$ est un parallélogramme (fig. 1).

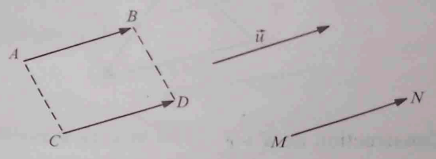


Fig. 1

On dit alors que (A, B) et (C, D) sont des représentants du même vecteur $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

• Une définition plus rigoureuse d'un vecteur est la suivante :
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est l'ensemble des bipoints (M, N) tels que $ABNM$ soit un parallélogramme (fig. 1).

2° Vecteur nul

Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est le vecteur particulier $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, pour tout point A (fig. 2).
Il n'a pas de direction ni de sens. Sa longueur est nulle.



Fig. 2

b)

Démontrons que, si $0 < X \leqslant X'$, alors $g(X) \leqslant g(X')$.
Supposons $0 < X \leqslant X'$.
Alors $\frac{1}{X} \geqslant \frac{1}{X'}$, car la fonction $X \mapsto \frac{1}{X}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Donc $-\frac{8}{X} \leqslant -\frac{8}{X'}$, car on a multiplié chaque membre par -8 qui est négatif.
D'où $g(X) \leqslant g(X')$.
La fonction g est bien croissante sur $]0, +\infty[$.

c) Le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ du 3° est justifié car
— d'après 5° *b)*, on peut relier les points d'abscisse $X > 0$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ par une fonction croissante ;
— le point Ω étant centre de symétrie pour $\mathcal{C}$ d'après 5° *a)*, on peut aussi relier les points d'abscisse $X < 0$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ par une fonction croissante.

10

1° **Domaine de définition**
f n'est pas définie pour $x^2 + 1 = 0$.
Cette équation équivaut à $x^2 = -1$.
Elle n'a pas de solution car un carré est toujours positif, donc $D = \mathbb{R}$.

f est paire

Pour tout réel x, on a $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = f(x)$.

La fonction f est paire.

2°

- Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$, car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
- Si $0 < a \leqslant b$, alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Supposons $0 \leqslant x \leqslant x'$ et comparons $f(x)$ et $f(x')$.
On a $0 \leqslant x^2 \leqslant x'^2$.
Donc $1 \leqslant x^2 + 1 \leqslant x'^2 + 1$, $\frac{1}{x^2 + 1} \geqslant \frac{1}{x'^2 + 1}$,
et par suite : $f(x) \geqslant f(x')$.
Ceci établit que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
3° La courbe (C) est représentée à la figure 27.

On peut utiliser les valeurs suivantes :

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	0,5	0,2	0,1

et le fait que l'axe des ordonnées est axe de symétrie pour (C).

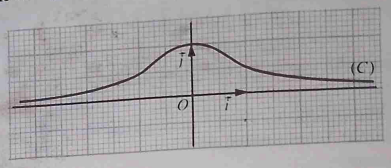


Fig. 27

11

1° Soit M un point de coordonnées (x, y) et (X, Y) respectivement dans les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(I, \vec{i}, \vec{j})$.
De $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$, on obtient $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = -2 + Y. \end{cases}$
L'équation $y = (1 + x)^3 - 2$ de $\mathcal{C}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donne alors :
$-2 + Y = [1 + (-1 + X)]^3 - 2$,
$Y = X^3 - 2 + 2$,
$Y = X^3$.
C'est l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$.
2° La courbe $\mathcal{C}$ est représentée à la figure 28.

On utilise l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ obtenue au 1° :
$Y = X^3$.

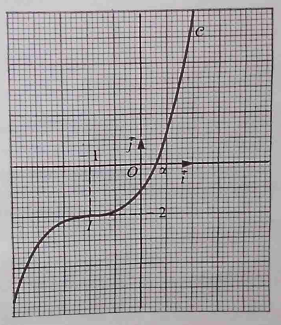


Fig. 28

3° *a)*

Par définition, $f(\alpha) = 0$. D'autre part f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $x < \alpha$ équivaut à $f(x) < f(\alpha)$, c'est-à-dire à $f(x) < 0$.
De même, $x > \alpha$ équivaut à $f(x) > 0$.

$\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x = 0$, (en regroupant)

$2x^2 + 10x = 0$, (en multipliant chaque membre par 3).

$x^2 + 5x = 0$, (en simplifiant par 2)

$x(x + 5) = 0$.

Donc soit $x = 0$, soit $x = -5$.

En remplaçant x par 0 dans l'équation de (H) ou de Δ, on obtient $y = 2$. De même $x = -5$ donne $y = -\frac{4}{3}$.

Conclusion :

Δ et (H) sont sécantes en deux points : $B(0\,;\,2)$ et $C\left(-5\,;\,-\frac{4}{3}\right)$ (fig. 25).

9 1° f n'est pas définie pour $x + 5 = 0$, c'est-à-dire pour $x = -5$.

Donc $D = \mathbb{R}\setminus\{-5\}$.

2° Les valeurs demandées sont données dans les tableaux suivants :

x	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6
$f(x)$	$\frac{18}{10}$	$\frac{17}{9}$	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{13}{5}$	3	$\frac{11}{3}$	5	9

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-7	-3	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{6}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{10}$

3° $\mathcal{C}$ est représentée à la figure 26.

4° Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

La relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ donne $\begin{cases} x = -5 + X \\ y = 1 + Y. \end{cases}$

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ a pour équation $y = \frac{x-3}{x+5}$.

Donc dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ a pour équation :

$1 + Y = \frac{-5 + X - 3}{-5 + X + 5}$,

$1 + Y = \frac{X - 8}{X}$,

$Y = \frac{X - 8}{X} - 1$,

$Y = \frac{X - 8 - X}{X}$,

$Y = \frac{-8}{X}$.

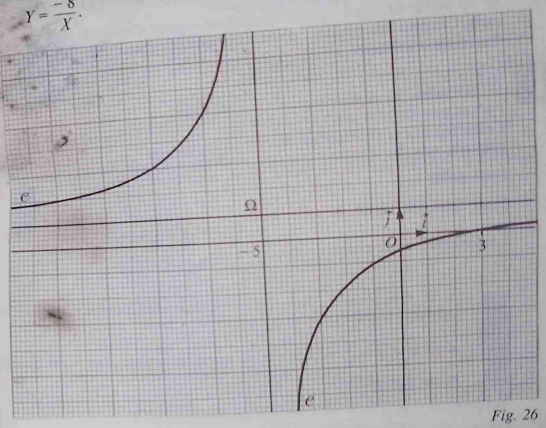


Fig. 26

5° *a)*

Montrons que, pour tout $X \in \mathbb{R}^*$, $g(-X) = -g(X)$.

On a $g(X) = -\frac{8}{X}$.

Donc $g(-X) = -\frac{8}{-X} = \frac{8}{X} = -g(X)$, ce qui établit que g est une fonction impaire.

Remarque : $\mathcal{C}$ a pour équation $Y = -\frac{8}{X}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Donc l'origine Ω est centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

La relation $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RT}$ donne $\begin{cases} x = 5 + X \\ y = 25 + Y. \end{cases}$

Dans $(Q, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ a pour équation $y = 25 - (x - 5)^2$.
En remplaçant x et y par leurs valeurs, on obtient une équation de $\mathcal{C}$ dans $(R, \vec{i}, \vec{j})$:

$25 + Y = 25 - (5 + X - 5)^2$,

$Y = -X^2$.

b) La courbe $\mathcal{C}$ est représentée à la figure 24.

Ne pas oublier que $x \in [0, 10]$ et que $\|\vec{i}\| = 5\|\vec{j}\|$.
$\mathcal{C}$ est un morceau de parabole.

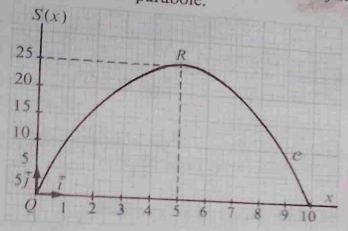


Fig. 24

8 1° Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

La relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ donne $\begin{cases} x = -2 + X \\ y = Y. \end{cases}$

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (H) a pour équation $y = \dfrac{4}{x+2}$.

En remplaçant x et y par leurs valeurs, on obtient une équation de (H) dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$:

$Y = \dfrac{4}{-2 + X + 2}$, c'est-à-dire $Y = \dfrac{4}{X}$.

2°

- La courbe représentative de la fonction $X \mapsto \dfrac{a}{X}$ est une hyperbole, pour tout réel a non nul (ici $a = 4$).
- Pour tracer (H), on peut se placer dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$. On utilise alors des valeurs comme

X	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$Y = \frac{4}{X}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$

et le fait que A est centre de symétrie (car la fonction $X \mapsto \dfrac{4}{X}$ est impaire).

- On peut préférer calculer les coordonnées des points de (H) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On utilise alors la relation $y = \dfrac{4}{x+2}$.

La courbe (H) est représentée à la figure 25.

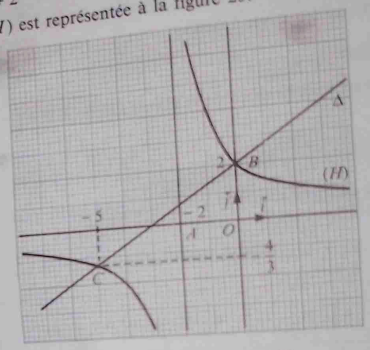


Fig. 25

3° *a*) La droite Δ est représentée à la figure 25.

On peut prendre les valeurs :

x	0	-3
$\frac{2}{3}x + 2$	2	0

b) Les coordonnées des points d'intersection de Δ et (H) sont les solutions du système : $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x+2}, \\ y = \dfrac{2}{3}x + 2. \end{cases}$

On doit avoir $\dfrac{4}{x+2} = \dfrac{2}{3}x + 2$.

Multiplions chaque membre de cette équation par $x + 2$. On obtient :

$4 = \left(\dfrac{2}{3}x + 2\right)(x + 2)$,

$4 = \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 2x + 4$,

D'après la figure 17 :
— si $k > 4$, il n'y a pas de solution ;
— si $k = 4$, il y a une solution $(x = 1)$;
— si $k < 4$, il y a deux solutions.

6 1° On a $M(x, y)$ et $F(0, 2)$.

D'où $\overrightarrow{MF}(-x, 2-y)$ et $MF = \|\overrightarrow{MF}\| = \sqrt{(-x)^2 + (2-y)^2}$,

c'est-à-dire $MF = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}$.

Le point H étant la projection orthogonale du point $M(x, y)$ sur l'axe des abscisses, on a $H(x, 0)$.

D'où $\overrightarrow{MH}(0, -y)$ et $MH = \|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{0^2 + (-y)^2} = \sqrt{y^2} = |y|$.

2° La condition $MF = MH$ équivaut à $MF^2 = MH^2$ (car MF et MH sont des réels positifs).

On obtient
$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2,$$
$$x^2 - 4y + 4 = 0,$$
$$4y = x^2 + 4,$$
$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1.$$

3°

Pour étudier le sens de variation de f, on peut utiliser le fait que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

— Si $0 \leqslant x \leqslant x'$, alors $x^2 \leqslant x'^2$, $\frac{1}{4}x^2 \leqslant \frac{1}{4}x'^2$

et $\frac{1}{4}x^2 + 1 \leqslant \frac{1}{4}x'^2 + 1$.

Donc f est croissante sur $[0, +\infty[$.

— Si $x \leqslant x' \leqslant 0$, alors $x^2 \geqslant x'^2$, $\frac{1}{4}x^2 \geqslant \frac{1}{4}x'^2$

et $\frac{1}{4}x^2 + 1 \geqslant \frac{1}{4}x'^2 + 1$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty, 0]$.

4° La courbe $\mathscr{P}$ est représentée à la figure 23.

On peut utiliser les valeurs suivantes :

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$g(x)$	5	2	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	2	5

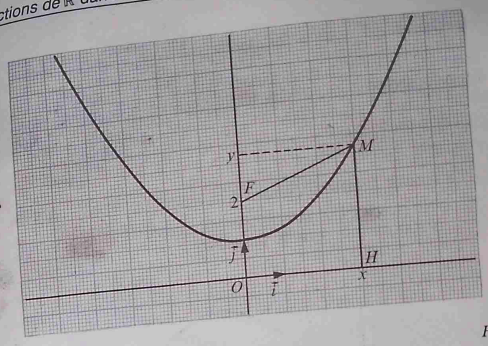


Fig. 23

Remarque : on dit que F est le foyer et que l'axe des abscisses est la directrice de la parabole $\mathscr{P}$.

7 1° Le triangle PNB est rectangle et isocèle.
En effet $\widehat{P} = 90°$ et $\widehat{B} = 45°$ par hypothèse, donc $\widehat{N} = 45°$.
On en déduit que $PB = PN = OM = x$ (fig. 18, p. 100).

Or $OP = OB - PB = 10 - x$.

Le périmètre du rectangle $OMNP$ est donc égal à
$2(OM + OP) = 2(x + (10 - x)) = 20$ (cm).

Ce périmètre est bien indépendant de x.

2° On a $S(x) = OM \times OP = x(10 - x)$, d'après le 1°.

3° On peut par exemple développer :
$$\begin{aligned} 25 - (x-5)^2 &= 25 - (x^2 - 10x + 25) \\ &= 25 - x^2 + 10x - 25 \\ &= -x^2 + 10x \\ &= x(-x + 10) \\ &= S(x), \text{ pour tout } x \in [0, 10]. \end{aligned}$$

4°

Un carré est toujours positif.

Pour tout réel x, on a $25 - (x-5)^2 \leqslant 25$, car $(x-5)^2 \geqslant 0$.
$S(x)$ ne peut donc pas dépasser 25.
Or $S(5) = 25 - (5-5)^2 = 25$.
Donc la surface $S(x)$ est maximum pour $x = 5$ (cm) et ce maximum est 25 (cm^2).

5° *a)* Soit T un point de coordonnées (x, y) dans $(Q, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(R, \vec{i}, \vec{j})$.

D'où $-\frac{1}{2}x^2 = -2x$,

$x^2 = 4x$, (on a multiplié chaque membre par -2)

$x^2 - 4x = 0$,

$x(x-4) = 0$,

$x = 0$ ou $x = 4$.

Si $x = 0$, $y = 0$ et si $x = 4$, $y = -8$.

Δ et $\mathcal{C}$ sont sécantes en $O(0, 0)$ et $A(4, -8)$ (fig. 21).

4 1°

On utilise l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Pour tout réel x, on a

$(x-2)^2 - 5 = x^2 - 4x + 4 - 5 = x^2 - 4x - 1 = f(x)$.

2° On utilise les formules de changement d'origine (voir p. 96).

Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

De $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}$, on obtient $\begin{cases} x = 2 + X \\ y = -5 + Y. \end{cases}$

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (C) a pour équation $y = (x-2)^2 - 5$.

En remplaçant x et y par leurs valeurs, on trouve l'équation de (C) dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$:

$-5 + Y = (2 + X - 2)^2 - 5$,

$Y = X^2$.

3° (C) est représentée à la figure 22.

Il suffit de construire la parabole d'équation $Y = X^2$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

4° Les abscisses des points d'intersection de (C) avec $x'Ox$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Il faut prendre l'expression de $f(x)$ du 1° et utiliser l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pour factoriser.

On obtient

$(x-2)^2 - 5 = 0$,

$(x-2)^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$,

$(x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5}) = 0$,

soit $x - 2 - \sqrt{5} = 0$ ou $x - 2 + \sqrt{5} = 0$,

soit $x = 2 + \sqrt{5}$ ou $x = 2 - \sqrt{5}$.

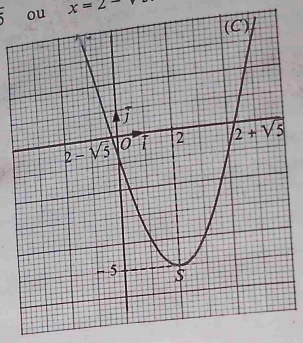


Fig. 22

Remarque :

$2 + \sqrt{5} \approx 4{,}2$ et $2 - \sqrt{5} \simeq -0{,}2$,

ce qui correspond à la figure 22.

5 1° *a*) Les solutions de l'équation $-x^2 + 2x + 3 = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

D'après la figure 17, il y a donc deux solutions :

$x = -1$ et $x = 3$.

b) Les solutions de l'équation $-x^2 + 2x + 3 = -5$ sont les abscisses des points d'intersection de (C) avec la droite (horizontale) d'équation $y = -5$.

D'après la figure 17, il y a donc deux solutions :

$x = -2$ et $x = 4$.

c) Les solutions de l'inéquation $-x^2 + 2x + 3 > 3$ sont les abscisses x des points de (C) telles que $f(x) > 3$.

D'après la figure 17, l'ensemble des solutions est l'intervalle $]0, 2[$.

d) Les solutions de $0 \leqslant -x^2 + 2x + 3 \leqslant 3$ sont les abscisses x des points de (C) telles que $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

D'après la figure 17, l'ensemble des solutions est $[-1, 0] \cup [2, 3]$.

2° Les solutions de l'équation $-x^2 + 2x + 3 = k$ sont les abscisses des points d'intersection de (C) avec la droite (horizontale) d'équation $y = k$.

Si $x = 0$, $y = 0$ et si $x = 1$, $y = 1$.
On obtient deux points d'intersection : l'origine $O(0, 0)$ et le point $A(1, 1)$.

2° $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont représentées à la figure 20.

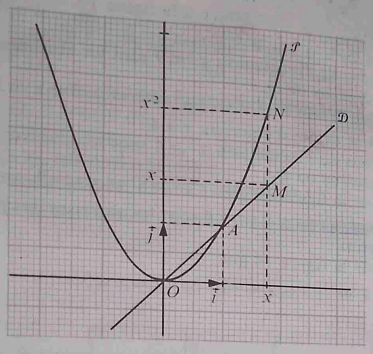


Fig. 20

3° Soit x un réel.
Notons M et N respectivement les points de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ d'abscisse x.
Alors $x \leqslant x^2$ équivaut à M est en dessous de N.
D'après la figure 20, l'inéquation $x \leqslant x^2$ équivaut à $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 0$.

4° Cette question est traitée à l'exercice 13, p. 32 (corrigé p. 45).

3

1°

Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$.
Si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \geqslant b^2$.

Ces résultats correspondent au fait que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

• **Sur $]-\infty, 0]$:**

Supposons $x \leqslant x' \leqslant 0$.

Alors $x^2 \geqslant x'^2$,

$-\frac{1}{2}x^2 \leqslant -\frac{1}{2}x'^2$, $\left(\text{car } -\frac{1}{2} < 0\right)$

$f(x) \leqslant f(x')$.

Ceci établit que f est croissante sur $]-\infty, 0]$.

• **Sur $[0, +\infty[$:**

Supposons $0 \leqslant x \leqslant x'$.

Alors $x^2 \leqslant x'^2$,

$-\frac{1}{2}x^2 \geqslant -\frac{1}{2}x'^2$,

$f(x) \geqslant f(x')$.

Ceci établit que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

2° La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$ est une parabole, pour tout réel a non nul.
$\mathcal{C}$ est représentée à la figure 21.

3° *a*) Δ a une équation de la forme $y = -2x + b$.
Comme $O \in \Delta$, ses coordonnées $(0, 0)$ vérifient l'équation de Δ.
On obtient $0 = -2 \times 0 + b$, soit $b = 0$.
Par conséquent, Δ a pour équation $y = -2x$.

b) Δ est représentée à la figure 21.

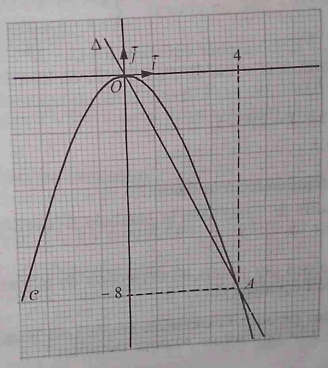


Fig. 21

c) Les coordonnées des points d'intersection de Δ et $\mathcal{C}$ sont les solutions du système : $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2, \\ y = -2x. \end{cases}$

11 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\|$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie par :
$f(x) = (1 + x)^3 - 2$.

1° On pose $I(-1, -2)$.
Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Représenter $\mathcal{C}$.

3° On veut calculer une valeur approchée de l'abscisse α du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec $x'Ox$.
A l'aide d'une calculatrice :

a) Calculer $f(0{,}2)$, $f(0{,}4)$, $f(0{,}3)$.
En déduire un encadrement de α d'amplitude 0,1.

b) Continuer le processus pour donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

CORRIGÉS

1 1° La courbe $\mathcal{C}$ est représentée à la figure 19.

2° *a*) Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $y = 9$.
Les solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 9$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au-dessous de $\mathcal{D}_1$.
On voit sur la figure 19 que $x^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$.

b) Soit $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $y = 4$.
Les solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 4$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au-dessus de $\mathcal{D}_2$.
On voit sur la figure 19 que $x^2 \geqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$.

c) Les solutions de $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
On voit sur la figure 19 que
$4 \leqslant x^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant -2$ ou $2 \leqslant x \leqslant 3$.

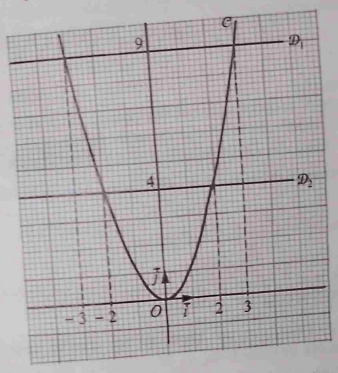


Fig. 19

3° Cette question est traitée à l'exercice 12, p. 31 (corrigé p. 44).

2 1° Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ sont les solutions du système : $\begin{cases} y = x \\ y = x^2. \end{cases}$

D'où $x^2 = x$,
$x^2 - x = 0$,
$x(x - 1) = 0$,
$x = 0$ ou $x = 1$.

2° Démontrer que la condition $MF = MH$ équivaut à : $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

3° On note f la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 1$.

Étudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.

4° Représenter $\mathscr{F}$.

7 Sur la figure 18, le triangle OAB est rectangle isocèle, de côté 10 cm. $OMNP$ est un rectangle ; on pose $OM = x$ (cm), avec $0 \leqslant x \leqslant 10$.

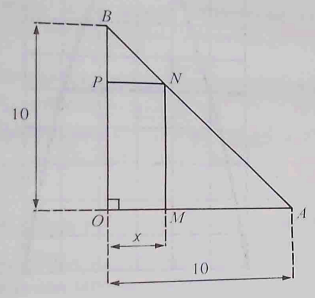


Fig. 18

1° Montrer que le périmètre du rectangle $OMNP$ est indépendant de x.

2° Soit $S(x)$ la surface, en centimètres carrés, du rectangle $OMNP$. Calculer $S(x)$ en fonction de x.

3° Vérifier que, pour tout $x \in [0, 10]$, $S(x) = 25 - (x - 5)^2$.

4° En déduire que la surface $S(x)$ est maximum pour $x = 5$.

5° On considère un repère orthogonal $(Q, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 5\|\vec{j}\|$. Dans ce repère, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto S(x)$ et soit $R(5 ; 25)$.

a) Déterminer une équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(R, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Représenter $\mathscr{C}$.

Exercices 8 et 9 : fonctions $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

8 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{x+2}$, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

On note (H) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° On considère le point $A(-2, 0)$.
Donner une équation de (H) dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Représenter (H).

3° Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Tracer Δ sur la même figure que (H).

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de Δ et (H).

9 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$.

1° Donner le domaine de définition D de f.

2° Calculer les images par f de tous les entiers du domaine D compris entre -15 et 5.

3° Construire point par point la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4° Soit $\Omega(-5, 1)$. Écrire l'équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

5° On veut justifier le tracé du 3°.

On considère la fonction $g : X \mapsto -\frac{8}{X}$, pour $X \in \mathbb{R}^*$.

a) Démontrer que g est impaire.

b) Démontrer que g est croissante sur $]0, +\infty[$.

c) Conclure.

Exercices 10 et 11 : autres fonctions

10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1° Préciser le domaine de définition D de f. Vérifier que f est paire.

2° Quel est le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$?

3° Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICES

Exercices 1 à 7 : polynômes du second degré

1 1° Tracer la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $x^2 \leqslant 9$.

b) $x^2 \geqslant 4$.

c) $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

3° Retrouver les résultats du 2° par le calcul.

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$ et $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

1° Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$.

2° Représenter $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$.

3° Résoudre graphiquement l'inéquation $x \leqslant x^2$.

4° Retrouver les résultats du 3° par le calcul.

3 Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, pour tout réel x.

1° Étudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$ et faire son tableau de variation.

2° Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Soit Δ la droite passant par l'origine O du repère et de coefficient directeur -2.

a) Déterminer une équation de Δ.

b) Représenter Δ dans le même repère que $\mathscr{C}$.

c) Δ coupe $\mathscr{C}$ en O et en un autre point A. Calculer les coordonnées de A.

4 Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

1° Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = (x-2)^2 - 5$.

2° Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit (C) la courbe représentative de f et $S(2; -5)$. Déterminer une équation de (C) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Représenter (C).

4° Calculer les abscisses des points d'intersection de (C) avec $x'Ox$, axe des abscisses du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5 La courbe représentative (C) de la fonction : $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$ est dessinée à la figure 17.

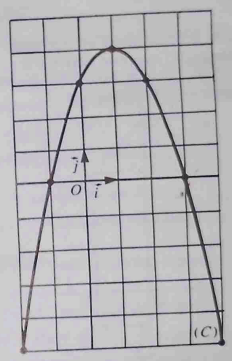


Fig. 17

1° Utiliser cette figure pour résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

a) $-x^2 + 2x + 3 = 0$; *b*) $-x^2 + 2x + 3 = -5$;

c) $-x^2 + 2x + 3 > 3$; *d*) $0 \leqslant -x^2 + 2x + 3 \leqslant 3$.

2° Soit k un réel. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $-x^2 + 2x + 3 = k$.

6 Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $F(0, 2)$.
Soit M un point du plan. On note H sa projection orthogonale sur l'axe des abscisses.
On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points $M(x, y)$ du plan tels que $MF = MH$.

1° Calculer MF et MH en fonction de x et y.

2° Équation $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$.
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation $y = k$.

Exemple :
Pour la valeur de k représentée à la figure 14, l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions x_1 et x_2.

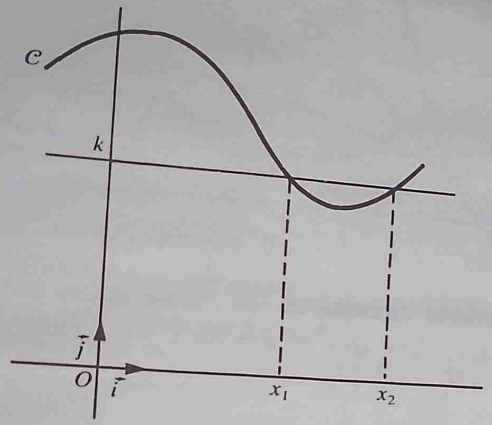


Fig. 14

3° Changement d'origine

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère et O' le point de coordonnées (a, b) dans ce repère.
Soit M un point de coordonnées respectives (x, y) et (X, Y) dans les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

D'où $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y. \end{cases}$ (formules de changement d'origine).

4° Maximum, minimum

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et soit $x_0 \in]a, b[$.

• f présente un maximum en x_0 si, et seulement si,
pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (fig. 15).

• f présente un minimum en x_0 si, et seulement si,
pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ fig. 16).

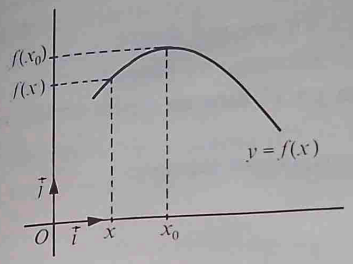


Fig. 15

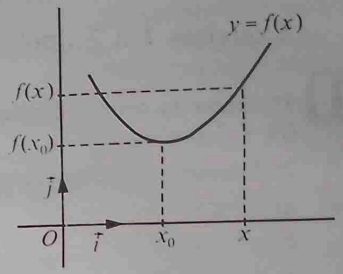


Fig. 16

Sa courbe représentative est tracée à la figure 10.

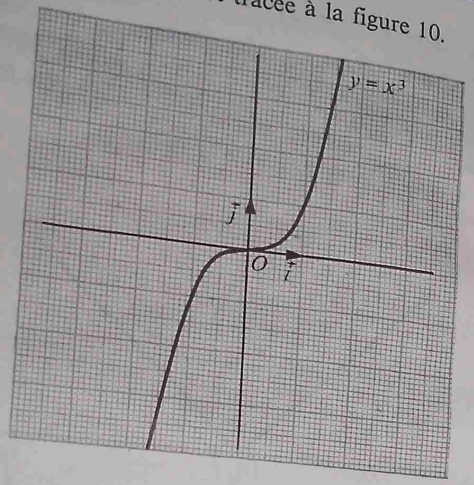


Fig. 10

5° Fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est impaire.
La fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Sa courbe représentative est tracée à la figure 11.

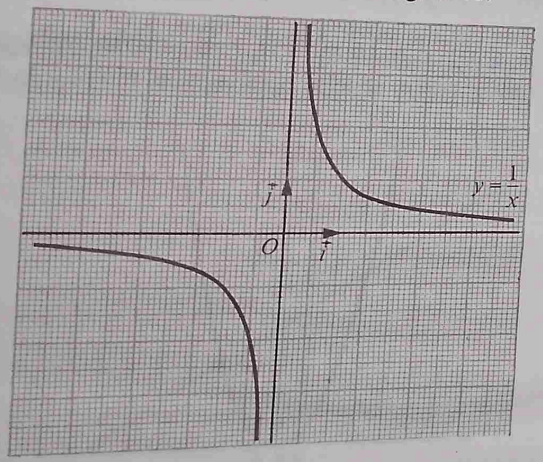


Fig. 11

6° Fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$.
Elle est croissante sur cet intervalle.
Sa courbe représentative (C) est tracée à la figure 12.

Remarque : soit (C') la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$. Si le repère est orthonormé, les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (fig. 12).

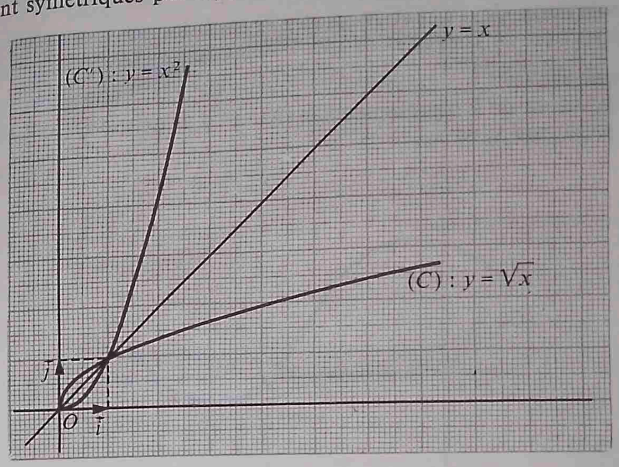


Fig. 12

7° Fonctions circulaires

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont étudiées au chapitre 9, p. 191 et 192.

V — QUELQUES PROBLÈMES

1° Intersection de deux courbes

Soient C_f et C_g les courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$. Les points d'intersection de C_f et C_g ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ (fig. 13).

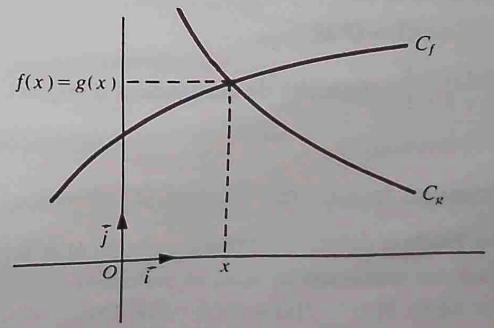


Fig. 13

VICTOR AUGAGNEUR
Pointe-Noire

2° Fonction impaire

f est impaire si et seulement si pour tout x élément de D, $-x$ est aussi élément de D et $f(-x) = -f(x)$.
La courbe (C) est symétrique par rapport à l'origine O du repère (fig. 6).

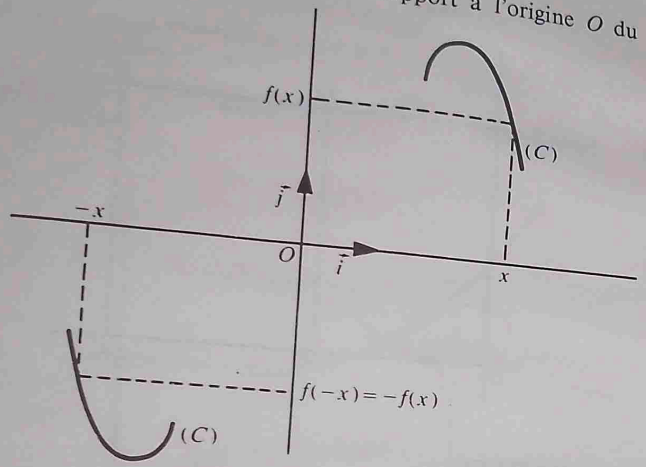


Fig. 6

IV — EXEMPLES DE FONCTIONS

1° Fonction affine $x \mapsto f(x) = ax + b$

La représentation graphique de f est une droite $\mathcal{D}$ (fig. 7).

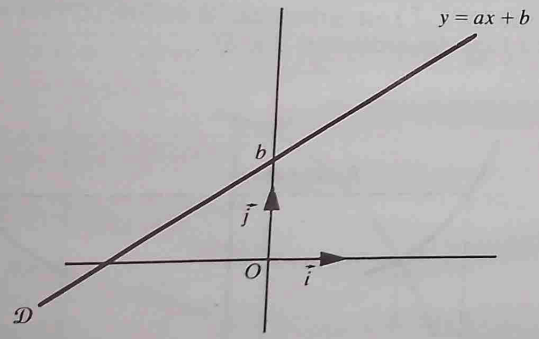


Fig. 7

Le réel a s'appelle le **coefficient directeur** de $\mathcal{D}$; le réel b est l'**ordonnée à l'origine** (voir p. 26 et 27).
Si $a > 0$, alors f est strictement croissante.
Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante.
Si $a = 0$, alors f est constante.

2° Fonction $x \mapsto f(x) = |x|$

Si $x \geqslant 0$, $f(x) = x$ et si $x \leqslant 0$, $f(x) = -x$.
La fonction f coïncide avec une fonction affine sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. On dit que f est une **fonction affine par intervalles.**
Elle est représentée graphiquement à la figure 8.

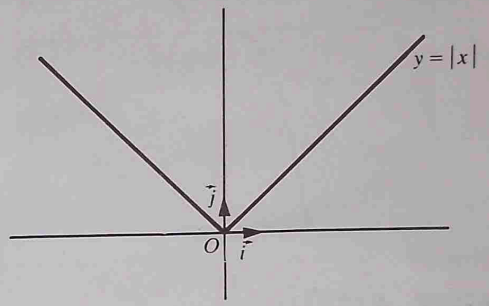


Fig. 8

Remarque : la fonction f est paire.

3° Fonction $x \mapsto f(x) = x^2$

La fonction f est définie sur ℝ. Elle est paire.
La fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
Sa courbe représentative, appelée parabole, est tracée à la figure 9.

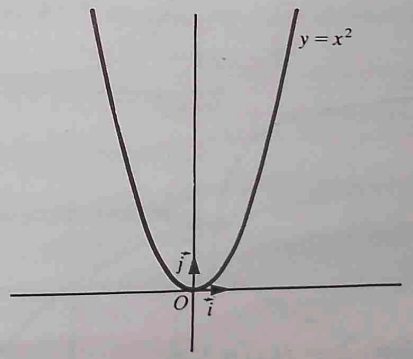


Fig. 9

4° Fonction $x \mapsto f(x) = x^3$

La fonction f est définie sur ℝ. Elle est impaire.
La fonction f est croissante sur ℝ.

II — SENS DE VARIATION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

• f est **strictement croissante** sur I si et seulement si, pour tous réels x et x' éléments de I, on a :

$$\text{si } x < x', \text{ alors } f(x) < f(x').$$ (Voir fig. 2.)

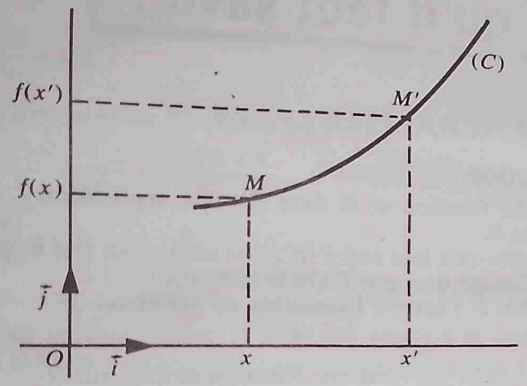


Fig. 2

• f est **strictement décroissante** sur I si et seulement si, pour tous réels x et x' éléments de I, on a :

$$\text{si } x < x', \text{ alors } f(x) > f(x').$$ (Voir fig. 3.)

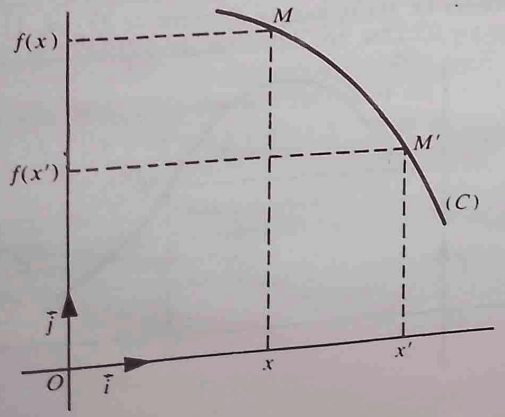


Fig. 3

• f est **constante** sur I si et seulement si, pour tous réels x et x' éléments de I, on a :

$$f(x) = f(x').$$ (Voir fig. 4.)

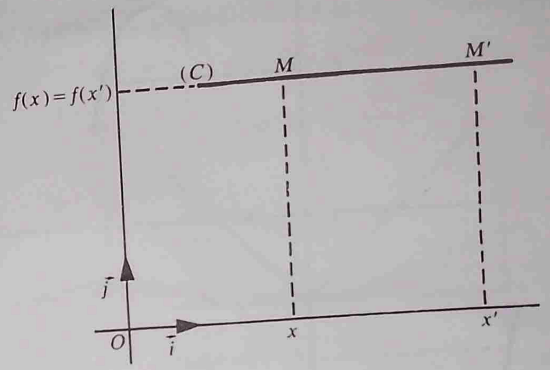


Fig. 4

III — PARITÉ

Soit f une fonction définie sur D.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Fonction paire

f est paire si et seulement si, pour tout x élément de D, $-x$ est aussi élément de D et $f(-x) = f(x)$.
Si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal, la courbe (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (fig. 5).

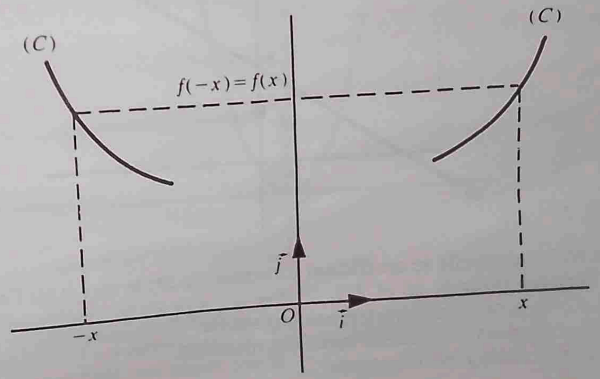


Fig. 5

Le pourcentage d'augmentation de cette production, de 1978 à 1988, vaut environ :

$\frac{260 - 29}{29} \times 100 \approx 796.$

Autrement dit, la production d'électricité d'origine nucléaire a augmenté de 796 %, entre 1978 et 1988.

6 1° La marque moyenne de l'archer X est :

$\bar{x} = \frac{7 \times 0 + 12 \times 1 + 15 \times 2 + 16 \times 3}{50}$,

soit $\bar{x} = \frac{90}{50} = 1{,}8.$

La marque moyenne de l'archer Y est :

$\bar{y} = \frac{3 \times 0 + 13 \times 1 + 25 \times 2 + 9 \times 3}{50}$,

soit $\bar{y} = \frac{90}{50} = 1{,}8.$

On remarque que $\bar{x} = \bar{y}$.

2° Le tableau suivant donne la série des écarts à la moyenne, pour chacun des archers :

Zone	0	1	2	3
Écart à la moyenne	1,8	0,8	0,2	1,2
Effectif pour X	7	12	15	16
Effectif pour Y	3	13	25	9

L'écart moyen de la série des marques de X est donc :

$e_x = \frac{7 \times 1{,}8 + 12 \times 0{,}8 + 15 \times 0{,}2 + 16 \times 1{,}2}{50} = \frac{44{,}4}{50} = 0{,}888.$

Et l'écart moyen de la série des marques de Y est :

$e_y = \frac{3 \times 1{,}8 + 13 \times 0{,}8 + 25 \times 0{,}2 + 9 \times 1{,}2}{50} = \frac{31{,}6}{50} = 0{,}632.$

L'archer correspondant à l'écart moyen le plus faible, c'est-à-dire Y, sera certainement préféré à l'archer X.

5 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Ce qu'il faut savoir

I — GÉNÉRALITÉS

1° Fonction

On appelle fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ toute application f d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Cela signifie qu'à tout réel x de D est associé un réel et un seul que l'on appelle l'image de x par f. On le note $f(x)$.
L'ensemble D s'appelle l'**ensemble de définition** de f.

Exemples :

$f : x \mapsto x^2 + 2x - 5$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$;

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$;

$f : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$.

2° Représentation graphique

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit f une fonction définie sur D. La représentation graphique de f est l'ensemble (C) des points M de coordonnées $(x, f(x))$, avec x élément de D (fig. 1).
On dit que $y = f(x)$ est une équation de (C).

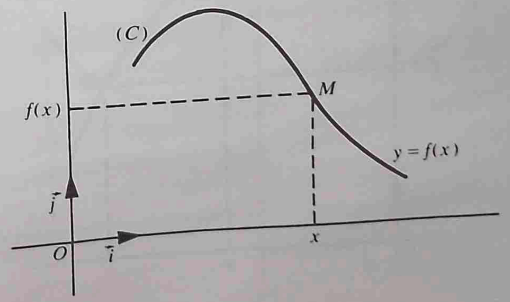


Fig. 1

AUGAGNEUR
Pointe – Noire
DEPARTEMENT DES SCIENC

4 1° En 1978, le pourcentage des bacheliers de la série A est :
$\frac{39\,902}{155\,413} \times 100 \approx 25{,}7$.

En procédant de même pour chacune des deux années et chacune des séries, on obtient le tableau suivant :

Série	A	B	C	D + D′	E
1978 (Pourcentage)	25,7	18,2	20,7	31,8	3,6
1988 (Pourcentage)	26,6	25,5	20,1	24,8	3

2° L'angle du secteur circulaire représentant les bacheliers de la série A a pour mesure en degrés :

$\frac{54\,846}{205\,997} \times 360 \approx \frac{26{,}6}{100} \times 360 \approx 96$.

On sait que c'est le produit de 360 par la fréquence correspondante. En procédant de même pour chacune des séries, on obtient le tableau suivant :

Série	A	B	C	D + D′	E
Angle	96°	92°	72°	89°	11°

Il permet de tracer le diagramme de la figure 8.

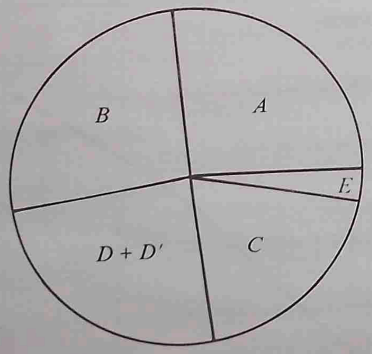


Fig. 8

3° L'effectif des bacheliers de la série C a augmenté de :
41 452 – 32 101 = 9 351.

Le pourcentage des bacheliers de cette série est passé de 20,7 à 20,1. Pour expliquer cette diminution, il faut considérer :

a) le pourcentage d'augmentation, par rapport à l'effectif de 1978 des bacheliers de la série C, qui est :

$\frac{9\,351}{32\,101} \times 100 \approx 29$;

b) le pourcentage d'augmentation, par rapport à l'effectif de 1978 du nombre total des bacheliers, qui est :

$\frac{205\,997 - 155\,413}{155\,413} \times 100 \approx 33$.

C'est parce que 29 est inférieur à 33 que la part relative des bacheliers de la série C a diminué.

5 1° L'angle du secteur semi-circulaire représentant la part de l'électricité d'origine thermique, en 1978, a pour mesure en degrés :

$\frac{55{,}1}{100} \times 180 \approx 99$.

En procédant de même pour les différentes origines de l'électricité, en 1978 et en 1988, on obtient le tableau suivant :

	Thermique	Hydraulique	Nucléaire
1978	99°	57°	24°
1988	17°	37°	126°

Il permet de tracer les diagrammes de la figure 9.

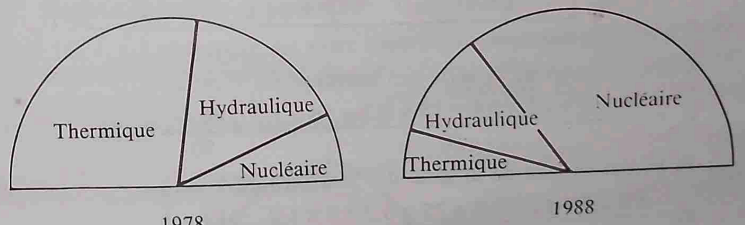


Fig. 9

2° En 1978, la production d'électricité d'origine nucléaire est de :
$\frac{13{,}4}{100} \times 217{,}2$, soit environ 29 milliards de kWh.

En 1988, elle est alors de : $\frac{69{,}9}{100} \times 372{,}4$, soit environ 260 milliards de kWh.

On obtient la série :

Centre de l'intervalle des longueurs	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5
Effectif	3	15	24	9	6	3

La moyenne arithmétique des longueurs est :

$$\bar{x} = \frac{3 \times 7{,}5 + 15 \times 8{,}5 + 24 \times 9{,}5 + 9 \times 10{,}5 + 6 \times 11{,}5 + 3 \times 12{,}5}{60},$$

soit $\bar{x} = \frac{579}{60} = 9{,}65$.

Remarque : on peut aussi calculer la moyenne à l'aide des fréquences demandées au 3° :

$\bar{x} = 0{,}05 \times 7{,}5 + 0{,}25 \times 8{,}5 + \ldots + 0{,}05 \times 12{,}5$,

et on retrouve $\bar{x} = 9{,}65$.

5° Pour calculer la moyenne des carrés, on considère le tableau :

Centre x_i de l'intervalle	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5
x_i^2	56,25	72,25	90,25	110,25	132,25	156,25
Fréquence	0,05	0,25	0,4	0,15	0,1	0,05

La moyenne des carrés est donc :

$0{,}05 \times 56{,}25 + 0{,}25 \times 72{,}25 + \ldots + 0{,}05 \times 156{,}25 = 94{,}55$.

Par suite, la variance est :

$V = 94{,}55 - (9{,}65)^2 = 1{,}427\,5$.

L'écart-type est alors :

$\sigma = \sqrt{1{,}427\,5} \approx 1{,}19$.

3 1°

La fréquence s'obtient en divisant le pourcentage par 100.

Le tableau suivant donne le pourcentage des habitants dont l'âge est strictement inférieur à chacune des bornes des classes, et la fréquence cumulée correspondante :

Age inférieur à	Pourcentage (cumulé)	Fréquence (cumulée)
15	20,5	0,205
30	20,5 + 23 = 43,5	0,435
40	43,5 + 15,4 = 58,9	0,589
50	58,9 + 11,5 = 70,4	0,704
60	70,4 + 10,9 = 81,3	0,813
70	81,3 + 9,3 = 90,6	0,906

Il permet de tracer le polygone des fréquences cumulées jusqu'à l'avant-dernière classe seulement, car l'amplitude de la dernière classe n'est pas connue (fig. 7).

2° On utilise la figure 7.

a) La médiane est l'abscisse du point d'ordonnée 0,5 ; elle est voisine de 34.

b) Les trois valeurs qui séparent la population en quatre groupes de même effectif sont les abscisses des points d'ordonnées 0,25 ; 0,5 et 0,75.

La première valeur est voisine de 18 ; pour la deuxième, on retrouve la médiane et la troisième est voisine de 54.

Il y a donc environ 25 % des habitants qui ont moins de 18 ans, 50 % qui ont moins de 34 ans et 75 % moins de 54 ans.

Les trois valeurs demandées sont appelées **quartiles.**

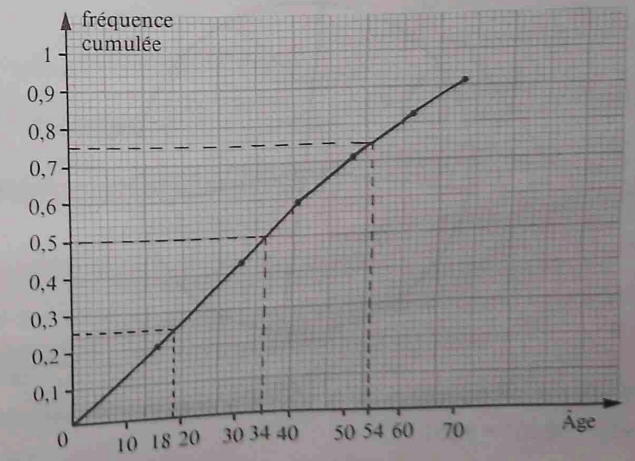


Fig. 7

CORRIGÉS

1 Après regroupement des résultats, la série de notes se présente sous la forme suivante :

Note	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectif	1	1	1	2	1	4	2	5	2	3	1	1	1

1° On obtient le diagramme en bâtons de la figure 5.

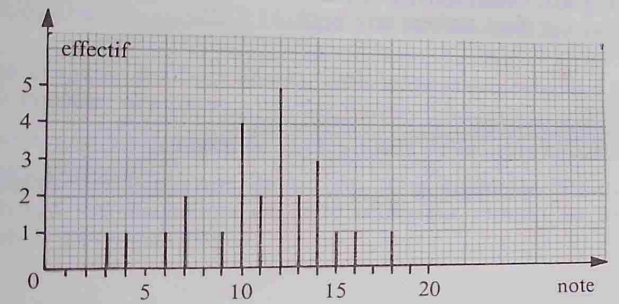


Fig. 5

2° La moyenne arithmétique est le réel :

$$\overline{x} = \frac{1 \times 3 + 1 \times 4 + \ldots + 1 \times 18}{25},$$

$$\overline{x} = \frac{275}{25} = 11.$$

3° Pour calculer la moyenne des carrés, on considère le tableau :

Note x_i	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18
x_i^2	9	16	36	49	81	100	121	144	169	196	225	256	324
Effectif	1	1	1	2	1	4	2	5	2	3	1	1	1

La moyenne des carrés est donc :

$$\frac{1 \times 9 + 1 \times 16 + \ldots + 1 \times 324}{25} = \frac{3\,333}{25} = 133{,}32.$$

Par suite, la variance est : $V = 133{,}32 - 11^2 = 12{,}32.$

L'écart-type est alors : $\sigma = \sqrt{12{,}32} \approx 3{,}51.$

4° Les élèves dont la note est située dans l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma]$, c'est-à-dire dans $[4\,;\,18]$ puisqu'il s'agit de valeurs entières, sont au nombre de 24.

Le pourcentage correspondant est : $\frac{24}{25} \times 100 = 96.$

Il y a donc 96 % des élèves dont la note est dans l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma\,;\,\overline{x} + 2\sigma]$.

2 1° La classe modale de cette série est l'intervalle $[9\,;\,10[$, car il correspond à l'effectif le plus élevé (qui est 24).

2° La figure 6 donne l'histogramme qui représente cette série.

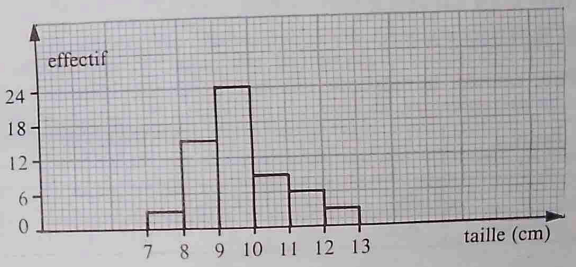


Fig. 6

3° Il y a au total 60 épis de blé.
La fréquence de chaque classe est donnée dans le tableau suivant :

Classe	[7 ; 8[	[8 ; 9[	[9 ; 10[	[10 ; 11[	[11 ; 12[	[12 ; 13[
Fréquence	$\frac{3}{60} = 0{,}05$	0,25	0,4	0,15	0,1	0,05

4°

Pour calculer la moyenne arithmétique, on fait comme si les longueurs, dans chacun des intervalles, étaient toutes situées au centre de cet intervalle.

DEPARTEMENT DES SCIENCES PHYS... Unité "Travail" Pro...

2° Déterminer graphiquement :

a) la médiane ;

b) les trois valeurs qui séparent la population française en quatre groupes de même effectif.

4 Le tableau suivant donne le nombre d'admissions au Baccalauréat d'enseignement général, en France, en 1978 et 1988 :

Série	1978	1988
A — Philosophie et lettres	39 902	54 846
B — Économie et science sociale	28 317	52 583
C — Mathématiques et sciences physiques	32 101	41 452
D + D′ — Mathématiques et sciences de la nature ou agronomiques	49 430	50 974
E — Sciences et techniques	5 663	6 142
TOTAL	155 413	205 997

1° Pour chacune des deux années, calculer le pourcentage des bacheliers de chacune des séries.

2° Représenter les données de 1988 à l'aide de secteurs circulaires.

3° L'effectif des bacheliers de la série C a augmenté. Pourtant le pourcentage des bacheliers de cette série (par rapport au total) a diminué. Expliquer pourquoi.

5 Le tableau suivant donne le pourcentage des différentes origines de l'électricité, en France, en 1978 et en 1988 :

	Thermique %	Hydraulique %	Nucléaire %	Production totale (milliards kWh)
1978	55,1	31,5	13,4	217,2
1988	9,3	20,8	69,9	372,4

1° Représenter, par des secteurs semi-circulaires, la part des différentes origines de l'électricité :

a) en 1978 ;

b) en 1988.

2° Calculer, pour chacune des deux années, la production (en milliards de kWh) d'électricité d'origine nucléaire.
En déduire le pourcentage d'augmentation de cette production, de 1978 à 1988.

6 Dans un club de tir à l'arc, deux archers sont en concurrence pour une place de titulaire dans l'équipe du club.
On teste les archers en leur faisant effectuer 50 tirs sur une cible comportant quatre zones permettant de marquer : 3 points, 2 points, 1 point, 0 point. Le test donne les résultats suivants :

Zone	0	1	2	3
Nombre de fois où la zone est atteinte par l'archer X	7	12	15	16
Nombre de fois où la zone est atteinte par l'archer Y	3	13	25	9

1° Calculer la marque moyenne d'un tir pour chacun des archers X et Y.

2° Calculer l'écart moyen de chacune des séries de marques de X et Y.
Lequel des deux archers sera préféré ?

An... 2016 - 2...

Avec les notations du III-3°, la variance est donc le réel :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}.$$

Remarque : on a aussi

$V = f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_p(x_p - \bar{x})^2$.

• Pour le calcul pratique, on utilise le théorème suivant :
La variance est la différence entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne.

Donc $$V = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_p x_p^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p} - \bar{x}^2.$$

Remarque :
On a aussi $V = (f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + \ldots + f_p x_p^2) - \bar{x}^2$.

• **L'écart-type** est la racine carrée de la variance. On le note σ. D'où :

$$\sigma = \sqrt{V}.$$

Remarque : certaines calculatrices donnent directement la moyenne arithmétique et l'écart-type lorsqu'on a introduit successivement toutes les valeurs de la série (touches $\bar{x}$ et σ).

Exemple 1 : (p. 73)
On calcule la moyenne des carrés en considérant le tableau suivant :

Nombre x_i de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36
Effectif	23	36	17	14	4	4	2

La moyenne des carrés est donc :

$$\frac{23 \times 0 + 36 \times 1 + \ldots + 2 \times 36}{100} = \frac{466}{100} = 4{,}66.$$

Par suite, la variance est : $V = 4{,}66 - (1{,}6)^2 = 2{,}1$.

L'écart-type est alors : $\sigma = \sqrt{2{,}1} \simeq 1{,}4$.

Exemple 2 : (p. 74)
On procède de même, en prenant pour x_i le centre de l'intervalle considéré.

EXERCICES

1 Dans une classe de 25 élèves, les notes obtenues à un devoir sont :
14; 15; 4; 7; 11; 14; 9; 10; 12; 12; 16; 10; 18; 13; 12; 3; 11; 14; 12; 10; 13; 6; 12; 10; 7.

1° Représenter cette série par un diagramme en bâtons.
2° Calculer sa moyenne arithmétique $\bar{x}$.
3° Calculer sa variance, puis son écart-type σ.
4° Montrer que le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note située dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$ est supérieur à 95.

2 Des épis de blé ont été mesurés, au centimètre près, puis classés de la façon suivante :

Longueur L (en cm)	Nombre d'épis
$7 \leqslant L \leqslant 8$	3
$8 \leqslant L < 9$	15
$9 \leqslant L < 10$	24
$10 \leqslant L < 11$	9
$11 \leqslant L < 12$	6
$12 \leqslant L < 13$	3

1° Donner la classe modale.
2° Tracer l'histogramme qui représente cette série.
3° Déterminer la fréquence de chaque classe.
4° Calculer la moyenne arithmétique des longueurs, notée $\bar{x}$.
5° Calculer la variance, puis l'écart-type σ.

3 Dans l'ensemble des habitants de la France, au 1er janvier 1988 :
20,5 % ont moins de 15 ans ;
23 % ont de 15 à moins de 30 ans ;
15,4 % ont de 30 à moins de 40 ans ;
11,5 % ont de 40 à moins de 50 ans ;
10,9 % ont de 50 à moins de 60 ans ;
9,3 % ont de 60 à moins de 70 ans ;
9,4 % ont au moins 70 ans.

1° Tracer le polygone des fréquences cumulées.

ICTOR AUGAGNEUR
Pointe – Noire
DEPARTEMENT DES SCIENCES

Exemple : reprenons l'exemple 2, p. 74
La moitié de l'effectif total est 30 et d'après la figure 4 la médiane vaut environ 56.

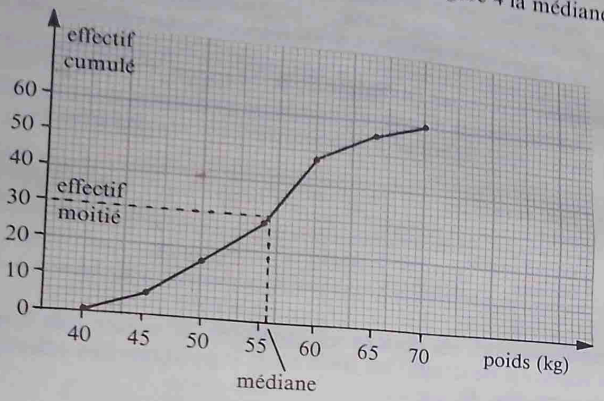


Fig. 4

3° Moyenne arithmétique

On considère un caractère quantitatif.
Toute classe correspond soit à une valeur du caractère, soit à un intervalle de valeurs.
On peut présenter les données sous la forme :

Valeur du caractère ou centre de l'intervalle	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

La **moyenne arithmétique** est alors le réel $\bar{x}$ défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_px_p}{n_1 + n_2 + ... + n_p}.$$

Remarque : si $f_1, f_2, ..., f_p$ sont les fréquences respectives des valeurs $x_1, x_2, ..., x_p$, on a :

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_px_p.$$

Exemple 1 :
On considère le tableau de la page 73.

On a $\bar{x} = \dfrac{23 \times 0 + 36 \times 1 + ... + 2 \times 6}{100}$,

soit $\bar{x} = \dfrac{160}{100} = 1{,}6.$

Exemple 2 : (p. 74)
On considère le tableau suivant :

Centre de l'intervalle	42,5	47,5	52,5	57,5	62,5	67,5
Effectif	6	10	12	19	9	4

On obtient alors $\bar{x} = \dfrac{6 \times 42{,}5 + 10 \times 47{,}5 + ... + 4 \times 67{,}5}{60}$,

soit $\bar{x} = \dfrac{3\,285}{60} = 54{,}75.$

IV — CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION

Dans ce paragraphe, on considère un caractère quantitatif.

1° Écart moyen

- L'écart (ou la distance) de deux réels a et b est égal à $|b - a|$.
- **L'écart moyen** d'une série est la moyenne des écarts à la moyenne.

Avec les notations du III-3°, l'écart moyen est donc le réel :

$$e = \frac{n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + ... + n_p|x_p - \bar{x}|}{n_1 + n_2 + ... + n_p}.$$

Remarque : on a aussi $e = f_1|x_1 - \bar{x}| + f_2|x_2 - \bar{x}| + ... + f_p|x_p - \bar{x}|$.

Exemple 1 : (p. 73)
On considère le tableau suivant :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6
Écart à la moyenne	1,6	0,6	0,4	1,4	2,4	3,4	4,4
Effectif	23	36	17	14	4	4	2

L'écart moyen est :

$$e = \frac{23 \times 1{,}6 + 36 \times 0{,}6 + ... + 2 \times 4{,}4}{100},$$

soit $e = \dfrac{116{,}8}{100} \approx 1{,}2.$

Exemple 2 : (p. 74)
On procède de même, en prenant pour x_i le centre de l'intervalle considéré.

2° Variance et écart-type

- La **variance** d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Pointe – Noire
DEPARTEMENT DES SCIENCES

2° Histogramme

On utilise ce procédé lorsque :
— le caractère est quantitatif,
— les classes correspondent à un intervalle de valeurs.

Chaque classe est représentée par un rectangle, dont la surface est proportionnelle à l'effectif.
Si les classes sont d'égale amplitude, la hauteur de chaque rectangle est donc proportionnelle à l'effectif.

Exemple 2

Au cours d'une visite médicale, on a pesé 60 personnes. Les résultats exprimés en kilogrammes sont donnés dans le tableau suivant.

Poids P	Nombre de personnes
$40 \leqslant P < 45$	6
$45 \leqslant P < 50$	10
$50 \leqslant P < 55$	12
$55 \leqslant P < 60$	19
$60 \leqslant P < 65$	9
$65 \leqslant P < 70$	4

Cette série est représentée par l'histogramme de la figure 2.

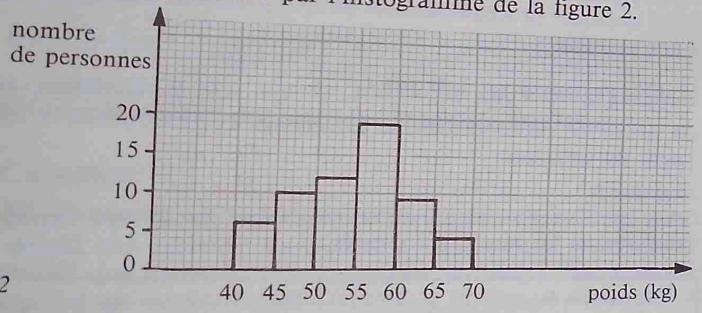


Fig. 2

3° Secteurs circulaires

Chaque classe est représentée par un secteur circulaire dont la surface est proportionnelle à l'effectif. Il en est donc de même de l'angle au centre.

Exemple 3

La figure 3 donne la répartition des voitures particulières françaises immatriculées en 1988.

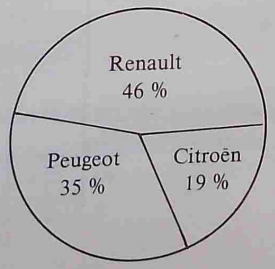


Fig. 3

4° Polygone des effectifs cumulés croissants

On utilise surtout ce procédé lorsque :
— le caractère est quantitatif,
— les classes correspondent à un intervalle de valeurs.

Exemple : reprenons l'exemple 2, p. 74

Le tableau suivant donne le nombre de personnes dont le poids (en kg) est strictement inférieur à chacune des bornes des classes :

Poids strictement inférieur à	40	45	50	55	60	65	70
Effectif cumulé croissant	0	6	16	28	47	56	60

Graphiquement, on obtient un ensemble de points que l'on relie par des segments de droite ; on trace ainsi le **polygone des effectifs cumulés croissants** (fig. 4).

Remarque : on peut tracer de même le polygone des fréquences cumulées croissantes.

III — CARACTÉRISTIQUES DE POSITION

1° Mode

Le **mode** est une valeur du caractère qui correspond à l'effectif le plus grand.
(Il peut y avoir plusieurs modes si cet effectif maximum est obtenu par plusieurs classes.)

Exemple 1 :
Dans la série « nombre de frères et sœurs », le mode est 1.

Exemple 2 :
Dans la série « poids », la classe modale est [55, 60[.

Exemple 3 :
Dans la série « marque de voitures françaises », le mode est Renault.

2° Médiane

On considère un caractère quantitatif.
Dans le cas où les classes correspondent à un intervalle de valeurs, la médiane est la valeur du caractère correspondant à un effectif cumulé égal à la moitié de l'effectif total.

4 Statistiques

Ce qu'il faut savoir

La statistique est une science d'observation qui, en classant des données, décrit des phénomènes au moyen d'un certain nombre de valeurs numériques.
Elle recherche des lois ou des modèles mathématiques qui correspondent aux faits étudiés et qui peuvent être utilisés à des fins de prévision.

I — LANGAGE STATISTIQUE

1° Population

Tout ensemble étudié par la statistique est une **population**; ses éléments sont appelés des **individus** (ou **unités statistiques**).

2° Caractère

Un critère retenu pour analyser une population s'appelle un **caractère.** S'il prend des valeurs numériques, on dit que le caractère est **quantitatif** (par exemple, le salaire d'une personne). Sinon, on dit que le caractère est **qualitatif** (par exemple, la profession d'une personne).

3° Classe

On répartit la population étudiée en un nombre fini de **classes,** pour lesquelles le caractère prend une même valeur ou un même ensemble de valeurs.
Il faut que les données soient suffisamment précises pour que tout individu appartienne à une classe et une seule.

4° Effectif, fréquence, pourcentage

- l'**effectif** n d'une classe est le nombre d'individus qu'elle contient.
- La **fréquence** f d'une classe est le rapport de son effectif n à l'effectif total N de la population étudiée :

$$f = \frac{n}{N}.$$

- **Le pourcentage** p d'une classe s'obtient en multipliant sa fréquence f par 100 :

$$p = \frac{n}{N} \times 100.$$

Remarque : comme la somme des effectifs des différentes classes est égale à N, la somme des fréquences est égale à 1 et la somme des pourcentages est égale à 100.

5° Effectif cumulé croissant

On considère un caractère quantitatif.
L'effectif cumulé croissant correspondant à une valeur x du caractère est le nombre d'individus dont la valeur du caractère est inférieure strictement à x.

II — REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

On considère un seul caractère d'une population.
A chaque individu est associée une valeur de ce caractère. La suite des valeurs obtenues forme une **série statistique à une variable.**
Voici quelques procédés utilisés pour représenter une série statistique à une variable.

1° Diagramme en bâtons

On utilise ce procédé lorsque les classes correspondent à une seule valeur du caractère.

Exemple 1
On a relevé le nombre de frères et sœurs d'un groupe de 100 élèves. On a obtenu les résultats suivants :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5	6
Nombres d'élèves	23	36	17	14	4	4	2

Cette série est représentée par le diagramme en bâtons de la figure 1.

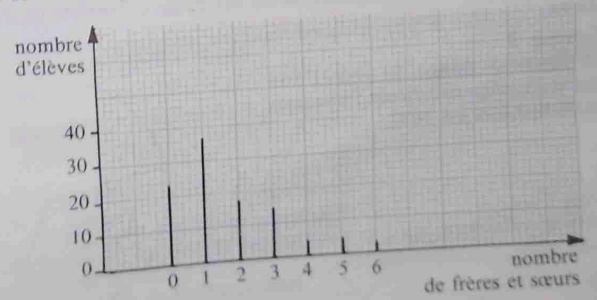


Fig. 1

ICTOR AUGAGNEUR
Pointe – Noire
ARTEMENT DES SCIENCES
République du Congo

L'équation (2), par exemple, donne alors $y = 25 - z = 25 - 13 = 12$.

On vérifie que $(x, y, z) = (8, 12, 13)$ est bien solution du système.

Les trois notes sont 8, 12 et 13.

12

Un point appartient à une courbe si, et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe.

$A(1, -1) \in \mathscr{T}$ équivaut à $-1 = a \times 1^2 + b \times 1 + c$,

c'est-à-dire à $-1 = a + b + c$.

De même, $B(2, -1) \in \mathscr{T} \Leftrightarrow -1 = 4a + 2b + c$

$C(3, 1) \in \mathscr{T} \Leftrightarrow 1 = 9a + 3b + c$

On obtient le système :

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 1. \end{cases}$$

Tirons, par exemple, c de la première équation et remplaçons-le par sa valeur dans les deux autres. On obtient :

$$\begin{cases} c = -1 - a - b \\ 4a + 2b + (-1 - a - b) = -1 \\ 9a + 3b + (-1 - a - b) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} c = -1 - a - b \quad (1) \\ 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 2 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3a + b = 0 \ (2) \\ 4a + b = 1 \ (3) \end{cases}$

Soustrayons membre à membre (2) de (3).

On obtient $a = 1$.

L'équation (2) donne alors $b = -3$.

L'équation (1) donne ensuite $c = -1 - 1 + 3 = 1$.

On vérifie que $(a, b, c) = (1, -3, 1)$ est bien solution du système.

La courbe $\mathscr{T}$ a pour équation $y = x^2 - 3x + 1$.

13

Lorsque deux cercles sont tangents extérieurement, la distance entre leurs centres est égale à la somme de leurs rayons.

Notons a, b, c les rayons respectifs, en centimètres des cercles de centres A, B, C.

Les cercles de la figure 5, p. 60 étant tangents extérieurement, on a

$AB = a + b$, $BC = b + c$ et $AC = a + c$.

D'où le système

$$\begin{cases} a + b = 13 \quad (1) \\ b + c = 11 \quad (2) \\ a + c = 16 \quad (3) \end{cases}$$

• **1re méthode :**

On tire b de la première équation, par exemple, et on le remplace par sa valeur dans les deux autres. On obtient :

$$\begin{cases} b = 13 - a \\ 13 - a + c = 11 \\ a + c = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 13 - a \quad (4) \\ -a + c = -2 \quad (5) \\ a + c = 16 \quad (6) \end{cases}$$

L'addition membre à membre de (5) et (6) donne $2c = 14$, d'où $c = 7$.

(6) donne alors $a = 16 - c = 16 - 7 = 9$.

(4) donne enfin $b = 13 - 9 = 4$.

On vérifie ensuite que $(a, b, c) = (9, 4, 7)$ est bien solution du système.

• **2e méthode :**

Additionnons membre à membre (1), (2) et (3).

On obtient : $2a + 2b + 2c = 40$,

Donc $a + b + c = 20$ (4)

En soustrayant membre à membre (1) de (4), puis (2) de (4) et (3) de (4), on obtient, respectivement :

$c = 7$, $a = 9$, $b = 4$.

On vérifie que $(a, b, c) = (9, 4, 7)$ est bien solution du système.

Conclusion :

Les cercles de centres A, B et C ont pour rayons respectifs 9 cm, 4 cm et 7 cm.

NGOKA
D. MACAIRE

b) L'abscisse de A_m est nulle, donc son ordonnée est :
$y = -\frac{3}{2} \times 0 + \frac{m}{160}$.

D'où $A_m\left(0, \frac{m}{160}\right)$.

c)

D'après *b*), l'ordonnée du point A_m est proportionnelle au bénéfice m. Trouver le maximum du bénéfice revient donc à chercher une droite Δ_m, passant par un point de $\mathcal{E}$ à coordonnées entières, et telle que l'ordonnée de A_m soit maximum. Compte tenu de la direction fixe de Δ_m, cette droite doit passer «le plus près possible» du point d'intersection I de D et D' (fig. 10).

Les coordonnées de I sont les solutions du système $\begin{cases} 3x + 4y = 200 \\ 2x + y = 75. \end{cases}$

Il équivaut successivement à :

$\begin{cases} y = 75 - 2x \\ 3x + 4(75 - 2x) = 200, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 75 - 2x \\ 3x + 300 - 8x = 200, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 75 - 2x \\ -5x = -100. \end{cases}$

D'où $x = 20$, $y = 35$.

Le bénéfice est maximum pour 20 sacs du premier modèle et 35 sacs du second.

Son montant est de $20 \times 240 + 35 \times 160 = 10\,400$ F.

Remarque : on a eu «la chance» que les coordonnées de I soient des entiers. Sinon, il aurait fallu chercher autour de I le point à coordonnées entières réalisant le meilleur bénéfice.

10 Tirons par exemple z de la première équation et remplaçons-le par sa valeur dans les deux autres équations. On obtient :

$$\begin{cases} z = 1 + 2x - 4y & (1) \\ x - 2y - 2(1 + 2x - 4y) = -8 & (2) \\ 4x + y - (1 + 2x - 4y) = -\frac{3}{2}. & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) équivaut à :

$x - 2y - 2 - 4x + 8y = -8$

$-3x + 6y = -6$

$-x + 2y = -2.$

L'équation (3) équivaut à :

$4x + y - 1 - 2x + 4y = -\frac{3}{2}$,

$2x + 5y = -\frac{1}{2}$.

On doit donc résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} -x + 2y = -2 & (4) \\ 2x + 5y = -\frac{1}{2}. & (5) \end{cases}$$

Il équivaut, par exemple, à

$\begin{cases} x = 2y + 2 \\ 2(2y + 2) + 5y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y + 2 \\ 4y + 4 + 5y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y + 2 \\ 9y = -\frac{9}{2}. \end{cases}$

D'où $y = -\frac{1}{2}$ et $x = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 1$.

L'équation (1) donne alors :

$z = 1 + 2 \cdot 1 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 + 2 = 5.$

On vérifie que $(x, y, z) = \left(1, -\frac{1}{2}, 5\right)$ est bien solution du système proposé.

11 Appelons x, y, z les trois notes, avec $x \leqslant y \leqslant z$. D'après l'énoncé, on a

$$\begin{cases} \frac{x + y + z}{3} = 11 \\ \frac{y + z}{2} = 12{,}5 \\ \frac{x + y}{2} = 10. \end{cases}$$

Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x + y + z = 33 & (1) \\ y + z = 25 & (2) \\ x + y = 20. & (3) \end{cases}$$

Des combinaisons linéaires permettent ici d'obtenir rapidement la solution.

Soustrayons membre à membre (2) de (1), on obtient

$x = 33 - 25 = 8.$

Soustrayons membre à membre (3) de (1), on obtient

$z = 33 - 20 = 13.$

2° Notons :
$\mathcal{T}_1$ le demi-plan ouvert de frontière (BC) contenant A;
$\mathcal{T}_2$ le demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant C;
$\mathcal{T}_3$ le demi-plan ouvert de frontière (AC) contenant B.
Alors l'intérieur du triangle ABC est $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_3$ (fig. 9).

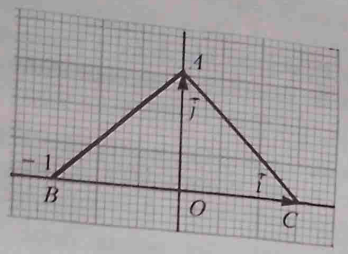


Fig. 9

- $\mathcal{T}_1$ est caractérisé par l'inéquation $y > 0$.
- $\mathcal{T}_2$ a pour frontière la droite (AB) d'équation $x - y + 1 = 0$.
Posons $f(x, y) = x - y + 1$. Alors $f(0, 0) = 1 > 0$.
Comme $O \in \mathcal{T}_2$, la condition $x - y + 1 > 0$ caractérise $\mathcal{T}_2$.
- $\mathcal{T}_3$ a pour frontière la droite (AC) d'équation $x + y - 1 = 0$.
Posons $g(x, y) = x + y - 1$. Alors $g(0, 0) = -1 < 0$.
Comme $O \in \mathcal{T}_3$, la condition $x + y - 1 < 0$ caractérise $\mathcal{T}_3$.
- *Conclusion* : l'intérieur du triangle ABC est caractérisé par le système :

$$\begin{cases} y > 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ x + y - 1 < 0. \end{cases}$$

9

1° On a d'abord, bien sûr, $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
La contrainte sur la surface de cuir est $0{,}9x + 1{,}2y \leqslant 60$. Elle équivaut à :

$9x + 12y \leqslant 600$, ou encore à $3x + 4y \leqslant 200$.

La contrainte sur les heures de travail est $8x + 4y \leqslant 300$, ce qui équivaut à :

$2x + y \leqslant 75$.

Le système d'inéquations à résoudre est donc :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 & (1) \\ y \geqslant 0 & (2) \\ 3x + 4y \leqslant 200 & (3) \\ 2x + y \leqslant 75. & (4) \end{cases}$$

Il ne faut pas non plus oublier que x et y sont des entiers.

2° Traçons les droites d'équations :
$x = 0$, $y = 0$, $3x + 4y = 200$, $2x + y = 75$.
Ce sont respectivement l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, les droites D et D' (fig. 10).

(Pour D, on peut prendre les points de coordonnées (0, 50) et (40, 20) par exemple ; pour D', ceux de coordonnées (0, 75) et (30, 15)).

Les inéquations (1), (2), (3), (4) caractérisent chacune des demi-plans fermés : notons-les respectivement $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_4$.

$\mathcal{T}_1$ est le demi-plan situé à droite de l'axe des ordonnées.
$\mathcal{T}_2$ est le demi-plan situé au-dessus de l'axe des abscisses.
$\mathcal{T}_3$ a pour frontière D et contient l'origine O, car $3 \times 0 + 4 \times 0 \leqslant 200$.
$\mathcal{T}_4$ a pour frontière D' et contient l'origine O, car $2 \times 0 + 0 \leqslant 75$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ cherché est l'intersection $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_3 \cap \mathcal{T}_4$.
Il est sablé sur la figure 10.

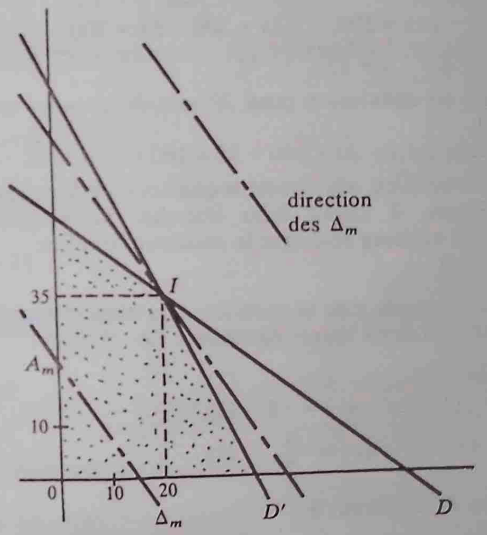


Fig. 10

3° *a*) « Le bénéfice prend la valeur m » signifie que :

$240x + 160y = m$,

$y = -\frac{240}{160}x + \frac{m}{160}$, soit encore $y = -\frac{3}{2}x + \frac{m}{160}$.

On reconnaît l'équation d'une droite Δ_m, de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$ (pour tout m). La direction de Δ_m est bien indépendante de m.

VICTOR AUGAGNEUR
Pointe – Noire
République du Congo

Le système devient $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ -3x + 2y = 10. \end{cases}$

L'addition membre à membre de ces équations donne $0 = 10$, ce qui est impossible. Il n'y a pas de solution.

b) Considérons la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$; $\mathcal{D}$ a aussi pour équation $3x - 2y = 6$.
Considérons la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $-3x + 2y = 4$; $\mathcal{D}'$ a aussi pour équation $3x - 2y = -4$.
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles (fig. 7). En effet, elles ont même coefficient directeur $\frac{3}{2}$ et leurs équations ne sont pas équivalentes.
Le système proposé n'admet donc pas de solution.

2° *a*) Le système proposé équivaut de même à $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$
Il y a une infinité de solutions : tous les couples (x, y) tels que $3x - 2y = 6$.

b) Considérons la droite $\mathcal{D}''$ d'équation $-3x + 2y = -6$.
Comme $-3x + 2y = -6 \Leftrightarrow 3x - 2y = 6$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont confondues.
Les solutions du système sont les coordonnées des points de $\mathcal{D} = \mathcal{D}''$ (fig. 7).

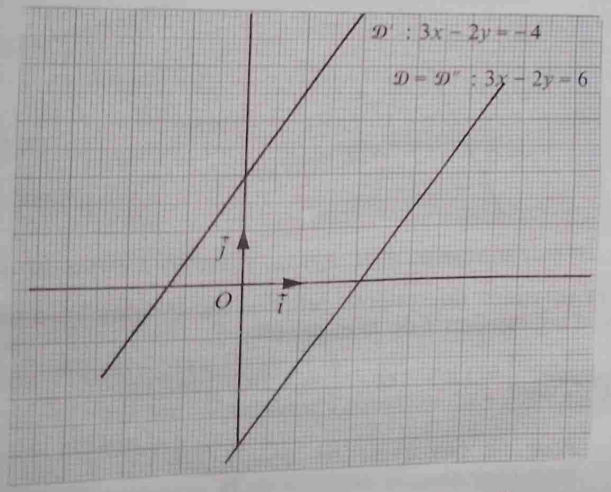


Fig. 7

7 1° Les droites Δ et Δ' sont représentées à la figure 8.

Pour Δ, on peut utiliser les valeurs

x	0	5
y	5	0

Pour Δ', on peut utiliser les valeurs

x	0	1
y	1	4

2° **Inéquation $x + y - 5 > 0$**
Posons $f(x, y) = x + y - 5$. On a $f(0, 0) = -5 < 0$.
Donc l'ensemble $\mathcal{F}_1$ des points $M(x, y)$ tels que $x + y - 5 > 0$ est le demi-plan ouvert de frontière Δ ne contenant pas l'origine O.

Inéquation $3x - y + 1 > 0$
Posons $g(x, y) = 3x - y + 1$. On a $g(0, 0) = 1 > 0$.
Donc l'ensemble $\mathcal{F}_2$ des points $M(x, y)$ tels que $3x - y + 1 > 0$ est le demi-plan ouvert de frontière Δ' contenant l'origine O.

Conclusion : L'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient le système proposé est donc $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.
Cet ensemble est représenté à la figure 8 (fond sablé).

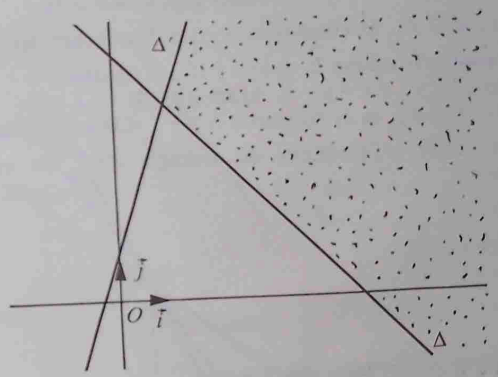


Fig. 8

8 1° **Équation de (AB)**
Le coefficient directeur de (AB) est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1}{-1} = 1$.

L'ordonnée à l'origine est celle de A, soit $b = 1$.
Donc (AB) a pour équation $y = x + 1$, ou $x - y + 1 = 0$.

Équation de (AC)
Le coefficient directeur de (AC) est $a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1}{1} = -1$.

L'ordonnée à l'origine est celle de A, soit $b = 1$.
Donc (AC) a pour équation $y = -x + 1$, ou $x + y - 1 = 0$.

La deuxième équation donne

$3x + 78 - 8x = 48,$
$-5x = -30,$
$x = 6.$

L'équation (1) donne alors $y = 19{,}5 - 12 = 7{,}5$.

On vérifie que $(x, y) = (6 ; 7{,}5)$ est solution du système.

Conclusion : une limonade coûte 6 F et un jus de fruit 7,50 F.

3 Soient x et y les deux entiers (avec $x \geqslant y$). x et y doivent vérifier

$$\begin{cases} x + y = 26 & (1) \\ x - y = 4. & (2) \end{cases}$$

L'addition membre à membre de ces deux équations donne $2x = 30$, donc $x = 15$.

En soustrayant membre à membre (2) de (1), on obtient $2y = 22$, donc $y = 11$.

On vérifie que $(x, y) = (15, 11)$ est bien solution du système.

Conclusion : les entiers cherchés sont 15 et 11.

4 Notons a le prix journalier et b le prix au kilomètre (en francs). D'après l'énoncé :

$$\begin{cases} 2a + 320b = 1\,336 & \mid \times -2 \\ 4a + 750b = 2\,980 & \mid \times 1. \end{cases}$$

Procédons par combinaisons linéaires à l'aide des coefficients ci-dessus. On obtient :

$$\begin{cases} -4a - 640b = -2\,672 \\ 4a + 750b = 2\,980. \end{cases}$$

L'addition membre à membre de ces deux équations donne

$110b = 308$

$$b = \frac{308}{110} = 2{,}8.$$

En remplaçant b par sa valeur dans l'équation $2a + 320b = 1\,336$ (par exemple), on obtient :

$2a + 896 = 1\,336$
$2a = 440$
$a = 220.$

On vérifie que $(a, b) = (220 ; 2{,}8)$ est bien solution du système.

Conclusion : le prix journalier est de 220 F et le prix au kilomètre de 2,80 F.

5 1° Tirons par exemple y de la première équation et remplaçons-le par sa valeur dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 & (1) \\ x + 3(2x - 1) - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) donne $x + 6x - 3 - 5 = 0$
$7x = 8$
$x = \frac{8}{7}.$

(1) donne alors $y = 2 \cdot \frac{8}{7} - 1 = \frac{16}{7} - \frac{7}{7} = \frac{9}{7}.$

On vérifie que $(x, y) = \left(\frac{8}{7}, \frac{9}{7}\right)$ est bien solution du système.

2° *a*) Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont représentées à la figure 6.

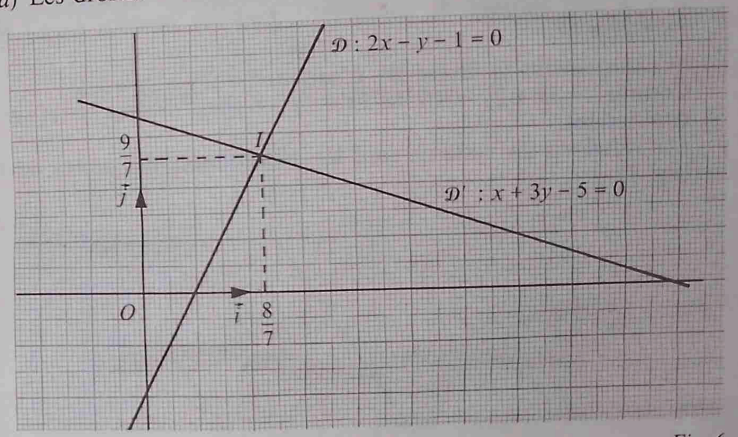


Fig. 6

b) Les solutions du système proposé au 1° sont les coordonnées du point d'intersection I de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (fig. 6).

Remarque : $\frac{8}{7} \approx 1{,}15$ et $\frac{9}{7} \approx 1{,}29$.

6 Pour ne pas avoir de dénominateurs, il est commode de multiplier chaque membre de la première équation par 6.

1° *a*) La première équation équivaut à

$$6\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right) = 6$$
$3x - 2y = 6.$

Noire
DÉPARTEMENT DES SCIENCES PHYSIQUES
République du Congo

Exercices 10 à 13. Systèmes d'équations à plus de 2 inconnues

10 Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant :

$$\begin{cases} -2x + 4y + z = 1 \\ x - 2y - 2z = -8 \\ 4x + y - z = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

11 La moyenne de trois notes est 11.
La moyenne des deux meilleures de ces trois notes est 12,5.
La moyenne des deux moins bonnes de ces trois notes est 10.
Quelles sont ces trois notes ?

12 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathscr{T}$ la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Déterminer les réels a, b, c pour que la courbe $\mathscr{T}$ passe par $A(1\,;\,-1)$, $B(2\,;\,-1)$ et $C(3\,;\,1)$.

13 Sur la figure 5, les cercles de centres A, B, et C sont tangents deux à deux.

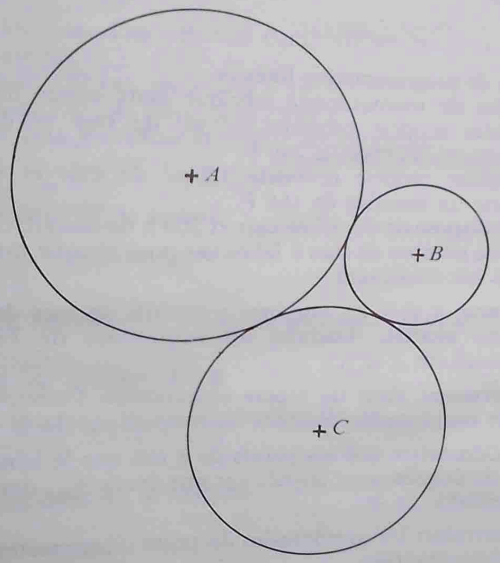


Fig. 5

Calculer les rayons de chacun de ces cercles, sachant que $AB = 13$ cm, $BC = 11$ cm et $AC = 16$ cm.

CORRIGÉS

1 1° Tirons par exemple y de la première équation et remplaçons-le par sa valeur dans la deuxième équation. On obtient :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 & (1) \\ 4x + 3(2x - 5) = 15. & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) donne alors $4x + 6x - 15 = 15$,
$10x = 30$,
$x = 3$.

En remplaçant x par 3 dans l'équation (1), on obtient $y = 1$.
On vérifie que le couple $(x, y) = (3, 1)$ est bien solution.

2° Quand aucune des inconnues n'a pour coefficient 1 ou -1, il est plus facile de procéder par combinaisons linéaires.

Les coefficients ci-dessous permettent d'éliminer b

$$\begin{cases} 3a + 4b = 5 & \times 5 \\ -2a + 5b = \dfrac{1}{2} & \times -4. \end{cases}$$

On obtient $\begin{cases} 15a + 20b = 25 \\ 8a - 20b = -2. \end{cases}$

D'où, en ajoutant membre à membre, $23a = 23$ et $a = 1$.
Remplaçons a par sa valeur dans la première équation par exemple.
On obtient

$3 + 4b = 5$,
$4b = 2$,
$b = \dfrac{1}{2}$.

On vérifie que le couple $(a, b) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ est bien solution.

2 On met le problème en équations, c'est-à-dire qu'on donne un nom aux inconnues et on écrit les équations qu'elles doivent vérifier.

Soit x et y les prix respectifs, en francs, d'une limonade et d'un jus de fruit.

x et y doivent vérifier $\begin{cases} 2x + y = 19{,}50, \\ 3x + 4y = 48. \end{cases}$

Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} y = 19{,}5 - 2x & (1) \\ 3x + 4(19{,}5 - 2x) = 48. & (2) \end{cases}$$

EXERCICES

Exercices 1 à 6 : Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

1 Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants

1° $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 15. \end{cases}$

2° $\begin{cases} 3a + 4b = 5 \\ -2a + 5b = \frac{1}{2}. \end{cases}$

2 Deux limonades et un jus de fruit coûtent 19,50 F.
Trois limonades et quatre jus de fruits coûtent 48 F.
Quels sont les prix d'une limonade et d'un jus de fruit ?

3 Trouver deux entiers dont la somme est 26 et dont la différence est 4.

4 Le tarif de location d'un véhicule comporte un prix journalier et un prix au kilomètre.
Pour 2 jours et 320 km, on a payé 1 336 F.
Pour 4 jours et 750 km, on a payé 2 980 F.
Quels sont le prix journalier et le prix au kilomètre ?

5 1° Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système :

$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$

2° *a*) Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tracer les droites D et D' d'équations respectives :

$2x - y - 1 = 0$ et $x + 3y - 5 = 0$.

b) Interpréter graphiquement les résultats du 1°.

6 1° *a*) Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système

$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1, \\ -3x + 2y = 4. \end{cases}$

b) Interpréter graphiquement les résultats.

2° *a*) Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1, \\ -3x + 2y = -6. \end{cases}$

b) Interpréter graphiquement les résultats.

Exercices 7 à 9 : inéquations à 2 inconnues

7 Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Tracer la droite Δ d'équation $x + y - 5 = 0$ et la droite Δ' d'équation $3x - y + 1 = 0$.

2° Résoudre graphiquement le système

$\begin{cases} x + y - 5 > 0 \\ 3x - y + 1 > 0. \end{cases}$

8 Dans un repère du plan, on considère les points $A(0\,;\,1)$, $B(-1\,;\,0)$ et $C(1\,;\,0)$.

1° Déterminer une équation de chacune des droites (AB) et (AC).

2° Caractériser par un système d'inéquations l'intérieur du triangle ABC.

9 **Exemple de programmation linéaire**
Un atelier de maroquinerie fabrique deux sortes de sacs à main.
Le premier modèle nécessite 0,9 m² de cuir et 8 h de travail. Il rapporte un bénéfice de 240 F.
Le deuxième modèle nécessite 1,2 m² de cuir et 4 h de travail. Il rapporte un bénéfice de 160 F.
L'atelier dispose de 60 m² de cuir et 300 h de travail. On se propose de calculer le nombre de sacs à fabriquer pour chaque modèle afin que le bénéfice soit maximum.

1° On note x et y les nombres respectifs de sacs du premier et du deuxième modèle. Traduire les contraintes de l'énoncé par des inéquations sur x et y.

2° Déterminer, dans un repère orthonormé, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points dont les coordonnées vérifient les inéquations du 1°.

3° *a*) Démontrer que les points de $\mathcal{E}$ tels que le bénéfice prenne une valeur m donnée, sont alignés sur une droite Δ_m, dont la direction est indépendante de m.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A_m de Δ_m avec l'axe des ordonnées.

c) En déduire les nombres x et y de sacs de chaque sorte pour que le bénéfice soit maximum. Quel est ce bénéfice ?

II — SYSTÈMES D'INÉQUATIONS A 2 INCONNUES

1° Inéquations $ax + by + c > 0$ et $ax + by + c < 0$

Soient a, b, c des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
La droite d'équation $ax + by + c = 0$ sépare le plan en deux demi-plans ouverts.
L'un d'eux est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c > 0$.
L'autre est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c < 0$.
Pour connaître le signe de $ax + by + c$ dans l'un de ces demi-plans, il suffit de calculer la valeur de cette expression en un point particulier (non situé sur la droite).

Exemple :
Résoudre graphiquement $2x + y - 3 > 0$.
— On trace la droite Δ d'équation $2x + y - 3 = 0$ (fig. 4).
— L'expression $f(x, y) = 2x + y - 3$ prend à l'origine la valeur $f(0, 0) = -3$.
Cette valeur est négative donc l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x, y)$ tels que $2x + y - 3 > 0$ est le demi-plan ouvert de frontière Δ ne contenant pas l'origine. Ce demi-plan est sablé sur la figure 4.

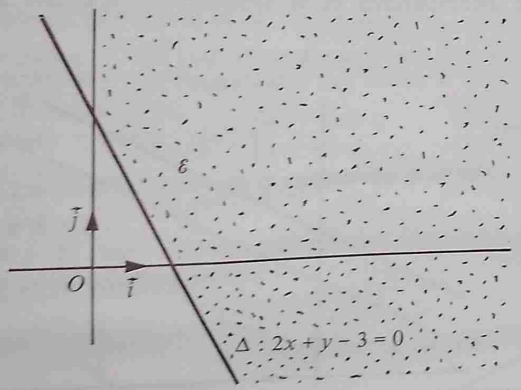


Fig. 4

2° Système d'inéquations du type $ax + by + c > 0$ (ou $ax + by + c < 0$)

On procède graphiquement.
Pour chaque inéquation, on cherche le demi-plan correspondant (comme au paragraphe 1).
L'intersection (éventuelle) de ces demi-plans est l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions du système proposé.

III — SYSTÈMES D'ÉQUATIONS A PLUS DE 2 INCONNUES

Voici une méthode possible pour éliminer une inconnue (méthode par substitution) :
— dans une des équations, on exprime une des inconnues en fonction des autres ;
— on la remplace ensuite par sa valeur dans les autres équations.

Exemple : résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 & (1) \\ 3x + y + 2z = 5 & (2) \\ 2x + y - 3z = 8. & (3) \end{cases}$$

On peut tirer x de (1) et le remplacer par sa valeur dans (2) et (3).
On obtient :

$$\begin{cases} x = 5 - 2y + z \\ 3(5 - 2y + z) + y + 2z = 5 \\ 2(5 - 2y + z) + y - 3z = 8. \end{cases}$$

Après réduction, on trouve :

$$\begin{cases} x = 5 - 2y + z \\ -5y + 5z = -10, \\ -3y - z = -2 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x = 5 - 2y + z & (4) \\ y - z = 2 & (5). \\ 3y + z = 2 & (6) \end{cases}$$

Le système (5) et (6) ne comporte plus que 2 inconnues y et z.
Additionnons par exemple (5) et (6) membre à membre. On obtient $4y = 4$, soit $y = 1$.
(5) ou (6) donne alors $z = -1$.
Enfin (4) donne $x = 2$.
On vérifie que $(x, y, z) = (2, 1, -1)$ est bien solution du système proposé.

• **Exemple 2 : par combinaisons linéaires**

Considérons le système $\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ 5x + 2y = 12. & (2) \end{cases}$

Pour éliminer y, multiplions par 2 chaque membre de l'équation (1) et par 3 chaque membre de (2).

On obtient : $\begin{cases} 4x - 6y = 2 & (3) \\ 15x + 6y = 36. & (4) \end{cases}$

L'addition membre à membre de (3) et (4) donne $19x = 38$, donc $x = 2$.

On peut ensuite éliminer x de la même façon.

$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & \mid \times 5 \\ 5x + 2y = 12 & \mid \times -2. \end{cases}$

On obtient : $\begin{cases} 10x - 15y = 5 \\ -10x - 4y = -24. \end{cases}$

D'où, en additionnant membre à membre :

$-19y = -19$ et $y = 1$.

On vérifie ensuite que $(x, y) = (2, 1)$ est bien solution du système.

2° Interprétation graphique

Supposons que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$.

Alors $ax + by = c$ est l'équation d'une droite $\mathcal{D}$.
$a'x + b'y = c'$ est l'équation d'une droite $\mathcal{D}'$.

Les solutions du système (S) $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$ sont les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

1er cas $ab' - a'b \neq 0$

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point $I(x_0, y_0)$.
Le système a pour solution unique (x_0, y_0) (fig. 1).

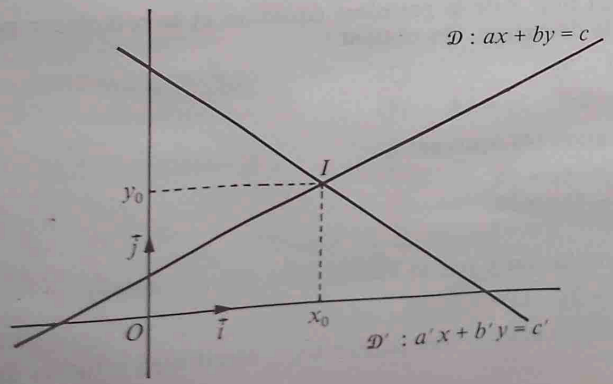


Fig. 1

2e cas : $ab' - a'b = 0$

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

• Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues, les équations (1) et (2) sont équivalentes et le système (S) admet une infinité de solutions (fig. 2).

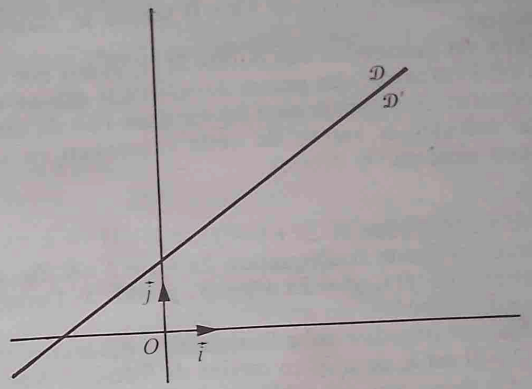


Fig. 2

• Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles, les équations (1) et (2) sont incompatibles et le système (S) n'admet aucune solution (fig. 3).

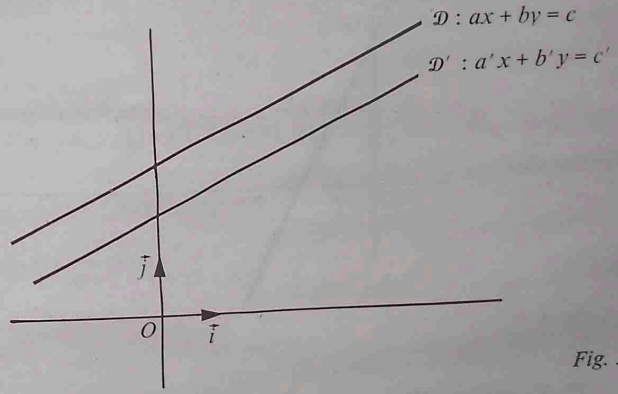


Fig. 3

3° Unicité de la solution

Théorème :

Le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ admet une solution unique si, et seulement si, $ab' - a'b \neq 0$.

Remarque : D'après le 1°, on a bien $f(-1) = 9$.
On peut vérifier d'autre part que l'on a aussi $f(5) = 9$.

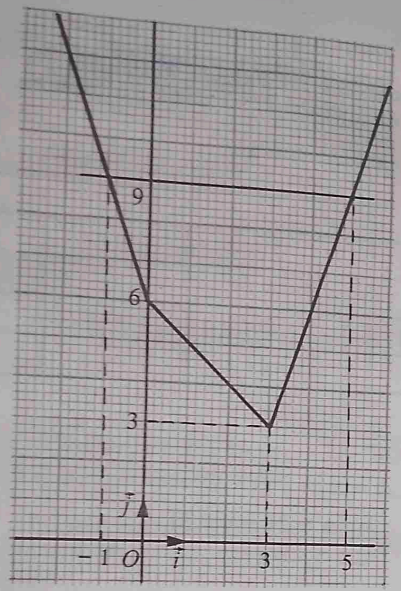


Fig. 16

3 Systèmes linéaires

Ce qu'il faut savoir

Les équations ou inéquations qui interviennent dans ce chapitre sont linéaires.
Cela signifie que, si l'on note x, y, z, ... les inconnues, on considérera des expressions de la forme $ax + by$, $ax + by + cz$, ... où a, b, c, ... sont des réels.

Par exemple : $2x - 3y + \frac{1}{2}z$ est une expression linéaire, mais non $x^2 - 5yz$.

I — SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

1° Méthodes de résolution (rappels)

• **Exemple 1 : par substitution**

Pour résoudre le système $\begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ 3x - 5y = 14 & (2) \end{cases}$

on peut tirer x de la première équation et le remplacer par sa valeur dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{cases} x = 1 - 2y & (3) \\ 3(1 - 2y) - 5y = 14. & (4) \end{cases}$$

L'équation (4) équivaut à

$$\begin{aligned} 3 - 6y - 5y &= 14, \\ -11y &= 11, \\ y &= -1. \end{aligned}$$

En remplaçant y par sa valeur dans (3), on obtient

$x = 1 - 2(-1) = 3$.

On vérifie ensuite que $(x, y) = (3, -1)$ est bien solution du système.

3° *a*) Notons C_f et C_g les courbes représentatives de f et g.
L'équation $-2x+1=|x+2|$ équivaut à $f(x)=g(x)$.
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g.
Sur la figure 14, on obtient un point d'intersection, d'abscisse $\alpha \approx -0{,}3$.

b) • **1er cas : $x+2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in [-2, +\infty[$**
L'équation $-2x+1=|x+2|$ équivaut à :

$-2x+1=x+2$,
$-2x-x=2-1$,
$-3x=1$,
$x=-\frac{1}{3}$.

Comme $-\frac{1}{3} \in [-2, +\infty[$, $x=-\frac{1}{3}$ est solution $\left(-\frac{1}{3}\right.$ est la valeur exacte de $\left.\alpha\right)$.

• **2e cas : $x+2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty, -2]$**
L'équation $-2x+1=|x+2|$ équivaut à

$-2x+1=-x-2$,
$-2x+x=-1-2$,
$-x=-3$,
$x=3$.

Mais $3 \notin]-\infty, -2]$, donc cette valeur ne convient pas.

Conclusion :

L'équation $-2x+1=|x+2|$ admet une seule solution $x=-\frac{1}{3}$.

19

Soient P et Q deux points d'une droite d'abscisses respectives x_P et x_Q.
Alors $PQ=|x_P-x_Q|=|x_Q-x_P|$.

1° Si M a pour abscisse 2, alors
$MA=|0-2|=2$, $MB=|3-2|=1$
et $f(2)=MA+2MB=2+2=4$.
De même, $f(4)=4+2\cdot 1=6$,
$f(-1)=1+2\cdot 4=9$.

Ces résultats peuvent se lire directement sur la figure 15, où M_1, M_2, M_3 sont les points d'abscisses respectives 2, 4, -1.

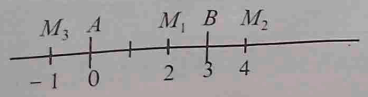


Fig. 15

2° $MA=|0-x|=|x-0|=|x|$,
$MB=|3-x|=|x-3|$.
Donc $f(x)=MA+2MB=|x|+2|x-3|$.

3°

Pour «enlever» les valeurs absolues, on étudie simultanément le signe de x et de $x-3$ dans un tableau.

Considérons le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert x\rvert$		$-x$		x		x	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-3\rvert$		$-x+3$		$-x+3$		$x-3$	

On en déduit que

• Si $x \leqslant 0$, $f(x)=|x|+2|x-3|$
$=-x+2(-x+3)$
$=-3x+6$.

• Si $0 \leqslant x \leqslant 3$, $f(x)=|x|+2|x-3|$
$=x+2(-x+3)$
$=-x+6$.

• Si $x \geqslant 3$, $f(x)=|x|+2|x-3|$
$=x+2(x-3)$
$=3x-6$.

La fonction f est bien affine par intervalles.

4° *a*) f est représentée à la figure 16.

On peut utiliser les valeurs suivantes :

x	-1	0	3	4
$f(x)$	9	6	3	6

b) L'équation $MA+2MB=9$ équivaut à $f(x)=9$.
On voit, sur la figure 16, que la droite d'équation $y=9$ coupe la courbe représentative de f en 2 points, d'abscisses $x=-1$ et $x=5$.
Il y a donc deux points M tels que $MA+2MB=9$: les points d'abscisses -1 et 5.

Remarque : la fonction $m \mapsto t$ est une fonction constante par intervalles. On dit que c'est une fonction en escalier.

16 1°

Le calcul de $f(x)$ se fait après avoir déterminé l'intervalle où se trouve x.

$-3 \in]-\infty, -1]$, donc $f(-3) = 3$

$0 \in]-1, 2[$, donc $f(0) = -0 + 2 = 2$

$2 \in [2, +\infty[$, donc $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$

$4 \in [2, +\infty[$, donc $f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 = 3$.

2° La fonction f est représentée graphiquement à la figure 13.

- f est constante sur $]-\infty, -1]$.
- On peut utiliser les valeurs :

x	-1	2
$-x+2$	3	0

et

x	2	4
$\frac{1}{2}x+1$	2	3

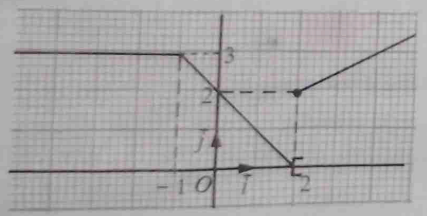


Fig. 13

17 • Sur l'intervalle $]-\infty, 4]$, $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$.
La demi-droite qui la représente passe par les points $A(0, 1)$ et $B(4, 3)$, par exemple.
Donc le coefficient directeur est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

L'ordonnée à l'origine est celle de A, donc $b = 1$ et $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

• Sur l'intervalle $]4, +\infty[$, f est constante ; on a $f(x) = 1$.

• *Conclusion :* f est définie par

$$\begin{cases} \text{si } x \leqslant 4, & f(x) = \frac{1}{2}x + 1, \\ \text{si } x > 4, & f(x) = 1. \end{cases}$$

18 1° La fonction f est représentée à la figure 14.

2°

$$|A| = \begin{cases} A \text{ si } A \geqslant 0 \\ -A \text{ si } A \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{donc} \quad |x+2| = \begin{cases} x+2 \text{ si } & x+2 \geqslant 0 \\ -x-2 \text{ si } & x+2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Considérons le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$			$x+2$	

Donc g est la fonction affine par intervalles définie par

$$\begin{cases} \text{si } x \leqslant -2, & g(x) = -x - 2, \\ \text{si } x \geqslant -2, & g(x) = x + 2. \end{cases}$$

g est représentée graphiquement à la figure 14.

On peut utiliser les valeurs suivantes :

x	-3	-2	0
$g(x)$	1	0	2

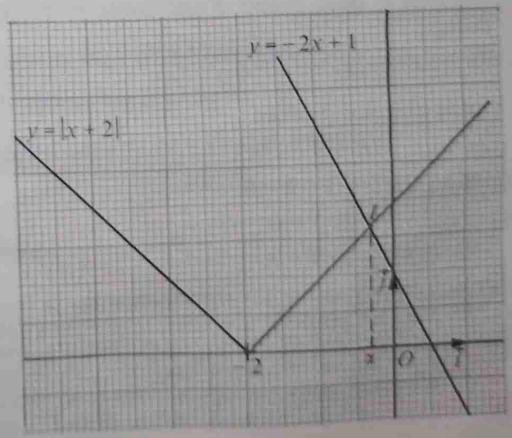


Fig. 14

Il est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x^2 \geqslant x$ équivaut à $x^2 - x \geqslant 0$,
c'est-à-dire à $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$.
De même $x^2 \leqslant x$ équivaut à $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Remarque : A l'exercice 2, p. 98, on retrouve graphiquement ces résultats à l'aide des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$.

14

1° On ne peut pas simplifier par $3 - x$ car on ne connaît pas son signe. On peut par contre transposer un des membres et mettre $3 - x$ en facteur.

L'inéquation proposée équivaut à

$(x + 2)(3 - x) - 2(3 - x) \geqslant 0$,

$(3 - x)[(x + 2) - 2] \geqslant 0$,

$(3 - x)\, x \geqslant 0$.

Le signe de $x(3 - x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $x(3 - x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 3$
$\Leftrightarrow x \in [0, 3]$.

2° $\dfrac{1 - x^2}{x + 5} \leqslant 0$ équivaut à $\dfrac{(1 - x)(1 + x)}{x + 5} \leqslant 0$.

Le signe de $\dfrac{(1 - x)(1 + x)}{x + 5}$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(1-x)(1+x)}{x+5}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\dfrac{1 - x^2}{x + 5} \leqslant 0 \Leftrightarrow -5 < x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$
$\Leftrightarrow x \in]-5, -1] \cup [1, +\infty[$.

15 La fonction $m \mapsto t$ est définie par

si $0 < m \leqslant 20$, $t = 2{,}30$
si $20 < m \leqslant 50$, $t = 3{,}80$
si $50 < m \leqslant 100$, $t = 5{,}70$
si $100 < m \leqslant 250$, $t = 12{,}00$.

Elle est représentée graphiquement à la figure 12.

Un crochet ouvert signifie que l'extrémité correspondante du segment est exclue ; un point signifie qu'elle est incluse.

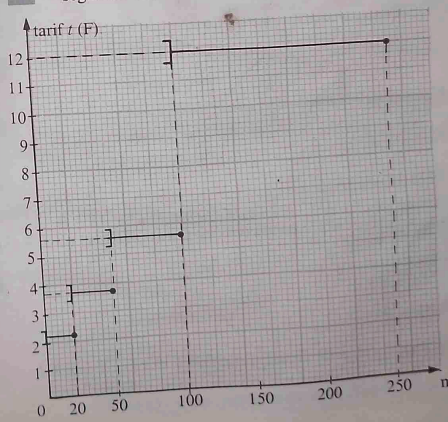


Fig. 12

Mais si $b = 0$, $\frac{a}{b}$ n'est pas défini.

On met alors une double barre dans le tableau à l'endroit correspondant.

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Le tableau suivant donne le signe de $\frac{x+1}{x-3}$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Donc $\frac{x+1}{x-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 3$.

L'ensemble des solutions est $[-1, 3[$.

2°

$A \leqslant B$ équivaut à $A - B \leqslant 0$.

L'inéquation $\frac{x+1}{x-3} \leqslant 2$ équivaut à :

$$\frac{x+1}{x-3} - 2 \leqslant 0,$$

$$\frac{x+1-2(x-3)}{x-3} \leqslant 0$$

$$\frac{-x+7}{x-3} \leqslant 0.$$

Le signe de $\frac{-x+7}{x-3}$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$-x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x+7}{x-3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc $\frac{-x+7}{x-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow x < 3$ ou $x \geqslant 7$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\cup [7, +\infty[$.

12 On utilise l'identité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

1° $x^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) \leqslant 0$.

Le signe de $(x-3)(x+3)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x^2 - 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 9$ est :

$S_1 = [-3, 3]$.

2° $x^2 \geqslant 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geqslant 0$.

Le signe de $(x-2)(x+2)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x^2 - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 4$ est :

$S_2 =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

3° La condition $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$ équivaut à

$x^2 \leqslant 9$ et $x^2 \geqslant 4$, c'est-à-dire à $x \in S_1$ et $x \in S_2$.

Donc $S = S_1 \cap S_2$.

Pour déterminer $S = S_1 \cap S_2$, il est commode de représenter S_1 et S_2 sur des axes (fig. 11).

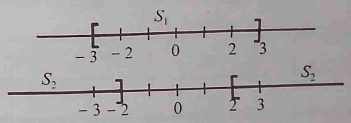


Fig. 11

Conclusion : $S = [-3, -2] \cup [2, 3]$.

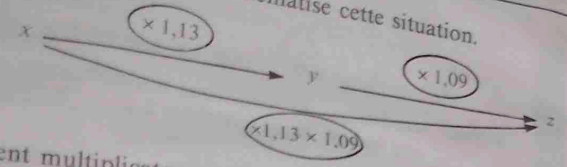
Remarque : A l'exercice 1, p. 98, on retrouve graphiquement ces résultats à l'aide de la fonction $x \mapsto x^2$.

13 Comparer A et B revient à étudier le signe de $A - B$ car
$A \geqslant B \Leftrightarrow A - B \geqslant 0$ et $A \leqslant B \Leftrightarrow A - B \leqslant 0$.

Étudions le signe de $x^2 - x = x(x-1)$.

VICTOR AUGAGNEUR
Noire
CES PHYS
République du Congo

Le diagramme suivant schématise cette situation.



Le coefficient multiplicateur correspondant aux 2 hausses successives est

$1{,}13 \times 1{,}09 = 1{,}231\,7$.

En raisonnant comme au 3°, on trouve que le pourcentage global d'augmentation, qui lui correspond, est égal à 23,17.

9

Les charges sont proportionnelles aux millièmes.
Les charges d'un copropriétaire s'obtiennent donc en multipliant les charges correspondant à un millième par le nombre de millièmes de ce copropriétaire.

1° Les charges correspondant à un millième s'élèvent à $\frac{3\,450}{1\,000} = 3{,}45$ (F).

Pour 220 millièmes, il faut payer

$3{,}45 \times 220 = 759$ (F).

Pour 280 millièmes, il faut payer

$3{,}45 \times 280 = 966$ (F).

Pour 320 millièmes, il faut payer

$3{,}45 \times 320 = 1\,104$ (F).

Pour 180 millièmes, il faut payer

$3{,}45 \times 180 = 621$ (F).

2° Pour x millièmes, les charges s'élèvent à $3{,}45x$.
La fonction $x \mapsto 3{,}45x$ est une fonction linéaire.
Elle est représentée graphiquement à la figure 10 pour $0 \leqslant x \leqslant 1\,000$.

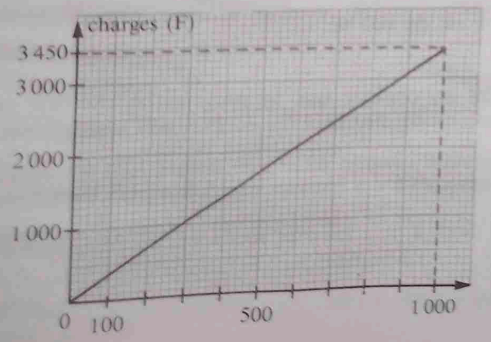


Fig. 10

Remarques :

- Dans la pratique, x est un entier compris entre 0 et 1 000.
- On peut trouver graphiquement des valeurs approchées des résultats du 1°.

10

Le signe d'un produit s'obtient en étudiant le signe de chaque facteur.
Le signe de $ax + b$ s'obtient à l'aide des résultats de la page 27.
Il est commode de présenter les résultats dans un tableau.

1° $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Le signe de $(x - 3)(-2x + 1)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x - 3$		−		−	0	+	
$-2x + 1$		+	0	−		−	
$(x - 3)(-2x + 1)$		−	0	+	0	−	

Donc $(x - 3)(-2x + 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $x \geqslant 3$.

L'ensemble des solutions est :

$\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right] \cup [3 ; +\infty[$.

2° On utilise le tableau du 1°.

On voit que $(x - 3)(-2x + 1) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ou $x > 3$.

L'ensemble des solutions est :

$\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup]3 ; +\infty[$.

3° On utilise de nouveau le tableau du 1°.

On voit que $(x - 3)(-2x + 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$.

L'ensemble des solutions est $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

11 1°

Le signe d'un quotient s'obtient en étudiant le signe du numérateur et celui du dénominateur dans un tableau.

Rappelons que si $a = 0$, alors $\frac{a}{b} = 0$.

2017

2° La remise sur l'article est de $160 - 96 = 64$ (F).

Notons x le pourcentage de remise que cela représente (par rapport à 160 F).

On a $160 \times \frac{x}{100} = 64$.

D'où $x = \frac{64 \times 100}{160} = \frac{6\,400}{160} = 40$.

La remise est de 40 %.

8 1° Notons x le prix initial d'un article donné. L'augmentation est égale à $x \times \frac{8}{100}$. Le prix final de l'article est donc

$$x + x \cdot \frac{8}{100} = x\left(1 + \frac{8}{100}\right)$$
$$= x(1 + 0{,}08)$$
$$= x \times 1{,}08.$$

Par conséquent, les prix sont tous multipliés par 1,08.

2° Notons de nouveau x le prix initial d'un article donné et procédons comme au 1°.

a) Le prix final est :

$$x + \frac{5}{100}x = x\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1{,}05x.$$

Le coefficient multiplicateur vaut 1,05.

b) Le prix final est :

$$x - \frac{5}{100}x = x\left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0{,}95x.$$

Le coefficient multiplicateur vaut 0,95.

c) Le prix final est :

$$x + \frac{18{,}6}{100}x = x\left(1 + \frac{18{,}6}{100}\right) = 1{,}186x.$$

Le coefficient multiplicateur est 1,186.

3° Les résultats du 2° se généralisent ainsi.

- Si p est le pourcentage de hausse ($p \geqslant 0$) ou de baisse ($p \leqslant 0$), le coefficient multiplicateur correspondant est $1 + \frac{p}{100}$.

En effet, soit x le prix initial.

Le prix final est

$$x + \frac{p}{100}x = x\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

- Pour une hausse, le coefficient multiplicateur est supérieur à 1. Pour une baisse, il est inférieur à 1.

a) $1{,}04 \geqslant 1$, donc il s'agit d'une hausse.
Notons p le pourcentage correspondant.
D'après ce qui précède, on a :

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}04,$$

$$\frac{p}{100} = 1{,}04 - 1 = 0{,}04,$$

$$p = 4.$$

La hausse est de 4 %.

b) On résout de même :

$1 + \frac{p}{100} = 1{,}40$ et on trouve $p = 40$.

La hausse est de 40 %.

c) $0{,}75 \leqslant 1$, donc il s'agit d'une baisse.
On a de nouveau

$$1 + \frac{p}{100} = 0{,}75$$

$$\frac{p}{100} = 0{,}75 - 1 = -0{,}25,$$

$$p = -25.$$

La baisse est de 25 %.

d) L'équation $1 + \frac{p}{100} = 2$ donne $\frac{p}{100} = 1$, donc $p = 100$.

La hausse est de 100 %.

4°

On ne connaît pas le prix initial du litre de super. Il est commode d'utiliser les coefficients multiplicateurs.

En raisonnant comme au 1°, on trouve que les coefficients multiplicateurs associés à des hausses de 13 % et 9 % sont respectivement 1,13 et 1,09.
Notons alors x, y, z les prix successifs du litre de super. On a

$$y = 1{,}13x$$
$$z = 1{,}09y = 1{,}09 \cdot 1{,}13x.$$

2°

La fonction $x \mapsto y_1 = 52\,000 + 1{,}1x$ est une fonction affine car elle est de la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a = 1{,}1$ et $b = 52\,000$. Sa représentation graphique est une droite.
Il en est de même pour la fonction $x \mapsto y_2$.

Les droites D_1 et D_2 sont représentées à la figure 9.

- Pour D_1, on peut prendre les valeurs suivantes :
  $x = 0$, $y = 52\,000$
  $x = 100\,000$, $y = 52\,000 + 1{,}1 \cdot 100\,000 = 162\,000$.
- Pour D_2, on peut prendre les valeurs suivantes :
  $x = 0$, $y = 64\,000$
  $x = 100\,000$, $y = 64\,000 + 0{,}8 \cdot 100\,000 = 144\,000$.

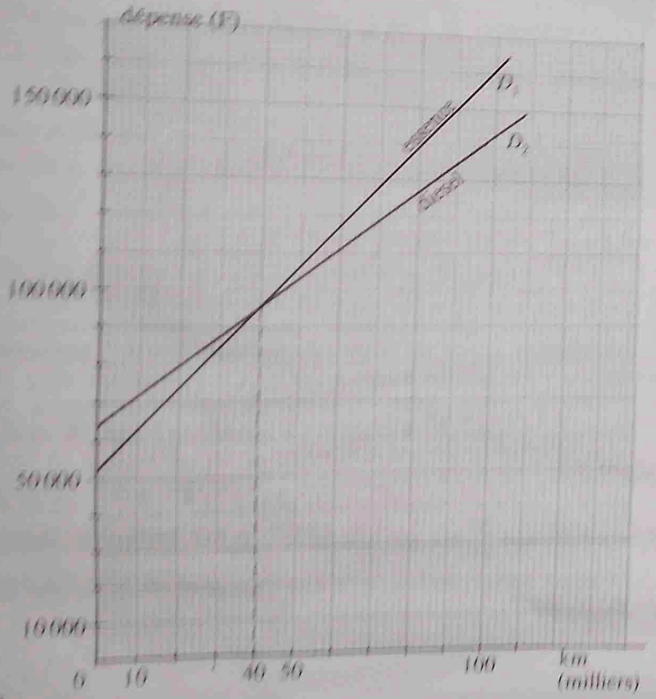


Fig. 9

3° **Graphiquement :**
Les droites D_1 et D_2 se coupent en un point I dont l'abscisse vaut environ 40 000.
On voit que, si $x > 40\,000$, la droite D_2 est en dessous de D_1.
Le véhicule B est plus avantageux que le A au-delà de 40 000 km.

Par le calcul :
Dire que le véhicule B est plus avantageux que le A revient à résoudre l'inéquation $y_2 < y_1$.
On obtient :

$64\,000 + 0{,}8x < 52\,000 + 1{,}1x$,
$64\,000 - 52\,000 < -0{,}8x + 1{,}1x$,
$0{,}3x > 12\,000$,
$x > \dfrac{12\,000}{0{,}3}$,
$x > 40\,000$.

On retrouve le résultat obtenu graphiquement.

6 1° L'augmentation est de $6\,000 \times \dfrac{8}{100} = 480$ (F).
Après augmentation, M. X gagnera donc $6\,000 + 480 = 6\,480$ (F).
2° Soit y le salaire initial de M^me Y (en francs). Son salaire a augmenté de $y \times \dfrac{8}{100}$.
Son salaire après augmentation étant 7 020 F, on doit avoir :

$y + \dfrac{8}{100}y = 7\,020$,
$y\left(1 + \dfrac{8}{100}\right) = 7\,020$,
$1{,}08y = 7\,020$,
$y = \dfrac{7\,020}{1{,}08}$,
$y = 6\,500$.

M^me Y gagnait initialement 6 500 F.

7 L'augmentation ou la remise sont calculées sur le prix initial.
1° La taxe téléphonique a augmenté de
$0{,}77 - 0{,}72 = 0{,}05$ (F).
Notons x le pourcentage d'augmentation que cela représente (par rapport à 0,72 F).
On a $0{,}72 \times \dfrac{x}{100} = 0{,}05$.
D'où $x = \dfrac{0{,}05 \times 100}{0{,}72} = \dfrac{5}{0{,}72} \approx 6{,}94$.
La taxe téléphonique a augmenté de 6,94 %.

D_1 a pour coefficient directeur 2.

Le coefficient directeur a de D_4 vérifie donc $2a = -1$, soit $a = -\frac{1}{2}$.

L'équation de D_4 est de la forme $y = -\frac{1}{2}x + b$.

$F(2, 0) \in D_4$, donc $0 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b$,

$0 = -1 + b$,

$b = 1$.

D_4 a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Elle est représentée à la figure 8.

3

- Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = ax + b$.
Le réel a est le coefficient directeur (voir p. 26). Le réel b est l'ordonnée à l'origine (voir p. 27).
- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$.

Équation de Δ_1 :

Elle est de la forme $y = ax + b$. Le coefficient directeur est

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

On peut lire directement sur la figure 4, p. 29 :
— la différence des ordonnées $y_B - y_A = 1$;
— la différence des abscisses $x_B - x_A = 1$.
On peut aussi lire les coordonnées de A et B. On obtient $A(0, 2)$ et $B(1, 3)$, puis calculer $y_B - y_A = 3 - 2 = 1$ et $x_B - x_A = 1 - 0 = 1$.
Donc Δ_1 a pour coefficient directeur $a = 1$. On voit d'autre part, sur la figure 4, p. 29, que l'ordonnée à l'origine de Δ_1 est $b = 2$ (ordonnée de A). Donc Δ_1 a pour équation $y = x + 2$.

Équations de Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, Δ_6 :

On procède de même. On obtient

$\Delta_2 : y = \frac{1}{2}x + 2$

$\Delta_3 : y = \frac{1}{2}x + 1$

$\Delta_4 : y = -x$

$\Delta_5 : y = -2x + 5$

$\Delta_6 : y = -2$ (le coefficient directeur est nul).

Équation de Δ_7 :

Δ_7 est parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est $x = 3$.

4

1° **Équation de (AB) :**
La droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est de la forme $y = ax + b$.

Le coefficient directeur est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{4 - 0} = \frac{1}{2}$.

L'ordonnée à l'origine est $b = 1$ (ordonnée de A).

Donc la droite (AB) a pour équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Équation de (CD) :

On procède de même.

Son coefficient directeur est $a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0 - 3}{5 - 0} = -\frac{3}{5}$.

Son ordonnée à l'origine est $b = 3$.

Donc (CD) a pour équation $y = -\frac{3}{5}x + 3$.

2° Les coordonnées de I sont solution du système.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 & (1) \\ y = -\frac{3}{5}x + 3. & (2) \end{cases}$$

On doit avoir

$\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{3}{5}x + 3$, $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = 3 - 1$,

$\frac{11}{10}x = 2$, $x = 2 \cdot \frac{10}{11} = \frac{20}{11}$.

En remplaçant x par sa valeur dans l'équation (1) par exemple, on obtient :

$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{11} + 1 = \frac{10}{11} + 1 = \frac{21}{11}$.

Conclusion : I a pour coordonnées $\left(\frac{20}{11}, \frac{21}{11}\right)$.

Remarque : $x = \frac{20}{11} \approx 1{,}82$; $y = \frac{21}{11} \approx 1{,}91$.

Ces valeurs correspondent à ce que l'on peut observer sur la figure 5, p. 30.

5

1° D'après l'énoncé :

$y_1 = 52\,000 + 1{,}1x$,

$y_2 = 64\,000 + 0{,}8x$.

DÉPARTEMENT DES SCIENCES PHYSIQUES
République du Congo
Unité *Travail*

Point d'intersection A de D_1 avec l'axe des ordonnées.

Ses coordonnées vérifient $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ d'où $A\ (0, -3)$.

Point d'intersection B de D_1 avec l'axe des abscisses.

Ses coordonnées vérifient $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 3. \end{cases}$

D'où $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$ et $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ (fig. 7).

2° La droite D_2 est représentée à la figure 7.

Pour tracer D_2, on peut utiliser les points de coordonnées (0, 3) et (3, 0).

Point d'intersection I de D_1 et D_2

Ses coordonnées vérifient $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -x + 3. \end{cases}$

Donc $2x - 3 = -x + 3$,

$2x + x = 3 + 3$,

$3x = 6$,

$x = 2$.

En remplaçant x par 2 dans l'équation de D_1 (ou celle de D_2), on trouve $y = 1$,
d'où $I\ (2, 1)$ (fig. 7).

2

- Un point appartient à une droite si, et seulement si, ses coordonnées vérifient une équation de la droite.
- La droite d'équation $y = ax + b$ a pour coefficient directeur a.

1° Par hypothèse, D_1 a une équation de la forme $y = 2x + b$.
De plus $A\ (1, 3) \in D_1$, donc ses coordonnées $(x = 1, y = 3)$ vérifient l'équation de D_1.
On obtient $3 = 2 + b$, d'où $b = 1$.

Conclusion : D_1 a pour équation $y = 2x + 1$.
Elle est représentée à la figure 8.

2° Les points B et C ont des abscisses différentes, donc la droite D_2 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est de la forme $y = ax + b$.

- **1re méthode :**

$B(-1, 3) \in D_2$, donc $3 = -a + b$ (1)

$C(2, 4) \in D_2$, donc $4 = 2a + b$ (2)

On résout le système formé par les équations (1) et (2).

En soustrayant membre à membre (1) de (2), on obtient $1 = 3a$, d'où $a = \frac{1}{3}$.

L'équation (1), par exemple, donne alors $b = 3 + a = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

Donc D_2 a pour équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

- **2e méthode :**

Posons $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.

Le coefficient directeur de $D_2 = (BC)$ est $a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$.

On a ici $a = \frac{4 - 3}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$.

Le calcul de b se fait alors comme au 1°.
Par exemple $B(-1, 3) \in D_2$, donc $3 = -a + b$.
D'où $b = 3 + a = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

La droite D_2 est représentée à la figure 8.

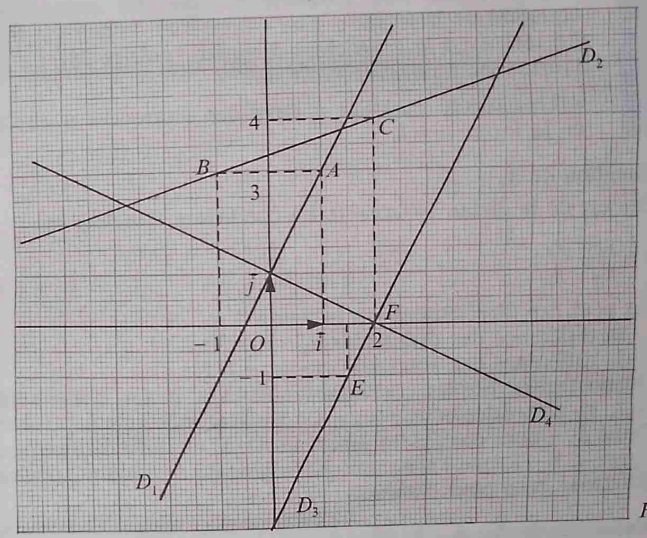


Fig. 8

3°

Deux droites parallèles ont même coefficient directeur.

D_3 a une équation de la forme $y = 2x + b$ car D_1 a pour coefficient directeur 2.

$E\left(\frac{3}{2}, -1\right) \in D_3$, donc $-1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + b$.

On obtient $-1 = 3 + b$, d'où $b = -4$.
D_3 a pour équation $y = 2x - 4$.
Elle est représentée à la figure 8.

4°

Dans un repère orthonormé, les droites d'équation $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont orthogonales, si, et seulement si, $aa' = -1$.

13 Soit x un réel. Quel est le plus grand des réels x ou x^2 ? Discuter suivant les valeurs de x.

14 Résoudre, dans $\mathbb{R}$:

1° $(x+2)(3-x) \geqslant 2(3-x)$,

2° $\dfrac{1-x^2}{x+5} \leqslant 0$.

Exercices 15 à 19. Fonctions affines par intervalles

15 **Tarif postal**

Voici une partie du tarif postal en vigueur, en 1990, pour une lettre :

Jusqu'à	20 g	50 g	100 g	250 g
Tarif	2,30 F	3,80 F	5,70 F	12,00 F

Représenter graphiquement la fonction qui, à la masse m d'une lettre ($0 < m \leqslant 250$), associe le tarif t correspondant.

16 Soit f la fonction affine par intervalles définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty, -1], & f(x) = 3 \\ \text{si } x \in]-1, 2[, & f(x) = -x + 2 \\ \text{si } x \in [2, +\infty[, & f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

1° Calculer $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$.

2° Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

17

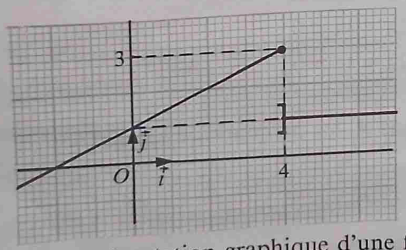


Fig. 6

La figure 6 donne la représentation graphique d'une fonction f, affine par intervalles.
Définir f, par simple lecture graphique.

18 1° Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto -2x + 1$.

2° Représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto |x+2|$.

3° On considère l'équation $-2x + 1 = |x+2|$.

a) Donner graphiquement une valeur approchée de la solution.

b) Calculer la valeur exacte de la solution.

19 Sur un axe, on considère les points A et B d'abscisses respectives 0 et 3.
A tout point M d'abscisse $x \in \mathbb{R}$, on associe la quantité $f(x) = MA + 2MB$.

1° Calculer $f(2)$, $f(4)$ et $f(-1)$.

2° Établir que $f(x) = |x| + 2|x-3|$, pour tout réel x.

3° Montrer que f est une fonction affine par intervalles.

4° *a)* Représenter graphiquement la fonction f.

b) Déterminer graphiquement les points M tels que $MA + 2MB = 9$.

CORRIGÉS

1 1°

Pour tracer une droite, il suffit de déterminer deux de ses points. On donne deux valeurs à x, par exemple, et on calcule les valeurs correspondantes de y.
Ici, D_1 a pour équation $y = 2x - 3$.
Si $x = 0$, $y = -3$ et si $x = 1$, $y = -1$ (par exemple).

La droite D_1 est représentée à la figure 7.

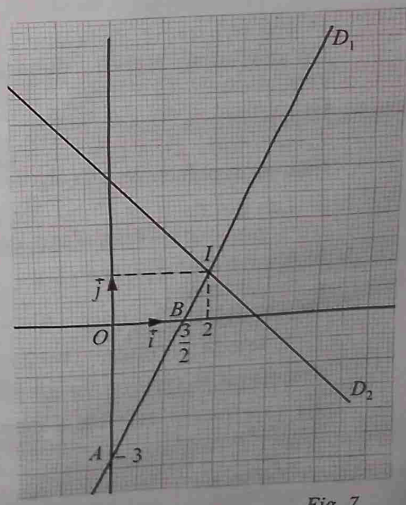


Fig. 7

DEPARTEMENT DES SCIENCES PHYSIQUES
République du Congo

4 Sur la figure 5, les points A, B, C, D ont pour coordonnées, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, des entiers relatifs.

1° Déterminer par lecture graphique une équation de chacune des droites (AB) et (CD).

2° Calculer les coordonnées de leur point d'intersection I.

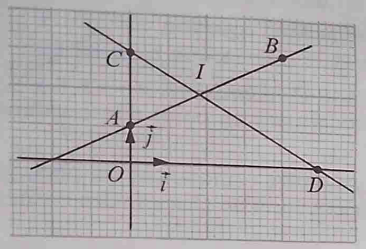


Fig. 5

5 **Essence ou diesel**

Le véhicule A, à essence, coûte 52 000 F à l'achat; le prix de revient d'un kilomètre (carburant et réparations) est de 1,10 F.
Le véhicule B, à moteur Diesel, coûte 64 000 F à l'achat; le prix de revient d'un kilomètre est de 0,80 F.

1° Exprimer, en fonction du nombre x de kilomètres parcourus :
— la dépense totale y_1, en francs, pour le véhicule A;
— la dépense totale y_2, en francs, pour le véhicule B.

2° Représenter graphiquement les fonctions

$x \mapsto y_1$ et $x \mapsto y_2$.

3° Déterminer graphiquement et par le calcul le nombre de kilomètres à partir duquel le véhicule B est plus avantageux que le véhicule A.

Exercices 6 à 9. Pourcentages, proportionnalité

6 Une entreprise augmente ses salariés de 8 %.

1° M. X gagne 6 000 F avant augmentation. Combien gagnera-t-il après?

2° M^me^ Y gagne 7 020 F après augmentation. Combien gagnait-elle avant?

7 1° La taxe téléphonique passe de 0,72 F à 0,77 F. Quel est le pourcentage d'augmentation?

2° Un article coûtant 160 F est soldé à 96 F.
Quel est le pourcentage de la remise?

8 **Coefficient multiplicateur**

1° Montrer qu'une augmentation de 8 % multiplie les prix par 1,08. On dit que 1,08 est le coefficient multiplicateur.

2° Déterminer les coefficients multiplicateurs correspondant à

a) une hausse de 5 %,

b) une baisse de 5 %,

c) des taxes de 18,6 %.

3° Quels sont les pourcentages de hausse ou de baisse correspondant aux coefficients multiplicateurs suivants

a) 1,04? *b*) 1,40? *c*) 0,75? *d*) 2?

4° Le litre de super augmente de 13 % puis de 9 %. Quel est le pourcentage global d'augmentation?

9 **Millièmes**

Les charges d'un immeuble s'élèvent à 3 450 F pour un trimestre. Elles sont réparties entre quatre copropriétaires, proportionnellement aux nombres 220, 280, 320 et 180. (Les nombres, appelés millièmes car leur somme est égale à 1 000, dépendent en général de la surface de chaque appartement.)

1° Combien chacun doit-il payer?

2° Représenter la fonction f qui, à un nombre x de millièmes quelconque ($0 \leqslant x \leqslant 1\,000$), associe les charges correspondantes.

Exercices 10 à 14. Signe de $ax + b$

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1° $(x-3)(-2x+1) \leqslant 0$.

2° $(x-3)(-2x+1) < 0$.

3° $(x-3)(-2x+1) \geqslant 0$.

11 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1° $\dfrac{x+1}{x-3} \leqslant 0$.

2° $\dfrac{x+1}{x-3} \leqslant 2$.

12 1° Déterminer l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 9$.

2° Déterminer l'ensemble S_2 des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 4$.

3° En déduire l'ensemble S des solutions de $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

On peut retrouver graphiquement le signe de $y = ax + b$ suivant que $a > 0$ ou $a < 0$, à l'aide de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ (fig. 3).

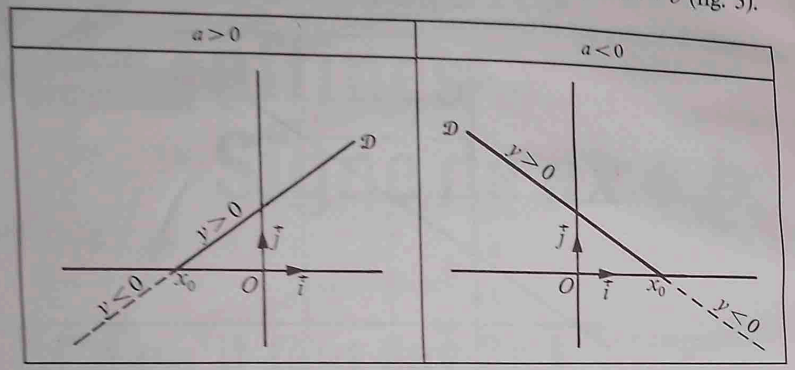


Fig. 3

III — FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

Voir les exercices 15 à 19.

EXERCICES

Exercices 1 à 5. Équations de droites

1 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

1° Tracer la droite D_1 d'équation $y = 2x - 3$.
Préciser ses points d'intersection avec les axes du repère.

2° Tracer la droite D_2 d'équation $y = -x + 3$.
Calculer les coordonnées du point d'intersection I de D_1 et D_2.

2 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.
Déterminer une équation de chacune des droites définies ci-dessous et représentez-les.

1° D_1 a pour coefficient directeur 2 et passe par $A(1, 3)$.

2° D_2 passe par $B(-1, 3)$ et $C(2, 4)$.

3° D_3 est parallèle à D_1 et passe par $E\left(\frac{3}{2}, -1\right)$.

4° D_4 est orthogonale à D_1 et passe par $F(2, 0)$.

3 Sur la figure 4, les points A, B, C, D, E, F, G, H ont pour coordonnées, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, des entiers relatifs.
Déterminer par lecture graphique une équation de chacune des droites Δ_1 à Δ_7.

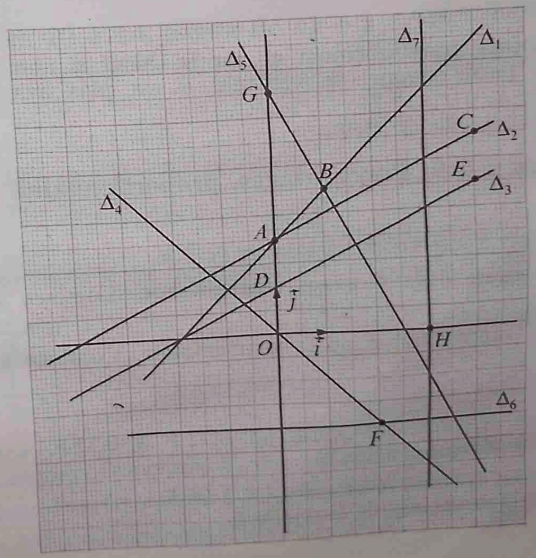


Fig. 4

2 Fonctions affines Signe de $ax + b$

Ce qu'il faut savoir

I — FONCTIONS AFFINES (RAPPELS)

1° Définition

Une fonction affine f est une fonction qui, à tout réel x, associe un réel $y = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On écrit $\boxed{y = f(x) = ax + b.}$

La représentation graphique de f, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ (fig. 1).

2° Coefficient directeur

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = ax + b$.
Le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est le réel a.
Pour tous points $N(x_N, y_N)$ et $P(x_P, y_P)$ de $\mathcal{D}$, on a (fig. 1) :

$$\boxed{a = \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}.}$$

Si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé, on dit que a est la **pente** de $\mathcal{D}$.

Remarques :

- Si $a = 0$, $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
- $\mathcal{D}$ ne peut pas être parallèle à l'axe des ordonnées.
- Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(1, a)$.

Théorème :
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

- $\boxed{\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow a = a'.}$
- Si le repère est orthonormé : $\boxed{\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow aa' = -1.}$

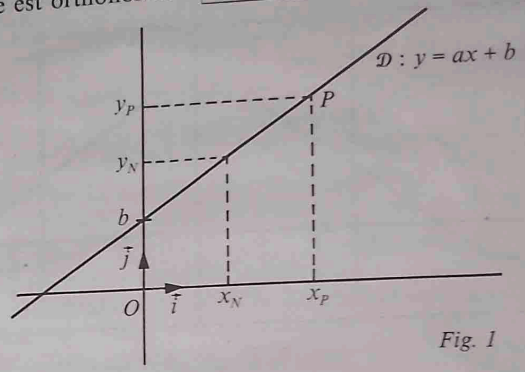


Fig. 1

3° Ordonnée à l'origine

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = ax + b$.
L'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$ est le réel b. C'est la valeur de y pour $x = 0$; elle représente l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des ordonnées (fig. 1).

Remarque : Si $b = 0$, $\mathcal{D}$ passe par l'origine (fig. 2). La fonction correspondante, telle que $y = f(x) = ax$ s'appelle une **fonction linéaire.** On dit aussi que y et x sont **proportionnels.**

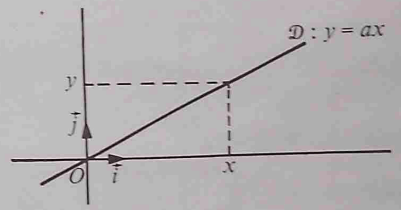


Fig. 2

II — SIGNE DE $ax + b$ $(a \neq 0)$

Soit a un réel non nul et b un réel quelconque.

L'équation $ax + b = 0$ admet une seule solution $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Le signe de $ax + b$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

VICTOR AUGAGNEUR
Pointe – Noire
DES SCIENCES PHY

D'où $S = S_1 \cap S_2 =]1\,;\,2[\cup]4\,;\,5[$ (voir fig. 9).

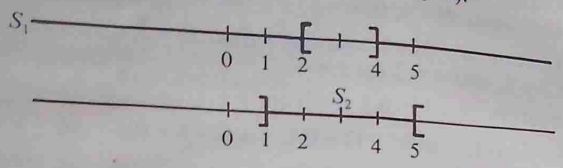


Fig. 9

20 Pour simplifier, on essaie de mettre en facteur sous chaque radical le plus grand carré d'entier possible.

• On a $A = \sqrt{11^2} - \sqrt{5^2} - \sqrt{6^2} = 11 - 5 - 6 = 0$.

• On se ramène à des entiers à l'aide d'une puissance de 10 et on a :

$B = \sqrt{144 \times 10^{-2}} - \sqrt{16 \times 10^{-2}} - \sqrt{9 \times 10^{-2}}$

$B = \sqrt{144} \times \sqrt{10^{-2}} - \sqrt{16} \times \sqrt{10^{-2}} - \sqrt{9} \times \sqrt{10^{-2}}$.

Comme $\sqrt{10^{-2}} = \sqrt{\dfrac{1}{100}} = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$, on obtient :

$B = 12 \times 10^{-1} - 4 \times 10^{-1} - 3 \times 10^{-1}$,
$B = (12 - 4 - 3) \times 10^{-1} = 5 \times 10^{-1}$,

soit $B = 0{,}5$.

• De même :

$C = \sqrt{9 \times 3} \times \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{24 \times 10^{-1}} \times \sqrt{6 \times 10^{-1}}$,

$C = \sqrt{9}\sqrt{3} \times \sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{4 \times 6}\sqrt{10^{-1}} \times \sqrt{6}\sqrt{10^{-1}}$,

$C = (\sqrt{9}\sqrt{4})(\sqrt{3}\sqrt{3}) + (\sqrt{4}\sqrt{6}\sqrt{6})(\sqrt{10^{-1}}\sqrt{10^{-1}})$.

On utilise : $\sqrt{k}\sqrt{k} = (\sqrt{k})^2 = k$, pour $k = 3$, $k = 6$, $k = 10^{-1}$, et on trouve :

$C = 3 \times 2 \times 3 + 2 \times 6 \times 10^{-1} = 18 + 1{,}2$,

soit $C = 19{,}2$.

• On a $D = 3\sqrt{4 \times 5} + 4\sqrt{9 \times 5} - 2\sqrt{16 \times 5}$,

$D = 3\sqrt{4}\sqrt{5} + 4\sqrt{9}\sqrt{5} - 2\sqrt{16}\sqrt{5}$,
$D = 3 \times 2 \times \sqrt{5} + 4 \times 3 \times \sqrt{5} - 2 \times 4 \times \sqrt{5}$
$D = 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = (6 + 12 - 8)\sqrt{5}$,

soit $D = 10\sqrt{5}$.

21 • On multiplie le numérateur et le dénominateur de a par $\sqrt{2}$ pour obtenir en dénominateur : $\sqrt{2}\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$, qui est entier.

D'où $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• De même pour b, avec $\sqrt{3}$.

Soit $b = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2 \times 3}}{(\sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

• Le dénominateur de c étant $2 - \sqrt{3}$, on le multiplie par la quantité **conjuguée** $2 + \sqrt{3}$ pour obtenir

$(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$,

qui est entier.

D'où $c = \dfrac{3}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{3 \times (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \dfrac{6 + 3\sqrt{3}}{1} = 6 + 3\sqrt{3}$.

• De même pour d.

Soit $d = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \dfrac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$,

$d = \dfrac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2(2 - \sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

VICTOR AUGAGNEUR
Pointe – Noire
DES SCIENCES PHY
République du Congo

On obtient $6\left(\frac{2x-1}{3}\right) < 6\left(\frac{x+1}{2}\right)$,
$2(2x-1) < 3(x+1)$,
$4x - 2 < 3x + 3$,
$4x - 3x < 2 + 3$,
$x < 5$.

L'ensemble des solutions est $]-\infty ; 5[$.

3° On résout de même chacune des deux inéquations. La première $3 - 2x < 0$ équivaut à $-2x < -3$; puis en divisant par -2 (qui est négatif) on obtient $x > \frac{-3}{-2}$, soit $x > \frac{3}{2}$.

La deuxième $3x - 1 \leqslant 4$ équivaut à $3x \leqslant 5$, c'est-à-dire à $x \leqslant \frac{5}{3}$.

Donc $\begin{cases} 3 - 2x < 0 \\ 3x - 1 \leqslant 4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \leqslant \frac{5}{3}. \end{cases}$

c'est-à-dire à $\frac{3}{2} < x \leqslant \frac{5}{3}$.

L'ensemble des solutions est $\left]\frac{3}{2} ; \frac{5}{3}\right]$.

16 Pour avoir la valeur absolue d'un nombre, il faut connaître son signe.

- Comme $1 < \sqrt{2}$, on a $1 - \sqrt{2} < 0$ et par suite :
$a = |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$.
- Comme $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, on a $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, donc $\frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$ et par suite :
$b = \left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right| = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$.
- Comme $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ et $3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$ (d'après la calculatrice par exemple), on a $\pi < \sqrt{10}$ donc $\pi - \sqrt{10} < 0$ et par suite :
$c = |\pi - \sqrt{10}| = -(\pi - \sqrt{10}) = -\pi + \sqrt{10} = \sqrt{10} - \pi$.
- Par définition 10^{-1} est le réel $\frac{1}{10}$, qui est positif, donc :
$d = |10^{-1}| = 10^{-1}$.

17 1° L'équation $|x| = 5$ équivaut à $d(x, 0) = 5$, c'est-à-dire à $x = -5$ ou $x = 5$ (voir p. 9).

2° La valeur absolue d'un réel étant positive, l'équation $|-x| = -5$, qui s'écrit aussi $d(-x, 0) = -5$, n'a pas de solution.

3° L'équation $|x - 3| = 1$ équivaut à $d(x, 3) = 1$, c'est-à-dire à $x = 3 - 1$ ou $x = 3 + 1$, soit $x = 2$ ou $x = 4$.

4° L'équation $|x + 1| = 0{,}1$ équivaut à
$|x - (-1)| = 0{,}1$, $d(x, -1) = 0{,}1$, $x = -1 - 0{,}1$ ou $x = -1 + 0{,}1$,
soit $x = -1{,}1$ ou $x = -0{,}9$.

5° De même $|2x - 0{,}5| = 10^{-2}$ équivaut à
$d(2x ; 0{,}5) = 10^{-2}$,
$2x = 0{,}5 - 10^{-2}$ ou $2x = 0{,}5 + 10^{-2}$,
$2x = 0{,}49$ ou $2x = 0{,}51$,
soit $x = 0{,}245$ ou $x = 0{,}255$.

18 1° *a*) L'inéquation $|x| \leqslant 5$ équivaut à $d(x, 0) \leqslant 5$, c'est-à-dire à $-5 \leqslant x \leqslant 5$ (voir p. 10).
L'ensemble des solutions est $[-5 ; 5]$.

b) Comme $|x| > 5$ est le contraire de $|x| \leqslant 5$, les solutions sont les réels x tels que
$x < -5$ ou $x > 5$.
L'ensemble des solutions est $]-\infty ; -5[\cup]5 ; +\infty[$.

2° *a*) La valeur absolue d'un réel étant positive, elle ne peut pas être inférieure à un réel négatif; l'inéquation $|x| < -5$ n'a donc pas de solution.

b) De même, la valeur absolue d'un réel est toujours supérieure à un réel négatif; l'inéquation $|x| > -5$ est donc vérifiée par tout réel x.
L'ensemble des solutions est $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

19 1° L'ensemble S_1 des solutions de $1 < |x - 3|$ est l'ensemble des réels x tels que :
$1 < d(x, 3)$, qui est le contraire de $d(x, 3) \leqslant 1$. Donc
$x < 3 - 1$ ou $x > 3 + 1$, $x < 2$ ou $x > 4$.
Soit $S_1 =]-\infty, 2[\cup]4 ; +\infty[$.

2° L'ensemble S_2 des solutions de $|x - 3| < 2$ est l'ensemble des réels x tels que :
$d(x, 3) < 2$, $3 - 2 < x < 3 + 2$, $1 < x < 5$.
Soit $S_2 =]1 ; 5[$.

3° Comme $1 < |x - 3| < 2$ signifie $1 < |x - 3|$ et $|x - 3| < 2$, l'ensemble S des solutions est l'ensemble des réels x qui appartiennent à la fois à S_1 et à S_2.

6 - 2017

Pointe – Noire
République du Congo

• En ajoutant 3 à chacun des membres de cet encadrement, on obtient des nombres rangés dans le même sens :

$3 - 2{,}237 \leqslant 3 - a \leqslant 3 - 2{,}236$,

soit $0{,}763 \leqslant 3 - a \leqslant 0{,}764$.

12 1° Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d, \end{cases}$ alors $\begin{cases} a + c \leqslant b + c \\ b + c \leqslant b + d \end{cases}$ et par suite $a + c \leqslant b + d$.

On montre ainsi qu'en ajoutant membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.

2° • On applique le résultat précédent.

Comme $\begin{cases} 2{,}51 \leqslant A \leqslant 2{,}52 \\ 3{,}17 \leqslant B \leqslant 3{,}18, \end{cases}$

on a $2{,}51 + 3{,}17 \leqslant A + B \leqslant 2{,}52 + 3{,}18$,

soit $5{,}68 \leqslant A + B \leqslant 5{,}7$.

• On procède de même pour $A - B$, qui s'écrit encore $A + (-B)$, avec un encadrement de A et de $-B$. Comme $3{,}17 \leqslant B \leqslant 3{,}18$, on a $-3{,}17 \geqslant -B \geqslant -3{,}18$ soit $-3{,}18 \leqslant -B \leqslant -3{,}17$.

Par addition membre à membre de

$\begin{cases} 2{,}51 \leqslant A \leqslant 2{,}52 \\ -3{,}18 \leqslant -B \leqslant -3{,}17, \end{cases}$

on trouve

$2{,}51 - 3{,}18 \leqslant A - B \leqslant 2{,}52 - 3{,}17$,

soit $-0{,}67 \leqslant A - B \leqslant -0{,}65$.

13 1° Si $\begin{cases} a \leqslant b \text{ et } c > 0 \\ c \leqslant d \text{ et } b > 0, \end{cases}$ alors $\begin{cases} ac \leqslant bc \\ bc \leqslant bd \end{cases}$ et par suite $ac \leqslant bd$.

On montre ainsi qu'en multipliant membre à membre deux inégalités de même sens dont les membres sont strictement positifs, on obtient une inégalité de même sens.

2° On applique le résultat précédent.

Comme $\begin{cases} 2{,}51 \leqslant A \leqslant 2{,}52 \\ 3{,}17 \leqslant B \leqslant 3{,}18, \end{cases}$

on a $2{,}51 \times 3{,}17 \leqslant AB \leqslant 2{,}52 \times 3{,}18$

soit $7{,}956\,7 \leqslant AB \leqslant 8{,}013\,6$.

On en déduit que $7{,}95 \leqslant AB \leqslant 8{,}02$.

14 1° Voir la figure 5.

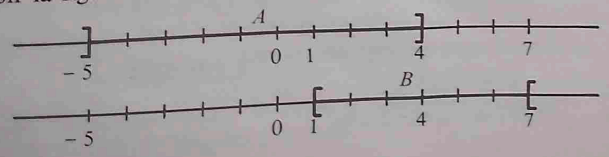


Fig. 5

On a : $A \cap B = [1\,;\,4]$ et $A \cup B =]-5\,;\,7[$.

2° Voir la figure 6.

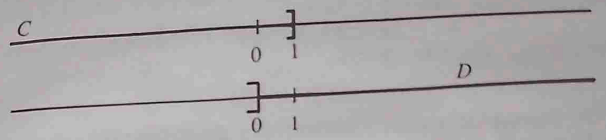


Fig. 6

On a : $C \cap D =]0\,;\,1]$ et $C \cup D =]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$.

3° Voir la figure 7.

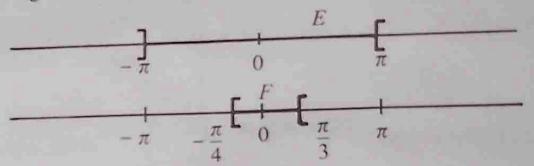


Fig. 7

On remarque que : $F \subset E$ et on a :

$E \cap F = F = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$ et $E \cup F = E =]-\pi\,;\,\pi[$.

4° Voir la figure 8.

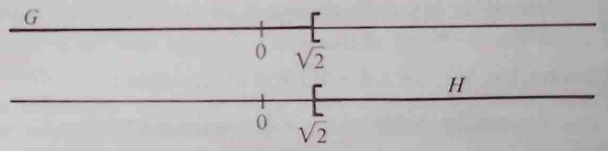


Fig. 8

On a $G \cap H = \varnothing$ et $G \cup H =]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$.

15 Pour résoudre une inéquation du premier degré, il faut regrouper les termes inconnus dans un membre et les constantes dans l'autre.

1° L'inéquation $2x - 5 \geqslant 0$ équivaut à $2x \geqslant 5$. En multipliant chaque membre par $\frac{1}{2}$ (qui est positif), on trouve $x \geqslant \frac{5}{2}$.

L'ensemble des solutions est $\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2° On peut réduire au même dénominateur, qui est 6, chacun des membres. Il est un peu plus rapide de multiplier chaque membre par 6 (qui est positif).

DÉPARTEMENT DES SCIENCES PHYSIQUES
République du Congo

Pour $x \neq 2$ et $x \neq -1$, on peut appliquer le résultat du 1°.
L'équation équivaut alors à $(x+3)(x+1) = (x-2)(x-5)$.
On développe :

$x^2 + 3x + x + 3 = x^2 - 2x - 5x + 10$,
$4x + 3 = -7x + 10$,
$11x = 7$.

D'où $x = \frac{7}{11}$.

Cette valeur est bien solution, car elle est différente de 2 et de -1.

7 1° On applique la définition. On obtient :

$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$; $\quad 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$;

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $\quad (-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$;

$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$; $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$;

$(-2)^7 = \underbrace{(-2)(-2)\ldots(-2)}_{7 \text{ facteurs}}$.

Le produit de sept facteurs négatifs est négatif, donc :
$(-2)^7 = -(2^7) = -128$.

2°

On applique les règles de calcul relatives aux puissances.

$X = \frac{a^2 \times a^{5\times(-2)} \times a^4}{a^{3\times 2} \times a^{-4}} \times (a^{1-(-2)})^2 = \frac{a^2 \times a^{-10} \times a^4}{a^6 \times a^{-4}} \times (a^3)^2$,

$X = \frac{a^{2-10+4}}{a^{6-4}} \times a^6 = \frac{a^{-4} \times a^6}{a^2} = a^{-4+6-2} = a^0 = 1$.

8

• Pour mettre A sous la forme demandée il faut remarquer que :
$4^4 = (2^2)^4 = 2^8$,
$6^6 = (2 \times 3)^6 = 2^6 \times 3^6$;
$10^{10} = (2 \times 5)^{10} = 2^{10} \times 5^{10}$.

On a alors $A = 2^2 \times 3^3 \times 2^8 \times 5^5 \times (2^6 \times 3^6) \times (2^{10} \times 5^{10})$,
$A = 2^{2+8+6+10} \times 3^{3+6} \times 5^{5+10}$,
$A = 2^{26} \times 3^9 \times 5^{15}$.

• Pour mettre B sous la forme demandée, il faut le décomposer en produit de facteurs premiers.

48 600	2
24 300	2
12 150	2
6 075	3
2 025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

D'où $B = 2^3 \times 3^5 \times 5^2$.

9 On applique la définition et les règles de calcul relatives aux puissances de 10.

$A = 10^3 + 10^2 + 10 + 10^{-2} = 1\,000 + 100 + 10 + 0{,}01$
$A = 1\,110{,}01$
$B = \frac{0{,}000\,174}{0{,}03} = \frac{174 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-2}} = \frac{174}{3} \times 10^{-6+2}$
$B = 58 \times 10^{-4} = 0{,}005\,8$
$C = \frac{1\,495 \times 10^{-3}}{125 \times 10^{-3}} \times 10^{-3} \times (25 \times 10^{-1}) \times 10^{-4}$
$C = \frac{5 \times 299}{5 \times 25} \times 25 \times 10^{-3-1-4}$
$C = 299 \times 10^{-8} = 0{,}000\,002\,99$.

10 En notation scientifique, on a :
$X = 253\,000 = 2{,}53 \times 10^5$
$Y = \frac{1}{40\,000} = 0{,}000\,025 = 2{,}5 \times 10^{-5}$
$Z = 25{,}37 \times 10^9 = (2{,}537 \times 10) \times 10^9 = 2{,}537 \times 10^{10}$.

11

• En multipliant par 2 (réel positif) chacun des membres de la double inégalité donnée, on obtient des nombres rangés dans le même sens :

$2 \times 2{,}236 \leqslant 2a \leqslant 2 \times 2{,}237$,

soit $\quad 4{,}472 \leqslant 2a \leqslant 4{,}474$.

• Par contre, en les multipliant par -1 (réel négatif), on obtient des nombres rangés en sens contraire :

$-2{,}236 \geqslant -a \geqslant -2{,}237$,

soit $\quad -2{,}237 \leqslant -a \leqslant -2{,}236$.

• De même, $B = \dfrac{4{,}5}{3{,}5} = \dfrac{45}{35} = \dfrac{5 \times 9}{5 \times 7} = \dfrac{9}{7}$.

• On en déduit que :

$$C = \frac{\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{1{,}2}}{\dfrac{4{,}5}{3{,}5} - 0{,}4} = \frac{\dfrac{1}{5} - \dfrac{5}{3}}{\dfrac{9}{7} - \dfrac{4}{10}}.$$

Le numérateur de C est $\dfrac{1}{5} - \dfrac{5}{3} = \dfrac{3 - 25}{15} = -\dfrac{22}{15}$.

Le dénominateur de C est $\dfrac{9}{7} - \dfrac{4}{10} = \dfrac{9}{7} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{45 - 14}{35} = \dfrac{31}{35}$.

D'où $C = \dfrac{-\dfrac{22}{15}}{\dfrac{31}{35}} = -\dfrac{22}{15} \times \dfrac{35}{31}$.

En simplifiant par 5, on obtient $C = -\dfrac{22}{3} \times \dfrac{7}{31} = -\dfrac{154}{93}$.

4

Pour résoudre une équation du premier degré, il faut regrouper les inconnues dans un membre et les constantes dans l'autre.

1° L'équation proposée équivaut successivement à :

$5x - 2(x - 2x - 2) = \dfrac{1}{2}$, $5x - 2(-x - 2) = \dfrac{1}{2}$,

$5x + 2x + 4 = \dfrac{1}{2}$, $7x = \dfrac{1}{2} - 4$, $7x = -\dfrac{7}{2}$.

En multipliant chaque membre par $\dfrac{1}{7}$, on trouve $x = -\dfrac{7}{2} \times \dfrac{1}{7}$, soit $x = -\dfrac{1}{2}$.

2°

On peut réduire au même dénominateur, qui est 6, chacun des termes. Il est plus rapide de multiplier chaque membre de l'équation par 6.

On obtient $6\left(\dfrac{x+3}{2}\right) - 6\left(\dfrac{4x-3}{3}\right) = 6 - 6\left(\dfrac{5x-12}{6}\right)$,

$3(x + 3) - 2(4x - 3) = 6 - (5x - 12)$,
$3x + 9 - 8x + 6 = 6 - 5x + 12$,
$3x - 8x + 5x = -9 - 6 + 6 + 12$,
$0x = 3$.

Il n'y a pas de solution.

3° Multiplions chaque membre de l'équation par 10. On obtient :

$5(x + 1) - 2(x - 1) - 7 = 3x$,
$5x + 5 - 2x + 2 - 7 = 3x$,
$3x = 3x$.

Ceci est vrai pour tout x. L'ensemble des solutions est ℝ.

5

Pour chaque équation, il est conseillé de transposer tous les termes dans un même membre et de factoriser avant de conclure.

1° En transposant dans le premier membre, on obtient :

$x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$,

c'est-à-dire : $(x - 3)(x - 2) = 0$, après avoir mis $x - 2$ en facteur.
Un produit étant nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, on trouve : $x - 3 = 0$ ou $x - 2 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = 2$.

2° De même, l'équation proposée équivaut à :

$(3x - 5)^2 - (2x - 3)^2 = 0$.

Comme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, on obtient :

$[(3x - 5) - (2x - 3)][(3x - 5) + (2x - 3)] = 0$,
$(3x - 5 - 2x + 3)(3x - 5 + 2x - 3) = 0$,
$(x - 2)(5x - 8) = 0$,
$x - 2 = 0$ ou $5x - 8 = 0$,
soit $x = 2$ ou $x = \dfrac{8}{5}$.

3° L'équation proposée équivaut à :

$4x^3 - 4x^2 + x = 0$, c'est-à-dire à $x(4x^2 - 4x + 1) = 0$.

On reconnaît dans la parenthèse le développement de $(2x - 1)^2$ et on obtient :

$x(2x - 1)^2 = 0$, $x = 0$ ou $(2x - 1)^2 = 0$,
$x = 0$ ou $2x - 1 = 0$,

c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

6

1° En réduisant au même dénominateur, on trouve que :

$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ équivaut à $\dfrac{ab'}{a'b'} = \dfrac{a'b}{a'b'}$ donc à $ab' = a'b$.

On dit que « les produits en croix » sont égaux.

2° Les expressions données ne sont pas définies si $x - 2 = 0$ ou si $x + 1 = 0$, c'est-à-dire si $x = 2$ ou $x = -1$.

Pointe – Noire
ENCES PHYSIQ

17 Écrire à l'aide de la distance, puis résoudre dans ℝ chacune des équations suivantes :

1° $|x| = 5$.
2° $|-x| = -5$.
3° $|x - 3| = 1$.
4° $|x + 1| = 0{,}1$.
5° $|2x - 0{,}5| = 10^{-2}$.

18 Écrire à l'aide de la distance, puis résoudre dans ℝ chacune des inéquations suivantes (donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles) :

1° *a*) $|x| \leqslant 5$. *b*) $|x| > 5$.
2° *a*) $|x| < -5$. *b*) $|x| > -5$.

19 Procéder comme dans l'exercice précédent pour résoudre dans ℝ :

1° $1 < |x - 3|$.
2° $|x - 3| < 2$.
3° $1 < |x - 3| < 2$.

Exercices 20 et 21 : calculs avec des radicaux.

20 Sans utiliser de calculatrice, écrire chacun des réels suivants sous une forme plus simple :

$A = \sqrt{121} - \sqrt{25} - \sqrt{36}$.
$B = \sqrt{1{,}44} - \sqrt{0{,}16} - \sqrt{0{,}09}$.
$C = \sqrt{27} \times \sqrt{12} + \sqrt{2{,}4} \times \sqrt{0{,}6}$.
$D = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80}$.

21 Écrire les réels suivants sous une forme plus simple, sans dénominateur ou avec un dénominateur entier :

$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $b = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $c = \dfrac{3}{2 - \sqrt{3}}$; $d = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$.

CORRIGÉS

1 • Pour calculer A, on réduit au même dénominateur, qui est ici 6 :

$A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$.

• On a $B = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{11}{6} = \dfrac{2 \times 2 \times 11}{5 \times 2 \times 3} = \dfrac{2 \times 11}{5 \times 3} = \dfrac{22}{15}$ (on a simplifié par 2).

• On a $C = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{11}{6}} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{6}{11} = \dfrac{24}{55}$.

• On a $D = (-4)\left(2 - \dfrac{1}{3}\right) = (-4)\left(\dfrac{6}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = (-4) \times \dfrac{5}{3} = -\dfrac{20}{3}$.

• On a $E = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{5} = \dfrac{\frac{2-3}{4}}{5} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{5}$.

Diviser par 5 revient à multiplier par $\dfrac{1}{5}$ (inverse de 5).

D'où $E = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{20}$.

2 Pour calculer X, calculons d'abord :

$1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$;

$\dfrac{7}{6} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{6}$; $\dfrac{4}{5} - 1 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{5}{5} = -\dfrac{1}{5}$.

D'où $X = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \times \dfrac{\frac{5}{6}}{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{6} \times \left(-\dfrac{5}{1}\right)$.

En simplifiant par 2, on obtient $X = -\dfrac{25}{18}$.

3 • On peut multiplier le numérateur et le dénominateur de A par 10. On obtient :

$A = \dfrac{2}{1{,}2} = \dfrac{2 \times 10}{1{,}2 \times 10} = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{5}{3}$.

Année Scol 20

2° Résoudre dans ℝ l'équation $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-5}{x+1}$.

7 1° Calculer 2^{-1}, 2^3, 2^{-3}, $(-2)^3$, $(-2)^{-3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $(-2)^7$.

2° Soit a un réel non nul. Simplifier l'expression :

$$X = \frac{a^2 \times (a^5)^{-2} \times a^4}{(a^3)^2 \times a^{-4}} \times \left(\frac{a}{a^{-2}}\right)^2.$$

8 Mettre chacun des nombres suivants sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, où a, b, c sont des entiers :

$$A = 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times 6^6 \times 10^{10}; \quad B = 48\,600.$$

9 Écrire sous forme décimale chacun des nombres suivants, puis vérifier le résultat à la calculatrice :

$A = 10^3 + 10^2 + 10 + 10^{-2}$.

$B = \frac{0{,}000\,174}{0{,}03}$.

$C = \frac{1{,}495}{0{,}125} \times 10^{-3} \times \frac{2{,}5}{10^4}$.

10 **Notation scientifique :**

La notation scientifique d'un décimal est de la forme :

$d \times 10^n$

- d : décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule
- n : entier relatif

Écrire en notation scientifique chacun des nombres :

$X = 253\,000$; $Y = \frac{1}{40\,000}$ et $Z = 25{,}37 \times 10^9$.

Exercices 11 à 13 : encadrements.

11 Sachant que : $2{,}236 \leqslant a \leqslant 2{,}237$, trouver le meilleur encadrement de chacun des réels suivants :

$2a$; $-a$; $3-a$.

12 **Encadrement d'une somme**

1° Montrer que si a, b, c, d sont des réels tels que : $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.

2° Application :
on donne : $2{,}51 \leqslant A \leqslant 2{,}52$ et $3{,}17 \leqslant B \leqslant 3{,}18$; encadrer $A + B$ et $A - B$.

13 **Encadrement d'un produit**

1° Montrer que si a, b, c, d sont des réels strictement positifs tels que : $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors : $ac \leqslant bd$.

2° *Application :*
on donne : $2{,}51 \leqslant A \leqslant 2{,}52$ et $3{,}17 \leqslant B \leqslant 3{,}18$; encadrer AB par deux décimaux comportant deux chiffres après la virgule.

Exercices 14 à 19 : intervalles, valeur absolue.

14 Dans chacun des cas suivants, représenter sur une droite graduée les intervalles donnés, puis déterminer leur intersection et leur réunion :

1° $A =]-5\,;\,4]$ et $B = [1\,;\,7[$.

2° $C =]-\infty\,;\,1]$ et $D =]0\,;\,+\infty[$.

3° $E =]-\pi\,;\,\pi[$ et $F = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$.

4° $G =]-\infty\,;\,\sqrt{2}[$ et $H = [\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

15 Résoudre, dans ℝ, chacune des inéquations et le système suivant (donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle) :

1° $2x - 5 \geqslant 0$.

2° $\frac{2x-1}{3} < \frac{x+1}{2}$.

3° $\begin{cases} 3 - 2x < 0 \\ 3x - 1 \leqslant 4. \end{cases}$

16 Écrire plus simplement, c'est-à-dire sans les barres de valeur absolue, chacun des réels suivants :

$a = |1 - \sqrt{2}|$; $b = \left|\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right|$;

$c = |\pi - \sqrt{10}|$; $d = |10^{-1}|$.

5° Inéquation $|x-a| \leqslant r$

Avec les mêmes notations qu'en 4°, comme $|x-a| \leqslant r$ équivaut à $AM \leqslant r$, on a :

$$|x-a| \leqslant r \Leftrightarrow a-r \leqslant x \leqslant a+r$$ (fig. 4).

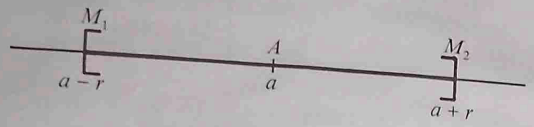


Fig. 4

V — RACINE CARRÉE

1° Définition

Soit k un réel positif ou nul.

$\sqrt{k}$ désigne le réel positif ou nul dont le carré est k.
Autrement dit :

pour tout $k \geqslant 0$, $\sqrt{k} \geqslant 0$ et $(\sqrt{k})^2 = k$.

2° Équation $x^2 = a$ $(a \in \mathbb{R})$

- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ admet une solution : 0.
- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions opposées : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

3° Autres propriétés

- Pour tout réel k, $\sqrt{k^2} = |k|$.
- Pour tout $k \geqslant 0$ et tout $k' \geqslant 0$, $\sqrt{k} \cdot \sqrt{k'} = \sqrt{kk'}$.
- Pour tout $k \geqslant 0$ et tout $k' > 0$, $\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}} = \sqrt{\dfrac{k}{k'}}$.

EXERCICES

Exercices 1 à 10 : calculs dans ℝ.

1 Calculer les réels suivants :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad B = \frac{4}{5} \times \frac{11}{6}; \quad C = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{11}{6}};$$

$$D = (-4)\left(2 - \frac{1}{3}\right); \quad E = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{5}.$$

2 Calculer $X = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \times \dfrac{\frac{7}{6} - \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} - 1}$.

3 Écrire sous la forme d'une fraction irréductible chacun des rationnels suivants :

$$A = \frac{2}{1{,}2}; \quad B = \frac{4{,}5}{3{,}5}; \quad C = \frac{\frac{1}{5} - \frac{2}{1{,}2}}{\frac{4{,}5}{3{,}5} - 0{,}4}.$$

4 Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1° $5x - 2[x - 2(x+1)] = \frac{1}{2}$.

2° $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{4x-3}{3} = 1 - \dfrac{5x-12}{6}$.

3° $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x-1}{5} - 0{,}7 = \dfrac{3x}{10}$.

5 Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1° $x(x-2) = 3(x-2)$.

2° $(3x-5)^2 = (2x-3)^2$.

3° $4x^3 + x = 4x^2$.

6 1° Soient a, b, a', b' des réels, a' et b' non nuls ; démontrer que $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ équivaut à $ab' = a'b$.

EE VICTOR AUGAGNEUR
Pointe – Noire
République du Congo
SCIENCES PHYSIQ

Le produit de deux réels de même signe est strictement positif.
Le produit de deux réels de signes contraires est strictement négatif.
La relation d'ordre est la relation $\geqslant$. Par définition :

$x \geqslant y$ équivaut à $x - y \geqslant 0$.

2° Propriétés de la relation $\geqslant$

Quels que soient les réels x, y, z, on a :

$x \geqslant x$,
si $x \geqslant y$ et $y \geqslant x$, alors $x = y$,
si $x \geqslant y$ et $y \geqslant z$, alors $x \geqslant z$.

$x \geqslant y$ équivaut à $x + z \geqslant y + z$,
si $x \geqslant y$ et $z \geqslant 0$, alors $xz \geqslant yz$,
si $x \geqslant y$ et $z \leqslant 0$, alors $xz \leqslant yz$.

3° Intervalles

Soient a et b des réels tels que $a \leqslant b$.
Un intervalle est l'ensemble ℝ, noté $]-\infty\,;+\infty[$, ou l'un des sous-ensembles suivants :

Ensemble des réels x tels que	noté
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a\,;b]$
$a \leqslant x < b$	$[a\,;b[$
$a < x \leqslant b$	$]a\,;b]$
$a < x < b$	$]a\,;b[$

Ensemble des réels x tels que	noté
$a \leqslant x$	$[a\,;+\infty[$
$a < x$	$]a\,;+\infty[$
$x \leqslant b$	$]-\infty\,;b]$
$x < b$	$]-\infty\,;b[$

IV — VALEUR ABSOLUE

1° Définition

Soit x un réel

si	$x \geqslant 0$,	alors	$\lvert x\rvert = x$,
si	$x \leqslant 0$,	alors	$\lvert x\rvert = -x$.

2° Propriétés

Quels que soient les réels x et y, on a :

$\lvert x\rvert \geqslant 0$,	$\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$,
$\lvert x\rvert = 0$ équivaut à $x = 0$,	$\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ si $y \neq 0$,
$\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$.	$\lvert x + y\rvert \leqslant \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$.

3° Distance

La distance des réels x et y est, par définition :

$$d(x, y) = \lvert x - y\rvert = \lvert y - x\rvert .$$

Sur la droite $\mathcal{D}$ de repère $(O, \vec{i})$, soient A et B les points d'abscisses respectives x et y. On a :

$$d(x, y) = AB.$$

Exemple : voir figure 2

$d(-2\,;0) = \lvert -2\rvert = 2 = OA$

$d(-2\,;5) = \lvert -2 - 5\rvert = \lvert -7\rvert = 7 = AB.$

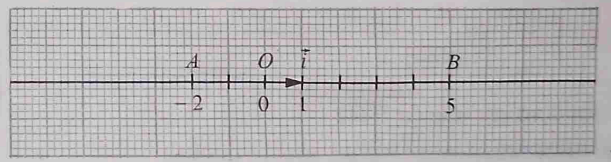


Fig. 2

4° Équation $\lvert x - a\rvert = r$

Soit a un réel et r un réel strictement positif. On note A le point d'abscisse a et M le point d'abscisse x sur une droite de repère $(O, \vec{i})$.

Comme : $\lvert x - a\rvert = r$ équivaut à $AM = r$, on a :

$$\lvert x - a\rvert = r \Leftrightarrow x = a - r \text{ ou } x = a + r$$ (fig. 3).

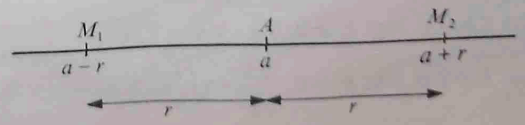


Fig. 3

Pointe – Noire
IENCES PHYSIQUES
République du Congo

II — CALCULS DANS ℝ

1° Opérations

L'addition et la multiplication vérifient les propriétés suivantes :

Quels que soient les réels a, b, c,	
$a+b=b+a$; $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a+0=a$; il existe un seul réel qui, ajouté à a, donne 0 : c'est l'opposé de a, que l'on note $-a$.	$ab=ba$; $a(bc)=(ab)c$; $a\times 1=a$; si a est différent de 0, il existe un seul réel qui, multiplié par a, donne 1 : c'est l'inverse de a, que l'on note $\frac{1}{a}$. **Le réel 0 n'a pas d'inverse.**

La multiplication est distributive par rapport à l'addition c'est-à-dire que :

Quels que soient les réels a, b, c, on a $a(b+c)=ab+ac$.

2° Règles de calcul

Soient a, b, c, d, x des réels.
Par définition, on pose :

$a-b=a+(-b)$, $\qquad \frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$.

On a alors, notamment, les propriétés suivantes :

	Identités remarquables
$-(-a)=a$, $-(a+b)=-a-b$, $-(a-b)=-a+b$, $(-a)b=a(-b)=-ab$ $a+x=b$ équivaut à : $x=b-a$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$ab=0$ équivaut à $a=0$ ou $b=0$, si $a\neq 0$, alors $ax=b$ équivaut à $x=\frac{b}{a}$.

$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$; $\qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$.	
$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$,	$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$, $\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

3° Puissance d'un réel a non nul

Soit n un entier naturel non nul. Par définition :

$a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ facteurs}}$ $\qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $\qquad a^0=1$.

Ce tableau définit donc les puissances de a lorsque l'exposant est un entier relatif.
Quels que soient les entiers relatifs p et q, quels que soient les réels non nuls a et b, on a :

$a^p\times a^q=a^{p+q}$ $(a^p)^q=a^{pq}$	
$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$, $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$,	$(ab)^p=a^pb^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$.

III — RELATION D'ORDRE

1° Rappels

Un réel x non nul est soit strictement positif (on écrit $x>0$), soit strictement négatif (on écrit $x<0$).

Année Scolaire:2016 - 2017

EE VICTOR AUGAGNEUR
Pointe – Noire
République du Congo
ENT DES SCIENCES PHYSIQUES

Sommaire

CHAPITRE 1 : **L'ensemble ℝ des réels** 5
Exercices 11
Corrigés 15

CHAPITRE 2 : **Fonctions affines** 26
Exercices 29
Corrigés 33

CHAPITRE 3 : **Systèmes linéaires** 53
Exercices 58
Corrigés 61

CHAPITRE 4 : **Statistiques** 72
Exercices 79
Corrigés 82

CHAPITRE 5 : **Fonctions de ℝ dans ℝ** 89
Exercices 98
Corrigés 103

CHAPITRE 6 : **Vecteurs du plan** 117
Exercices 124
Corrigés 128

CHAPITRE 7 : **Bases et repères du plan** 139
Exercices 144
Corrigés 148

CHAPITRE 8 : **Quelques transformations du plan** 162
Exercices 166
Corrigés 171

CHAPITRE 9 : **Trigonométrie** 186
Exercices 193
Corrigés 197

CHAPITRE 10 : **Géométrie dans l'espace** 210
Exercices 215
Corrigés 219

Index 229

1 L'ensemble ℝ des réels

Ce qu'il faut savoir

I — RAPPELS

• ℕ désigne l'ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3...

• ℤ désigne l'ensemble des entiers relatifs : ..., − 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3...

• 𝔻 désigne l'ensemble des décimaux, c'est-à-dire des nombres ayant un développement décimal limité.

Exemples : $0{,}5 \in \mathbb{D}$; $-23{,}791\,2 \in \mathbb{D}$; $-23 \in \mathbb{D}$...

• ℚ désigne l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire des nombres de la forme

$\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

Exemples : $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; $-\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$; $8 \in \mathbb{Q}$; $\frac{117}{-7} \in \mathbb{Q}$...

Les rationnels ne suffisent pas pour mesurer, par exemple :

— la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 (qui est égale à $\sqrt{2}$),

— le périmètre d'un cercle de diamètre 1 (qui est égal à π).

• ℝ désigne l'ensemble des réels, c'est-à-dire des nombres qui permettent de mesurer toutes les longueurs et leurs opposés.

Soit $\mathcal{D}$ une droite muni d'un repère $(O, \vec{i})$ (fig. 1).
A tout réel x correspond le point M de $\mathcal{D}$ d'abscisse x.
Réciproquement, à tout point M de $\mathcal{D}$, on peut associer son abscisse $x \in \mathbb{R}$ (voir chapitre 7, p. 139).

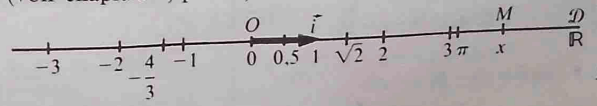


Fig. 1

• On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Les réels non rationnels sont dits irrationnels.

Année Scolaire:2016 - 2017

© BORDAS, Paris, 1990
ISBN 2-04-019683-8
ISSN 0181-6020

" Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration "

Avant-propos

Cette nouvelle édition est conforme au programme de septembre 1990 pour les classes de Seconde.
Chaque chapitre de cet ouvrage est divisé en trois parties :

- **Ce qu'il faut savoir**
Il s'agit d'un résumé comportant les résultats essentiels.

- **Des énoncés d'exercices**
Ces exercices ont été conçus pour montrer les principaux aspects des notions à acquérir.
Ils sont classés par thèmes.

- **Les corrigés détaillés de tous les exercices**
Ces corrigés sont souvent enrichis de *conseils de méthode* (ou de rappels) pour éclairer la démarche suivie.
Ces conseils sont repérés par un bandeau vertical dans la marge.
Lorsque plusieurs méthodes sont possibles, elles sont généralement indiquées dans la solution.

Bien entendu, avant de se référer aux corrigés, il reste nécessaire de consacrer un temps suffisant à la recherche de l'exercice choisi.

Nous espérons qu'ainsi conçu, ce «Joker» pourra rendre service à tous ses utilisateurs.

Les auteurs

Année Scolaire:2016 - 2017

DEPARTEMENT DES SCIENCES PHY

17-04-2

NGOKA D-MACAIRE

JOKERS

MATHÉMATIQUES

2de

Michel Szwarcbaum
Lycée de Villepinte (93)

Bernadette Dedieu
Lycée Honoré de Balzac (Issoudun)

Exercices corrigés

BORDAS

Année Scolaire