Mathématiques

Tronc commun sciences et tronc commun technologique

Programme Marocain-BIOF

15 cours bien détaillés

15 résumés bien précis

15 séries d'exercices corrigées

6 devoirs libre corrigés

Exercices et stratégies d'olympiades

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 03/09/2024

Table des matières

1 : Notions d'arithmétique.....03

2 : Calcul vectoriel.....11

3 : Projection.....19

Devoir Libre 1.....26

4 : Ensembles des nombres.....27

5 : Ordre dans IR.....35

6 : Droite dans le plan.....43

Devoir Libre 2.....50

Exercices, cours et stratégies d'olympiades.....51

7 : Polynômes.....52

8 : Equations, inéquations et systèmes.....57

9 : Trigonométrie 1 67

10 : Statistique.....77

Devoir Libre 3.....85

11 : Trigonométrie 2 86

Devoir Libre 4.....95

12 : Fonctions numériques.....96

Devoir Libre 5.....117

13 : Produit scalaire.....118

14 : Transformations.....127

15 : Géométrie de l'espace.....139

Devoir Libre 6.....144

1

Notions d'arithmétique



1) Nombres pairs - Nombres impairs

Activité 1 :

Parmi les nombres : 216 ; 73 ; 2025 ; 1 ; 88 ; 50 ; 0 ; 3 ; 5 ; 8,2 ; $\sqrt{2}$:

1) Déterminer les entiers naturels.

2) Déterminer les nombres pairs.

3) Déterminer les nombres pairs.

4) En remarquant que $216=2\times108$; $88=2\times44$; $50=2\times25$; $0=2\times0$ puis $73=2\times36+1$; $1=2\times0+1$; $2025=2\times1014+1$, déterminer une propriété qui caractérise les nombres pairs et une propriété qui caractérise les nombres impairs.

Définitions 1 :

- En regroupant les nombres entiers naturels on obtient l'ensemble des nombres entiers naturels noté $\mathbb{N}$.
  On écrit $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;.....\}$.
- L'ensemble des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$ et on a $\mathbb{N}^*=\{1;2;3;.....\}$.
- Tout nombre entier naturel n s'appelle élément de l'ensemble $\mathbb{N}$, on dit que n appartient à $\mathbb{N}$ et on écrit $n\in\mathbb{N}$.
- Si un nombre n n'est pas élément de $\mathbb{N}$, alors on dit que n n'appartient pas à $\mathbb{N}$ et on écrit $n\notin\mathbb{N}$.
- Tout nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n=2k$ tel que $k\in\mathbb{N}$ est appelé nombre pair.
- Tout nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n=2k+1$ tel que $k\in\mathbb{N}$ est appelé nombre impair.

Exemples 1 :

1) • 70 est un nombre pair car $70=2\times35=2k$ $\quad(k=35\in\mathbb{N})$

   • 65 est un nombre impair car $65=2\times32+1=2k+1$ $\quad(k=32\in\mathbb{N})$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$

- Le nombre A tel que $A=2(7n^2+3n+5)$ est pair car $A=2k$ $\quad(k=7n^2+3n+5\in\mathbb{N})$
- Le nombre B tel que $B=2(4n+3)+1$ est impair car $B=2k+1$ $\quad(k=4n+3\in\mathbb{N})$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$, étudions la parité des nombres : $C=12n+8$ et $D=16n^2+6n+15$

On a $C=12n+8$
$=2\times6n+2\times4$
$=2(6n+4)$
$=2k$ $\quad/k=6n+4\in\mathbb{N}$
Donc C est pair

On a $D=16n^2+6n+15$
$=2\times8n^2+2\times3n+2\times7+1$
$=2(8n^2+3n+7)+1$
$=2k+1$ $\quad/k=8n^2+3n+7\in\mathbb{N}$
Donc D est impair

Remarques 1 :

- La somme de deux nombres impairs est paire.
- La somme de deux nombres pairs est paire.
- La somme d'un nombre pair et un nombre impair est impaire.
- Le produit de deux nombres impairs est impair.
- Le produit de deux entiers naturels, dont l'un est un nombre pair est pair.
- Le produit de deux nombres naturels consécutifs est un nombre pair.



Application 1 :

Soit $n\in\mathbb{N}$, étudier la parité des nombres suivants :

$A=20n+18$, $B=6n^2+9$, $C=22n^2+8n+23$ et $D=n(n+1)$

Application 2 : Montrer que la somme de deux nombres impairs et paire.

Exercice : Exercice 1 de la série 1.

2) Multiples d'un entier naturel - Plus petit commun multiple

2-1 Multiples d'un entier naturel

Activité 2 :

1) Cocher les réponses justes :

	6	21	14	111	16	63	120	0
Multiple de 3								
Multiple de 5								
Multiple de 1								

2) En remarquant : $6=3\times2$; $21=3\times7$; $0=3\times0$; $63=3\times21$; $111=3\times37$ que peut-on déduire si un entier naturel m est un multiple de 3 ?

Définition 2 :

Soit $a\in\mathbb{N}$: Le nombre m est un multiple de a s'il existe un entier naturel k tel que $m=a\times k$

Exemples 2 :

- 30 est un multiple de 6 car $30=6\times5=6\times k \quad (k=5\in\mathbb{N})$
- 56 est un multiple de 7 car $56=7\times8=7\times k \quad (k=8\in\mathbb{N})$
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre $3^{n+2}-4\times3^n$ est un multiple de 5, on effet :

$3^{n+2}-4\times3^n=3^n\times3^2-4\times3^n=3^n\times(3^2-4)=3^n\times(9-4)=3^n\times5=5\times3^n=5\times k \quad (k=3^n\in\mathbb{N})$

Remarques 2 :

- Tous les entiers naturels sont des multiples de 1 (Car pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $n=1\times n$)
- 0 est un multiple de tous les entiers naturels (Car pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $0=n\times0$)
- Les multiples d'un entier naturel a sont : $\{0;a;2a;3a;4a;.....\}$
- Tout nombre entier possède une infinité de multiples.

Application 3

1) Déterminer les multiples de 7 inférieurs à 60.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer que le nombre $4^{n+3}-4^n$ est un multiple de 9.

Application 4 :

Montrer que si m et n sont des multiples de a, alors $m+n$ est aussi un multiple de a.

2-2 Plus petit commun multiple de deux entiers naturels

Activité 3 :

1) Donner les multiples de 6 inférieurs à 60.

2) Donner les multiples de 8 inférieurs à 60.

3) Déterminer des multiples communs entre 6 et 8.

4) Quel est le plus petit commun multiple non nul entre 6 et 8 ?



Définition 3 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Le plus petit commun multiple de a et b est leur plus petit multiple commun non nul, on le note par $ppcm(a;b)$ ou $a\vee b$.

Remarques 3 :

Soit $a;b\in\mathbb{N}^*$:

- $a\vee1=a$;
- b est un multiple de $a \Leftrightarrow a\vee b=b$

Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit « équivalent »

Exercice : Exercice 2 de la série 1.

3) Diviseurs d'un entier naturel - Plus grand commun diviseur

Activité 4 :

1) Cocher les réponses justes :	12	7	10	11	42	8	9
2 est un diviseur de							
3 est un diviseur de							
5 est un diviseur de							
7 est un diviseur de							
1 est un diviseur de							

2) a) Déterminer les diviseurs de 12.

b) Quand-est-un nombre d est un diviseur de 12 ?

3) a) Déterminer les diviseurs de 18.

b) En déduire le plus grand commun diviseur de 12 et 18.

Définitions 4 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

• Le nombre d est un diviseur de a (d divise a) s'il existe un entier naturel k tel que $a=d\times k$

• Le plus grand commun diviseur de a et b est le plus grand entier qui les divises simultanément, on le note par $pgcd(a;b)$ ou $a\wedge b$.

Exemple 3 : 1) Déterminer les diviseurs de 15 ; 2) Déterminer $24\wedge 36$ et $5\wedge 20$

Remarques 4 :

• Tous les entiers naturels sont des diviseurs de 0 (Car pour tout $d\in\mathbb{N}$ on a $0=d\times 0$)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

• $a\wedge b\geq 1$; • $a\wedge 1=1$; • Si a divise b alors $a\leq b$

• a divise $b \Leftrightarrow a\wedge b=a$; • a divise $b \Leftrightarrow b$ est un multiple de a

• a est divisible par $b \Leftrightarrow b$ divise a

• Si $a=x\times y$ et $x;y\in\mathbb{N}$, alors x et y sont des diviseurs de a

• Pour tout $k\in\mathbb{N}$: $(k\times a)\wedge(k\times b)=k\times(a\wedge b)$

• Si $d=a\wedge b$, alors d divise a et d divise b

• Si $d=a\wedge b$, alors il existe $\alpha;\beta\in\mathbb{N}^*$ tel que $\begin{cases}a=d\times\alpha\\b=d\times\beta\\\alpha\wedge\beta=1\end{cases}$



Application 5 : Déterminer a et b sachant que $a+b=40$ et $a\wedge b=5$

Critères de divisibilité :

- Un entier naturel est divisible par 2, si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier naturel est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier naturel est divisible par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un entier naturel est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Application 6 : Déterminer l'entier naturel a sachant que $\overline{14a5}$ est divisible par 9.

Remarques 5 : Nombres premiers entre eux

On dit que a et b sont premiers entre eux si $a\wedge b=1$

Par exemple, 9 et 16 sont premiers entre eux car $9\wedge 16=1$ (facile à vérifier)

Mais 12 et 8 ne sont pas premiers entre eux car $12\wedge 8=4$ (facile à vérifier)

Exercices : Exercices 3 et 4 de la série 1.

4) Nombres premiers

Activité 5 : Déterminer les diviseurs des nombres suivants : 2 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17.

Définition 5 :

Un nombre entier naturel est dit premier, s'il admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Remarques 6 :

- Le nombre 1 n'est pas premier, parce qu'il n'a qu'un seul diviseur.
- Les nombres premiers inférieurs à 40 sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;29 ;31 ;37.
- Si un nombre a s'écrit sous la forme $a = x \times y$ et $(x \neq 1$ ou $y \neq 1)$ alors a n'est pas premier.

Test de primalité (algorithme de Crible d'Eratosthène)

Il existe différents tests pour savoir si un nombre donné est premier, le plus ancien est la Crible d'Eratosthène.

Pour tester la primalité d'un entier naturel a par l'algorithme de Crible d'Eratosthène :

On calcul $\sqrt{a}$ et on détermine tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{a}$:

- Si a est divisible par l'un de ses nombres, alors a est n'est pas premier.
- Si a est n'est pas divisible par aucun de ses nombres, alors a est premier.

Exemple 4 :

Déterminons la primalité du nombre 101 :

On a : $\sqrt{101} \simeq 10,05$

Les nombres premiers inférieurs à $10,05$ sont : 2 ;3 ;5 ;7

Puisque 101 est n'est pas divisible par aucun de ses nombres (A l'aide d'une calculatrice !)

Alors 101 est un nombre premier.



Application 7 :

Déterminer la primalité des nombres suivants : 57 ; 87 ; 91 ; 293

Exercice : Exercice 5 de la série 1.

5) Applications de la décomposition en produit de facteurs premiers

5-1 Théorème fondamental

Activité 6 :

Ecrire les nombres suivants sous forme de produit de nombres premiers : 21 ; 15 ; 75 ; 36 ; 30 ; 37

Théorème 1 :

Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 2 peut se décomposer d'une manière unique en un produit de facteurs premiers.

Remarque 7 :

Décomposer un nombre entier naturel en produit de facteurs premiers, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers.

5-2 Démarche de la décomposition en produit de facteurs premiers

Démarche

Soit a un entier naturel non premier supérieur à 2.

Pour décomposer l'entier a en produit de facteurs premiers on commence par diviser a par son plus petit diviseur premier, puis, on divise le quotient q, de l'étape précédente, par son plus petit diviseur premier.

On refait successivement, par analogie, la même démarche jusqu'à ce qu'on obtienne le reste 1.

Alors, le nombre a est égale au produit de tous les diviseurs premiers trouvés.

Exemple 5 :

Décomposons le nombre 1344 en produit de facteurs premiers :

1344	2
672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Donc : $1344 = 2^6 \times 3 \times 7$

5-3 Applications de la décomposition en produit de facteurs premiers

Activité 7 :

1) Déterminer les diviseurs de 84 et 120 puis déduire $84 \wedge 120$.

2) Décomposer 84 et 120 en produit de facteurs premiers

3) Déterminer le produit des facteurs premiers communs entre les décompositions de 84 et 120 affectés de leur plus petit exposant.

4) Que peut-on conclure ?

Théorème 2 :

- Le *pgcd* de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers **communs** de leurs décompositions affectés de leur **plus petit** exposant.
- Le *ppcm* de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers **communs et non communs** de leurs décompositions affectées de leur **plus grand** exposant.

Exemple 6 :

Sachant que $a = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$ et $b = 2^2 \times 5 \times 7^3 \times 13$, déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$

Application 8 :

On pose $a = 2160$ et $b = 4860$

1) Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.
2) Déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$
3) Vérifier que $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$
4) Ecrire $\frac{a}{b}$ sous forme d'une fraction irréductible.
5) Simplifier $\sqrt{ab}$



Remarques 8 :

- Pour tout $a; b \in \mathbb{N}^*$ on a : $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$
- La décomposition en produit de facteurs premiers permet de déterminer le *pgcd*, *ppcm*, réduction des fractions, simplification des racines carrées……

Exercices : Exercices 6 et 7 de la série 1.

Complément de cours : Le carré parfait : Voir l'exercice 10 de la série 1.

Pour la recherche :

- Critères de divisibilité par 4 et par 11.
- Détermination du *pgcd* par l'algorithme d'Euclide.
- Le nombre de diviseurs d'un entier à partir de sa décomposition en produit de facteurs premiers.

HIYAB

Résumé 1 : Notions d'arithmétique

Nombre pair – Nombre impair

- Tout nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n=2k$ tel que $k\in\mathbb{N}$ est appelé nombre pair.
- Tout nombre entier naturel n s'écrit sous la forme $n=2k+1$ tel que $k\in\mathbb{N}$ est appelé nombre impair.

Multiple – Diviseur – *pgcd - ppcm*

- Le nombre m est un multiple de a s'il existe un entier naturel k tel que $m=a\times k$
- Le nombre d est un diviseur de a (d divise a) s'il existe un entier naturel k tel que $a=d\times k$
- Le plus grand commun diviseur de a et b est le plus grand entier qui les divises simultanément, on le note par $pgcd(a;b)$ ou $a\wedge b$.
- Le plus petit commun multiple de a et b est leur plus petit multiple commun non nul, on le note par $ppcm(a;b)$ ou $a\vee b$.

Critères de divisibilité :

- Un entier naturel est divisible par 2, si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier naturel est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier naturel est divisible par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un entier naturel est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Nombre premier

Un nombre entier naturel est dit premier, s'il admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Test de primalité

Pour tester la primalité d'un entier naturel a :

On calcul $\sqrt{a}$ et on détermine tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{a}$:

- Si a est divisible par l'un de ses nombres, alors a est n'est pas premier.
- Si a est n'est pas divisible par aucun de ses nombres, alors a est premier.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier naturel non premier et supérieur à 2 peut se décomposer d'une manière unique en un produit de facteurs premiers.

Démarche de la décomposition en produit de facteurs premiers

Soit a un entier naturel non premier supérieur à 2.

Pour décomposer l'entier a en produit de facteurs premiers on commence par diviser a par son plus petit diviseur premier, puis, on divise le quotient q, de l'étape précédente, par son plus petit diviseur premier.

On refait successivement, par analogie, la même démarche jusqu'à ce qu'on obtienne le reste 1.

- Alors, le nombre a est égale au produit de tous les diviseurs premiers trouvés.

Détermination du pgcd et ppcm à partir de la décomposition en produit de facteurs premiers

- Le *pgcd* de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers **communs** de leurs décompositions affectés de leur **plus petit** exposant.
- Le *ppcm* de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers **communs et non communs** de leurs décompositions affectées de leur **plus grand** exposant.



Exercice 1 : Nombres pairs - Nombres impairs

1) Soit n un entier naturel, étudier la parité des nombres suivants :

$A=16n+2$; $B=4n^2+8n+1$; $C=4n^2+10n+3$

$D=n^2+n+4$; $E=n(n+1)(n+2)$; $F=n^2+11n$

$G=(3n+7)(3n+8)$; $H=n^2+4n+8$

2) Montrer que la somme de deux nombres pairs est paire.
3) Montrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
4) Montrer que le produit de deux nombres impairs est impair.
5) Montrer que le produit de deux entiers naturels, dont l'un est un nombre pair est pair.
6) Montrer que le produit de deux nombres naturels consécutifs est un nombre pair.
7) Montrer que si a est pair, alors a^2 l'est aussi.
8) Montrer que si a est impair, alors a^2 l'est aussi.

Exercice 2 : Multiples d'un entier naturel

1) Donner les multiples du nombre 6 inférieurs à 85.
2) Soit n un entier naturel, On pose $a=2^{n+3}-5\times 2^n$ montrer que a est un multiple de 3.
3) Déterminer le nombre b sachant que le nombre $\overline{5b74}$ est un multiple de 3.
4) Montrer que si m et m' sont des multiples d'un nombre a alors $2m+3m'$ l'est aussi.
5) Soit a un nombre impair, montrer que a^2-1 est un multiple de 8.

Exercice 3 : Diviseurs d'un entier naturel

1) a) Déterminer les diviseurs de 28.
   b) Montrer que la somme des inverses des diviseurs de 28 est un entier naturel.
2) 281520 est-il divisible par 2,3,5,9 ?
3) Déterminer les entiers confinés entre 301 et 389 qui sont divisible par 5 et 3.
4) Montrer que pour toute $n\in\mathbb{N}$ le nombre $b=7^{n+1}\times 2^{n+3}$ est divisible par 7 et par 56.
5) a) Déterminer les diviseurs de 12.
   b) Montrer que $n+m$ et $n-m$ ont de même parité.
   c) En déduire les solutions de l'équation $x^2-y^2=12$
6) Déterminer b sachant que $\overline{815b}$ est divisible par 2 et 9.
7) Déterminer le nombre c pour que le nombre $\overline{c921}$ soit divisible par 3 et non par 9
8) a) Montrer que 111 est un diviseur de 10101.
   b) Vérifier que $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^2+1$
   c) En déduire que 111 est un diviseur de 10^8+10^4+1
9) Soit $n\in\mathbb{N}^*$
   a) Déterminer six diviseurs du nombre $4n$
   b) Déterminer huit diviseurs du nombre $2n^2+2n$
   c) En déduire quatre diviseurs communs des nombres : $4n$ et $2n^2+2n$

Exercice 4 : Le plus grand commun diviseur

1) a) Déterminer les diviseurs de 63 et de 84
   b) En déduire $84\wedge 63$
2) Déterminer a et b sachant que $a+b=117$ et $a\wedge b=13$

Exercice 5 : Les nombres premiers

1) Déterminer les nombres premiers parmi les nombres suivants : 291 ; 119 ; 341 ; 503 ; 49 ; 14 ; 2491
2) a) Soit $a\in\mathbb{N}$, vérifier que $a^4+4=(a^2+2)^2-(2a)^2$
   b) En déduire que a^4+4 n'est pas premier.

Exercice 6 : Décomposition en produit de facteurs premiers

On pose $a=1176$ et $b=7425$

1) Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.
2) Déterminer $a\wedge b$ et $a\vee b$
3) Simplifier $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{ab}$
4) Déterminer le plus petit entier m tel que ma soit un carré parfait (voir la définition dans l'exercice 10)
5) Déterminer le plus petit entier n tel que nb soit un cube.

Exercice 7 : Décomposition en produit de facteurs premiers

On pose $a=216\times 10^4$ et $b=4\times 6^2\times 11$

1) Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.
2) Déterminer $a\wedge b$ et $a\vee b$
3) Déterminer le dénominateur commun des nombres $\frac{13}{28}$ et $\frac{9}{35}$

Exercice 8

Les gérants d'une association de solidarité décident de distribuer 920 cahiers et 10143 stylos aux écoles primaires d'un village.

1) Donner mentalement deux nombres premiers diviseurs de 920 et un diviseur premier de 10143.
2) Décomposer 920 et 10143 en produit de facteurs premiers.
3) Le président de l'association partage équitablement ces fournitures scolaires entre les écoles. Quel est le plus grand nombre d'écoles qui peuvent bénéficier de cette fourniture ?

Exercice 9

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $n^2+5n+14=(n+3)(n+2)+8$.
2) En déduire toutes les valeurs de n pour que le nombre $n^2+5n+14$ soit divisible par $(n+2)$

Exercice 10 : Complément de cours

Un carré parfait est un entier naturel qu'on peut écrire sous forme d'un carré d'un autre entier naturel,

Exemple : le nombre 49 est un carré parfait parce que $49=7^2$

1) Déterminer les carrés parfaits parmi les nombres suivants : 81 ; 121 ; 169 ; 196×49 ; 225×17^{10}
2) Soit k un entier naturel :
   Montrer que $A=k^2+4k+4$ est un carré parfait.
3) Méthode : Pour prouver qu'un entier n'est pas un carré parfait, il suffit de montrer que ce nombre est strictement encadré entre deux carrés parfait consécutifs.
   a) Le nombre 15 est-il un carré parfait ? justifier.
   b) Montrer que k^2+4k+5 n'est pas un carré parfait.

Correction : https://drive.google.com/file/d/1Re96SiJEibJNmq4Y2Ymx_plirpcYiuxL/view?usp=sharing

2

Calcul vectoriel



1) Egalité et somme de deux vecteurs - Relation de Chasles

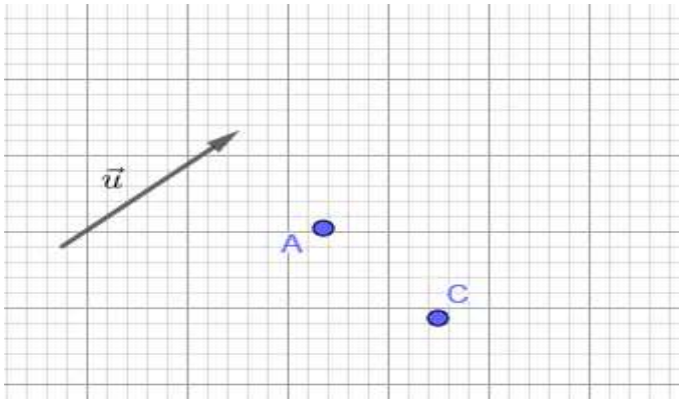
Activité 1 :

1) Soient A, B, C, D, M, N et O des points du plan.

Simplifier les expressions vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{NM}$

2) On considère la figure ci-dessous :

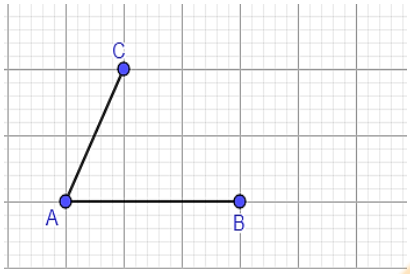




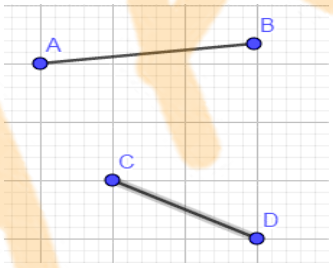
a) Construire le point B tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

b) Construire le point C tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et justifier la méthode de construction.

3) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



4) Construire le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.



Définition 1 et Propriétés 1 : Egalité de deux vecteurs :

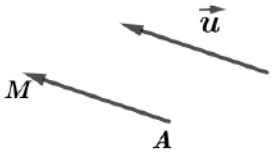
1) On dit que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

2) Soit $ABCD$ un quadrilatère :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.

3) Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$



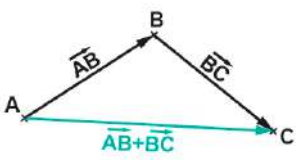
4) Quelque soient les points A, M et N on a :

- $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ équivaut à $M=A$.
- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$ équivaut à $M=N$.

Propriétés 2 :

1) Relation de Chasles :

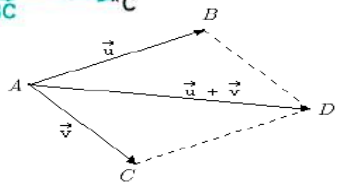
Quels que soient les points A, B et C on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



2) Somme de deux vecteurs : Règle du parallélogramme :

Soient A, B et C trois points non alignés.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. On écrit $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ ou $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$



Remarque 1 : La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est noté $\|\vec{u}\|$ et pour tous points A et B on a : $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

Exercice : Exercice 1 de la série 2.

2) Construction du vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$ - Propriétés des vecteurs

Activité 2 :

ABC un triangle.

1) Placer les points M, N et E tels que :

$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

2) On a : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, on dit que le nombre $\frac{3}{2}$ est l'abscisse du point M dans le repère (A,B).

a) Déterminer l'abscisse du point N dans le repère (A,C).

b) Déterminer l'abscisse du point I dans le repère (A,B).

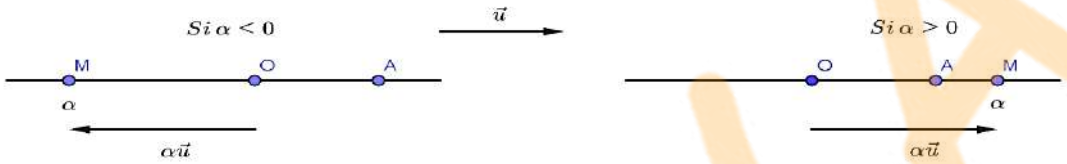
Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition 2 :

- Soient O un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et α un réel non nul.

Soit A le point du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et M le point de la droite (OA) d'abscisse α dans la droite $D(O;A)$.

On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α et on note $\alpha.\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$.





- Le vecteur $\alpha.\vec{u}$ est de même direction que le vecteur $\vec{u}$ et on a:

Si $\alpha>0$, alors le vecteur $\alpha.\vec{u}$ est de même sens que $\vec{u}$ et $\|\alpha.\vec{u}\|=\alpha\times\|\vec{u}\|$.

Si $\alpha<0$, alors le vecteur $\alpha.\vec{u}$ est de sens opposé que $\vec{u}$ et $\|\alpha.\vec{u}\|=-\alpha\times\|\vec{u}\|$.

Remarque 2 : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k on a : • $0.\vec{u}=\vec{0}$; • $k.\vec{0}=\vec{0}$

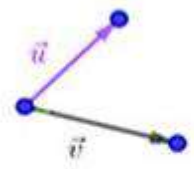
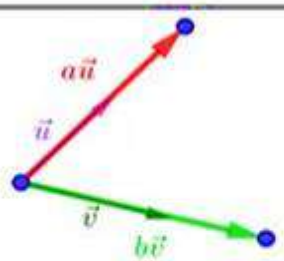
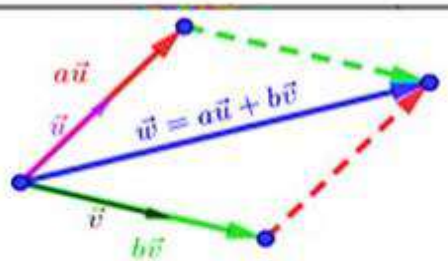
Définition 3 : L'abscisse d'un point dans un repère

Soient A et B deux points distincts du plan et C un point tel que $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$ où α un nombre réel.

Le réel α est appelé l'abscisse du point C dans le repère (A,B).

Construction du vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$

Méthode pour construire le vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$:

Etape 1	Etape 2	Etape 3
		
Etant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ On les ramène de sorte qu'ils aient la meme origine.	On construit les deux vecteurs $a\vec{u}$ et $b\vec{v}$ (Dans cette figure a et b sont positifs)	On costruit un parallélogramme pour représenter le vecteur $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$

Exemple 1 :

Soit ABC un triangle, construire les points D, E, F et G tels que :

$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{ED}$

Propriétés des vecteurs

Propriétés 3 :

- Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et les nombres réels a et b, on a :
  - $1\vec{u}=\vec{u}$.
  - $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$.
  - $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$.
  - $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre réel α, on a : $\alpha\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à ($\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$).

Exemple 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1) Simplifier : $\vec{U}=2(\vec{u}+5\vec{v})+3(\vec{u}-\vec{v})$ et $\vec{V}=13\vec{u}+2\vec{v}+3(4\vec{v}-\vec{u})$.

2) En déduire que : $\vec{V}=\alpha.\vec{U}$ où α est un nombre que l'on déterminera.

Exemple 3 :

Soient $ABCD$ un parallélogramme, I et J les points tels que $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=4\overrightarrow{AD}$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$

2) Montrer que $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{AD}$.

3) En déduire que $\overrightarrow{CI}=\alpha\overrightarrow{CJ}$ tel que α est un nombre que l'on déterminera.

Exercices : Exercices 2 et 3 de la série 2

3) Colinéarité de deux vecteurs et ses applications

Activité 3 :

ABC un triangle. On considère les points D, E et F tels que :

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BF}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

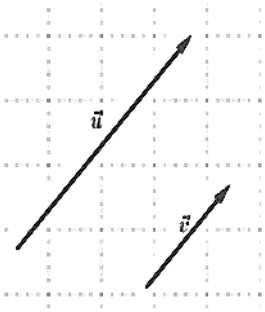
1) Montrer que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, et déduire que les points A, D et E sont alignés.

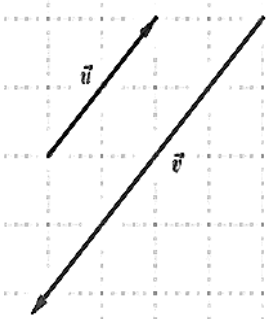
2) Vérifier que $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{AD}$. Que peut-on dire sur les droites (AD) et (BF) ?



Définition 4 et propriété 4 :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.





- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel α tel que $\vec{v}=\alpha\vec{u}$.
- Le réel α est appelé le coefficient de colinéarité.

Remarque 3 : Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs du plan.

Propriétés 5 : Parallélisme et alignement

Soient A, B, C et D des points du plan.

- Deux droites (AB)et (CD)sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Autrement dit : $(AB)\parallel(CD)\Leftrightarrow$Il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{CD}=\alpha.\overrightarrow{AB}$.

- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Autrement dit A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$Il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{AC}=\alpha.\overrightarrow{AB}$.

Exemple 4 :

A, B, C et M sont des points du plan.

On pose : $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v}=-6\overrightarrow{AB}+9\overrightarrow{AC}$.

1) Montrer que $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple 5 :

ABC un triangle.

On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que les deux droites (MN)et (BC)sont parallèles.

Exemple 6 :

ABC un triangle.

On considère les points D et E tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Montrer que les points A, C et E sont alignés.

Exercices : Exercices 4, 5 et 6 de la série 2.

4) Détermination vectorielle du milieu d'un segment

Activité 4 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Soit E le point du plan tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$.

1) a) Montrer que les points B, Cet E sont alignés.

b) Justifier que le point Cest le milieu du segment $[BE]$.

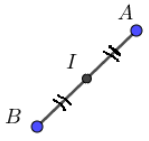
2) Soit M un point du plan, montrer que $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MC}$.

Propriété 6 :

Soient A et B deux points distincts du plan.

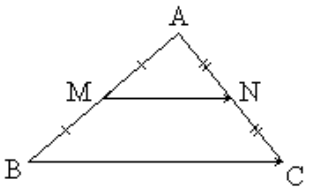
Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.



Exemple 7 :

Soit ABC un triangle, le point M est le milieu de $[AB]$et N celui de $[AC]$.



Montrons que : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On a d'après la relation de Chasles :

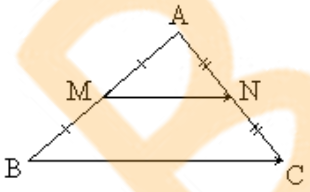
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$.

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (Car M est le milieu de $[AB]$ et N celui de $[AC]$)

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Remarque 4 : Théorème des milieux



ABC un triangle.

Si M est le milieu de $[AB]$ et N celui de $[AC]$ alors $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Exemple 8 :

ABC un triangle, E et F les points tels que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que B est le milieu du segment $[EF]$.

Remarque 5 : La propriété caractéristique du milieu d'un segment

Soient A et B deux points distincts du plan.

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Exemple 9 :

ABC est un triangle quelconque de centre de gravité G.

A' et B' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et$[CA]$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

1) a) En utilisant la propriété caractéristique du milieu d'un segment montrer que : $\overrightarrow{MA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}$

b) En déduire que M appartient à la médiane issue de A.

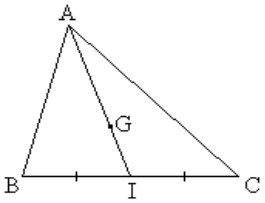
2) a) De la même manière, démontré que M appartient à la médiane issue de B.

b) En déduire que $M=G$.

3) En déduire que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'}$; $\overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{A'G}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$; $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Remarque 6 : Détermination vectorielle du centre de gravité d'un triangle

- Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes.
- Le point G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :



- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ (avec I est le milieu de$[BC]$)

Exercices : Exercices 7 et 8 de la série 2.

Complément de cours : La droite D'Euler : Voir l'exercice 13 de la série 2.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

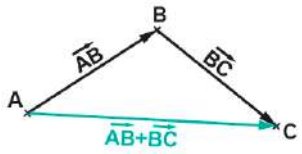
Résumé 2 : Calcul vectoriel

Egalité de deux vecteurs

- On dit que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est noté $\|\vec{u}\|$ et pour tous points A et B on a : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- Soit $ABCD$ un quadrilatère : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.

Relation de Chasles :

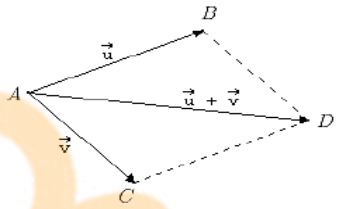
Quels que soient les points A, B et C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Règle du parallélogramme :

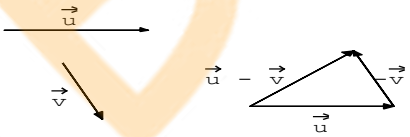
Soient A, B et C trois points non alignés.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. On écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ ou $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$



Différence de deux vecteurs :

La différence du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ s'obtient en ajoutant au vecteur $\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Multiplication d'un vecteur par un réel

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel α est le vecteur $\alpha\vec{u}$ tel que : $\alpha\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction.

Lorsque $\alpha > 0$

- $\alpha\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$
- $\|\alpha\vec{u}\| = \alpha \times \|\vec{u}\|$.

Lorsque $\alpha < 0$

- $\alpha\vec{u}$ est de sens opposé à celui de $\vec{u}$
- $\|\alpha\vec{u}\| = -\alpha \times \|\vec{u}\|$.

Règles de calcul

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et les nombres réels a et b, on a :

- $1\vec{u} = \vec{u}$.
- $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$.
- $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$.
- $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre réel α, on a : $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $(\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0})$.

Colinéarité de deux vecteurs

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel α tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Parallélisme et alignement

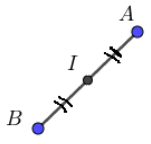
$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement s'il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{CD} = \alpha.\overrightarrow{AB}$.

A, B et C sont alignés si, et seulement s'il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha.\overrightarrow{AB}$.

Milieu d'un segment :

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.



مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Prof : Aissa HIYAB	**Série 2**	Lycée qualifiant : Almajd
Niveau : TCSF	**Calcul vectoriel**	Matière : Mathématique

Exercice 1 (construire, égalités et sommes de vecteurs)

1) Soit A, B, C, D et E des points du plan
Simplifier $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

2) Soit A, B, C et D quatre points du plan.
a) Construire M et N tels que $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$
b) Montrer que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MN}$

3) Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
b) Montrer que $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AO}$

Exercice 2 (construction du vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}$)

1) Soit ABC un triangle, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
Construire les vecteurs suivants :
$3\vec{u};-2\vec{v};3\vec{u}+(-2\vec{v});\frac{1}{3}\vec{u};\frac{5}{3}\vec{v};-\frac{2}{5}\vec{v};\frac{1}{3}\vec{u}-\frac{2}{5}\vec{v}$

2) Construire M tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

3) Construire N tel que $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$

Exercice 3 (propriétés des vecteurs)

Soit ABC un triangle, M, N et P les points tels que
$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AC}$

1) Montrer que $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{NP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$.

2) En déduire que $\overrightarrow{NP}=\alpha\overrightarrow{MN}$ tel que α est un nombre que l'on déterminera.

Exercice 4 (colinéarité de vecteurs)

ABC un triangle. On considère les vecteurs suivants :
$\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$.

1) Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 5 (parallélisme de droites)

Soit ABC un triangle, I et J les points tels que
$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$

1) Exprimer $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que $(IC)\parallel(BJ)$

Exercice 6 (alignement de points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme, P et Q les points tels que
$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AD}$

1) Exprimer $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) En déduire que les points C, P et Q sont alignés.

Exercice 7(détermination vectorielle du milieu d'un segment)

ABC un triangle.

1) Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BC}$

2) Montrer que C est le milieu du segment $[AD]$

Exercice 8

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et M le point tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
Montrer que M est le milieu de $[IC]$.

Exercice de renforcement

Exercice 9

Soit $ABCD$ un parallélogramme

1) Construire E tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2) Construire F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$

3) Montrer que $\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FE}=\frac{9}{2}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

4) En déduire que les points C, E et F sont alignés.

Exercice 10

Soit ABC un triangle, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
On considère les points M, N et P tels que :
$\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\vec{v}$ et $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\vec{u}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{4}\vec{v}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{4}\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}$

2) a) Exprimer $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
b) Montrer que $(BN)\parallel(CP)$

3) Soit I le milieu de $[BN]$ et K le milieu de $[CP]$
a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
b) En déduire que les points A, I et K sont alignés.

4) Soit E le point tel que $\overrightarrow{BE}=\frac{5}{9}\overrightarrow{BC}$, montrer que $E\in(IK)$

Exercice 11

Soit ABC un triangle, I et J les points tels que :
$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\beta\overrightarrow{JA}+\alpha\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ Avec $\alpha;\beta\in\mathbb{R}^*$ et $\alpha+\beta\neq 0$
Montrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exercice 12

Soit ABC un triangle, M un point de (BC) d'abscisse x dans le repère $(B\ ;\ C)$

1) Montrer que $\overrightarrow{AM}=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$

2) Soit N le point du plan tel que $\overrightarrow{AN}=(1-x)\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{AB}$
Montrer que les points B, C et N sont alignés.

Exercice 13 (Complément de cours)

Soit O le centre de cercle circonscrit et G sont centre de gravité d'un triangle ABC.

1) Construire le point D symétrie de O par-rapport a (BC)

2) Montrer que $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

3) Construire le point H tel que $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

4) Montrer que $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OD}$ et en déduire que $(AH)\perp(BC)$

5) Construire le point E symétrie de O par-rapport à (AC)

6) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

7) Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (rappel $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$)

5) En déduire que les points O, G et H sont alignés.

La droite passant par les points O, G et H est appelée **droite d'Euler.**

Correction :

https://drive.google.com/file/d/194fBFJuLYjv6vQautps_WLD-Ot76Kpzr/view?usp=sharing

3

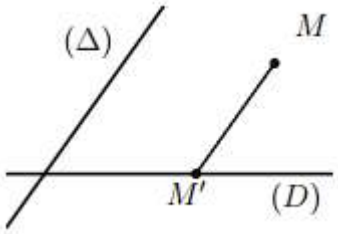
Projection



1) Projection sur une droite parallèlement à une autre

Définition 1 :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes, M un point du plan et M' le point tel que : $M' \in (D)$ et $(MM') // (\Delta)$



M' est appelé **la projeté de M sur la droite (D) parallèlement à (Δ).**

On écrit : $P_{((D),(\Delta))}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$

Remarques 1 : Soit P la projection sur (D) parallèlement à (Δ)

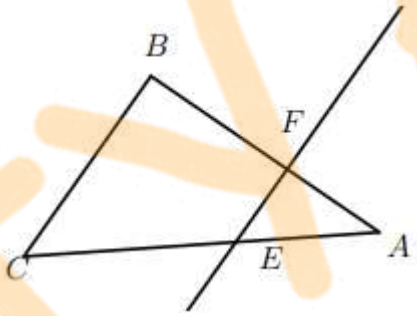
- $P(M) = M' \Leftrightarrow M' \in (D)$ et $(MM') // (\Delta)$
- Si $A \in (D)$ alors $P(A) = A$
- Si $A \in (\Delta)$ alors $P(A) = O$ avec O est le point d'intersection de (D) et (Δ)

Exemple 1 :

ABC un triangle et E un point de (AC). Soit F un point de (AB) tel que $(BC) // (EF)$.

Soit P la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

Déterminons $P(F)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(E)$ et $P(C)$



On a : $P(F) = E$ car $E \in (AC)$ et $(EF) // (BC)$

On a : $P(A) = A$ car $A \in (AC)$

On a : $P(B) = C$ car $P(B) = C$ et $(BC) // (BC)$

On a : $P(E) = E$ car $E \in (AC)$

On a : $P(C) = C$ car $C \in (AC)$



Application 1 :

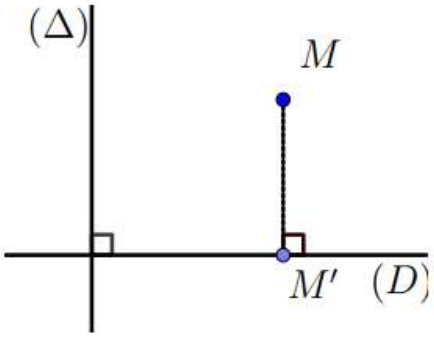
Soit $ABCD$ un losange de centre O. P est la projection sur la droite (BC) parallèlement à (AB).

Déterminer $P(A)$, $P(D)$ et $P(O)$

Projection orthogonale

Si $(D) \perp (\Delta)$ et $P_{((D),(\Delta))}(M) = M'$

Alors M' appelé **la projection orthogonale** du point M sur (D), et on écrit $P_{(D)}(M) = M'$



2) Propriétés de la projection

La projection conserve le coefficient de colinéarité

Soit P une projection du plan sur une droite (D) parallèlement à une autre (Δ).

Soient A, B, C et D quatre points du plan et k un réel.

Si $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{P(A)P(B)}=k.\overrightarrow{P(C)P(D)}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La projection conserve le milieu :

Soit P une projection du plan sur une droite (D) parallèlement à une autre (Δ).

Soient A et B deux points distincts du plan.

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors le point $P(I)$ est le milieu du segment $[P(A)P(B)]$

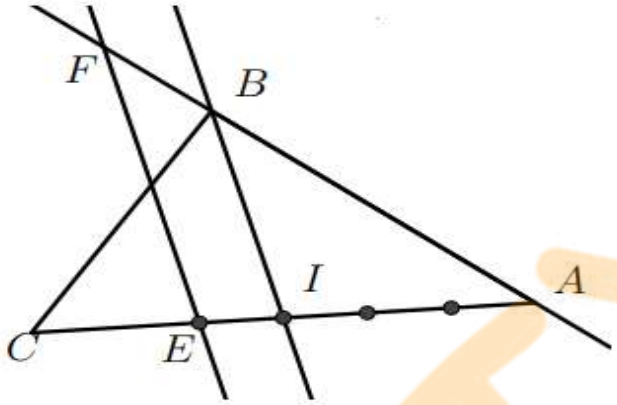
On dit que la projection conserve le milieu d'un segment.

Exemple 2 :

ABC un triangle, I est le milieu du segment $[AC]$, E un point de (AC) tel que :

$\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ et F le point tel que $P_{((AB),(IB))}(E)=F$

1) Construire une figure convenable.



2) En utilisant la projection montrer que $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Soit P la projection sur (AB) parallèlement à (IB)

On a $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ et puisque la projection conserve le coefficient de la colinéarité alors : $\overrightarrow{P(I)P(E)}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P(A)P(I)}$

Et puisque $P(E)=F$,

$P(A)=A$ car $A\in(AB)$,

$P(I)=B$ car $(IB)//(IB)$ et $B\in(AB)$,

Alors $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Application 2 :

Soit ABC un triangle et M le point tel que $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$.

Soit N le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC). Montrer que $\overrightarrow{NC}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

3) Théorème de Thalès

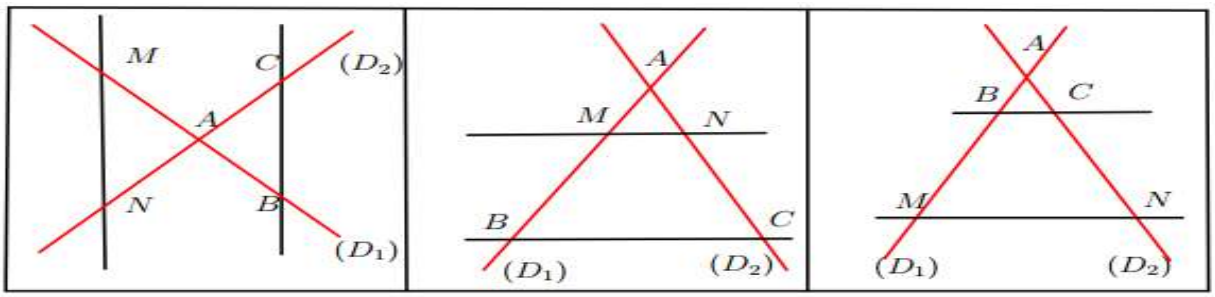
3-1 Théorème de Thalès

Théorème 1 :

(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Si $(BC)\parallel(MN)$



Alors $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}=\frac{BC}{MN}$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Remarque 2 :

Le théorème de Thalès s'applique pour le calcul des longueurs.

Exemple 3 :

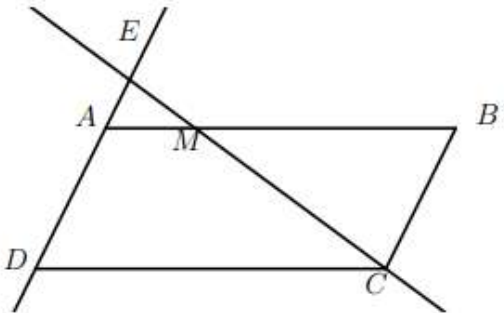
$ABCD$ est un parallélogramme, $AB=8$, $AD=4,5$ et $AE=1,5$. (Voir la figure ci-dessous)

Calculons la distance AM.

On a : $(AM)\|(DC)$, donc d'après le théorème de Thalès :

$\frac{ED}{EA}=\frac{DC}{AM}$, c'est-à-dire $\frac{EA+AD}{EA}=\frac{AB}{AM}$

Donc $AM=\frac{EB\times EA}{EA+AD}=\frac{8\times 1,5}{1,5+4.5}=2$



Traduction vectorielle du théorème de Thalès :

(D_1)et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Si $(BC)\|(MN)$

Alors il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=k\times\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AN}=k\times\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{MN}=k\times\overrightarrow{BC}\end{cases}$

Application 3 :

Soit ABC un triangle, M et N deux points tels que $A\in[BM]$, $A\in[CN]$ et $(MN)\|(BC)$.

Sachant que $MN=13$, $AM=12$, $AN=x$, $AB=18$, $AC=30$ et $BC=y$

1) Déterminer x et y.

2) Déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{MN}=k\times\overrightarrow{BC}$.

3-2 Théorème de Thalès réciproque

Théorème 2 :

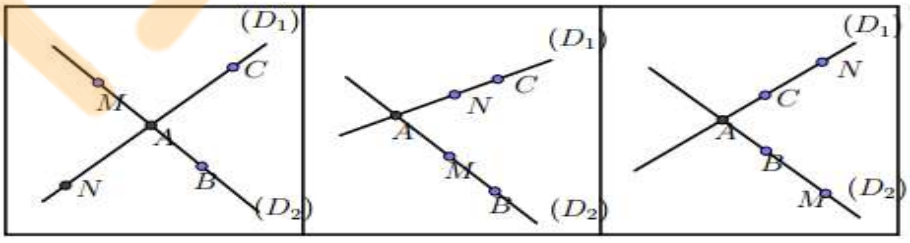
(D_1)et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Tels que les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C.

Si $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$

Alors : $(BC)\|(MN)$

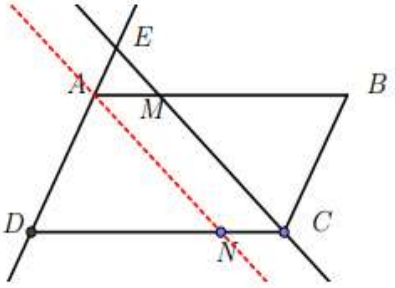


Remarque 3 :

Le théorème de Thalès réciproque s'applique pour démontrer les droites parallèles.

Exemple 4 :

1) Dans la figure de l'exemple 3 construire le point N tel que $\overrightarrow{DN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$:



مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

2) Montrer que $(EC)\parallel(AN)$:

On a les droites (DE)et (DC) sont sécantes en D, les points D, A, E et les points D, N, C sont alignés et de même ordre, or :

$\frac{DE}{DA}=\frac{DC}{DN}$ (car : $\frac{DE}{DA}=\frac{DA+AE}{DA}=\frac{4,5+1,5}{4,5}=\frac{4}{3}$ et $\frac{DC}{DN}=\frac{AB}{\frac{3}{4}DC}=\frac{AB}{\frac{3}{4}AB}=\frac{4}{3}$)

Alors d'après le théorème de Thalès réciproque : $(EC)\parallel(AN)$

Traduction vectorielle du théorème de Thalès réciproque :

(D_1)et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Tels que les points A, M et B sont alignés dans le même ordre que les points A, N et C.

S'il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=k\times\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AN}=k\times\overrightarrow{AC}\end{cases}$

Alors : $(BC)\parallel(MN)$

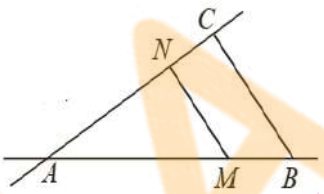


Application 4 :

Dans la figure ci-contre :

$AB=11$, $AM=7$, $AC=13,2$ et $AN=8,4$

Les droites (MN)et (BC) sont-elles parallèles ?



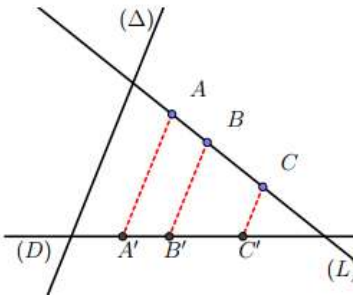
3-3 Théorème de Thalès par la projection

Théorème 3 :

Soient (L) et (D) deux droites non parallèles à une troisième droite (Δ) .

Si A, B et C sont trois points distincts de la droite (L) et les points

et A', B'et C' sont respectivement leurs projetés sur (D) parallèlement à (Δ),



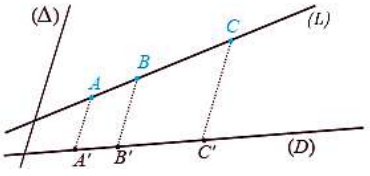
Alors $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$

Traduction vectorielle du théorème de Thalès par la projection :

Soient (L) et (D) deux droites non parallèles à une troisième droite (Δ) .

Si A, B et C sont trois points de la droite (L) et les points A', B'et C' sont respectivement leurs projetés sur (D) parallèlement à (Δ),

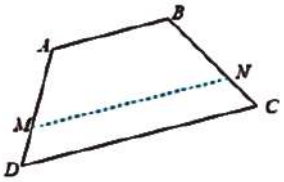
Alors il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=k\times\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{A'C'}=k\times\overrightarrow{A'B'}\end{cases}$



Exemple 5 :

Dans un trapèze $ABCD$ de bases parallèles $[AB]$et $[CD]$, M est un point sur (AD)et N est son projeté sur (BC) parallèlement à (AB).

Donc il existe un réel $k\in\mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BN}=k.\overrightarrow{BC}$



Application 5 :

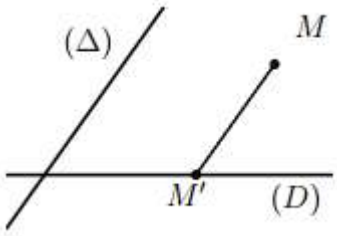
$ABCD$ est un parallélogramme, I le point tel que $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et J le projeté de I sur (DC) parallèlement à (AD).

Montrer que $\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

Résumé 3 : Projection

1) Projection sur une droite parallèlement à une autre

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes, M un point du plan et M' le point tel que : $M' \in (D)$ et $(MM') // (\Delta)$



مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

M' est appelé la projeté de M sur la droite (D) parallèlement à (Δ).

On écrit : $P_{((D),(\Delta))}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$

2) Projection orthogonale

Si $(D) \perp (\Delta)$ et $P_{((D),(\Delta))}(M) = M'$

Alors M' appelé la projection orthogonale du point M sur (D), et on écrit $P_{(D)}(M) = M'$

3) La projection conserve le coefficient de colinéarité

Si $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{P(A)P(B)} = k.\overrightarrow{P(C)P(D)}$

4) La projection conserve le milieu :

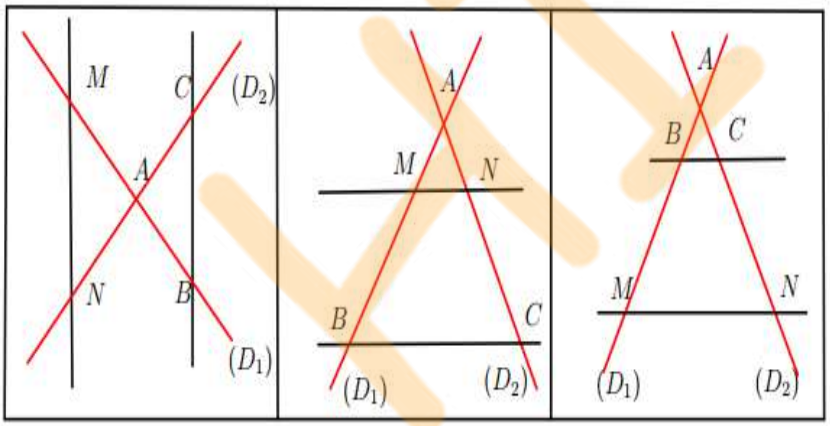
Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors le point $P(I)$ est le milieu du segment $[P(A)P(B)]$

5) Théorème de Thalès :

(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Si $(BC) // (MN)$



Théorème 1 :

Si $(BC) // (MN)$

Alors $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

Traduction vectorielle :

Si $(BC) // (MN)$

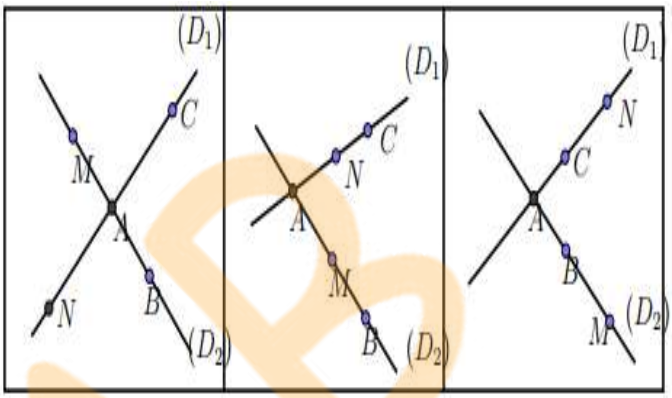
Alors il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k \times \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{MN} = k \times \overrightarrow{BC} \end{cases}$

6) Théorème de Thalès réciproque :

(D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de (D_1), C et N deux points de (D_2).

Tels que les points A, M, B sont alignés dans le même ordre que les points A, N, C.



Théorème 2 :

Si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

Alors : $(BC) // (MN)$

Traduction vectorielle :

S'il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k \times \overrightarrow{AC} \end{cases}$

Alors : $(BC) // (MN)$

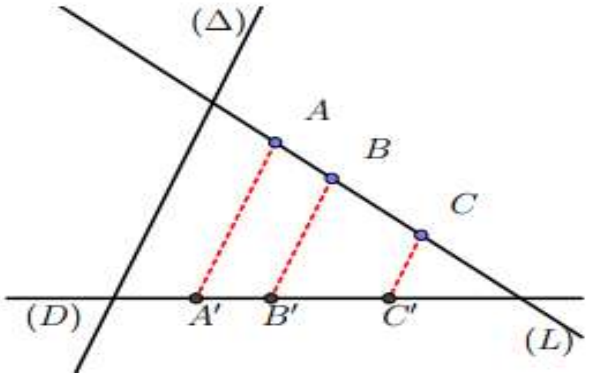
7) Théorème de Thalès par la projection :

Soient (L) et (D) deux droites non parallèles à une troisième droite (Δ).

Théorème 3 :

Si A, B et C sont trois points distincts de la droite (L) et les points

et A', B' et C' sont respectivement leurs projetés sur (D) parallèlement à (Δ),



Alors $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$

Traduction vectorielle :

Il existe un réel non nul k tel que $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = k \times \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A'C'} = k \times \overrightarrow{A'B'} \end{cases}$

Exercice 1

Soit ABC un triangle et M un point du plan défini par : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Tracer le point M' le projeté du point M sur (AC) Parallèlement à (BC)

1) Montrer que : $\overrightarrow{AM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que : $\overrightarrow{MM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Exercice 2

Soit ABC un triangle, on considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Soit M_1 le projeté du point M sur (AC) parallèlement à (BC)

Soit M_2 le projeté du point M_1 sur (BC) parallèlement à (AB)

Soit M' le projeté du point M_2 sur (AB) parallèlement à (AC)

1) Tracer une figure.

2) Ecrire $\overrightarrow{BM'}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$

3) Montrer que $[AB]$ et $[MM']$ ont le même milieu.

Exercice 3

Soit ABC un triangle.

E et F les points tels que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

La parallèle à (EC) passant par F coupe (AB) en un point I.

La parallèle à (BF) passant par E coupe (AC) en un point J.

1) Tracer une figure.

2) Ecrire $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$

3) Ecrire $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$

4) Montrer que : $AI\times AC=AJ\times AB$

5) Déduire que (BC) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 4

$ABCD$ un trapèze rectangle en A et D, tel que $DC>AB$ et $AD=5$

M le point du plan tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et soit N le projeté de M sur (AB) parallèlement à (BC)

Soit E le projeté orthogonal de M sur (DC)

1) Tracer une figure.

2) Montrer que $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

3) Calculer la distance ME

4) Montrer que $4\overrightarrow{EM}+12\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{DB}$

Exercice 5

Soit $ABCD$ un trapèze, dont ses deux bases sont $[AB]$ et $[DC]$.

M un point du plan tel que : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et soit N le projeté de M sur (BC) parallèlement à (AC)

Soit P le projeté du point N sur (DC) parallèlement à (DB)

1) Tracer une figure.

2) Montrer que $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

3) Construire Q tel que $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

4) Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

Exercice 6

Soit ABC un triangle et M un point de $[BC]$

Soit N le projeté du point B sur (AC) parallèlement à (AM)

Soit E l e projeté du point C sur (AB) parallèlement à (AM)

1) Tracer une figure.

2) Montrer que : $\frac{MA}{NB}=\frac{CM}{CB}$

3) Montrer que : $\frac{MA}{CE}=\frac{BM}{CB}$

4) Déduire que : $\frac{1}{MA}=\frac{1}{NB}+\frac{1}{CE}$

5) Enoncer un algorithme de construction d'un segment dont sa longueur est h qui vérifie l'égalité suivante : $\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (avec a et b deux longueurs données)

Exercice 7

ABC un triangle et (Δ) une droite du plan qui coupe (AB), (AC) et (BC) respectivement en P, N et M.

La parallèle à (AB) passant par C coupe (Δ) en E.

1) Tracer une figure.

2) Comparer les deux rapports :

a) $\frac{MB}{MC}$ et $\frac{BP}{CE}$

b) $\frac{NC}{NA}$ et $\frac{CE}{AP}$

3) Déduire que : $\frac{MB}{MC}\times\frac{NC}{NA}\times\frac{PA}{PB}$



Correction : https://drive.google.com/file/d/1T1LpK2zv0ZSPxIYdIQwpgW3s1m13oquq/view?usp=sharing

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL1

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Notions d'arithmétique)

(Pour les questions de 1 à 16) Choisir la ou les réponses justes :

		A	B	C	D
1)	2017 est un nombre :	pair	impair	premier	n'est pas premier
2)	Pour tout $n\in\mathbb{N}$ le nombre $A=14n+28$ est :	pair	impair	un diviseur de 7	un multiple de 7
3)	Tous les entiers naturels sont des :	multiples de 1	multiples de 0	deviseurs de 1	deviseurs de 0
4)	Le nombre de diviseurs de 12 est :	2	6	infini	8
5)	Soit $a;b\in\mathbb{N}$ tel que $a\times b$ est impair, donc :	a et b sont pairs	a et b sont impairs	$a+b$ est impair	$a+b$ est pair
6)	Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $5n(n+1)$ est un nombre :	pair	impair	divisible par n	premier
7)	$945\wedge 1176=$	210	21	52920	1323
8)	$945\vee 1176=$	210	21	52920	1323
9)	Pour tout $a;b\in\mathbb{N}^*$, on a : $a\vee b=$	$\frac{ab}{a\vee b}$	$\frac{a\vee b}{ab}$	$\frac{a\wedge b}{ab}$	$\frac{ab}{a\wedge b}$
10)	Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $7^{n+2}-7^n$ est un multiple de :	3	4	5	6
11)	$a\wedge 1=$	0	1	a	2
12)	$a\vee 1=$	0	1	a	2
13)	Si a divise b alors :	$a\wedge b=a$	$a\wedge b=b$	$a\vee b=a$	$a\vee b=b$
14)	Si a divise b alors :	$a>b$	$a\leq b$	a est un diviseur de b	b est un multiple de a
15)	Si $d=a\wedge b$, alors :	d divise a	d est un multiple de a	$d\geq 1$	$d>a$
16)	Si a et b deux nombres premiers distincts alors :	$a\wedge b=1$	$a\vee b=ab$	$a+b$ est premier	$a\times b$ est premier

17) Déterminer le nombre b sachant que $\overline{815b}$ est divisible par 2 et 9.

18) Montrer que si a est impair, alors a^2 est impair.

19) Déterminer a et b sachant que $a+b=66$ et $a\wedge b=11$

20) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.

Exercice 2 (Calcul vectoriel)

Soit ABC un triangle, E, F et J les points tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

1) Montrer que $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CB}$
2) Construire une figure convenable.
3) Montrer que $\overrightarrow{EF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{PF}=-2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$
4) En déduire que les points E, F et P sont alignés.
5) Soit I le milieu du segment $[AB]$, montrer que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.



Exercice 3 (Projection)

$ABCD$ un parallélogramme, E un point tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et H la projeté de E sur (BC) parallèlement à (AB).

1) Montrer que $\overrightarrow{CH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2) Soit F un point tel que $\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ montrer que $(EF)//(BC)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1FmjX7DKN3ya0wOJvvq6BScoXd6SP6lKC/view?usp=sharing

4

Ensembles des nombres



1) Ensembles des nombres

1-1 L'ensemble des nombres entiers relatifs

Rappel :

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;.....\}$

Définition 1 :

L'ensemble des entiers relatifs contient les entiers naturels et leurs opposés, on le note par $\mathbb{Z}$, on a $\mathbb{Z}=\{.....;-3;-2;-1;0;1;2;3;.....\}$

Remarque 1 :

Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs positifs, on dit que « $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ » ou « $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ » et on écrit $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

Exemple 1 : Répondre par vrai ou faux : $-7\in\mathbb{Z}$; $\frac{5}{3}\in\mathbb{Z}$; $\sqrt{16}\in\mathbb{Z}$



Notations :

- $\mathbb{Z}^+$ est l'ensemble des entiers relatifs positifs. $(\mathbb{Z}^+=\mathbb{N})$
- $\mathbb{Z}^-$ est l'ensemble des entiers relatifs négatifs.
- $\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls.
- $\mathbb{Z}_+^*$ est l'ensemble des entiers relatifs positifs et non nuls. $(\mathbb{Z}_+^*=\mathbb{N}^*)$
- $\mathbb{Z}^2$ est l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x;y)$, on écrit $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ ou $x;y\in\mathbb{Z}$

1-2 L'ensemble des nombres décimaux

Activité 1

Ecrire si possible les nombres suivants sous la forme $\frac{a}{10^n}$ tel que $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$: $2,15$; -0.347; 9; -1; $\frac{1}{3}$

Définition 2 :

Les nombres décimaux relatifs s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$ tel que $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$, forment un ensemble noté ID, on a $ID=\left\{\frac{a}{10^n}/\ a\in\mathbb{Z}\ \ et\ \ n\in\mathbb{N}\right\}$

Remarques 2 :

- $ID=\{\text{Les nombres dont les chiffres après la virgule est finis}\}$
- Tout nombre relatif est un nombre décimal (car si $a\in\mathbb{Z}$ alors $a=\frac{a}{1}=\frac{a}{10^0}\in ID$)

Donc $\mathbb{Z}\subset ID$, ainsi $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID$

Exemple 2 : Répondre par vrai ou faux :

$5,6\in ID$; $123\in ID$; $-24,845\in ID$; $-\frac{23}{10^3}\in ID$; $\frac{2}{3}\in ID$; $\mathbb{N}\subset ID$; $\mathbb{N}^*\in ID^*$; $\mathbb{Z}^+\subset ID$; $ID\subset\mathbb{Z}$

1-3 L'ensemble des nombres rationnels

Définition 3 :

Tout nombre s'écrit sous la forme de quotient d'un nombre entier relatif par un nombre entier naturel est appelé **nombre rationnel**.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$, On a : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/\ a\in\mathbb{Z}\ \ et\ \ b\in\mathbb{N}^*\right\}$

Exemple 3 :

$\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$; $\frac{-3}{8}\in\mathbb{Q}$; $\frac{4}{-7}=\frac{-4}{7}\in\mathbb{Q}$; $-1,36=\frac{-136}{100}\in\mathbb{Q}$; $4=\frac{4}{1}\in\mathbb{Q}$; $\frac{5}{10^7}\in\mathbb{Q}$

Remarques 3 :

- Tout nombre décimal est un nombre rationnel, donc $ID\subset\mathbb{Q}$, ainsi $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}$
- $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$; $\pi\notin\mathbb{Q}$; $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$; $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$
- Si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a\pm b\in\mathbb{Q}$, $a\times b\in\mathbb{Q}$ et $a^n\in\mathbb{Q}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
- L'ensemble des nombres rationnels s'écrit aussi de la façon suivante $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/\,a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*\ et\ a\wedge b=1\right\}$

1-4 L'ensemble des nombres réels

Introduction :

Il existe des nombres qu'on ne peut pas s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ tel que $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$

(Exemples : $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{3}$.....) on les appels les nombres irrationnels.

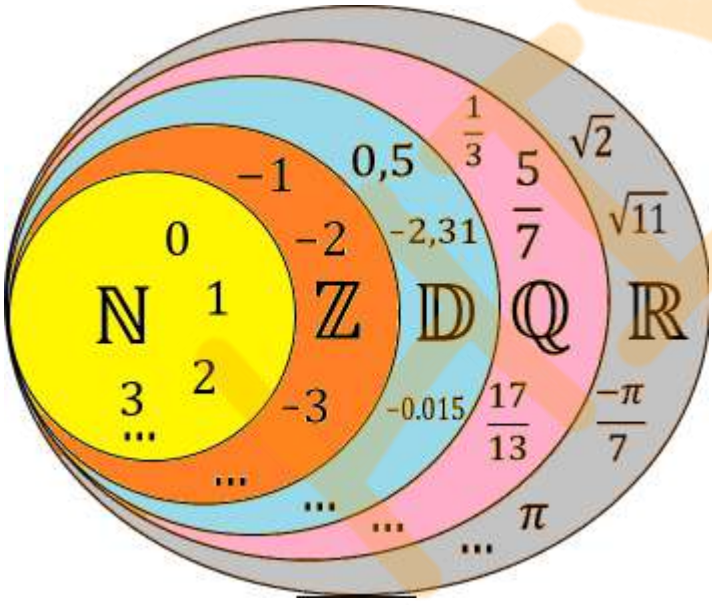
Définition 4 :

L'ensemble des nombres réels est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels, on le note par $\mathbb{R}$, on a $\mathbb{R}=$ {les nombres rationnels et les nombres irrationnels}

Exemple 4 :

- $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$: $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonal d'un carré de coté 1.
- $\pi\in\mathbb{R}$: π est l'aire d'un cercle de rayon 1.

Remarque 4 :



$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

Exercice : Exercice 1 de la série 4.

2) Opérations dans l'ensemble IR

2-1 Activités

Activité 2

Simplifier et calculer les nombres suivants :

$$A=\frac{\frac{5}{7}-\frac{2}{3}}{\frac{11}{16}-\frac{30}{32}+\frac{15}{24}} \quad ; \quad B=\frac{0,03-\frac{1}{100}+0,3}{\frac{3}{4}+\frac{1}{100}-0,04}$$

Activité 3

Soit $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

$A=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)-(b-c)\right]$ et $B=(a-b)(c+d)-5(3a-b)$

Activité 4 : Soient a et b deux nombres réels. Montrer que :

1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; 2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$; 4) $(a-b)(a^2+ab-b^2)=a^3-b^3$

2-2 Opérations dans IR

Propriétés 1 : Soit a, b et c des nombres réels

→ **L'addition dans $\mathbb{R}$:**

$a+b=b+a$

$a+(b+c)=(a+b)+c$

$a+0=0+a$

$a+(-a)=(-a)+a=0$

→ **La multiplication dans $\mathbb{R}$:**

$a\times b=b\times a$

$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

$a\times 1=1\times a$

Si $a\neq 0$ alors $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$

Si $b\neq 0$ alors $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$



Propriétés 2 : Soit a, b et c des nombres réels, on a :

$a\times(b\pm c)=$
$(a\pm b)\times c=$
$(a+b)(c+d)=$

$(a+b)(c-d)=$
$(a-b)(c+d)=$
$(a-b)(c-d)=$

Propriétés 3 : Soit $a;b;c,d\in\mathbb{R}$, on a :

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=$
$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=$
$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=$
Si $c\neq 0$ alors $\frac{a\times c}{b\times c}=$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=$
$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=$
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow$
$\frac{a}{b}=c\Leftrightarrow$
$a\times b=0\Leftrightarrow$
$a+c=b+c\Leftrightarrow$
Si $c\neq 0$ alors $a\times c=b\times c\Leftrightarrow$

Propriétés 4 : Les identités remarquables : Pour tout $a;b\in\mathbb{R}$ on a :

1) $(a+b)^2=$
2) $(a-b)^2=$
3) $a^2-b^2=$
4) $(a+b)^3=$

5) $(a-b)^3=$
6) $a^3+b^3=$
7) $a^3-b^3=$

HIYAB

Remarque 5 :

- $\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0$; - $b-a=-(a-b)$; - $-a-b=-(a+b)$



Application 1 :

Simplifier et calculer le nombre suivant : $A=\left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{4}{7}-\frac{1}{3}}\right)\times\left(\frac{\frac{4}{7}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}\right)$

Application 2 :

Développer et simplifier les expressions suivantes :

$A=(x+2)^2-2x^2$; $B=(x+1)^2-(x-1)^2$; $C=(2x-1)^3-(2x+1)^3$

Application 3 :

Factoriser les expressions suivantes :

$A=(3x+2)^2-9$; $B=9x^2+6x+1$; $C=(x+2)(x+1)-x-2$; $D=5(x^2-4)-(x-2)^2+x^3-8$

Exercices : Exercices 2 et 3 de la série 4.

3) Puissances – Ecriture scientifique d'un nombre décimal

3-1 Puissances

Définition 5 :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, on a : $a^0=1$; $a^1=a$

Pout tout $n\geq 2$: $a^n=\underbrace{a\times a.....\times a}_{n\ fois}$ et $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\underbrace{\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}.....\times\frac{1}{a}}_{n\ fois}$

Exemple 5 :

$(-2)^3=$
$-4^{-5}=$

$(-3)^2=$
$-3^2=$

Remarques 6 :

- L'écriture 0^0 n'est pas définie.
- Soit $a;b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

Si n est pair et $a\neq 0$ alors $(-a)^n\neq -a^n$

Si n est impair alors $(-a)^n=-a^n$

Si n est pair alors $a^n\geq 0$
Si n est impair alors le signe a^n est le même signe de a
Si $a^n=b^n$ et n est pair alors $a=b$ ou $a=-b$
Si $a^n=b^n$ et n est impair alors $a=b$
$a^n=0\Leftrightarrow a=0$

Propriétés 4 : Soit $a;b\in\mathbb{R}^*$ et $n;m\in\mathbb{N}$, on a :

$a^n\times a^m=$
$\frac{a^n}{a^m}=$

$(a\times b)^n=$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=$

$\left(a^n\right)^m=$
$\left(\frac{1}{a}\right)^n=$

Remarque 7 : Puissances de 10

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $10^n=1\underbrace{00.....0}_{n\ zéro}$ et $10^{-n}=\underbrace{0,0.....0}_{n\ zéro}1$

Application 4 : Simplifier et calculer les nombres suivants :

$A=\frac{4^3\times 10^{-5}\times 7}{7^3\times 10^2\times 8}$; $B=8\times(7\times 5)^5\times\frac{3^2\times 7^3}{7^4\times 3^5}\times\left(7^{-2}\right)^8$

3-2 Ecriture scientifique d'un nombre décimal

Propriété 5 et définition 6 :

Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous la forme $x = a \times 10^p$ tels que $p \in \mathbb{Z}$ et a un nombre décimal tel que $1 \le a < 10$ ou $-10 < a \le -1$

Cette écriture est appelée **l'écriture scientifique** du nombre x.



Exemple 6 : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$2025 =$; $23,001 =$; $-0.00007 =$

Application 5 : Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$A = 12 \times 10^4 \times 5 \times 10^6$; $B = 3 \times \left(10^{-2}\right)^3 \times 4,5 \times 10^8$; $C = \dfrac{2,11 \times 10^7 \times 5 \times 10^{-6}}{3^2 \times 10^2}$

Exercice : Exercice 4 de la série 4.

4) Les racines carrées

Activité 5 : Simplifier les nombres suivants :

$A = \sqrt{36} + \sqrt{12} - 5\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}$; $B = \sqrt{18} + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{8}$; $C = \sqrt{3}\left(\sqrt{12} + \sqrt{27}\right)$; $D = \dfrac{\sqrt{20} \times \sqrt{18}}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}}$

Définition 7 : Soit $a \in \mathbb{R}^+$

La **racine carrée** de a est le nombre réel positif x tel que $x^2 = a$ on le note par $\sqrt{a}$ et on écrit $x = \sqrt{a}$

Propriétés 6 :

Soit $a ; b \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$

- $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

- $\dfrac{1}{\sqrt{a}} =$
- $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow$
- $\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow$
- Si $x = \sqrt{a}$ alors $x^2 = a$
- Si $x^2 = a$ et $a > 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Application 6 :

1) $A \times B$, A^2 et B^2 sachant que $A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ et $B = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

2) On pose $X = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ et $Y = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$

a) Montrer que $X.Y = 1$

b) Montrer que $X^2 + Y^2 = 34$

c) En déduire la valeur de $\left(X + Y\right)^2$ et de $\left(X - Y\right)^2$

d) En remarquant que $X + Y \ge 0$ et $X - Y \ge 0$ déduire la valeur de $X + Y$ et de $X - Y$

e) En remarquant que $\dfrac{(X + Y) + (X - Y)}{2} = X$ et $\dfrac{(X + Y) - (X - Y)}{2} = Y$, déduire la valeur de X et de Y

Remarques 8 :

- $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
- $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \ge \sqrt{a + b}$
- $\sqrt{a - b} \ge \sqrt{a} - \sqrt{b}$

- Si $a \in \mathbb{R}^+$ alors $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$
- Si $a \in \mathbb{R}^-$ alors $a = -\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$
- Si $a ; b \in \mathbb{R}^+$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $a ; b \in \mathbb{R}^-$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$

Exercices : Exercices 5 et 6 de la série 4.

Résumé 4 : Ensembles des nombres

Les ensembles des nombres

- L'ensemble des entiers naturels :

$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;.....\}$

- L'ensemble des entiers relatifs :

$\mathbb{Z}=\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

- L'ensemble des nombres décimaux relatifs :

$ID=\left\{\frac{a}{10^n}/\ a\in\ \mathbb{Z}\ \ et\ \ n\in\mathbb{N}\right\}$

- L'ensemble des nombres rationnels :

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/\ a\in\ \mathbb{Z}\ \ et\ \ b\in\mathbb{N}^*\right\}$

- L'ensemble des nombres réels :

$\mathbb{R}=$ {les nombres rationnels et les nombres irrationnels}

- On a $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

L'addition dans IR

$a+b=b+a$

$a+(b+c)=(a+b)+c$

$a+0=0+a$

$a+(-a)=(-a)+a=0$

La multiplication dans IR

$a\times b=b\times a$

$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

$a\times 1=1\times a$

Si $a\neq 0$ alors $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$

Développement dans IR

$a\times(b\pm c)=a\times b\pm b\times c$

$(a\pm b)\times c=a\times c\pm b\times c$

$(a+b)(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$

$(a+b)(c-d)=a\times c-a\times d+b\times c-b\times d$

$(a-b)(c+d)=a\times c+a\times d-b\times c-b\times d$

$(a-b)(c-d)=a\times c-a\times d-b\times c+b\times d$

Les identités remarquables

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

7) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ecriture scientifique

L'écriture scientifique du nombre $x\in ID$ est $x=a\times 10^p$ où $p\in\mathbb{Z}$ et $a\in ID$ tel que ($1\leq a<10$ ou $-10<a\leq -1$)

Les racines carrées

Soit $a;b\in\mathbb{R}^+$ et $n\in\mathbb{N}^*$

$\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}$

$\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a$

$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$

Si $x=\sqrt{a}$ alors $x^2=a$

Si $x^2=a$ et $a>0$ alors $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

Opérations sur les fractions

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+b\times c}{b\times d}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-b\times c}{b\times d}$

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

Si $c\neq 0$ alors $\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\times d=b\times c$

$\frac{a}{b}=c\Leftrightarrow a=b\times c$

$a\times b=0\Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$

$a+c=b+c\Leftrightarrow a=b$

Si $c\neq 0$ alors $a\times c=b\times c\Leftrightarrow a=b$

Les puissances

$a^n\times a^m=a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$(a\times b)^n=a^n\times b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

$\left(a^n\right)^m=a^{n\times m}$

$\left(\frac{1}{a}\right)^n=a^{-n}$

Exercice 1 :

1) Compléter par : $(\in \quad ou \quad \notin \quad ou \quad \subset \quad ou \quad \not\subset)$

$10 \dots \mathbb{N}$; $3,5 \dots \mathbb{Z}$; $\frac{1}{3} \dots ID$; $\frac{2\pi}{3} \dots \mathbb{R}$; $\frac{\sqrt{2}}{3} \dots \mathbb{Q}$;

$\frac{93}{125} \dots ID$; $0 \dots \mathbb{R}$; $\mathbb{N} \dots ID$; $\mathbb{R} \dots \mathbb{N}$; $\sqrt{49} \dots \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} \dots \mathbb{Q}$; $\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \dots \mathbb{Z}$; $\mathbb{R} \dots \mathbb{Z}$; $ID \dots \mathbb{R}$; $\pi \dots \mathbb{Q}$

2) Parmi les nombres :

10^{-3} ; -10^3 ; 3587 ; 4×10^{-2} ; π ; $-\frac{3}{100}$; $-\frac{22}{7}$; $3,14$; $\sqrt{2}$;

$\sqrt{0,25}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{21}{6}$; $\sqrt{\sqrt{16}}$; 0 ; $\frac{5}{4}$; $-\frac{1}{2\times5^3}$; $\sqrt{3}$; $1+\sqrt{2}$;

a) Déterminer les nombres décimaux.

b) Déterminer les nombres rationnels non décimaux.

c) Déterminer les nombres irrationnels.

Exercice 2 :

1) Calculer : $A=\frac{-6}{35}+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$; $B=\frac{20}{28}+\frac{3}{14}\times\frac{4}{9}$;

$C=\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)\times\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$; $D=\left(\frac{\frac{1}{2}-3}{1-\frac{3}{5}}\right)\div\left(\frac{\frac{-1}{5}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}}\right)$;

$E=\frac{(3^2\times11^5)^{-2}}{(3^4\times11^2)^3}\times\frac{33^{15}}{3^2\times11^{-1}}$

2) Développer et simplifier :

$A=\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-(4x-1)(4x+1)$

$B=2(x+1)^3-3(1-5x)-4x^2$; $C=(5x-1)^2-(x+6)^2$;

$D=\frac{1}{4}(4x-1)^2+2(2x-1)^3$

3) Factoriser :

$A=(x+2)^2+(x^2-4)$; $B=x^3+1$

$C=8x^3+1$; $D=x^5+x^3-x^2-1$

$E=x^3-8+4(x^2-4)-3(x-2)$; $F=x^3+125-5x(x+5)$

$G=(2x^2-1)^3+x^6$; $H=x^6-1$

Exercice 3 :

Soit : $a;b;c\in\mathbb{R}$

1) Développer et simplifier :

$A=-2(a+b-c)-3(a-b+c)+4(5a-b)$

$B=\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$; $C=(a+b+c)^2$; $D=(a+b+c)^3$

2) Montrer que :

a) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

b) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(b-a)(a-c)(c-b)$

3) a) Simplifier par deux méthodes le nombre E tel que :

$E=\left((a-b)+(b-c)+(c-a)\right)^3$

b) En déduire que :

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

Exercice 4 :

1) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$a=3600\times40000$; $b=5000\times0,000025$

$c=13\times10^{-7}\times0,014$; $d=\frac{720\times10^5}{0,00002}$

2) Simplifier :

$A=\left(\frac{5^8}{10^2\times2}\right)\left(\frac{2^3\times5^{-3}}{4\times25}\right)^2$; $B=\frac{\left(x^2y\right)^{-3}z^4x^5}{x\left(yz^2\right)^2y^{-1}}$

3) Soit $a;b\in\mathbb{R}^*$, on pose : $E=\frac{a^{-2}b^{-5}\left(ab^2\right)^3+a^3b^3}{a^2+b^2}$

a) Simplifier E

b) Donner l'écriture scientifique de E sachant que :
$a=100000$ et $b=0,04$

Exercice 5 :

1) Simplifier les nombres suivants :

$A=3\sqrt{112}-2\sqrt{7}+5\sqrt{28}$; $B=\frac{2+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-2\sqrt{5}}$;

$C=(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5})$; $D=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$;

$E=\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$; $F=\sqrt{\frac{1}{10-3\sqrt{11}}+\frac{1}{10+3\sqrt{11}}}$

2) Montrer que : $12^3=\left(9+\sqrt{5}\right)^3+\left(9-\sqrt{5}\right)^3$

Exercice 6 :

On pose $A=\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{7+\sqrt{48}}$ et $B=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

1) Donner le signe de A et de B (sans utiliser la calculatrice).

2) Calculer et simplifier A^2 et B^2

3) En déduire que $A=4$ et $B=-4$

Exercice 7 :

1) Montrer que :

$\sqrt{2\sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}}+5\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}\in\mathbb{N}$ et $\frac{(9^{n+1}+9^n)^2}{(3^{2n+1}-3^{2n})^2}\in\mathbb{N}$

2) Soit $a;b\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{5}$

a) Montrer que : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$

b) Calculer $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$ et $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}$

3) Soit $x;y;z\in\mathbb{R}$ tel que $xyz=1$

Montrer que : $\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1}=1$

4) Soit $a;b\in\mathbb{R}^*$ tel que $a^2+b^2=6ab$

a) Montrer que a et b sont de même signe.

b) Calculer $\frac{a+b}{a-b}$



Correction : https://drive.google.com/file/d/1CHCDAFw9oajS5jtHDpXrh9g1NcCg5RxH/view?usp=sharing

5

Ordre dans IR

HIYAB



1) Ordre

1-1 Comparaison

Activité 1 :

Comparer les nombres réels a et b dans les cas suivants

1) $a=2\sqrt{3}$; $b=3\sqrt{2}$

2) $a=\frac{2}{3}$; $b=\frac{3}{4}$

3) $a=\frac{6}{17}$; $b=\frac{7}{15}$

4) $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $b=1+\sqrt{6}$

5) $a=x^2+y^2$; $b=2xy$ tel que $x;y\in\mathbb{R}$

6) $a=\frac{2n}{2n+1}$; $b=\frac{2n-1}{2n}$ tel que $n\in\mathbb{N}^*$

Définition 1 :

Soit a et b deux nombres réels.

- On dit que a est **inférieur ou égal** à b, si $b-a$ est positif. On écrit $a\leq b$
- On dit que a est **inférieur strictement** à b, si $b-a$ est **strictement** positif. On écrit $a<b$

Remarques 1 :

Soit a et b deux nombres réels.

- $b\geq a\Leftrightarrow a\leq b$; $b>a\Leftrightarrow a<b$
- $b-a$ est positif $\Leftrightarrow b-a\geq 0$
- $b-a$ est strictement positif $\Leftrightarrow b-a>0$
- $a\leq b\Leftrightarrow (a<b$ ou $a=b)$
- Si $a<b$ alors $a\leq b$ (le contraire est faux)



Exemples 1 :

1) On a $\frac{3}{7}<\frac{5}{8}$ car : $\frac{5}{8}-\frac{3}{7}=\frac{35-24}{56}=\frac{11}{56}>0$

2) Soit $x;y\in\mathbb{R}$

On a $4xy\leq (x+y)^2$ car : $(x+y)^2-4xy=(x^2+2xy+y^2)-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0$

Application 1 : Soit x un nombre réel strictement positif. Montrer que : $x+\frac{1}{x}\geq 2$

Exercice : Exercice 1 de la série 5.

1-2 Encadrement

Propriété 1 : Ordre et addition : Soit $a;b;c;d\in\mathbb{R}$

- Si $a\leq b$ alors $a+c\leq b+c$
- Si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$

Propriété 2 : Ordre et multiplication

Soit $a;b;c;d\in\mathbb{R}$

- Si $a\leq b$ et $c\geq 0$ alors $a\times c\leq b\times c$
- Si $a\leq b$ et $c\leq 0$ alors $a\times c\geq b\times c$
- Si $0\leq a\leq b$ et $0\leq c\leq d$ alors $a\times c\leq b\times d$

Propriété 3 : Ordre et le carré - Ordre et la racine carrée

- Si $a^2\leq b^2$ et $a;b\in\mathbb{R}^+$ alors $a\leq b$
- Si $a^2\leq b^2$ et $a;b\in\mathbb{R}^-$ alors $a\geq b$
- Si $a\leq b$ et $a;b\in\mathbb{R}^+$ alors $a^2\leq b^2$
- Si $a\leq b$ et $a;b\in\mathbb{R}^-$ alors $a^2\geq b^2$
- Si $a;b\in\mathbb{R}^+$ alors : $a\leq b\Leftrightarrow\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

Propriété 4 : Ordre et l'inverse :

Soit a et b deux réels non nul et de même signe. Si $a \le b$ alors $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

Remarques 2 : Soit $a;b;c \in \mathbb{R}$

- Si $a \le b$ et $b \le c$ alors $a \le c$
- Si $a \le b$ alors $-a \ge -b$
- Si $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$
- Si $a < 0$ alors $\frac{1}{a} < 0$

Exemples 2 :

1) On a $11 \ge 8$ donc $\frac{1}{11} \le \frac{1}{8}$

2) On a $2 > 0$ donc $\frac{1}{2} > 0$

3) On a $-2 < 0$ donc $\frac{1}{-2} < 0$

4) On a $3 \le 8 \le 11$ donc $\frac{1}{11} \le \frac{1}{8} \le \frac{1}{3}$

5) On a $-3 \ge -4$ donc $(-3)^2 \le (-4)^2$ car -3 et -4 sont négatifs.

6) On a $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$ et $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16$ donc $\left(3\sqrt{2}\right)^2 \ge \left(2\sqrt{3}\right)^2$ d'où $3\sqrt{2} \ge 2\sqrt{3}$
Car $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$ sont positifs.

Propriété 5 : Soit $a;b \in \mathbb{R}^+$ et $c;d \in \mathbb{R}^-$

- Si $a \le x \le b$ alors $a^2 \le x^2 \le b^2$;
- Si $c \le x \le d$ alors $d^2 \le x^2 \le c^2$
- Si $-a \le x \le b$ alors $0 \le x^2 \le max((-a)^2; b^2)$



Application 2 :

1) Soit $a;b \in \mathbb{R}$ tel que $a > 2$ et $b < \frac{3}{5}$

a) Montrer que $-5b > -3$ et $3a > 6$; b) En déduire que $3a - 5b > 3$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \ge 7$. Montrer que $\frac{-1}{2x-13} \ge -1$

3) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y \ge 4$. Montrer que $y^2 + 9 \ge 25$ et déduire que $\sqrt{y^2+9} \ge 5$

4) Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $-3 \le z \le 2$. Donner un encadrement de z^2.

$$x - y = x + (-y)$$
$$\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$$

Application 3 :

Soit x et y deux nombres réels tel que $1 \le x \le 5$ et $2 \le y \le 8$

Donner un encadrement de chacun des nombres suivants $x+y$, $x-y$, $x \times y$ et $\frac{x}{y}$

Remarque 3 :

Si $a \le x \le b$ et $c \le x \le d$ alors l'encadrement le plus précis de x est $max(a;c) \le x \le inf(b;d)$

Exercice : Exercice 2 de la série 5.

2) Valeur absolue

Activité 2 :

1) Calculer $\sqrt{4^2}$ et $\sqrt{(-5)^2}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $\sqrt{x^2} = x$?

3) a) Sur une droite graduée $D(O;I)$ représenter les points $O(0)$, $A(4)$ et $B(-5)$

b) Calculer les distances OA et OB

4) a) Soit $M(x)$ un point de $D(O;I)$. Déterminer la distance OM en fonction de x.

b) Soit $N(y)$ un point de $D(O;I)$. Montrer que $MN = |x-y|$

Définition 2 :

Soit x un nombre réel, M est un point d'abscisse x sur une droite graduée $D(O;I)$.

La valeur absolue de x, notée $|x|$, est le nombre réel positif égal à la distance OM.

Remarque 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$: Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$

Exemples 3 :

Ecrire sans symbole de la valeur absolue les nombres suivants : $|12|$, $|-3,2|$, $|1-\sqrt{2}|$, $|5-2|$ et $|2-5|$

Propriétés 6 : Les propriétés de la valeur absolue

Soit $x; y \in \mathbb{R}$ on a :

- $|x| \geq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x| - |y| \leq |x-y|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

- Si x et y sont les abscisses respectives des points M et N sur une droite graduée $D(O;I)$ alors $MN = |x-y|$

Application 4 :

1) Ecrire sans symbole de la valeur absolue le nombres suivant $|(3-\pi)(2\sqrt{2}-3)|$

2) Soit $x; y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq 2$ et $y \geq 3$

Simplifier le nombre A tel que $A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2}$

Propriétés 7 : Soit $x; y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$

- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- $|x| = r \Leftrightarrow x = r$ ou $x = -r$
- $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$
- $|x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r$ ou $x \leq -r$



Application 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $|3x-5| = 4$
2) $|3x-5| = |4x+7|$
3) $|x-2| \leq 1$
4) $|x-2| < 1$
5) $|3-x| \geq 2$
6) $|3-x| > 2$
7) $|x| \geq -8$
8) $|x| = -8$

Exercice : Exercice 3 de la série 5.

3) Intervalles de IR

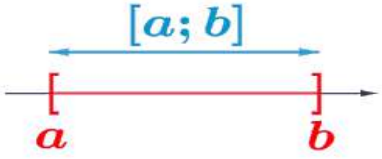
Activité 3 :

Représenter chaque fois sur une droite graduée $D(O;I)$ l'ensemble des nombres réels x dans les cas suivants :

$2 \leq x \leq 5$; $3 \leq x < 7$; $1 < x \leq 4$; $-2 < x < -1$; $x \geq 2$; $x > 3$; $x \leq 5$; $x < 1$

Définition 3 : Soit $a; b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$

L'ensemble des nombres réels x tel que $a \leq x \leq b$ est appelée **l'intervalle** d'extrémités a et b, on le note $[a;b]$



Ont défini les intervalles de l'ensemble $\mathbb{R}$ par la manière suivante :

L'ensemble des nombres réels x tel que	L'intervalle	
$a \le x \le b$	$[a;b]$	Intervalle fermé
$a \le x < b$	$[a;b[$	Intervalle fermé à gauche et ouvert à droite
$a < x \le b$	$]a;b]$	Intervalle ouvert à gauche et fermé à droite
$a < x < b$	$]a;b[$	Intervalle ouvert
$x \ge a$	$[a;+\infty[$	Intervalle fermé à gauche et ouvert à droite
$x > a$	$]a;+\infty[$	Intervalle ouvert
$x \le a$	$]-\infty;a]$	Intervalle ouvert à gauche et fermé à droite
$x < a$	$]-\infty;a[$	Intervalle ouvert
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$	Intervalle ouvert

Remarques 5 :

- Les symboles $+\infty$ (plus l'infini) et $-\infty$ (moins l'infini) ne sont pas des nombres réels.
- Le crochet est toujours ouvert du côté de $+\infty$ et $-\infty$ dans les intervalles de $\mathbb{R}$
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'ensemble vide on le note par : $\varnothing$
- $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$; $\mathbb{R}^-=]-\infty;0]$; $\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$; $\mathbb{R}_-^*=]-\infty;0[$

Définition 4 : Intersection et réunion de deux intervalles

Soit I et J deux intervalles

- L'ensemble des éléments communs de I et J se note $I \cap J$ et se lit « I **inter** J »

Ainsi $x \in I \cap J \Leftrightarrow x \in I$ et $x \in J$

- L'ensemble des éléments qui appartiennent à I ou à J se note $I \cup J$ et se lit « I **union** J »

Ainsi $x \in I \cup J \Leftrightarrow x \in I$ ou $x \in J$

Exemple 4 : Déterminer $[3;5] \cap [2;4]$ et $[3;5] \cup [2;4]$



Application 6 :

Ecrire si possible sous forme d'un intervalle les ensembles suivants :

1) $[2;6] \cap]-1;3]$ et $[2;6] \cup]-1;3]$

2) $[2;+\infty[\cap]-\infty;1]$ et $[2;+\infty[\cup]-\infty;1]$

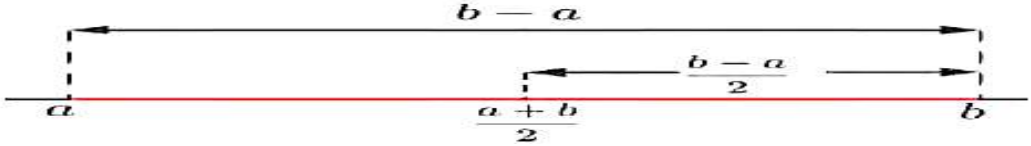
3) $[3;7] \cap [5;+\infty[$ et $[3;7] \cup [5;+\infty[$

Remarque 6 :

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$; $\mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$

Remarques 7 : Centre, longueur et rayon d'un intervalle

Soit I l'un des intervalles suivants : $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$ et $]a;b[$



- On appelle **centre** de l'intervalle I le nombre réel $\dfrac{a+b}{2}$.
- On appelle **l'amplitude** (ou la longueur) de l'intervalle I le nombre réel $b-a$.
- On appelle **rayon** de l'intervalle I le nombre réel $\dfrac{b-a}{2}$.
- Les nombres a et b sont appelés les **bornes** ou les **extrémités** de l'intervalle I.

Exercice : Exercice 4 de la série 5.

4) Approximations

Définitions 5 : Approximation par défaut et par excès

Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$

- Chaque inégalité parmi les doubles inégalités suivantes $a\le x\le b$, $a\le x<b$, $a<x\le b$ et $a<x<b$ est appelée **un encadrement** de x **d'amplitude** $b-a$
- Le nombre a est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) par **défaut** de x à $b-a$ près.
- Le nombre b est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) par **excès** de x à $b-a$ près.

Exemple 5 :

On sait que $3,14<\pi<3,15$.

Donc $3,14$ est une approximation par défaut de π à $3,15-3,14=10^{-2}$ près, et $3,15$ est une approximation par excès de π à 10^{-2} près.

Définition 6 : Approximation à la précision

Soient x un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

Tout réel a vérifiant $|x-a|\le r$ est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) de x à la précision r près (ou à r près).

Remarque 8 :

$|x-a|\le r$

valeur approchée — la précision

Exemple 6 :

A l'aide de la calculatrice : $\sqrt{2}=1,414213...$

On a $|\sqrt{2}-1,415|<5\times 10^{-3}$, donc $1,415$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 5×10^{-3} près.

Exemple 7 :

Soit x un nombre réel tel que $2\le x\le 3$

Montrer que $\frac{5}{2}$ est une approximation de x à la précision $\frac{1}{2}$ près.



Propriété 8 :

Si $a\le x\le b$, $a\le x<b$, $a<x\le b$ et $a<x<b$

Alors $\frac{a+b}{2}$ est une approximation de x à la précision $\frac{b-a}{2}$ près.

Définition 7 : Approximation décimale

Soit x un nombre réel tel que $N\times 10^{-p}\le x\le (N+1)\times 10^{-p}$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{Z}$

- Le nombre $N\times 10^{-p}$ est appelé **l'approximation décimale par défaut** de x à 10^{-p} près (ou d'ordre p).
- Le nombre $(N+1)\times 10^{-p}$ est appelé **l'approximation décimale par excès** de x à 10^{-p} près (ou d'ordre p).

Exemple 8 :

A l'aide de la calculatrice $\frac{123}{456}=0,269\ ...$, donc $0,26<\frac{123}{456}<0,27$

Alors $26\times 10^{-2}<\frac{123}{456}<27\times 10^{-2}$. C'est-à-dire $26\times 10^{-2}<\frac{123}{456}<(26+1)\times 10^{-2}$

D'où le nombre 26×10^{-2} est l'approximation décimale par défaut du nombre à 10^{-2} près, et le nombre 27×10^{-2} est l'approximation décimale par excès du nombre à 10^{-2} près.

Application 7 :

1) Donner l'approximation décimale par défaut de $\frac{97}{23}$ à 10^{-2} près.

2) Donner l'approximation décimale par excès de $\sqrt{10,5}$ à 10^{-2} près.

Exercices : Exercices 5 et 6 de la série 5.

Exercice d'olympiade : Exercice 7 de la série 5.

Résumé 5 : Ordre dans IR

Comparaison - Ordre et addition

- On dit que a est **inférieur ou égal à** b, si $b-a$ est positif. On écrit $a \le b$
- On dit que a est **inférieur strictement à** b, si $b-a$ est strictement positif. On écrit $a < b$
- Si $a \le b$ alors $a+c \le b+c$
- Si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a+c \le b+d$

Ordre et multiplication - Ordre et l'inverse

- Si $a \le b$ et $c \ge 0$ alors $a \times c \le b \times c$
- Si $a \le b$ et $c \le 0$ alors $a \times c \ge b \times c$
- Si $0 \le a \le b$ et $0 \le c \le d$ alors $a \times c \le b \times d$
- Soit a et b deux réels non nul et de même signe.

Si $a \le b$ alors $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

Ordre et le carré - Ordre et la racine carrée

- Si $a^2 \le b^2$ et $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors $a \le b$
- Si $a^2 \le b^2$ et $a;b \in \mathbb{R}^-$ alors $a \ge b$
- Si $a \le b$ et $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors $a^2 \le b^2$
- Si $a \le b$ et $a;b \in \mathbb{R}^-$ alors $a^2 \ge b^2$
- Si $a;b \in \mathbb{R}^+$ alors : $a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$

Propriété : Soit $a;b \in \mathbb{R}^+$ et $c;d \in \mathbb{R}^-$

- Si $a \le x \le b$ alors $a^2 \le x^2 \le b^2$
- Si $c \le x \le d$ alors $d^2 \le x^2 \le c^2$
- Si $-a \le x \le b$ alors $0 \le x^2 \le max((-a)^2;b^2)$

La valeur absolue ;

- Si $x \ge 0$ alors $|x| = x$; Si $x \le 0$ alors $|x| = -x$
- Si M est un point d'abscisse x sur une droite graduée $D(O;I)$, alors : $|x| = OM$

Les propriétés de la valeur absolue :

- $|x| \ge 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x+y| \le |x| + |y|$
- $|x| - |y| \le |x-y|$
- $-|x| \le x \le |x|$

- Si x et y sont les abscisses respectives des points M et N sur une droite graduée $D(O;I)$ alors $MN = |x-y|$
- Si $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

→ $|x| = r \Leftrightarrow x = r$ ou $x = -r$

→ $|x| \le r \Leftrightarrow -r \le x \le r$

→ $|x| \ge r \Leftrightarrow x \ge r$ ou $x \le -r$



Les intervalles de IR :

L'ensemble des nombres réels x tel que	L'intervalle
$a \le x \le b$	$[a;b]$
$a \le x < b$	$[a;b[$
$a < x \le b$	$]a;b]$
$a < x < b$	$]a;b[$
$x \ge a$	$[a;+\infty[$
$x > a$	$]a;+\infty[$
$x \le a$	$]-\infty;a]$
$x < a$	$]-\infty;a[$
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$

$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$; $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

$\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$; $\mathbb{R}_-^* =]-\infty;0[$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\mathbb{R} \setminus \{a\} =]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$

Intersection et réunion de deux intervalles :

Soit I et J deux intervalles

- $x \in I \cap J \Leftrightarrow x \in I$ et $x \in J$
- $x \in I \cup J \Leftrightarrow x \in I$ ou $x \in J$

Approximation par défaut et par excès :

- Chaque inégalité parmi les doubles inégalités suivantes $a \le x \le b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$ et $a < x < b$ est appelée un **encadrement** de x **d'amplitude** $b-a$
- Le nombre a est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) par défaut de x à $b-a$ près.
- Le nombre b est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) par excès de x à $b-a$ près.

Approximation à la précision :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$

Tout réel a vérifiant $|x-a| \le r$ est appelé une **approximation** (ou **valeur approchée**) de x à la **précision** r près (ou à r près).

Approximation décimale :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $N \times 10^{-p} \le x \le (N+1) \times 10^{-p}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$

- Le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé **l'approximation décimale** par défaut de x à 10^{-p} près (ou d'ordre p).
- Le nombre $(N+1) \times 10^{-p}$ est appelé **l'approximation décimale** par excès de x à 10^{-p} près (ou d'ordre p).

Exercice 1 (Comparaison)

Comparer les nombres réels a et b dans les cas suivants

1) $a=5+\sqrt{2}$; $b=\sqrt{25+10\sqrt{2}}$
2) $a=\sqrt{11}$; $b=\sqrt{5+\sqrt{6}}$
3) $a=7-5\sqrt{2}$; $b=\sqrt{99-70\sqrt{2}}$
4) $a=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$; $b=\sqrt{39-12\sqrt{10}}$
5) $a=2+\sqrt{3}$; $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}$
6) $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; $b=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$
7) $a=(x+y)^2$; $b=4xy$ ($x;y\in\mathbb{R}$)

Exercice 2 (Encadrement)

1) Soit a et b deux réels tels que $-3\le a\le 4$ et $2\le b\le 7$

Donner l'encadrement de $a+b$, $a-b$, $a\times b$ et $\dfrac{a}{b}$

2) Soit x et y deux réels tels que $2\le x\le 5$ et $-4\le y\le 1$

Donner un encadrement de $-x+2y$, $-x^2+3y^2$, $xy-4$,

$\dfrac{x}{y+5}$ et $\dfrac{x+y+3}{x-y}$

Exercice 3 (Encadrement)

1) Soit a et b deux réels tels que $-2<a<3$ et $-4<b<1$

a) Montrer que $-22<a^2+b^2-2a+4b<33$

b) Vérifier que $a^2+b^2-2a+4b=(a-1)^2+(b+2)^2-5$

c) En déduire un encadrement plus précis de :
$a^2+b^2-2a+4b$

2) Soit x et y deux réels tel que $x<y<3$

a) Montrer que $x+y-6<0$

b) Comparer $c=x^2-6x+1$ et $d=y^2-6y+1$

Exercice 4 (Valeur absolue)

1) Ecrire sans symbole de la valeur absolue les nombres suivants :

$|3-2\sqrt{3}|$, $|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|$, $|\sqrt{2}-2|$, $|-(a-b)^2|$ et $\sqrt{(5-2\sqrt{2})^2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$|4x-5|=1$, $|-3x+7|\le 2$, $|4x-9|>1$, $|-3x+7|\ge -2$,
$|2x+1|=|-x+5|$, $|x-7|=0$, $|x+5|<-4$,

Exercice 5 (Valeur absolue)

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x\ge\dfrac{1}{2}$, $y\le 1$ et $x-y=3$

1) Calculer la valeur de E tel que $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

2) Vérifier que $\frac{1}{2}\le x\le 4$ et $\frac{-5}{2}\le y\le 1$

3) Calculer la valeur de F tel que $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

Exercice 6 (Valeur absolue)

Soit $a;b\in]1;2[$ tel que $a>b$, on pose :

$A=ab+a^2-b$ et $B=ab+b^2-a$

1) Encadrer A, B et comparer-les.

2) En déduire que $|A-B|<7$

Exercice 7 (Valeur absolue)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-7|+|x+1|=8$

Exercice 8 (Les intervalles)

1) Ecrire sous forme d'un intervalle les ensembles suivants :

$x\le -3$; $x\ge -1$; $x<8$; $-7<x\le 11$; $-4\le x<6$

2) Ecrire si possible sous forme d'un intervalle les ensembles suivants :

a) $[-3;3]\cap]0;5[$ et $[-3;3]\cup]0;5[$

b) $[0;5]\cap]4;+\infty[$ et $[0;5]\cup]4;+\infty[$

c) $]-\infty;1]\cap[-3;3[$ et $]-\infty;1]\cup[-3;3[$

3) Déterminer le centre, le rayon et l'amplitude des intervalles suivants : $[2;9]$; $[-1;7[$; $]0;8]$; $]-5;-2[$

4) Déterminer l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 4.

5) Déterminer l'intervalle fermé de centre -1 dont l'un des bornes est 2.

Exercice 9 (Les approximations)

Soit a une approximation de $\frac{1}{2}$ à la précision $\frac{1}{12}$ près.

1) Montrer que $\dfrac{5}{12}<a<\dfrac{7}{12}$

2) Encadrer le nombre $\dfrac{a}{3a-1}$

3) En déduire que $\dfrac{13}{9}$ une approximation de $\dfrac{a}{3a-1}$ à la précision $\dfrac{8}{9}$ près.

Exercice 10 (Les approximations)

Soit x un nombre réel.

1) Montrer que $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ et $\sqrt{1+x^2}+1\ge 2$

2) On pose $E=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

a) En déduire que $\left|E-\dfrac{1}{x}\right|\le\dfrac{1}{2}|x|$

b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 5×10^{-1} près.

Exercice 11 (Exercice d'olympiade)

Soit x, y et z des réels strictement positifs, montrer que :

1) $x+y\ge 2\sqrt{xy}$; $x^2+y^2\ge 2xy$; $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$; $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\ge\dfrac{x+y}{2}$

2) $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$; $x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge 6$

3) $3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$; $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 9$

4) $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$; $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$

5) $(x+y+z)^3\ge 27xyz$; $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\le\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})$

6) $\dfrac{x+y}{x+y+1}\le\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}$

7) $|x|-|y|\le\big||x|-|y|\big|\le|x-y|$ et $|x+y|\le|x|+|y|\le|x+y|+|x-y|$

Correction :

https://drive.google.com/file/d/1i6UZWnfPUrQTciNBRC440Y5SR_4XQoiC/view?usp=sharing

6

Droite dans le plan



1) Rappel

Repère dans le plan :

1) Tous trois points O, I et J distincts non alignés déterminent un repère du plan notée $(O;I;J)$ ou $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

2) Si on pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est appelé une base du plan.

Si $(OI)\perp(OJ)$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthogonale et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthogonal.

Si $OI=OJ$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base normée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère normé.

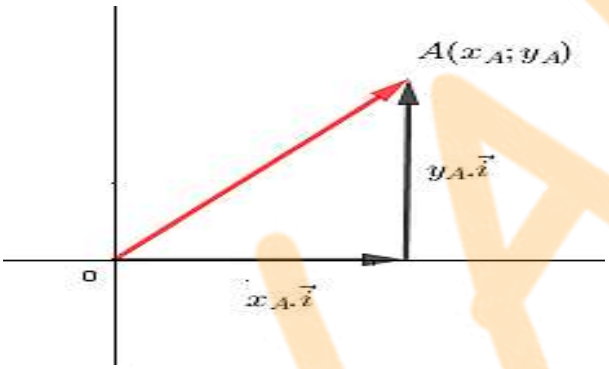
Si $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

Coordonnées d'un point :

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Pour tout point A du plan, il existe un unique couple (x_A,y_A) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

(x_A,y_A) est appelé couple de coordonnées de A dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $A(x_A,y_A)$



On a donc : $A(x_A,y_A)\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

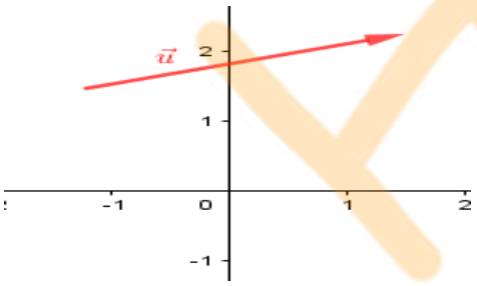
Coordonnées d'un vecteur :

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(a;b)$ de nombres réels tel que : $\vec{u}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$

$(a;b)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $\vec{u}(a;b)$

On a donc : $\vec{u}(a;b)\Leftrightarrow\vec{u}=a.\vec{i}+b.\vec{j}$





2) Soit $k\in\mathbb{R}$ les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ est le couple $(ka;kb)$: $\vec{u}(a;b)\Leftrightarrow\vec{u}(ka;kb)$

3) Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan alors les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

Coordonnées du milieu d'un segment :

Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan alors les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$ est

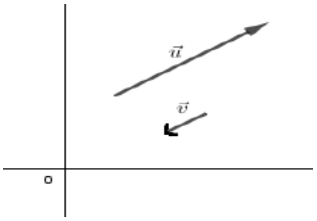
$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Egalité de deux vecteurs :

$\vec{u}(a;b)=\vec{v}(a';b')\Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$

Vecteurs colinéaires :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.



- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel α tel que $\vec{v}=\alpha\vec{u}$.

Points alignés :

Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Distance entre deux points :

Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points d'un repère orthonormé alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exercices : Exercices 1 et 2 de la série 5.

2) Condition de colinéarité de deux vecteurs

Définition 1 :

Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le nombre $ab'-a'b$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre, on le note par $det(\vec{u};\vec{v})$

ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ et on écrit : $det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

Remarque 1 :

$det(\vec{v};\vec{u})=-det(\vec{u};\vec{v})$

Propriété 1 :

1) $det(\vec{u};\vec{v})=0\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2) $det(\vec{u};\vec{v})\neq 0\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires



Exemples 1 :

1) Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

2) Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u}(1;3)$ et $\vec{v}(-1;4)$

b) $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(2;4)$

Déterminant et alignement

1) $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow$ Les points A, B et C sont alignés.

2) $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\neq 0\Leftrightarrow$ Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exemple 2 :

Etudier l'alignements des points $A(0;1)$, $B(-1;-2)$ et $C(2,3)$

Remarque 2 :

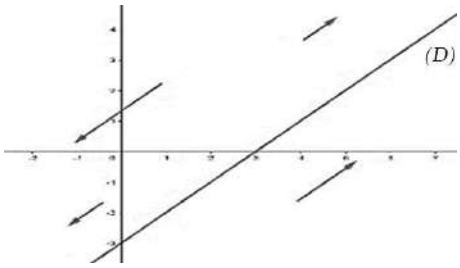
Si les cordonnées a' et b' sont tous non nuls, alors :

Les vecteurs $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ sont colinéaires si et seulement si : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$

Exercice : Exercice 3 de la série 6.

3) Equation cartésienne d'une droite

Définition 2 :



1) Soit (D) une droite du plan. Toute vecteur non nul $\vec{u}$ et de même direction de (D) est appelé **vecteur directeur** de la droite (D).

2) Toute droite du plan est définie par l'un de ses points et une de ses vecteurs directeurs.

Propriété 2 :

A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on le note $D(A;\vec{u})$

Propriétés 3 et définition 3 :

- Toute droite (D) du plan est un ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'équation (D): $ax+by+c=0$ tel que $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \neq (0,0)$.
- L'équation (D): $ax+by+c=0$ est appelé une **équation cartésienne** de la droite (D).
- Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne (D): $ax+by+c=0$

Remarque 3

On peut déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a';b')$ en remarquant que (D) est l'ensemble des points M tel que $det(\overrightarrow{AM};\vec{v}) = 0$

C'est-à-dire : $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (x-x_A) & a' \\ (y-y_A) & b' \end{vmatrix} = 0$

Exemple 3 : Compléter le vide :

L'équation cartésienne de la droite (D)	Vecteur directeur de (D)
$3x+5y-2=0$	$\vec{u}(...;...)$
$4x-2y-3=0$	$\vec{u}(...;...)$
$x+2=0$	$\vec{u}(...;...)$
$3y-1=0$	$\vec{u}(...;...)$
$(....)x+(...)y+c=0$	$\vec{u}(2;1)$
$(....)x+(...)y+c=0$	$\vec{u}(-5;-3)$



Exemple 4 :

1) a) Déterminer par deux méthodes l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2;3)$.

b) Déterminer parmi les points $E(0;3)$, $F(2;-1)$ et $G(2;7)$ ceux qui appartiennent à (D)

2) a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AC) passant par les points $A(1;3)$ et $C(2;-5)$

b) Vérifier que $D(3,-13) \in (AC)$

Remarque 4 :

Pour tout nombre réel k non nul, les équations $ax+by+c=0$ et $kax+kby+kc=0$ sont des équations cartésiennes de la même droite.

Exercice : Exercices 4 de la série 6.

4) Représentation paramétrique d'une droite

Propriétés 4 et définition 4 :

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan et $\vec{u}(a';b')$ un vecteur non nul du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La droite (D) passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a';b')$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système $\begin{cases} x = x_A + a' \times t \\ y = y_A + b' \times t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$
- Le système $(D): \begin{cases} x = x_A + a' \times t \\ y = y_A + b' \times t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ est appelé une **représentation paramétrique** de la droite (D).

Exemple 5 : Compléter le vide :

Représentation paramétrique de la droite (D)	Vecteur directeur de (D)	Point appartenant à (D)
$\begin{cases} x = \ldots + \ldots \\ y = \ldots + \ldots \end{cases}$	$\vec{u}(1;3)$	$A(-3;7)$
$\begin{cases} x = -5 + 3.t \\ y = 4 - 2.t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$	$\vec{v}(\ldots;\ldots)$	$B(\ldots;\ldots)$
$\begin{cases} x = \ldots + 8.t \\ y = -1 + \ldots t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$	$\vec{w}(\ldots;-2)$	$C(5;\ldots)$

Exemple 6 :

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN) tel que $M(2;1)$ et $N(1;-3)$

b) A-t-on $E(2;3) \in (MN)$?

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$

3) Donner une représentation paramétrique de la droite $(D'): 3x + 5y - 2 = 0$



Remarques 5 :

- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.
- Le réel t est appelé le paramètre de la droite (D) et on peut le noter aussi par : k, α, β..... etc
- Pour vérifier que $A \in (D)$, il suffit de remplacer x et y par les coordonnées de A et s'assurer par la suite qu'on obtient **la même valeur** du paramètre t dans les deux équations de la représentation paramétrique.

Exercice : Exercice 5 de la série 5.

5) Positions relatives de deux droites

Propriétés 5 : Le plan est rapporté à un repère

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs respectivement de deux droites (D) et (Δ).

- (D) et (Δ) sont parallèles si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v}) = 0$
- (D) et (Δ) sont sécantes si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$

Remarque 6 :

Pour déterminer le point d'intersection de deux droites, on résout un système dans lequel on prend soit des représentations paramétriques, soit des équations cartésiennes qui définissent chaque droite.

Exemple 7 :

Etudier la position relative des droites (D) et (Δ) en déterminant leurs intersections si elles sont sécantes :

1) $(D): 3x - 4y + 1 = 0$ et $(\Delta): x - y + 7 = 0$

2) $(D): \frac{1}{2}x - y = 0$ et $(\Delta): \begin{cases} x = \sqrt{2} - 2t \\ y = 4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

3) $(D): 2x - y + 7 = 0$ et $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Exemple 8 : Droites concourantes dans le plan

Montrer que les trois droites suivantes définies par ces équations cartésiennes :

$(D_1): x-4y+3=0$, $(D_2): 3x-2y-6=0$ et $(D_3): \frac{3}{2}x+3y-9=0$ se coupent en un même point et déterminer son couple de coordonnées :

On dit dans ce cas que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont **concourantes.**

Exercice : Exercice 6 de la série 5.

Résumé 6 : Droite dans le plan

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminant de deux vecteurs :

Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs du plan.

$$det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$$

2) Déterminant et colinéarité :

1) $det(\vec{u};\vec{v})=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) $det(\vec{u};\vec{v})\neq 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

3) Déterminant et alignement :

1) $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0 \Leftrightarrow$ Les points A, B et C sont alignés.

2) $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\neq 0 \Leftrightarrow$ Les points A, B et C ne sont pas alignés.

4) Vecteur directeur :

Soit (D) une droite du plan. Toute vecteur non nul $\vec{u}$ et de même direction de (D) est appelé vecteur directeur de la droite (D).

5) L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}=t.\vec{u}$:

A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM}=t.\vec{u}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on le note $D(A;\vec{u})$

6) Equation cartésienne d'une droite :

- Toute droite (D) du plan est un ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'équation $(D): ax+by+c=0$ tel que a, b, $c\in\mathbb{R}$ et $(a,b)\neq(0,0)$.
- L'équation $(D): ax+by+c=0$ est appelé une équation cartésienne de la droite (D).
- Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $(D): ax+by+c=0$
- Pour déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a';b')$

On utilise la relation :

$$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\begin{vmatrix} (x-x_A) & a' \\ (y-y_A) & b' \end{vmatrix}=0$$

7) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit $A(x_A,y_A)$ un point du plan et $\vec{u}(a';b')$ un vecteur non nul du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La droite (D) passant par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a';b')$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système

$$\begin{cases} x=x_A+a'\times t \\ y=y_A+b'\times t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$$

- Le système $(D): \begin{cases} x=x_A+a'\times t \\ y=y_A+b'\times t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D).

8) Positions relatives de deux droites :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs respectivement de deux droites (D) et (Δ) du plan.

(D) et (Δ) sont parallèles $\Leftrightarrow det(\vec{u};\vec{v})=0$

(D) et (Δ) sont sécantes $\Leftrightarrow det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$

- Pour déterminer le point d'intersection de deux droites, on résout un système dans lequel on prend soit des représentations paramétriques, soit des équations cartésiennes qui définissent chaque droite.



Exercice 1 : Rappel

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère les points $A(1;2)$; $B(1;-2)$; $C(1;1)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer les coordonnées du point I le milieu de $[AC]$

Exercice 2 : Rappel

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Compléter le tableau suivant en calculant dans chaque case le couple de coordonnées du point considéré dans le repère considéré :

	$(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$	$(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})$
A			
B			
C			
D			
O			

Exercice 3 : Colinéarité et alignement

1) Etudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u}(6;1)$ et $\vec{v}(-12;-2)$

b) $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}\left(-3;\frac{1}{2}\right)$

2) Etudier l'alignements des points A, B et C dans les cas suivants :

a) $A(1;2)$; $B(2;0)$; $C(\frac{3}{2};1)$

b) $A(-1;1)$; $B(0;-2)$; $C(2;-1)$

c) $A(1;1)$; $B(2;\text{-}1)$; $C(\text{-}1;m)$ tel que $m\in\mathbb{R}$

Exercice 4 : Equation cartésienne

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) dans les cas suivants :

1) (D) passe par le point $A(2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(1;2)$

2) (D) passe par les points $A(1;-1)$ et $B(1;3)$

3) (D) à une équation réduite s'écrit : $(D):y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$

4) (D) passe par le point $A(3;1)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\begin{cases}x=-2+3t\\y=2t\end{cases}/\,t\in\mathbb{R}$

5) (D) passe par le point $A(-3;2)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\ x-y+4=0$

6) (D) à une représentation paramétrique s'écrit : $(D):\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\end{cases}/t\in\mathbb{R}$

Exercice 5 : Représentation paramétrique

Donner une représentation paramétrique de la droite (D) dans les cas suivants :

1) (D) passe par le point $A(2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(1;2)$

2) (D) passe par les points $A(1;-1)$ et $B(1;3)$

3) (D) à une équation réduite s'écrit : $(D):y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$

4) (D) passe par le point $A(3;1)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\begin{cases}x=-2+3t\\y=2t\end{cases}/\,t\in\mathbb{R}$

5) (D) passe par le point $A(-3;2)$ et parallèle à la droite $(\Delta):\ x-y+4=0$

6) (D) à une équation cartésienne s'écrit $(D):\ 2x-5y+4=0$

Exercice 6 : Positions relatives de deux droites

Etudier la position relative des droites (D) et (Δ) en déterminant leurs intersections si elles sont sécantes :

1) $(D):2x-\sqrt{2}y+1=0$ et $(\Delta):\sqrt{2}x-y+1=0$

2) $(D):5x+3y-1=0$ et $(\Delta):x+2y+4=0$

3) $(D):x-4y+3=0$ et $(\Delta):\begin{cases}x=k\\y=-3+k\end{cases}/\,k\in\mathbb{R}$

4) $(D):\begin{cases}x=1+2t\\y=2-5t\end{cases}/\,t\in\mathbb{R}$ et $(\Delta):\begin{cases}x=k\\y=-3+k\end{cases}/\,k\in\mathbb{R}$

5) $(D):\begin{cases}x=-t\\y=t+2\end{cases}/\,t\in\mathbb{R}$ et $(\Delta):\begin{cases}x=2t'+1\\y=t'\end{cases}/\,t'\in\mathbb{R}$

Exercice 7 : Exercice de renforcement

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère la droite (D) d'équation $x+3y-3=0$ et (Δ) la droite passant par les points $A(-1;-2)$ et $B(-2;0)$

1) Montrer que $2x+y+4=0$ est l'équation cartésienne de (Δ)

2) Montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point que l'on déterminera

3) Tracer les droites (D) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Soit (L) la droite définie par la représentation paramétrique suivante $\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-4t\end{cases}/t\in\mathbb{R}$

Montrer que $(L)\parallel(\Delta)$ puis construire la droite (L).

Exercice 8 : Exercice de renforcement

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère les points $A(-3;-2)$; $B(3;-1)$; $C(1;1)$; $D(5;4)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

2) En déduire que les points A, C et D sont alignés.

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC)

4) On considère les droites (D) et (Δ) définies par :

$(D):\ 3x-y-1=0$ et $(\Delta):\begin{cases}x=-3+4t\\y=1+t\end{cases}/t\in\mathbb{R}$

a) Montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point que l'on déterminera

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D') passant par A et parallèle à (D)

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ') passant par C et parallèle à (Δ)

Correction : https://drive.google.com/file/d/1x9Xg9ek9MEqWnYBN-_R9VynhvDaQrBUY/view?usp=sharing

DL2

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Ensembles des nombres)

1) Compléter avec l'un des symboles $\in$ ou $\notin$: $\frac{24}{2}...\mathbb{N}$; $\frac{-2}{6}...\mathbb{Q}$; $\frac{18}{4}...\mathbb{Z}$; $\frac{3}{10^2}...ID$; $\sqrt{2}...\mathbb{Q}$; $\pi...\mathbb{Q}$

2) Soit $A=\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

Calculer A^2 puis déduire une écriture simplifiée de A.

3) Donner l'écriture scientifique du nombre : $B=\dfrac{45\times10^5\times3\times\left(10^{-2}\right)^4}{\left(2\times10^2\right)^3}$

4) Simplifier l'expression : $C=2(x+1)^3-(1-5x)^3-4x^2$

5) Factoriser l'expression : $D=27x^3+64+(2x+5)(3x+4)$

6) Montrer que $\frac{42}{75}\in ID$, $\frac{27}{55}\notin ID$, $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\notin\mathbb{Q}$, $\sqrt{2\sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}}+5\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}}\in\mathbb{N}$

Exercice 2 (Ordre dans IR)

1) Soit x et y deux réels tels que $|x-1|<\frac{1}{2}$ et $y\in[3;4]$, on pose $A=\dfrac{2y-1}{y+1}$

a) Montrer que $x\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ et $A\in\left[1;\frac{7}{4}\right]$

b) Montrer que $\frac{4}{3}$ est une approximation de x à la précision $\frac{5}{6}$ près.

c) Vérifier que $A=2-\dfrac{3}{y+1}$ puis déduire que $A\in\left[\frac{5}{4};\frac{7}{5}\right]$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $|2x-3|=|x+1|$; $|5x+7|=10$; $|1-x|=-4$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $|2x-5|\le9$; $|x-5|\ge2$; $|8x-3|\le-3$; $|7x-5|\ge-4$

4) Ecrire sous forme d'un intervalle les ensembles : $[-2;3]\cap]-1;4]$, $[-3;+\infty[\cap]-\infty;-4]$ et $[-3;+\infty[\cup]-\infty;-4]$

5) Soit $a;b;c\in\mathbb{R}^+$, comparer $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ puis déduire que $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{2}}\ge a+b+c$

Exercice 3 (Droite dans le plan)

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère les points $A(3;-1)$, $B(6;-4)$, $C(2;5)$, $D(3;-5)$ et $G(-2;0)$

1) a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;1)$.

b) Vérifier que $B\in(D)$

2) Soit (Δ) la droite définie par la représentation paramétrique suivante $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\y=-3-2t\end{cases}/(t\in\mathbb{R})$

a) Les points C et D appartiennent à (Δ) ? justifier

b) Montrer que $(D)\parallel(\Delta)$

3) Soit (D') la droite d'équation cartésienne $x-4y+3=0$

Montrer que (D) et (D') sont sécantes en un point E que l'on déterminera.

4) Déterminer les coordonnées du points F tel que le quadrilatère $ABDF$ soit un parallélogramme.

5) Soit F' la symétrie du point F par-rapport à O.

a) Déterminer les coordonnées de F'.

b) Montrer que $F'\in(D)$, A est le milieu de $[F'B]$ et $(F'G)\perp(\Delta)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/176mqH49cbdRHKO3EHPKLJN624SDUHJEM/view?usp=sharing

Exercices, cours et stratégies d'olympiades

https://drive.google.com/file/d/1r6vEJUDac5JCtZObmM2r24N74biPhTJ-/view?usp=sharing



7

Polynômes

HIYAB



1) Définition d'un polynôme – Egalité de deux polynômes

1-1 Définition d'un polynôme

Activité 1 :

Soit x un nombre réel, on pose $P(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$

Montrer que $P(x)=1x^3+3x^2+(-1)x^1+(-3)$

→ L'expression $P(x)$ est appelée polynôme de 3-iéme degré.

→ On note le degré du polynôme $P(x)$ par $deg(P(x))$ et on écrit $deg(P(x))=3$

→ Les nombres $1x^3$, $3x^2$, $(-1)x^1$ et $(-3)x^0$ sont appelés les termes du polynôme $P(x)$

→ Les nombres 1, 3, (-1) et (-3) sont appelés les coefficients des termes du polynôme $P(x)$

Définition 1 :

- On définit un **polynôme** $P(x)$ comme une somme des termes de la forme : ax^m, bx^n, cx^p ....., tels que a, b, c.....sont des nombres réels et m, n, p.....sont des entiers naturels.

$$P(x)=ax^n+bx^m+cx^p+....$$

- Les nombres a, b, c.....sont appelés **les coefficients des termes** ax^m, bx^n, cx^p ....., respectivement.
- **Le degré** d'un polynôme est la puissance la plus élevée de ses termes, on le note par $deg(P(x))$

Exemple 1 :

1) Déterminer les polynômes parmi les expressions suivantes :

$A(x)=4x^3-7x^2+\pi x+2$; $B(x)=x^5-4\sqrt{x}+3$; $C(x)=(x-1)(4x+1)$; $D(x)=x^4+|x|^2$

$E(x)=3\sqrt{x^2}$; $F(x)=5$; $H(x)=3x^8-\dfrac{1}{x}+7$; $G(x)=\sqrt{2}x^2+4x$

2) Déterminer deux polynômes de deuxième degré puis déterminer la formule générale des polynômes de deuxième degré

1-2 Egalité de deux polynômes

Définition 2 et propriété 1:

- On dit qu'un polynôme $P(x)$ est **nul** si tous ses coefficients sont nuls. On écrit $P(x)=0$
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si, ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exemple 2 :

1) On pose $P(x)=-2x^4+4x^2+5x-1$ et $Q(x)=5x+2-2(x^2-1)^2-1$. Montrer que $P(x)=Q(x)$

2) Déterminer a, b et c sachant que polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux dans les cas suivants :

a) $P(x)=3x^2+(b-3)x+4$ et $Q(x)=(a-1)x^2+c$

b) $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ et $Q(x)=3x^3-8x^2+3x+2$

c) $P(x)=(a+b)x^3+(b-c)x^2+(a-c+1)x$ et $Q(x)=0$



Exemple 3 :

On considère les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que $P(x)=4x^2-3x+1$ et $Q(x)=-3x^2+x$

1) Calculer $deg\big(P(x)\big)+deg\big(Q(x)\big)$ et $deg\big(P(x)+Q(x)\big)$

2) Simplifier $P(x)\times Q(x)$ puis déduire $deg\big(P(x)\times Q(x)\big)$

Remarque 1 : Pour tous polynômes non nuls $P(x)$ et $Q(x)$ on a : $deg\big(P(x)\times Q(x)\big)=deg\big(P(x)\big)+deg\big(Q(x)\big)$

Application 1 :

On pose : $P(x)=x^4-2x^3+4x^2-2x+3$ et soit $Q(x)$ le polynôme tel que $P(x)=(x^2+1)Q(x)$

1) Vérifier que $deg(P(x))=deg(x^2+1)+deg(Q(x))$ et déduire que $deg(Q(x))=2$

2) Déterminer l'expression $Q(x)$

Exercices : Exercices 1 et 2 de la série 7.

2) Racine d'un polynôme -Division euclidienne

2-1 Racine d'un polynôme

Activité 2 :

On considère le polynôme $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Calculer $P(-1)$, $P(0)$ et $P(3)$

2) Le nombre 0 est-il racine de $P(x)$?



Définition 3 :

Soit a un nombre réel. On dit que a est une **racine** du polynôme $P(x)$ si $P(a)=0$.

Exemple 4 :

Déterminer le nombre b sachant que 2 est une racine du polynôme $P(x)=x^3-2x^2+bx+6$

2-2 Division euclidienne

Activité 3 :

On considère le polynôme $P(x)=x^3-6x^2+13x-12$

1) Calculer $P(1)$

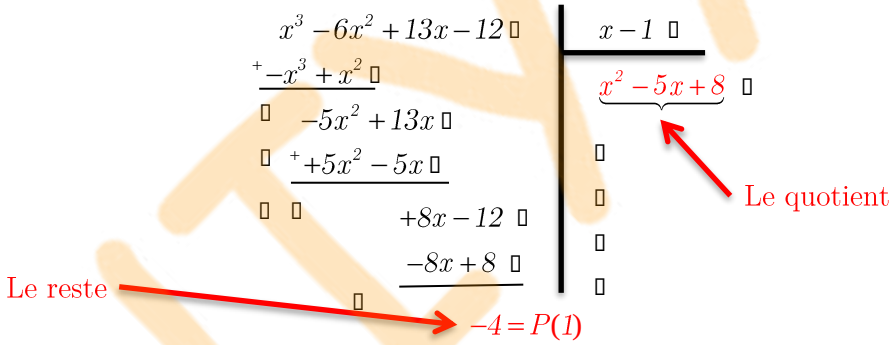
2) On pose $Q(x)=x^2-5x+8$, vérifier que $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$

→ Le polynôme $Q(x)$ s'appelle le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)$

→ Le nombre $P(1)$ s'appelle le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)$

Remarque 2 : Division euclidienne

On peut déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$ on utilisons la **division euclidienne** du polynôme $P(x)$ par $(x-1)$:



Exemple 5 :

1) Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ précédent par $(x-3)$ en précisant le quotient et le reste.

2) En déduire la valeur de $P(3)$ sans le calculer.

Propriété 2 et définition 4 :

Soient $P(x)$ un polynôme de degré n avec $n\in\mathbb{N}^*$ et a un nombre réel.

Il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$

- Le polynôme $Q(x)$ s'appelle le **quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$
- Le nombre $P(a)$ s'appelle le **reste** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$

Définition 5 et propriété 3 :

- On dit que $P(x)$ est **divisible** par $(x-a)$, si le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ est égal à 0
- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ si et seulement si $P(a)=0$

Exemple 6 :

1) Sans effectuer la division euclidienne déterminer si le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ dans les cas suivants :

a) $P(x)=2x^4-3x^3-4x^2-45$ et $a=3$; b) $P(x)=3x^3-x^2-6x+2$ et $a=-2$

2) Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ dans les cas précédents.

Exercices : Exercices 3, 4 et 5 de la série 7.

3) Factorisation d'un polynôme

Exemple 7 :

On considère le polynôme $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x-1)$

2) Déterminer par deux méthodes le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$

3) Montrer que 3 est une racine de $Q(x)$

4) Factoriser le polynôme $Q(x)$

5) Donner une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.



Remarque 2 :

- Tout polynôme de premier degré s'appelle **binôme** et il s'écrit sout la forme $R(x)=ax+b$ où $a\neq 0$
- Tout polynôme de deuxième degré s'appelle **trinôme** et il s'écrit sout la forme $R(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq 0$

Pour la recherche : La méthode de HORNER pour la division euclidienne

Exercices : Exercices 6, 7, 8 et 9 de la série 7.

Résumé 7 : Polynômes

Définition d'un polynôme

- On définit un **polynôme** $P(x)$ comme une somme des termes de la forme : ax^m , bx^n , cx^p ....., tels que a, b, c.....sont des nombres réels et m, n, p.....sont des entiers naturels.

$$P(x)=ax^n+bx^m+cx^p+....$$

- Les nombres a, b, c.....sont appelés **les coefficients des termes** ax^m , bx^n , cx^p ....., respectivement.
- **Le degré** d'un polynôme est la puissance la plus élevée de ses termes, on le note par $deg(P(x))$

Egalité de deux polynômes

- Un polynôme est **nul** si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si, ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Degré du produit de deux polynômes

Pour tous polynômes non nuls $P(x)$ et $Q(x)$ on a : $deg\big(P(x)\times Q(x)\big)=deg\big(P(x)\big)+deg\big(Q(x)\big)$

Racine d'un polynôme

Soit a un nombre réel. On dit que a est une **racine** du polynôme $P(x)$ si $P(a)=0$.

Division euclidienne par x-a et factorisation d'un polynôme

Soient $P(x)$ un polynôme de degré n avec $n\in\mathbb{N}^*$ et a un nombre réel.
Il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)+P(1)$

- Le polynôme $Q(x)$ s'appelle **le quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$
- Le nombre $P(a)$ s'appelle **le reste** de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$
- On dit que $P(x)$ est **divisible** par $(x-a)$, si le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ est égal à 0
- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)$ si et seulement si $P(a)=0$

Binôme - Trinôme

- Tout polynôme de premier degré s'appelle **binôme** et il s'écrit sout la forme $R(x)=ax+b$ où $a\neq 0$
- Tout polynôme de deuxième degré s'appelle **trinôme** et il s'écrit sout la forme $R(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq 0$

Exercice 1 :

Déterminer les polynômes parmi les expressions suivantes :

$P(x)=x^2-\sqrt{3}x^3+2$; $P(x)=3x^3-\frac{1}{x}+4$; $P(x)=(1-x)^3$

$P(x)=x^3-|x|+4$; $P(x)=3x-\frac{1}{2}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $P(x)=x^2-\sqrt{x}+1$

Exercice 2 :

Déterminer a et b sachant que $P(x)=Q(x)$ tel que :

$P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ et $Q(x)=(x+1)(x-3)(ax+b)$

Exercice 3 :

On considère le polynôme $P(x)=2x^2-5x-3$

1) Vérifier que $-\frac{1}{2}$ est une racine de $P(x)$

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x+\frac{1}{2})Q(x)$

3) En déduire une autre racine de $P(x)$

Exercice 4 :

On considère le polynôme $Q(x)=2x^2-5x+2$

1) Calculer $Q(2)$, le polynôme $Q(x)$ est-il divisible par $x-2$

2) Déterminer le polynôme $R(x)$ tel que $Q(x)=(x-2)R(x)$

Exercice 5 :

1) Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-a$ dans les cas suivants :

a) $P(x)=x^3-3x^2+4x-4$ et $a=2$

b) $P(x)=x^4-3x^2+x-2$ et $a=-2$

c) $P(x)=x^3+3x^2+4x+12$ et $a=3$

2) Déterminer a et b sachant que le polynôme :

$P(x)=x^5-2x^4+3x^3-4x^2+ax+b$ est divisible par $x-2$ et par $x+3$

Exercice 6 :

1) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$ dans les cas suivants :

a) $P(x)=x^3-3x-2$ et $a=1$

b) $P(x)=x^3+4x^2+4x+3$ et $a=-3$

c) $P(x)=3x^3-x^2-6x+2$ et $a=\frac{1}{3}$

2) En utilisant la méthode de Horner déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$ dans les cas suivants :

a) $P(x)=2x^3-5x^2-x-2$ et $a=3$

b) $P(x)=3x^4-x^3+2x-52$ et $a=-2$

c) $P(x)=3x^5-2x^3+3x-11$ et $a=-4$

Exercice 7 :

On pose $P(x)=x^3-(3\sqrt{3}+1)x^2+m(2+\sqrt{3})x-6$

1) Déterminer m pour que -2 soit une racine de $P(x)$

2) Déterminer m pour que $P(x)$ soit divisible par $x-1$

3) On suppose que $m=3$

a) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$

b) Vérifier que $\sqrt{3}$ est une racine de $P(x)$ puis factoriser $P(x)$

Exercice 8 :

On considère le polynôme $P(x)=2x^3+5x^2-x-6$

1) Montrer que -2 est une racine de $P(x)$

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x+2)Q(x)$

3) Montrer que $Q(x)$ est divisible par $(x-1)$

4) Factoriser le polynôme $Q(x)$

5) Donner une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.

Exercice 9 :

On considère le polynôme $P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1) Montrer que 0 n'est pas une racine de $P(x)$

2) Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de $P(x)$.

3) a) Montrer que 2 est une racine de $P(x)$

b) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-2)Q(x)$

c) En déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

4) a) Déterminer les réels a, b et c tel que

$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(ax^2+bx+c\right)$

b) En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de quatre binômes.

Exercice 10 :

Soit $P(x)$ un polynôme et $n\in\mathbb{N}^*$

1) Vérifier que :

$(P(0+1)-P(0))+(P(1+1)-P(1))+...+(P(n-1)-P(n))=P(n)-P(0)$

2) a) Déterminer un trinôme $Q(x)$ tel que $Q(x+1)-Q(x)=x^2$

b) En déduire que $1^2+2^2+.....+n^2=Q(n)-Q(0)$

c) En déduire que $1^2+2^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 11 : Exercice d'olympiade

Propriété : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1;x_2;.....;x_n\in\mathbb{R}$

Si $P(x)$ est un polynôme de degré n et admet n racines distincts $x_1;x_2;.....$ et x_n alors

$P(x)=a(x-x_1)\times(x-x_2)\times.....\times(x-x_n)$ Avec a est le coefficient de son plus grand termes ax^n

Application : Soit $Q(x)$ un polynôme de degré 3 et admet 3 racines distincts α, β et δ.

On pose $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Montrer que :

$\alpha+\beta+\delta=\frac{-b}{a}$; $\alpha\beta\delta=\frac{-d}{a}$; $\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha=\frac{c}{a}$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1-mPOFAXOax-8rXtBNkhoYzskCb-QOoNV/view?usp=drive_link

8

Équations, inéquations et systèmes



HEYAB

1) Équations du premier degré à une inconnue

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $2x-5=0$; $3x-7=5x+8$; $5(x+2)-2x=3x+10$; $3x-1=3(x+1)$

Définition 1 :

Toute équation qui se ramène à l'équation de la forme $ax+b=0$ est appelée **équation du premier degré à une inconnue** où x est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Propriété 1 :

On considère l'équation (E) : $ax+b=0$ d'inconnue x et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$

- Si $a \neq 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution $x=-\frac{b}{a}$ et $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$
- Si $a=0$ et $b=0$, alors tous les nombres réels sont des solutions de l'équation (E) et $S=\mathbb{R}$
- Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors l'équation n'admet aucune solution et $S=\varnothing$

Exercice : Exercice 1 de la série 8.

2) Inéquations du premier degré à une inconnue

Activité 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$-2x+6\leq 0$; $3x-4<-5x+8$; $5x-2(x+1)\geq 3x+1$; $4x+5\geq 7x+1-3x$

Définition 2 :

Toute inéquation qui se ramène à l'inéquation de la forme $ax+b\geq 0$ ou $ax+b>0$ ou $ax+b\leq 0$ ou $ax+b<0$, s'appelle **inéquation du premier degré à une inconnue** où x est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Exercice : Exercice 2 de la série 8.

3) Signe du binôme $ax+b$

Introduction

Soient a et b deux réels tel que $a\neq 0$.

- On a $ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$
- Si $a>0$, alors $\begin{cases} ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a} \\ ax+b<0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a} \end{cases}$



On résume les signes précédents de $ax+b$ dans un tableau appelé **tableau de signe** il s'écrit sous la forme :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

- Si $a<0$, alors $\begin{cases} ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a} \\ ax+b<0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a} \end{cases}$

Donc le tableau de signe s'écrit :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

Propriété 2 :

Soient a et b deux réels tel que $a \neq 0$.

Le tableau de signe du binôme $ax+b$ sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Exemple 1 :

Dressons le tableau de signe de $-3x+6$ et déduisons les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations $-3x+6 \geq 0$ et $-3x+6 \leq 0$

- On a $-3x+6=0 \Leftrightarrow x=2$, d'où le tableau de signe de $-3x+6$ s'écrit :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-3x+6$	$+$	0	$-$

- Donc l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-3x+6 \geq 0$ est : $S_1 =]-\infty;2]$
- Donc l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-3x+6 \leq 0$ est : $S_2 = [2;+\infty[$

Exemple 2 :

1) Dresser le tableau de signe de $5x+15$, $-x+1$ et $(5x+15)(-x+1)$

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(5x+15)(-x+1) < 0$

Remarques 1 :

Soient x et y deux réels tel que $y \neq 0$

1) Le signe de $\frac{1}{y}$ est le signe de y. ; 2) Le signe de $\frac{x}{y}$ est le signe de $x \times y$.

Exemple 3 :

1) Dresser le tableau de signe de $5x-10$, $-4x+2$ et $\frac{5x-10}{-4x+2}$

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{5x-10}{-4x+2} \geq 0$

Exercice : Exercice 3 de la série 8.

4) Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues

Activité 3

1) En utilisant la méthode de substitution ou la méthode des combinaisons linéaires résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$(S_1)\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} 4x-5y=2 \\ -x+3y=3 \end{cases}$; $(S_3)\begin{cases} 3x+2y=41 \\ 4x-15y=239 \end{cases}$

2) En utilisant la méthode graphique résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(S_4)\begin{cases} -x+3y=1 \\ 2x-6y=-3 \end{cases}$

Définition 3 et propriété 3 :

- Toute système qui se ramène au système de la forme $(S)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ s'appelle **système de deux équations du premier degré à deux inconnues** où $(x;y)$ est l'inconnue, a, a', b, b', c et c' sont des réels donnés.
- Le nombre $ab'-a'b$ s'appelle **déterminant** du système (S), noté D et s'écrit $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$
- Si $D \neq 0$ alors le système (S) est appelé **système de Cramer** et admet une unique solution $(x;y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

- Si $D=0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions ou n'admet aucune solution.

Exemple 4 :

1) En utilisant la méthode des déterminants résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases}2x-6y=1\\3x+4y=7\end{cases}$; $(S_2)\begin{cases}2x-3y=1\\-4x+6y=5\end{cases}$; $(S_3)\begin{cases}x+2y=17\\2x-4y=2\end{cases}$

2) En déduire la solution du système : $(S_4)\begin{cases}x^2+2y^2=17\\2x^2-4y^2=2\end{cases}$

Exercice : Exercice 4 de la série 8.

5) Inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Définition 4 :

Toute inéquation qui se ramène à l'inéquation de la forme $ax+by+c\geq 0$ ou $ax+by+c>0$ ou $ax+by+c\leq 0$ ou $ax+by+c<0$, s'appelle **inéquation du premier degré à deux inconnues** où $(x;y)$ est l'inconnue, a et b sont deux réels donnés.

Propriété 4 : Régionement du plan

Soit (D) une droite d'équation (D): $ax+by+c=0$ dans un plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

La droite (D) partage le plan (P) en deux demi-plans (D^+) et (D^-) tels que :

(D^+) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c>0$

(D^-) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c<0$



Remarque 2

Pour résoudre graphiquement l'inéquation (D^+) ou (D^-), on procède de la façon suivante :

- On trace la droite (D) ;
- On choisit un point en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou non.

(Le plus souvent, quand la droite ne passe pas par l'origine, on choisit $O(0,0)$ qui fournit le résultat facilement, mais si la droite passe par l'origine du repère on choisit un autre point).

- On colorier le demi-plan cherché (à partir de l'inéquation demandée).
- Les solutions graphiques de l'inéquation (D^+) ou (D^-) sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.

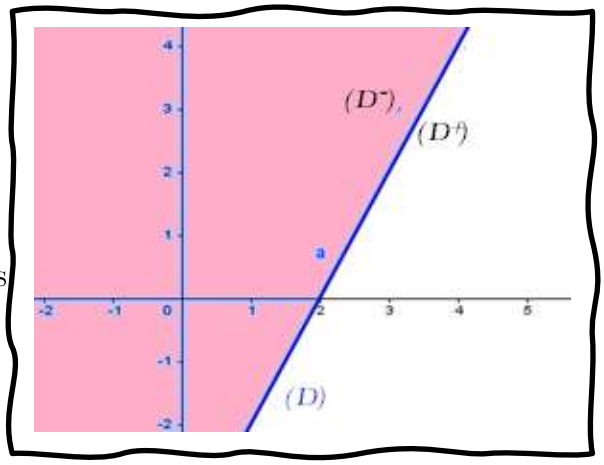
Exemple 5 :

Résolvons graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $2x-y-4<0$

C'est-à-dire déterminons le demi-plan (D^-) tel que (D) la droite d'équation (D): $2x-y-4=0$

- On trace la droite (D) (il suffit de trouver deux points appartenant à (D))
- On a $O(0;0)\notin(D)$ et puisque $2x_O-y_O-4=2\times 0-0-4=-4<0$

  Alors : $O(0;0)\in(D^-)$
- Donc les solutions graphiques de l'inéquation $2x-y-4<0$ sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.



Exemple 6 :

1) Représenter dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les droites $(D): 3x-2y-6=0$ et $(D'): 2x+3y=0$.

2) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations $3x-2y-6\leq 0$ et $2x+3y>0$

3) En déduire les solutions graphiques dans $\mathbb{R}^2$ du système $\begin{cases} 3x-2y-6\leq 0 \\ 2x+3y>0 \end{cases}$

Exercice : Exercice 5 de la série 8.

6) Équations du second degré à une inconnue

Propriété 5 et définition 5 : Forme canonique d'un trinôme

Soient a, b et c des réels avec $a\neq 0$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right]$

Cette écriture s'appelle **forme canonique** du trinôme ax^2+bx+c

Définition 6 :

- Toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a\neq 0$, s'appelle **équation du second degré à une inconnue** x.
- Les nombres réels a, b, et c s'appellent coefficients.
- Le nombre réel $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle **le discriminant** du trinôme ax^2+bx+c et de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Propriété 6 :

On considère l'équation (E): $ax^2+bx+c=0$ où $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$

- Si $\Delta<0$ alors l'équation (E) n'admet aucune solution et on a $S=\varnothing$
- Si $\Delta=0$ alors l'équation (E) admet une solution unique (dite solution double) : $x_0=-\frac{b}{2a}$ et on a $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta>0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a $S=\{x_1;x_2\}$

Exemple 7

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $3x^2+2x+1=0$; $4x^2+12x+9=0$; $x^2-3x+2=0$

b) En déduire les solutions des équations suivantes : $x^4-3x^2+2=0$; $x-3\sqrt{x}+2=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2-5x=0$; $4x^2-25=0$; $x^2+1=0$; $x^2-2x+1=0$

Remarques 3

- Si $ac<0$ alors $\Delta>0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.
- Les équations de la forme : $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $a^2x^2\pm 2abx+b^2=0$ peuvent être résolues directement sans passer par le discriminant Δ.

Activité 4 : Soient u et v deux réels

1) Vérifier que $x^2-(u+v)x+uv=(x-u)(x-v)$

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2-(u+v)x+uv=0$

Propriété 7 : Soient u et v deux réels

L'équation $x^2-(u+v)x+uv=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont u et v

Exemple 8

Sans calculer le discriminant Δ résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2-(3+4)x+4\times 3=0$; $x^2-9x+8=0$; $x^2-3x-10=0$; $x^2-10x+25=0$; $x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0$

Exercice : Exercice 6 de la série 8.

FTYAB

7) Somme et produit des deux solutions d'une équations du second degré

Activité 5 :

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$ tel que $a\neq 0$.

On suppose que (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 .

1) Calculer la somme x_1+x_2 en fonction de a et b.

2) Calculer le produit $x_1\times x_2$ en fonction de a et c.

Propriété 8 :

Si x_1 et x_2 sont les solutions distinctes de l'équation $ax^2+bx+c=0$ alors : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$.

Exemple 9

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^2-x-3=0$

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 (sans les calculer).

2) Calculer x_1+x_2, $x_1\times x_2$, $x_1^{\,2}x_2+x_1x_2^{\,2}$, $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}$ et $x_1^{\,3}+x_2^{\,3}$.

3) Sachant que -1 est une solution de l'équation (E), déterminer l'autre solution.

Exercice : Exercice 7 de la série 8.

8) Factorisation du trinôme ax^2+bx+c

Propriété 9 :

Soit Δ le discriminant du trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$

- Si $\Delta>0$, alors le trinôme $P(x)$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 et on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
- Si $\Delta=0$, alors le trinôme $P(x)$ admet une seule racine $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ et on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$
- Si $\Delta<0$, alors le trinôme $P(x)$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ et ne peut être factorisé en produit de deux binômes.

Exemple 10

Factoriser si c'est possible le trinôme $P(x)$ en produit de deux binômes dans les cas suivants :

$P(x)=2x^2-x-1$; $P(x)=-4x^2+4\sqrt{3}x-3$; $P(x)=x^2+x+1$

Exemple 11

1) Factoriser le polynôme x^2-6x+8 et déduire une factorisation du polynôme x^4-6x^2+8.

2) Factoriser le polynôme $x^2-3x-10$ et déduire une factorisation du polynôme x^4-3x^2-10.

3) Factoriser le polynôme $2x^3+3x^2-11x-6$ sachant qu'il admet 2 comme racine.

4) Factoriser le polynôme $P(x)=x^3+x^2-2$

Exercice : Exercice 8 de la série 8.

9) Inéquations du second degré à une inconnue

Activité 6 : On considère le trinôme ax^2+bx+c et soit Δ son discriminant.

1) On suppose que x_1 et x_2 sont deux solutions distinctes de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et que $x_2<x_1$

Compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$x-x_1$			0	
$x-x_2$		0		
$a(x-x_1)(x-x_2)$ (si $a>0$)		0	0	
$a(x-x_1)(x-x_2)$ (si $a<0$)		0	0	



2) Si $\Delta=0$, déterminer le signe de ax^2+bx+c (on pourra utiliser la factorisation $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$)

3) Si $\Delta<0$, montrer que le signe de ax^2+bx+c est le signe de a (on pourra utiliser la forme canonique)

Propriété 10 : Signe du trinôme ax^2+bx+c

Soit le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ et Δ son discriminant.

1) Si $\Delta<0$, alors $P(x)$ est de signe de a pour tout $x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	Signe de a	

2) Si $\Delta=0$, alors $P(x)$ est de même signe que a pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $P\left(-\frac{b}{2a}\right)=0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe de a

3) Si $\Delta>0$ et x_1, x_2 les deux racines de $P(x)$ avec $x_2<x_1$, alors :

- $P(x)$ est du signe de $-a$ pour tout $x\in]x_2;x_1[$
- $P(x)$ est du signe de a pour tout $x\in]-\infty;x_2[\cup]x_1;+\infty[$

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe de $-a$	0 Signe de a



Exemple 12

Etudier le signe des trinômes suivantes : $P(x)=-3x^2+x-2$; $Q(x)=2x^2-x-1$; $R(x)=16x^2-8\sqrt{3}x+3$

Exemple 13

Dresser le tableau de signe des expressions suivantes :

$G(x)=\frac{1}{x^2-7x+12}$; $H(x)=\frac{-2x^2+5x-3}{3x^2-2\sqrt{6}x+2}$; $K(x)=\frac{x^2-8x+9}{x(x-4)}$

Définition 7 :

Toute inéquation de la forme $ax^2+bx+c\geq 0$ ou $ax^2+bx+c>0$ ou $ax^2+bx+c\leq 0$ ou $ax^2+bx+c<0$, s'appelle **inéquation du second degré à une inconnue** avec a, b et c sont des réels donnés, $a\neq 0$ et x est l'inconnue.

Remarque 4

Pour résoudre une inéquation du second degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe.

Exemple 14

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $x^2-7x+12\geq 0$ ou $x^2-7x+12>0$ ou $x^2-7x+12\leq 0$ ou $x^2-7x+12<0$,

- Dressons premièrement le tableau de signe du trinôme $x^2-7x+12$

On a (Facile à vérifier) :

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$x^2-7x+12$	$+$	0	$-$	0 $+$

- Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2-7x+12\geq 0$ est : $S_1=$.....
- Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2-7x+12>0$ est : $S_2=$.....
- Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2-7x+12\leq 0$ est : $S_3=$.....
- Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $x^2-7x+12<0$ est : $S_4=$.....

Exercice : Exercice 9 de la série 8.

Remarque 4 : Ensemble de définition d'une équation/inéquation : Voir l'exercice 10 de la série 8.

Complément de cours : Détermination de deux nombres dont la somme et le produit sont connues : Voir l'exercice 11 de la série 8.

Résumé 8 : Équations, inéquations et systèmes

Équations du premier degré à une inconnue

On considère l'équation (E) : $ax+b=0$ d'inconnue x et soit S l'ensemble de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$

- Si $a \neq 0$, alors $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$
- Si $a=0$ et $b=0$, alors (E) et $S=\mathbb{R}$
- Si $a=0$ et $b \neq 0$, alors $S=\varnothing$

Inéquations du premier degré à une inconnue

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe du binôme $ax+b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Systèmes de deux équations du premier degré

$$(S)\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

- Le nombre $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ s'appelle **déterminant** du système (S),
- Si $D \neq 0$ alors le système (S) admet une unique solution $(x;y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

- Si $D=0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions ou n'admet aucune solution.

Inéquations du premier degré à deux inconnues

Pour résoudre graphiquement l'inéquation (D^+) : $ax+by+c>0$ ou (D^-) : $ax+by+c<0$:

- On trace la droite (D) : $ax+by+c=0$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
- On choisit un point en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou non.
- On colorier le demi-plan cherché (à partir de l'inéquation demandée).
- Les solutions graphiques de l'inéquation (D^+) ou (D^-) sont les couples $(x;y)$ de coordonnées des points situés dans la partie colorée.

Équations et inéquations du second degré

- **Discriminant** du trinôme ax^2+bx+c et de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est $\Delta=b^2-4ac$
- **Forme canonique** $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2+bx+c=0$	$S=\varnothing$	$S=\left\{x_0=-\frac{b}{2a}\right\}$	$S=\left\{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
Factorisation du trinôme ax^2+bx+c	Ne peut pas être factorisé en produit de deux binômes.	$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
Signe du trinôme ax^2+bx+c	x : $-\infty$; $+\infty$; ax^2+bx+c : Signe de a	x : $-\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $+\infty$; ax^2+bx+c : Signe de a ; 0 ; Signe de a	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$; ax^2+bx+c : Signe de a ; 0 ; Signe de $-a$; 0 ; Signe de a
Somme et produit des solutions			$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2=\frac{c}{a}$

Pour résoudre une inéquation du second degré à une inconnue on utilise souvent le tableau de signe du trinôme ax^2+bx+c

Remarques :

- Si $ac<0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.
- Les équations : $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$; $a^2x^2 \pm 2abx+b^2=0$; $x^2-(u+v)x+uv=0$ peuvent être résolues sans Δ.

Exercice 1 : Équations du premier degré à une inconnue

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$3x+6=0$; $1+2x=\sqrt{2}(3-x)$; $\frac{3x-2}{3}-\frac{x-1}{4}=x-7$

$(3x+5)^2=(x+1)^2$; $4x^2=100$; $2x^2-7x=0$

$\frac{3x+2}{5}-3=\frac{-1+2x}{2}$; $\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}=0$; $\frac{x-3}{9x+6}=1$

$\frac{5x+7}{x+1}=\frac{5x-7}{x-1}$; $\frac{2x+3}{x-2}=0$; $2x(x-1)=(x+3)(x-1)$

$4(x+3)^2=x^2-9$; $2x^2-x+1=x+1$; $|x|=5$

$|2x-3|=13$; $|x+2|=|x|$; $|1-x|=|2x+3|$

$|x-1|+|x+1|+|x|=2$; $2|x+1|-3|2x-1|=5$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) $(m-1)x=2m-1$

b) $(2-m)x+3mx+2(m-x)-6=0$

c) $(3m+5)x+3m=(2m-5)x+m+1$

Exercice 2 : Inéquations du premier degré à une inconnue

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$2x-6\geq 0$; $-x+5\leq -2x+3$; $\frac{5x+1}{6}>\frac{3x-3}{8}$

$\frac{x+1}{2}+\frac{x+3}{3}\geq 2-3x$; $\frac{3x-2}{3}-\frac{x}{2}\geq\frac{1-2x}{2}-1$

$|x|\leq 3$; $|2x-1|<\frac{3}{2}$; $|3x+1|\geq 5$; $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}>0$

$|x-1|-3|x-2|\leq 2x-3$; $|x-1|+|3-x|<6$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes :

a) $(m^2-4)x\leq m+2$

b) $(m+2)x-2\geq 3m$

c) $(3-m)x-m^2+2m\geq 0$

Exercice 3 : Signe du binôme $ax+b$

1) Dresser le tableau de signe de :

$-4x+8$, $\frac{1}{6x+2}$ et $\frac{-4x+8}{6x+2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$(x+1)(-2x+3)\leq 0$; $(2x-3)(4x-5)\geq 0$

$\frac{x-3}{x+1}>0$; $\frac{(3x+2)(4x-1)}{5x-2}\geq 0$

$3x^2-2x\leq 0$; $(2x-1)(1-3x)(x-\sqrt{2})^2\geq 0$

$\frac{x}{x-1}\leq 0$; $(x+1)(4x^2-9)\geq 0$

$\frac{(2x+1)^2-x^2}{x-1}\geq 0$; $x^2\geq 16$

$\frac{2}{x-3}\leq 1$; $\frac{1}{1-3x}\leq\frac{2}{x-4}$; $\frac{2x}{3x+1}\leq\frac{1}{2}$

$\frac{2x+1}{x}\leq\frac{1}{3}$; $5x+\frac{1}{x}<\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$

Exercice 4 : Systèmes de deux équations du premier degré

A) En utilisant la méthode des déterminants résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}5x-2y=4\\-3x+4y=6\end{cases}$; 2) $\begin{cases}10x+y=7\\100x+y=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+4y=1\\x-2y=2\end{cases}$; 4) $\begin{cases}3x-2y=6\\\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0\end{cases}$

B) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S_1): $\begin{cases}3x+2y=4\\-x+y=-3\end{cases}$

2) En déduire la solution du système (S_2): $\begin{cases}3|x|-2|y-1|=4\\-|x|-|y-1|=-3\end{cases}$

C) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S): $\begin{cases}2\sqrt{x-1}-\sqrt{y+2}=7\\-\sqrt{x-1}+2\sqrt{y+2}=-17\end{cases}$

D) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}2x+y=1\\3x+y=5\end{cases}$

2) En déduire les solutions des systèmes :

$\begin{cases}2|x|+|y|=1\\3|x|+|y|=5\end{cases}$; $\begin{cases}2\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\3\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1\\\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5\end{cases}$; $\begin{cases}2x^2+y^2=1\\3x^2+y^2=5\end{cases}$

E) On considère le système (S_m): $\begin{cases}(m-1)x+y=m+1\\x+(m-1)y=3\end{cases}$

1) Montrer que le déterminant de (S_m) est $D=m(m-2)$

2) Discuter selon les valeurs du paramètre réel m les solutions dans $\mathbb{R}^2$ du système (S_m)

Exercice 5 : Inéquations du premier degré à deux inconnues

1) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations

$2x-y-5\leq 0$; $x-2y\geq 0$; $x+y-3<0$; $4x-3y+7>0$

2) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

(S_1) $\begin{cases}2x-y-3\leq 0\\x-2y+1\geq 0\end{cases}$; (S_2) $\begin{cases}x-2y\leq 7\\x+y\leq 3\end{cases}$

(S_3) $\begin{cases}x-2\geq 0\\y+1\leq 0\end{cases}$; (S_4) $\begin{cases}y-x-1\leq 0\\y+2x-2\leq 0\\2y+x+1\geq 0\end{cases}$

(S_5) $\begin{cases}4x-3y-8\leq 0\\2x+5y+3\geq 0\\y\leq 0\end{cases}$; (S_6) $\begin{cases}x+y+3<0\\-2x+y+2>0\\-2x+3y+2<0\end{cases}$

(S_7) $\begin{cases}x\geq 0\\y\geq 0\\x+y\leq 4\end{cases}$

3) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $(2x-y+1)(x-y-3)\leq 0$

Correction : https://drive.google.com/file/d/15P_FhOdLrUxBOX-yxvU9qbJW9A6qLabR/view?usp=sharing

Exercice 6 : Équations du second degré à une inconnue

A) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $2x^2+x-1=0$
2) $x^2-8x+16=0$
3) $-2x^2+2\sqrt{2}x-1=0$
4) $x^2-2|x|-3=0$
5) $x^4-4\sqrt{2}x^2+6=0$
6) $3x^4-4\sqrt{3}x^2+4=0$
7) $-3x+5\sqrt{x}-4=0$
8) $\sqrt{x^2+3}=2x-1$
9) $\sqrt{x^2-1}=x+1$

B) Sans calculer le discriminant Δ résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $3x^2-2x=0$
2) $7x^2-3=0$
3) $x^2-10x+16=0$
4) $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+\sqrt{15}=0$
5) $x^2-4\sqrt{3}x+9=0$

C) On considère l'équation :
(E): $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$

1) Montrer que 0 n'est pas une racine de (E)

2) On pose $t=x+\dfrac{1}{x}$, montrer que $t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow (E)$

3) Résoudre l'équation $t^2-5t+6=0$ et déduire les solutions de l'équation (E)

Exercice 7 : Somme et produit des solutions

A) On considère l'équation (E): $-2x^2+\sqrt{2}x+2=0$

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes α et β (sans les calculer).

2) Calculer $\alpha+\beta$, $\alpha\times\beta$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$, $\alpha^2+\beta^2$, $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $\alpha^3+\beta^3$.

B) Montrer que l'équation (E'): $x^2-3x+1=0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 puis calculer $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$

Exercice 8 : Factorisation d'un trinôme

Factoriser si c'est possible les trinômes suivants :

$P_1(x)=2x^2+3x-2$; $P_2(x)=-3x^2+7x-2$

$P_3(x)=25x^2-10x+1$; $P_4(x)=3x^2+6\sqrt{3}x+9$

$P_5(x)=-3x^2+x-2$; $P_5(x)=-3x^4+x^2-2$

Exercice 9 : Inéquations du second degré à une inconnue

A) Etudier le signe du trinôme $P(x)$:

1) $P(x)=x^2-7x+12$
2) $P(x)=-x^2+6x-9$
3) $P(x)=-x^2+2x-3$
4) $P(x)=7x^2+12x+5$
5) $P(x)=x^2+x+1$

B) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$x^2-5x+6\geq 0$; $x^2-8x+5<0$; $49x^2-70x+25>0$;

$-x^2+x+3<0$; $-9x^2+6\sqrt{2}x-2>0$;

$\sqrt{2}x^2+4x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq 0$; $3{,}5x^2-0{,}5x+0{,}15\leq 0$;

$\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2-4x-5}\geq 0$; $\dfrac{x^2-6x+9}{3x^2+10x-8}\geq 0$; $4x-3\sqrt{x}+1<0$

$\dfrac{x^2-8x+9}{x^2-4x}<0$; $\dfrac{x^3-8}{x^3-6x^2+12x-8}\geq 0$

$\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x^2+x}\leq\dfrac{3(x+3)}{x}$; $\sqrt{x^2+3x+4}\leq\dfrac{1}{2}x+2$

Exercice 10 :

1) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt{x^2-7x+12}=x$

a) Déterminer D l'ensemble des réels x pour lesquels l'équation (E) est bien définie (à un sens).

b) Résoudre dans D l'équation (E) (étudier les cas : $x\geq 0$ et $x<0$)

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2-7x+12}>x$

Exercice 11 : Complément de cours

Propriété 11

Soient u et v deux réels.

Le système $\begin{cases} u+v=S \\ uv=P \end{cases}$ admet une solution $(u;v)$ dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $S^2-4P\geq 0$

u et v dans ce cas sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} x+y=-9 \\ xy=20 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x+y=16 \\ xy=-1024 \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2+y^2=98 \\ xy=15 \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=-3 \end{cases}$
5) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy=1 \end{cases}$
6) $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$
7) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=13 \\ x+y=-2 \end{cases}$
8) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=0 \\ x+y=-2 \end{cases}$

Correction : https://drive.google.com/file/d/15P_FhOdLrUxBOX-yxvU9gbJW9A6gLabR/view?usp=sharing

9

Trigonométrie 1

HIYAB

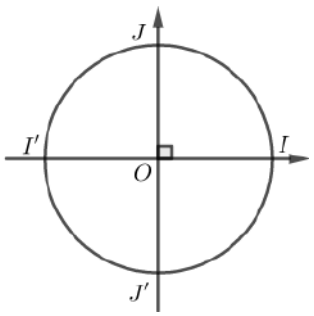


1) Cercle trigonométrique – Abscisses curvilignes

Activité 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

On considère le cercle (U) de centre O et de rayon $R=1$ (Voir la figure ci-contre).



1) Déterminer les coordonnées des points I, J, I' et J' dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

2) a) Calculer le périmètre du cercle (U) et en déduire la longueur de l'arc $\overset{\frown}{II'}$.

b) En déduire la longueur des arcs $\overset{\frown}{IJ}$ et $\overset{\frown}{IJ'}$ qui ne contient pas I'.

c) Déterminer la longueur des arcs $\overset{\frown}{IJ}$ et $\overset{\frown}{IJ'}$ qui contient I'.

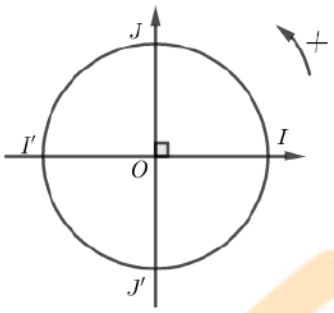
Définition 1 : Orientation d'un cercle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

- Orienter un arc du cercle c'est choisir un même sens de parcours circulaire.
- On prendra comme **sens positif** le sens contraire de déplacement des aiguilles d'une montre, il sera appelé **sens direct** ou sens trigonométrique, l'autre sens sera appelé sens indirect ou négatif.

Définition 2 : Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle orienté, muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$, de centre O, de rayon 1 et muni d'un point origine : (le point I).





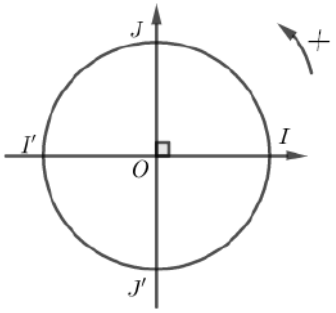
Définition 3 : Abscisses curvilignes :

Soit (U) un cercle trigonométrique.

- Tout réel x est représenté sur (U) par un unique point M.
- Le nombre x est appelé une **abscisse curviligne** du point M et on écrit $M(x)$.
- M se déplace sur le cercle à partir de I vers le sens positif avec la distance x (si $x\geq 0$) ou vers le sens négatif avec la distance $-x$ (si $x\leq 0$)

Exemple 1 :

- Le nombre 0 est une abscisse curviligne du point I (c'est-à-dire $I(0)$).
- Le nombre $\frac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne du point J (c'est-à-dire $J(\frac{\pi}{2})$).
- Le nombre $-\frac{\pi}{2}$ est une abscisse curviligne du point J' (c'est-à-dire $J'(-\frac{\pi}{2})$).
- Le nombre π est une abscisse curviligne du point I' (c'est-à-dire $I'(\pi)$).
- Le nombre $-\pi$ est une abscisse curviligne du point I' (c'est-à-dire $I'(-\pi)$).
- Le nombre $\frac{3\pi}{2}$ est une abscisse curviligne du point J' (c'est-à-dire $J'(\frac{3\pi}{2})$).
- Le nombre 2π est une abscisse curviligne du point I (c'est-à-dire $I(2\pi)$).



Propriétés 1 :

- Si x est une abscisse curviligne d'un point M, alors tout nombre s'écrit sous la forme $x+2k\pi$ tel que $k\in\mathbb{Z}$ est aussi une abscisse curviligne du point M.
- x et y sont deux abscisses curvilignes d'un même point si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-y=2k\pi$.
- On écrit dans ce cas $x\equiv y\,[2\pi]$ et on lit : x est congru à y modulo 2π.

Exemple 2 :

Dans chacun des cas suivants, vérifier que si x et y sont deux abscisses curvilignes d'un même point :

1) $x=\frac{23\pi}{8}$ et $y=\frac{-9\pi}{8}$; 2) $x=\frac{15\pi}{6}$ et $y=\frac{45\pi}{6}$; 3) $x=\frac{123\pi}{12}$ et $y=\frac{267\pi}{12}$.

Remarques 1 : Pour tout réels x, y et z on a :

- $x\equiv y[2\pi]\Leftrightarrow x=y+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$
- $y\equiv x[2\pi]\Leftrightarrow x\equiv y[2\pi]$.
- Si $x\equiv y[2\pi]$ et $y\equiv z[2\pi]$, alors $x\equiv z[2\pi]$.
- Si $x\equiv y[2\pi]$ et $x\equiv z[2\pi]$, alors $y\equiv z[2\pi]$.



Définition 4 : L'abscisse curviligne principale :

Si $M(x)$ et $x\in\left]-\pi;\pi\right]$ alors x est appelé **l'abscisse curviligne principale** du point M .

Remarques 2 :

- L'abscisse curviligne principale d'un point M du cercle trigonométrique est unique.
- Si x est l'abscisse curviligne principale d'un point M alors la mesure de l'angle $I\hat{O}M$ en degré est $I\hat{O}M=\left|\frac{180}{\pi}x\right|^0$

Exemple 3 :

Déterminons l'abscisse curviligne principale du point $M(\frac{53\pi}{5})$.

Soit x' l'abscisse curviligne principale du point $M(\frac{53\pi}{5})$, donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x'=\frac{53\pi}{5}+2k\pi$ et $-\pi<x'\leq\pi$

Donc $-\pi<\frac{53\pi}{5}+2k\pi\leq\pi$, donc $-1<\frac{53}{5}+2k\leq 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\left(-1-\frac{53}{5}\right)<k\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{53}{5}\right)$

C'est-à-dire $-5,8<k\leq-4,8$ et puisque $k\in\mathbb{Z}$ alors $k=-5$. Donc : $x'=\frac{53\pi}{5}+2k\pi=\frac{53\pi}{5}+2\times(-5)\pi=\boxed{\frac{3\pi}{5}}$

Exemple 4 :

1) Soit x une abscisse curviligne d'un point M, déterminer l'abscisse curviligne principale de M :

a) $x=\frac{67\pi}{3}$ b) $x=\frac{205\pi}{4}$ c) $x=\frac{41\pi}{6}$

d) $x=2024\pi$ e) $x=317\pi$ f) $x=\frac{2027\pi}{2}$.

2) Représenter sur le cercle trigonométrique le point M dans chaque cas précédent.

Autre technique pour déterminer l'abscisse curviligne principale :

Soit $M(\frac{a\pi}{b})$ un point du cercle trigonométrique tel que $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ et $|a|\geq b$.

1) Si $\frac{a}{b}$ n'est pas un entier relatif impair :

On encadre $\frac{a}{b}$ par deux entiers consécutifs n et $n+1$ tels que $n\leq\frac{a}{b}<n+1$.

L'un des deux entiers n ou $n+1$ est pair : soit N cet entier.

L'abscisse curviligne principale de $M(\frac{a\pi}{b})$ est $\frac{a\pi}{b}-N\pi$.

2) Si $\frac{a}{b}$ est un entier relatif impair alors l'abscisse curviligne principale de $M(\frac{a\pi}{b})$ est π .

Exemple 5 :

En utilisant la technique précédente déterminer l'abscisse curviligne principale de $M(x)$ dans les cas suivants :

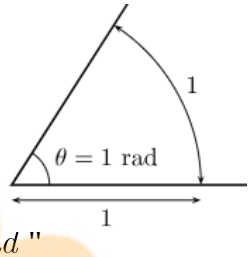
1) $x = \dfrac{33\pi}{4}$ 2) $x = \dfrac{267\pi}{5}$

3) $x = \dfrac{-43\pi}{6}$ 4) $x = \dfrac{-11\pi}{3}$.

Exercices : Exercices 1, 2 et 3 de la série 9.

2) Angle orienté de deux vecteurs

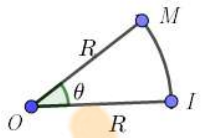
Définitions 5 : Unités de mesure des angles



- Le degré est le grade sont deux unités de mesure pour les angles.
- L'angle plat à pour mesure en degré : $180°$ et en **grade** : $200gr$.
- **Le radian** est une autre unité de mesure des angles, 1 radian est la mesure d'un angle au centre interceptant un arc de longueur égale à l'unité.
- Si la mesure d'un angle est exprimée en radian, on fait suivre le nombre par l'abréviation " rad "

Propriétés 2 :

- Un arc d'un cercle de rayon R a pour longueur $R\times\theta$ où θ est la mesure en radian de l'angle au centre interceptant l'arc.
- On a $\theta = \dfrac{\overset{\frown}{IM}}{R}$ c'est-à-dire $\overset{\frown}{IM} = R \times \theta$.



- Un secteur d'un cercle de rayon R a pour aire $\dfrac{R^2\times\theta}{2}$ où θ est la mesure en radian d'un angle au centre interceptant l'arc du secteur.
- Si x, y et z sont les mesures respectives d'un même angle géométrique en degré, en radian et en grade alors on a $\dfrac{x}{180} = \dfrac{y}{\pi} = \dfrac{z}{200}$.

Exemple 6 :

Compléter le tableau suivant :

Degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°		
Radian										$\dfrac{3\pi}{5}$	
Grade											145



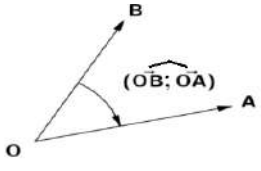
Remarque 3 :

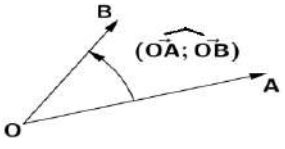
- L'unité d'angle dans le système international est le radian.
- $180° = \pi\ (rad)$

Définitions 6 : Angle orienté de deux demi-droites ayant même origine - angle orienté de deux vecteurs

Soit A, B et O trois points du plan.

- Un angle orienté de sommet O est un couple de 2 demi-droites de même origine $[OA)$ et $[OB)$.
- Les deux demi-droites sont appelées les côtés de l'angle.
- Cet angle est appelé aussi **angle orienté** de deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. On le note par $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$





• **La mesure de l'angle orienté** $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ est noté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ il est précédé du signe + si l'angle orienté est de sens positif et du signe − dans l'autre cas.

• Si α est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ alors tout nombre s'écrit sous la forme $\alpha+2k\pi$ tel que $k\in\mathbb{Z}$ est aussi une mesure de cet angle. On écrit $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha[2\pi]$.

Définition 7 : La mesure principale d'un angle orienté.

Si $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha[2\pi]$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$ alors α est appelé **la mesure principale** de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$

Propriétés 3 :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté. On a :

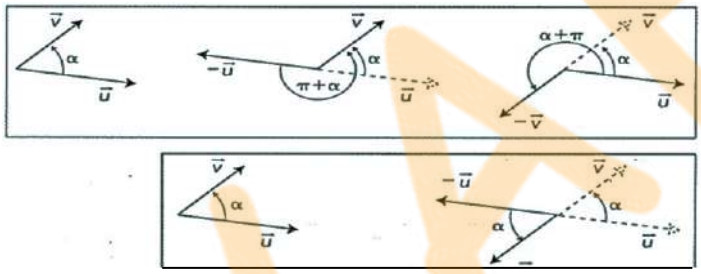


• $\left(\vec{v};\vec{u}\right)\equiv-\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$

• $\left(\vec{u};\vec{w}\right)+\left(\vec{w};\vec{v}\right)\equiv\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$ (Relation de Chasles)

Remarques 4 :

1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté. On a :



• $\left(\overrightarrow{-u};\vec{v}\right)\equiv\pi+\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$

• $\left(\vec{u};\overrightarrow{-v}\right)\equiv\pi+\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$

• $\left(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{-v}\right)\equiv\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$.

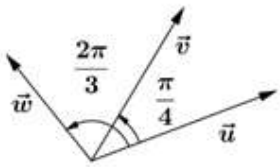
2) a et b deux réels non nuls. On a

• $\left(\overrightarrow{au};\overrightarrow{bv}\right)\equiv\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$ si $ab>0$

• $\left(\overrightarrow{au};\overrightarrow{bv}\right)\equiv\pi+\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$ si $ab<0$

Exemple 7 : On considère la figure ci-contre :

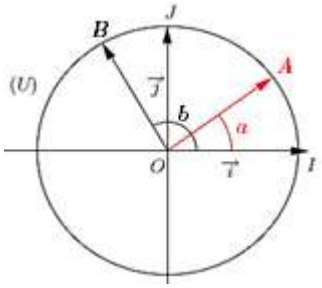
Déterminer les mesures suivantes : $\left(\vec{v};\vec{w}\right)$; $\left(\vec{w};\vec{v}\right)$; $\left(\overrightarrow{7v};\overrightarrow{-5w}\right)$; $\left(\overrightarrow{2v};\overrightarrow{4w}\right)$.



Propriétés 4 :

Soit $A(a)$ et $B(b)$ deux points sur un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I , on a :

• $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\equiv a[2\pi]$. Autrement dit l'abscisse curviligne d'un point A du cercle trigonométrique est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}}\right)$



• $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv b-a[2\pi]$.

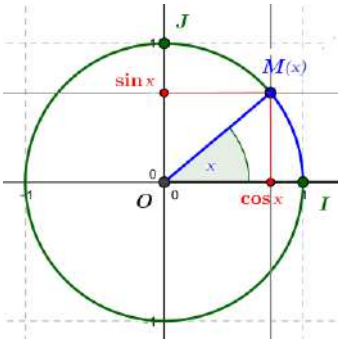
Exercices : Exercices 4, 5, 6, 7 et 8 de la série 9.

3) Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

Définitions 8 : Cosinus et sinus d'un nombre réel

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ et (U) le cercle trigonométrique de centre O.

Soit x un réel et M le point de (U) d'abscisse curviligne x .



• On appelle l'abscisse du point M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ par **cosinus** du nombre réel x et on le note par : $cos(x)$

• On appelle l'ordonnée du point M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ par **sinus** du nombre réel x et on le note par : $sin(x)$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 8 :

Déterminer à l'aide du cercle trigonométrique les valeurs suivants

$cos(0)$, $sin(0)$, $cos(\frac{\pi}{2})$, $sin(\frac{\pi}{2})$, $cos(\pi)$, $sin(\pi)$, $cos(-\frac{\pi}{2})$ et $sin(-\frac{\pi}{2})$

Propriétés 5 :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq cos(x) \leq 1$; $-1 \leq sin(x) \leq 1$ et $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $cos(x + 2k\pi) = cos(x)$ et $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$

Propriété 6 :

Tableau de signe de $sin(x)$ et $cos(x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

X	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin(X)$	0	−		−	0	+		+	0
$cos(X)$		−	0	+		+	0	−	



Exemple 9 :

1) Calculer $cos(x)$ sachant que $sin(x) = -\frac{2}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right[$

2) Calculer $sin(\alpha)$ sachant que $cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{5}$ et $\alpha \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$

Exemple 10 :

1) Vérifier que $\frac{49\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 24\pi$ puis montrer que $cos(\frac{49\pi}{2}) = 0$; 2) Montrer que $sin(\frac{2025\pi}{2}) = -1$

Les lignes trigonométriques usuelles :

Soit $\alpha \in \left\{0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\}$, on a :

- $cos(\alpha) = \frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ au\ dessus\ de\ \alpha}}{2}$
- $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ en\ dessous\ de\ \alpha}}{2}$
- $tan(\alpha) = \frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ en\ dessous\ de\ \alpha}}{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ au\ dessus\ de\ \alpha}}$



Exemple 11 :

$cos(\frac{\pi}{3}) = ...$	$cos(\frac{\pi}{6}) = ...$	$cos(\frac{\pi}{4}) = ...$	$cos(0) = ...$	$cos(\frac{\pi}{2}) = ...$
$sin(\frac{\pi}{3}) = ...$	$sin(\frac{\pi}{6}) = ...$	$sin(\frac{\pi}{4}) = ...$	$sin(0) = ...$	$sin(\frac{\pi}{2}) = ...$
$tan(\frac{\pi}{3}) = ...$	$tan(\frac{\pi}{6}) = ...$	$tan(\frac{\pi}{4}) = ...$	$tan(0) = ...$	$tan(\frac{\pi}{2}) = ...$

Définition 9 : Tangente d'un nombre réel

$(O;\vec{OI};\vec{OJ})$ un repère orthonormé du plan et (U) le cercle trigonométrique de centre O.

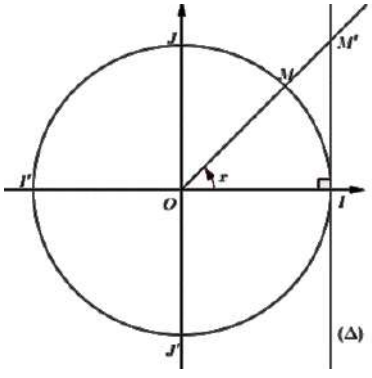
Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$

On note M le point de (U) d'abscisse curviligne x .

Soit M' le point d'intersection de la droite (OM) et la droite (Δ) tangente à (U) en I.

On considère la droite (Δ) est graduée d'origine I et de même unité $OI = 1$

L'abscisse du point M' sur la droite (Δ) est appelée **tangente** x on le note $tan(x)$



Remarque 5 :

Tangente n'existe pas pour les nombres $\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ car (OJ) et (OJ') ne coupe pas (Δ)

Propriétés 7 :

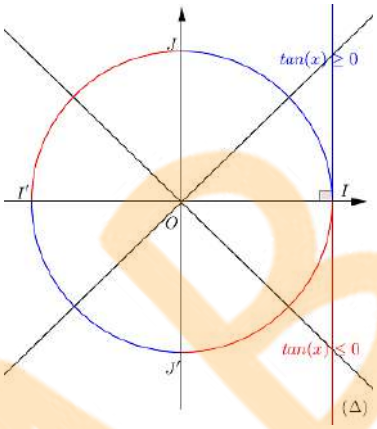
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ on a :

• $tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$; • $1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$; • $tan(x+2k\pi)=tan(x)$

Propriété 8 :

Tableau de signe de $tan(x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

X	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$tan(X)$	0	+	||	−	0	+	||	−	0



Exemple 12 :

1) Calculer $tan(x)$ sachant que $cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

2) Calculer $sin(\alpha)$ sachant que $tan(\alpha)=-\sqrt{5}$ et $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

Remarque 6 :

$cos^2(x)=(cos(x))^2$, $sin^2(x)=(sin(x))^2$ et $tan^2(x)=(tan(x))^2$

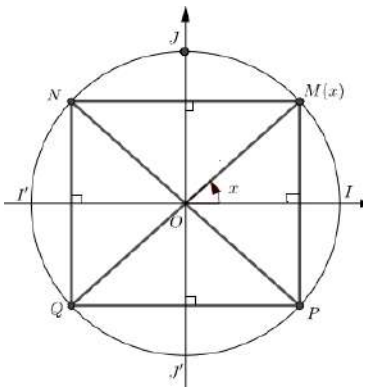
Exercices : Exercices 9, 10, 11 et 12 de la série 9.

4) Les relations entre les lignes trigonométriques

Activité 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ et (U) le cercle trigonométrique de centre O.

Soit x un réel tel que $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et M le point de (U) d'abscisse curviligne x (Voir la figure ci-contre)



1) a) Vérifier que les coordonnées des points P, N et Q dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ sont : $P(cos(x);-sin(x))$, $N(-cos(x);sin(x))$ et $Q(-cos(x);-sin(x))$

b) Vérifier que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP})\equiv -x[2\pi]$, $(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OI'})\equiv x[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OI'};\overrightarrow{OQ})\equiv x[2\pi]$

2) a) En déduire que les abscisses curvilignes des points P, N et Q dans le cercle (U) sont : $P(-x)$, $N(\pi-x)$ et $Q(\pi+x)$

b) En déduire que $\begin{cases}cos(-x)=cos(x)\\sin(-x)=-sin(x)\end{cases}$, $\begin{cases}cos(\pi-x)=-cos(x)\\sin(\pi-x)=sin(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}cos(\pi+x)=-cos(x)\\sin(\pi+x)=-sin(x)\end{cases}$

Propriétés 9 :

Pour tout réel x on a : $\begin{cases}cos(-x)=cos(x)\\sin(-x)=-sin(x)\end{cases}$, $\begin{cases}cos(\pi-x)=-cos(x)\\sin(\pi-x)=sin(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}cos(\pi+x)=-cos(x)\\sin(\pi+x)=-sin(x)\end{cases}$

Exemple 13 :

Calculer : $cos(-\frac{\pi}{6})$, $sin(-\frac{\pi}{6})$, $cos(\pi-\frac{\pi}{3})$, $sin(\pi-\frac{\pi}{3})$, $sin(\frac{3\pi}{4})$ et $cos(\frac{4\pi}{3})$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Propriété 10 :

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ on a : $\begin{cases} tan(-x) = -tan(x) \\ tan(\pi - x) = -tan(x) \\ tan(\pi + x) = tan(x) \end{cases}$

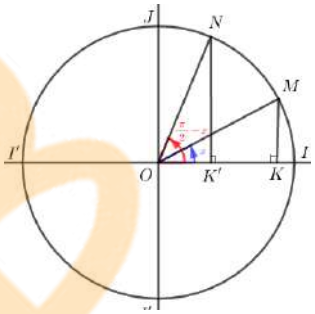
Exemple 14 :

Calculer : $tan(-\frac{\pi}{3})$, $tan(\pi - \frac{\pi}{3})$, $tan(\pi + \frac{\pi}{4})$, $tan(\frac{7\pi}{6})$ et $tan(\frac{2\pi}{3})$

Activité 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ et (U) le cercle trigonométrique de centre O.

Soit x un réel, on considère les points M et N d'abscisses curvilignes x et $\frac{\pi}{2} - x$ respectivement (Voir la figure)



1) a) Montrer que les triangles OMK et ONK' sont égaux

b) En déduire que $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$ et $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$

2) En écrivant $\frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{2} - (-x)$ déduire que $cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x)$ et $sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x)$

Propriétés 11 :

Pour tout réel x on a : $\begin{cases} cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x) \\ sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x) \\ sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x) \end{cases}$



Exemple 15 :

Calculer $cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$, $sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$, $cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$ et $sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$

Exemple 16 :

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right\}$ on a : $tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{tan(x)}$ et $tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{tan(x)}$

Propriétés 12 :

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right\}$ on a : $tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{tan(x)}$ et $tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{tan(x)}$

Exemple 17 : Calculer $tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$ et $tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$

Exercice :

Calculer les valeurs suivantes :

$cos(\frac{\pi}{3} + 80\pi)$; $cos(\frac{\pi}{3} + 81\pi)$; $tan(\frac{\pi}{3} + 40\pi)$

$sin(\frac{\pi}{3} - 80\pi)$; $sin(\frac{\pi}{3} - 81\pi)$; $tan(\frac{\pi}{3} - 40\pi)$

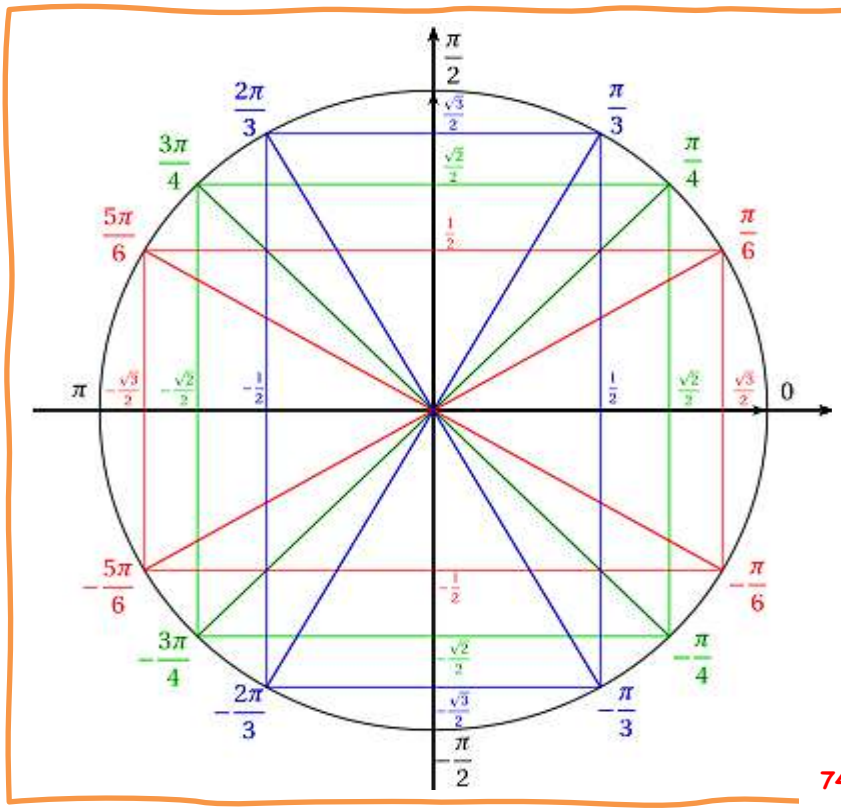
$sin(80\pi + \frac{\pi}{3})$; $cos(81\pi - \frac{\pi}{3})$; $tan(\frac{\pi}{3} + 41\pi)$

$cos(80\pi - \frac{\pi}{3})$; $sin(81\pi + \frac{\pi}{3})$; $tan(\frac{\pi}{3} - 41\pi)$

$cos(\frac{15\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$; $cos(\frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$; $tan(\frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$

$sin(-\frac{15\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$; $sin(-\frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$; $tan(\frac{15\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$

Exercices : Exercices 13, 14 et 15 de la série 9.



Résumé 9 : Trigonométrie 1

• **Le cercle trigonométrique** est un cercle orienté, muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$, de centre O , de rayon 1 et d'origine I .

• Tout réel x est représenté sur le cercle trigonométrique (U) par un unique point M . Le réel x est appelé une **abscisse curviligne** du point M et on écrit $M(x)$.

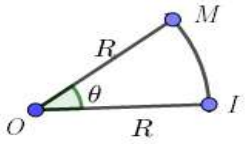
• Si x est une abscisse curviligne d'un point M , alors tout nombre s'écrit sous la forme $x+2k\pi$ tel que $k\in\mathbb{Z}$ est aussi une abscisse curviligne du point M .

• x et y sont deux abscisses curvilignes d'un même point si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-y=2k\pi$.

• Si $M(x)\in(U)$ et $x\in\left]-\pi;\pi\right]$ alors x est **l'abscisse curviligne principale** du point M .

• **Le radian** est une unité de mesure des angles, on a : $180°=\pi\ (rad)$

• Si I et M deux points d'un cercle de rayon R alors : $\theta\ (rad)=\dfrac{\overset{\frown}{IM}}{R}$ c'est-à-dire $\overset{\frown}{IM}=R\times\theta$.



• L'aire du secteur $\overset{\frown}{IM}$ est $\dfrac{R^2\times\theta}{2}$ (θ est exprimé en radian)

• Si $M(x)$ dans le cercle trigonométrique (U) et $M(x_M;y_M)$ dans le repère, alors : $cos(x)=x_M$ et $sin(x)=y_M$

• **Les relations entre les lignes trigonométriques :**

	$x+2k\pi$	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
sin	$sin(x)$	$-sin(x)$	$sin(x)$	$-sin(x)$	$cos(x)$	$cos(x)$
cos	$cos(x)$	$cos(x)$	$-cos(x)$	$-cos(x)$	$sin(x)$	$-sin(x)$
tan	$tan(x)$	$-tan(x)$	$tan(x)$	$tan(x)$	$\dfrac{1}{tan(x)}$	$-\dfrac{1}{tan(x)}$



• **Propriétés trigonométriques :**

$-1\le cos(x)\le 1$
$-1\le sin(x)\le 1$
$cos^2(x)+sin^2(x)=1$
$tan(x)=\dfrac{sin(x)}{cos(x)}$
$1+tan^2(x)=\dfrac{1}{cos^2(x)}$

• **Tableau de signe de $sin(x)$, $cos(x)$ et $tan(x)$ sur $\left[-\pi;\pi\right]$:**

X	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin(X)$	0	−	‖	−	0	+	‖	+	0
$cos(X)$		−	0	+		+	0	−	
$tan(X)$	0	+	‖	−	0	+	‖	−	0

• La mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ est noté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

• L'écriture $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha\left[2\pi\right]$ se lit « **la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ est congru à α modulo 2π** »

• $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha\left[2\pi\right]\Leftrightarrow(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\alpha+2k\pi\quad/\,k\in\mathbb{Z}$

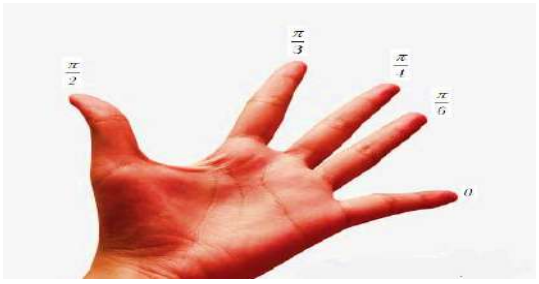
• Si $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\alpha\left[2\pi\right]$ et $\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]$ alors α est **la mesure principale** de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

• $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\left[2\pi\right]$

• $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\left[2\pi\right]$ (Relation de Chasles)

• Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points sur un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I alors :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\equiv a\left[2\pi\right]$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv b-a\left[2\pi\right]$.

• **Les lignes trigonométriques usuelles :**
$cos(\pi)=-1$; $sin(\pi)=0$; $tan(\pi)=0$



Soit $\alpha\in\left\{0;\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right\}$, on a :

$cos(\alpha)=\dfrac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ au\ dessus\ de\ \alpha}}{2}$

$sin(\alpha)=\dfrac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ en\ dessous\ de\ \alpha}}{2}$

$tan(\alpha)=\dfrac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ en\ dessous\ de\ \alpha}}{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ au\ dessus\ de\ \alpha}}$

Exercice 1 :

Représenter sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes suivants :

$\pi;\ 93\pi;\ 2022\pi;\ -4\pi;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};$
$\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{17\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4};\ \frac{21\pi}{6};\ \frac{-23\pi}{2}$.

Exercice 2 :

Soit x une abscisse curviligne d'un point M, déterminer l'abscisse curviligne principale de M dans les cas suivants :

1) $x=\frac{789\pi}{7}$ 2) $x=\frac{-214\pi}{5}$ 3) $x=15\pi$

4) $x=\frac{157\pi}{3}$ 5) $x=\frac{-31\pi}{4}$ 6) $x=\frac{111\pi}{6}$.

Exercice 3 :

Vérifier si la relation $x\equiv y[2\pi]$ est réalisée :

1) $x=\frac{43\pi}{12}$ et $y=-\frac{5\pi}{12}$

2) $x=\frac{-13\pi}{8}$ et $y=\frac{9\pi}{4}$

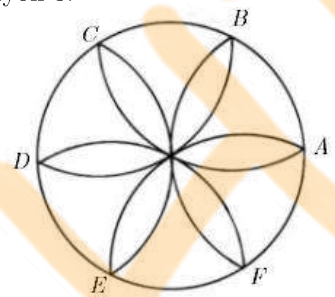
Exercice 4 :

Compléter le tableau suivant :

En degrés	15			127.5		
En radian		$\frac{\pi}{5}$			$\frac{\pi}{8}$	
En grade			20			120

Exercice 5 :

On considère la rosace ci-dessous où les points A, B, C, D, E et F sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 3.



1) Calculer la longueur du plus petit arc $\overset{\frown}{AB}$.
2) Calculer la longueur du plus petit arc $\overset{\frown}{BF}$.
3) Calculer la longueur totale de la rosace.
4) Calculer l'aire de la rosace.

Exercice 6 :

$ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Déterminer : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)$; $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$; $\left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{DC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice 7 :

$ABCD$ un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$.

Trouver la mesure principale de chacun des angles orientés :

1) $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)$ 2) $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)$ 3) $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)$ 5) $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD}\right)$

Exercice 8 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer les mesures suivantes :

$\left(\vec{v};\vec{u}\right)$; $\left(\vec{3v};2\vec{u}\right)$; $\left(\vec{3v};-3\vec{u}\right)$; $\left(-3\vec{v};7\vec{u}\right)$; $\left(-\vec{v};-\vec{u}\right)$; $\left(-5\vec{v};-\frac{9}{2}\vec{u}\right)$

Exercice 9 :

A l'aide d'un cercle trigonométrique, montrer que :

$cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ et $sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 10 :

Calculer $tan(\frac{13\pi}{3})$, $sin(-\frac{47\pi}{6})$ et $cos(\frac{8081\pi}{4})$

Exercice 11 :

1) Calculer $cos(x)$ sachant que $tan(x)=\sqrt{2}-1$ et $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

2) Calculer $tan(y)$ sachant que $sin(y)=-\frac{1}{3}$ et $y\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$

3) Déterminer $tan(z)$ sachant que $tan^2(z)+2\sqrt{3}tan(z)-1=0$

Exercice 12 :

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $cos(x)\neq 0$

1) Montrer que $1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$

2) Supposons que $tan(x)\neq 0$ montrer que $\frac{1}{sin^2(x)}=1+\frac{1}{tan^2(x)}$

Exercice 13 :

1) Calculer $tan(\frac{13\pi}{3})$, $sin(-\frac{47\pi}{6})$ et $cos(\frac{8081\pi}{4})$

2) Soit x un réel montrer par deux méthodes que :

$cos(\frac{3\pi}{2}-x)=-sin(x)$

Exercice 14 :

Calculer $cos(\frac{\pi}{6}+9\pi)$, $sin(\frac{\pi}{3}-81\pi)$, $sin(\frac{7\pi}{2}-2021\pi)$ et

$tan(\frac{\pi}{4}+2021\pi)$

Exercice 15 :

1) Ecrire en fonction de $cos(x)$ et $sin(x)$, les expressions :

$A=sin(\pi+x)+cos(3\pi-x)-sin(x-2\pi)+cos(x+9\pi)$

$B=sin(x+3\pi)+sin(x+12\pi)+sin(x-\pi)+sin(3\pi-x)$

$C=sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+sin(\pi+x)+cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+sin(2\pi+x)$

$D=cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)+cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

2) Ecrire en fonction de $tan(x)$ les expressions suivantes :

$E=tan(11\pi-x)+tan(3\pi+x)+tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$F=tan\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)+tan(x-5\pi)-tan\left(x-\frac{9\pi}{2}\right)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/190HsRtiKHvMNy_00dc6dkX9XnWl3H18v/view?usp=sharing

10

Statistiques

HIYAB



1) Généralités sur une série statistique

Activité 1 :

Ce tableau statistique organise les notes d'un contrôle de Maths, obtenues par les élèves d'une classe de TCSF :

Notes	2	5	7	10	13	15	18	19
Nombres d'élèves	5	3	8	7	6	5	9	5

1) Déterminer le caractère étudié x et l'effectif n.

2) Déterminer les caractères x_2, x_4 et x_7.

3) Déterminer les effectifs n_2, n_4 et n_7.

4) Dresser le tableau de effectifs cumulés N_k puis déduire N_2, N_4 et N_7.

5) Déterminer l'effectif total N.

6) Calculer la fréquence f_2 du caractère x_2.

7) Dresser le tableau des fréquences f_k.

8) Calculer les pourcentages p_2, p_4 et p_7 des caractères x_2, x_4 et x_7 respectivement.



Définitions 1 :

- **Population statistique :** l'ensemble des individus objet d'une étude statistique.
- **Individu statistique :** un élément de la population statistique
- **Caractère** x **:** une propriété commune aux individus d'une population statistique.
- Le caractère peut être **quantitatif** (âge…) ou **qualitatif** (couleur…).
- **Classe** I **:** quand les valeurs d'un caractère quantitatif sont nombreuses et voisines on les regroupe dans des intervalles semi-ouverts appelées classes.
- **Effectif** n : le nombre d'individus ayant la valeur du caractère x (ou du classe I)
- **Série statistique :** L'ensemble de couples des caractères (ou des classes) et d'effectifs $(x_k;n_k)$ (ou $(I_k;n_k)$)
- Une série statistique $(x_k;n_k)$ est représentée dans un **tableau statistique.**

Définitions 2 :

Soit $(x_k;n_k)$ une série statistique (tel que $1 \le k \le p$)

Caractère	x_1	x_2	.....	x_k	.....	x_{p-1}	x_p
Effectif n_k	n_1	n_2	.....	n_k	.....	n_{p-1}	n_p
Effectif cumulé N_k	N_1	N_2	.....	N_k	.....	N_{p-1}	$N_p = N$

- **Effectif total** N : la somme de tous les effectifs de la série statistique : $N = n_1 + n_2 + ... + n_p = N_p$
- **Effectif cumulé** N_k : d'une valeur du caractère x_k est la somme des effectifs des valeurs inférieures ou égales à x_k : $N_k = n_1 + n_2 + ... + n_k$
- **Fréquence** f_k d'une valeur du caractère x_k est $f_k = \frac{n_k}{N}$ où n_k est l'effectif de x_k.
- **Fréquence cumulé** F_k d'une valeur du caractère x_k est $F_k = \frac{N_k}{N}$ où N_k est l'effectif cumulé de x_k.
- **Pourcentage** p_k d'une valeur du caractère x_k est $p_k = \frac{n_k}{N} \times 100\%$.

Remarques 1 :

- Dans le cas de caractère quantitatif les x_k sont classées en ordre croissant $x_1 < x_2 < ..... < x_{p-1} < x_p$ dans le tableau statistique.
- Les définitions 2 restes valables dans le cas d'une série statistique définie par des classes.

Exercices :

Exercices 1, 2 et 3 de la série 10.

2) Représentation graphique d'une série statistique

Introduction :

Pour mieux visualiser et interpréter une série statistique on représente graphiquement les données de son tableau statistique par des diagrammes (en bâtons, circulaire…) ou par un histogramme.

2-1 Diagramme en bâtons

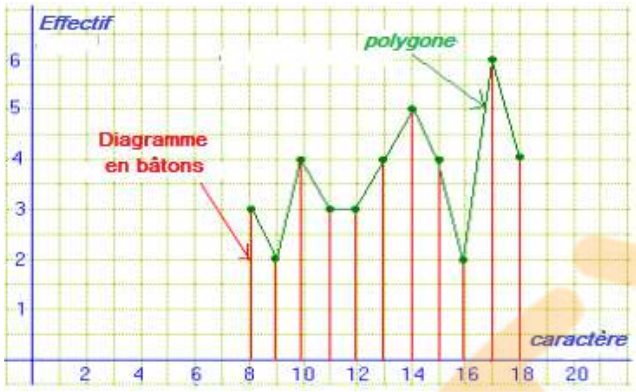
Un **diagramme en bâtons** (ou **à bâtons**), également appelé **diagramme en barres** (ou **à barres**), est un graphique qui présente des variable qualitative avec des barres rectangulaires avec des hauteurs ou des longueurs proportionnelles aux valeurs qu'elles représentent. Les barres peuvent être tracées verticalement ou horizontalement.

Un diagramme en bâtons montre des comparaisons entre des catégories quantitative. Un axe du diagramme montre les catégories spécifiques comparées et l'autre axe représente une valeur mesurée. Certains diagrammes en bâtons présentent des barres regroupées, indiquant les valeurs de plusieurs variables mesurées.

Exemple 1 :

Ce tableau statistique organise les notes d'un contrôle de langue arabe, obtenues par les élèves d'une classe.

Caractère x_k	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectif n_k	3	2	4	3	3	4	5	4	2	6	4
Effectif cumulé N_k											





Exemple 2 :

Ce tableau statistique organise les notes d'un contrôle de langue français, obtenues par les élèves d'une classe.

Caractère x_k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectif n_k	4	9	10	16	12	14	8	6	7	5	3	2
Effectif cumulé N_k												



2-2 Histogramme

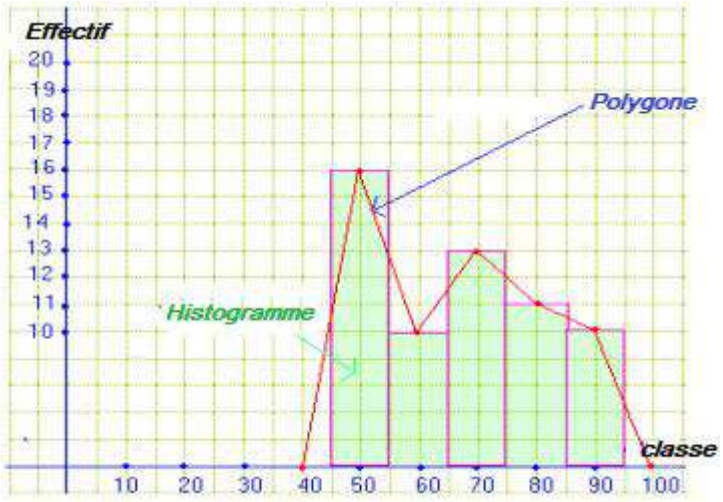
L'histogramme permet de décrire les effectifs observés**.** Il est utilisé pour présenter des données quantitatives discrètes et quantitatives continues groupées en classes. Les caractéristiques de l'histogramme sont les suivantes :

- Les bandes sont collées les unes contre les autres.
- Sur l'axe vertical, on indique la fréquence (ou l'effectif) de chaque valeur.
- Sur l'axe horizontal, on indique les classes.

Exemple 3 :

Ce tableau statistique organise le nombre de battement de cœur en une minute de 60 personne.

Classe I_k	$[45;55[$	$[55;65[$	$[65;75[$	$[75;85[$	$[85;95[$
Effectif n_k	16	10	13	11	10
Effectif cumulé N_k					





2-3 Diagramme circulaire

Le diagramme circulaire permet d'illustrer un tout partagé en parties. On l'utilise pour représenter des données qualitatives. Les caractéristiques du diagramme circulaire sont les suivantes.

- Chaque secteur du cercle est en lien avec une modalité généralement présentée avec un pourcentage.
- L'angle au centre d'un secteur circulaire représente la proportion d'une catégorie par rapport au tout 360°.
- Il doit y avoir un titre et une légende qui associe le contenu des secteurs à une modalité.

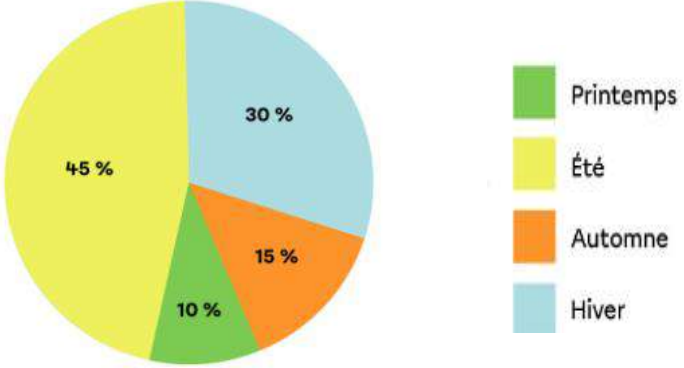
Remarque 2 :

Dans le diagramme circulaire chaque valeur du caractère x_k est représentée par un secteur angulaire de mesure d'angle α_k proportionnelle à l'effectif n_k par la relation $\frac{\alpha_k}{360}=\frac{n_k}{N}$ (ou à la fréquence f_k par la relation $\frac{\alpha_k}{360}=f_k$ ou au pourcentage p_k par la relation $\frac{\alpha_k}{360}=\frac{p_k}{100}$)

Exemple 4 :

On a interrogé 160 élèves d'une école secondaire au sujet de leur saison préférée. Voici le tableau de distribution des résultats obtenus.

Caractère x_k	Hiver	Automne	Printemps	Été
Effectif n_k	48	24	16	72
Fréquence f_k				
Angle au centre α_k				



Exercices : Exercices 4 et 5 de la série 10.

3) Paramètres de position d'une série statistique

Introduction :

Les paramètres de position indiquent la valeur "typique" autour de laquelle les observations sont réparties. Les paramètres de position les plus importants sont le mode, la médiane et la moyenne arithmétique.

Activité 2 :

On considère la série statistique de l'exemple 1 :

Notes	2	5	7	10	13	15	18	19
Nombres d'élèves	5	3	8	7	6	5	9	5
Effectif cumulé N_k								



1) Déterminer le mode M de cette série statistique.

2) Déterminer la médiane Me de cette série statistique.

3) Calculer la moyen arithmétique $\bar{x}$ cette série statistique.

Définitions 3 :

Soit $(x_k;n_k)$ une série statistique

- Le **mode** M de la série statistique $(x_k;n_k)$ est la valeur du caractère ayant le plus grand effectif
- La **médiane** Me de la série statistique $(x_k;n_k)$ est la première valeur du caractère dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$
- La **moyenne arithmétique** $\bar{x}$ d'une série statistique $(x_k;n_k)$ est le nombre : $\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_px_p}{N}$

Remarques 3 :

Dans le cas d'une série statistique $(I_k;n_k)$ définie par classes :

- Le mode M est appelé **classe modale,** c'est la classe ayant le plus grand effectif.
- La médiane Me est appelé la **classe médiane**, c'est la première classe dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$
- Pour calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$, on remplace les x_k par les centres des classes I_k.

Exemple 5 : On considère la série statistique de l'exemple 3 :

Classe I_k	$[45;55[$	$[55;65[$	$[65;75[$	$[75;85[$	$[85;95[$
Effectif n_k	16	10	13	11	10
Effectif cumulé N_k	16	26	39	50	60

1) Déterminer le mode M de cette série statistique.

2) Déterminer la médiane Me de cette série statistique.

3) Calculer la moyen arithmétique $\bar{x}$ cette série statistique.

Remarques 4 :

- La médiane Me d'une série statistique est la valeur telle que 50 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Me et 50 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à Me.
- Le mode (la classe modale) est aussi la valeur du caractère (la valeur de la classe) ayant la plus grande fréquence.
- Il peut y avoir plusieurs modes et plusieurs classes modale.

Exercices : Exercices 6 et 7 de la série 10.

4) Paramètres de dispersion d'une série statistique

Introduction :

Les paramètres de dispersion mesurent combien les observations s'éloignent de la moyenne arithmétique. Les plus important sont l'écart-moyen, la variance et l'écart-type.

Définitions 4 : Soit $(x_k;n_k)$ une série statistique de moyenne arithmétique $\bar{x}$.

- **L'écart-moyen** de cette série statistique est le nombre réel, noté e_m, défini par : $e_m = \frac{n_1|x_1-\bar{x}|+n_2|x_2-\bar{x}|+\cdots+n_p|x_p-\bar{x}|}{N}$
- La **variance** de cette série statistique est le nombre réel, noté V, défini par : $V = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$
- **L'écart-type** d'une série statistique de variance V est le nombre réel noté σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

Remarques 5 :

- Pour simplifier les calculs de l'écart-moyen et la variance on ajoute au tableau statistique des lignes pour déterminer les valeurs de $|x_k-\bar{x}|$, $n_k\times|x_k-\bar{x}|$, $(x_k-\bar{x})^2$ et $n_k(x_k-\bar{x})^2$

Caractère x_k	x_1	x_2	.....	x_k	.....	x_{p-1}	x_p
Effectif n_k	n_1	n_2	.....	n_k	.....	n_{p-1}	n_p
$\|x_k-\bar{x}\|$							
$n_k\times\|x_k-\bar{x}\|$							
$(x_k-\bar{x})^2$							
$n_k(x_k-\bar{x})^2$							

- Pour calculer l'écart-moyen e_m, la variance V et l'écart-type σ dans le cas d'une série statistique définie par classes, on remplace les x_k par les centres des classes I_k.

Exemple 6 : On considère la série statistique de l'exemple 1 : (Rappel $\bar{x}=11,69$)

Caractère x_k	2	5	7	10	13	15	18	19
Effectif n_k	5	3	8	7	6	5	9	5
$\|x_k-\bar{x}\|$								
$n_k\times\|x_k-\bar{x}\|$								
$(x_k-\bar{x})^2$								
$n_k(x_k-\bar{x})^2$								



1) Calculer l'écart-moyen e_m de cette série statistique.

2) Calculer la variance V de cette série statistique.

3) Calculer l'écart-type σ cette série statistique.

Exemple 7 :

Calculer l'écart moyen, la variance et l'écart type de la série statistique de l'exemple 5.

Remarques 6 :

- La variance d'une série statistique ne change pas si on utilise la formule $V=\frac{n_1x_1^{\ 2}+n_2x_2^{\ 2}+\cdots+n_px_p^{\ 2}}{N}-\bar{x}^{-2}$
- L'écart moyen, la variance et l'écart type sont appelés paramètres de dispersion, ils sont toujours positifs.
- Si l'écart moyen est grand, les données sont éloignées de la moyenne arithmétique. Inversement, plus l'écart moyen est petit, plus les données sont concentrées autour de la moyenne arithmétique.
- Si une variance est nulle, cela veut dire que toutes les observations sont égales à la moyenne arithmétique, ce qui implique qu'il n'y a aucune variation de celles-ci. Par contre, plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante.
- L'écart type sert à déterminer la dispersion des données d'un échantillon par rapport à la moyenne arithmétique. Un écart type grand indique que les données sont dispersées autour de la moyenne arithmétique. Cela signifie qu'il y a beaucoup de variances dans les données observées. À l'inverse, plus les valeurs sont regroupées autour de la moyenne arithmétique, plus l'écart type est faible. Si l'écart type est proche de zéro, les données sont alors très peu dispersées par rapport à la moyenne arithmétique.
- La majorité des valeurs d'une série statistique se trouvent dans l'intervalle $\left[\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma\right]$

Exercice : Exercice 8 de la série 10.

Résumé 10 : Statistiques

Vocabulaires et paramètres d'une série statistique :

Généralités	**Population statistique**	L'ensemble des individus objet d'une étude statistique.
	Individu statistique	Un élément de la population statistique.
	Caractère x	Une propriété commune aux individus d'une population statistique. Le caractère peut être quantitatif (âge…) ou qualitatif (couleur…).
	Classe I	Quand les valeurs d'un caractère quantitatif sont nombreuses et voisines on les regroupe dans des intervalles semi-ouverts appelées classes.
	Effectif n	Le nombre d'individus ayant la valeur du caractère (ou du classe)
	Série statistique	L'ensemble de couples des caractères (ou des classes) et d'effectifs. On la note par $(x_k;n_k)$ (ou $(I_k;n_k)$) Elle est souvent présentée dans un tableau statistique avec les caractères x_k classées en ordre croissant.
	Effectif total N	La somme de tous les effectifs $N=n_1+n_2+.....+n_p=N_p$
	Effectif cumulé N_k	Est la somme des effectifs des valeurs inférieures ou égales à x_k $N_k=n_1+n_2+.....+n_k$
	Fréquence f_k	$f_k=\frac{n_k}{N}$
	Fréquence cumulé F_k	$F_k=\frac{N_k}{N}$
	Pourcentage p_k	$p_k=\frac{n_k}{N}\times 100\,\%.$
Paramètres de position	**Le mode** M (ou la classe modale)	Est le caractère (ou la classe) ayant le plus grand effectif.
	La médiane Me (ou la classe médiane)	Est la première caractère (ou classe) dont l'effectif cumulé est supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$
	La moyenne arithmétique $\bar{x}$	$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_px_p}{N}$
Paramètres de dispersion	**L'écart-moyen** e_m	$e_m=\frac{n_1\lvert x_1-\bar{x}\rvert+n_2\lvert x_2-\bar{x}\rvert+\cdots+n_p\lvert x_p-\bar{x}\rvert}{N}$
	La variance V	$V=\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$
	L'écart-type σ	$\sigma=\sqrt{V}$

- Pour simplifier les calculs de l'écart-moyen et la variance on ajoute au tableau statistique des lignes pour déterminer les valeurs de $|x_k-\bar{x}|$, $n_k\times|x_k-\bar{x}|$, $(x_k-\bar{x})^2$ et $n_k(x_k-\bar{x})^2$
- Pour calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$, l'écart-moyen e_m, la variance V et l'écart-type σ dans le cas d'une série statistique définie par classes, on remplace les x_k par les centres des classes I_k.

Représentation graphique d'une série statistique :

- Pour mieux visualiser et interpréter une série statistique on représente graphiquement les données de son tableau statistique par des diagrammes (en bâtons, circulaire…) ou par un histogramme.
- Dans le diagramme circulaire chaque valeur du caractère x_k est représentée par un secteur angulaire de mesure d'angle α_k proportionnelle à l'effectif n_k par la relation $\frac{\alpha_k}{360}=\frac{n_k}{N}$ (ou à la fréquence f_k par la relation $\frac{\alpha_k}{360}=f_k$ ou au pourcentage p_k par la relation $\frac{\alpha_k}{360}=\frac{p_k}{100}$



Généralités

Exercice 1

Les notes des élèves d'une classe en un devoir surveillé sont : 6-8-10-10-12-14-10-15-12-12-20-8-6-18-20-14- 6-8-10-10-12-14-10-15-12-12-20-8-6-18-20-14.

1) Représenter ces notes dans un tableau statistique.
2) Compléter ce tableau par la ligne des effectifs cumulés.
3) Dresser le tableau des fréquences et fréquences cumulées.

Exercice 2

Les groupes sanguins des personnes qui sont présentés un jour au centre de don de sang sont : A ; A; AB ; AB ; A ; B ; B ; B ; B ; A ; A ; A ; AB ; AB ; B ; B ; B ; AB ; O ; O.

1) Représenter ces informations dans un tableau statistique.
2) Compléter ce tableau par les effectifs cumulés.
3) Calculer les fréquences et pourcentages des groupes A et O.

Exercice 3

Le nombre d'enfants chez les familles d'un bâtiment : 2-1-0-0-1-2-2-1-0-3-2-1-0-0-1-2-2-1-0-3-2-1- 0-0-1-2-2-1-0-3.

1) Organiser ces données dans un tableau statistique.
2) Quel est le caractère de cette série statistique ? Quel est son type ?
3) Quel est l'effectif total de cette série statistique ?
4) Donner l'effectif de 2 et calculer sa fréquence.
5) Calculer le pourcentage des familles qui ont 2 enfants.
6) Compléter le tableau précédent par les effectifs cumulés.

Représentation graphique

Exercice 4

Ce tableau indique la répartition des élèves selon leurs disciplines préférées

Math	SVT	EPS	Arabe	Français	Anglais
10	7	12	6	5	8

1) Représenter cette série statistique par un diagramme en barres.
2) Représenter cette série statistique par un diagramme circulaire.

Exercice 5

Considérons le tableau statistique suivant :

Classe	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$
Effectif	7	15	13	8

1) Représenter graphiquement par un histogramme la série statistique.
2) Dessiner l'histogramme des effectifs cumulés.

Paramètres de position

Exercice 6

Considérons la série statistique suivante :

Valeurs	8	10	12	13	16	20
Effectif	2	4	3	3	5	3

1) Déterminer le mode de cette série statistique.
2) Calculer la moyenne.
3) Déterminer la médiane

Exercice 7

Considérons le tableau statistique suivant :

Classe	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;7[$	$[7;8[$	$[8;9[$
Effectif	40	20	12	10	6	4

1) Déterminer la classe modale.
2) Déterminer la classe médiane.
3) Calculer la moyenne arithmétique

Paramètres de dispersion

Exercice 8

Considérons le tableau statistique suivant :

Valeurs	1	2	3	4	5
Effectif	10	5	8	12	5

1) Calculer la moyenne arithmétique.
2) Calculer l'écart-moyen.
3) Calculer la variance et l'écart-type.

Exercice 4 de DL3

Exercice 9

Les notes obtenues par les élèves d'une classe de TCSF en Arabe et en français sont :

Arabe	7	12	16	7	16	8	14	12	7	16
Français	15	6	11	15	6	10	11	6	11	15

1) Organiser pour chaque langue un tableau de caractère, effectif, effectif cumulé, fréquence et fréquence cumulé.
2) Représenter l'effectif de langue Arabe par un diagramme en barres.
3) Déterminer la médiane de chaque série statistique.
4) Calculer la moyenne arithmétique de chaque série statistique.
5) Calculer l'écart-moyen, la variance et l'écart-type de chaque série statistique.
6) Qu'il sont est les points les plus dispersées autour de la moyenne arithmétique ?

Correction : https://drive.google.com/file/d/14zs-TduQAbEjnXP-02e3R_TVoheEuvvZ/view?usp=sharing

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL3

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (polynômes)

On considère le polynôme $P(x)=2x^3+mx^2-3x-2$

1) Déterminer la valeur de m pour que 1 soit une racine de $P(x)$
2) Dans la suite on suppose que $m=3$
a) En déduire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ (à déterminer) tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$
b) Vérifier que -2 est une racine de $Q(x)$
c) Factoriser le polynôme $Q(x)$
d) Donner une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.
e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$
f) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\geq 0$

Exercice 2 (Equations, inéquations et systèmes)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
$3x^2-5x-2=0$ et $x^2(x+3)=0$

b) Déduire les solutions de l'équation $3x^4-5x^2-2=0$

c) En utilisant le tableau de signe résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2(x+3)}\geq 0$

2) a) En utilisant la méthode des déterminants résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $(S_1):\begin{cases}4x+y=6\\2x-3y=-4\end{cases}$

b) En déduire les solutions des systèmes :
$(S_2):\begin{cases}4x^2+y^2=6\\2x^2-3y^2=-4\end{cases}$ et $(S_3):\begin{cases}4|x-1|+|y-2|=6\\2|x-1|-3|y-2|=-4\end{cases}$

3) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $3x-2y-6\leq 0$

4) Sans calculer le discriminant Δ résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2-8x+7=0$, $x^2-8x+15=0$, $x^2-7x+10=0$, $x^2-10x+24=0$

5) Factoriser le trinôme x^2-5x+4 et déduire une factorisation du trinôme x^4-5x^2+4.

6) **Propriété 11 (complément de cours)**

Soient u et v deux réels.

Le système $\begin{cases}u+v=S\\uv=P\end{cases}$ admet une solution $(u;v)$ dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $S^2-4P\geq 0$

u et v dans ce cas sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

a) $\begin{cases}x+y=-9\\xy=20\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=16\\xy=-1024\end{cases}$

Exercice 3 (Trigonométrie 1)

1) a) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacun des points suivants : $A\left(\frac{267\pi}{6}\right)$, $B\left(\frac{-238\pi}{3}\right)$ et $C\left(\frac{25\pi}{4}\right)$

b) Placer les points A, B et C dans le même cercle trigonométrique.

c) Soit O le centre du cercle trigonométrique.
Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$ et déduire $cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

d) Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}}\right)$

e) En déduire la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)$

2) Déterminer les valeurs des nombres suivants : $sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)$, $cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$ et $tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)$

3) Soit x un réel on pose $A(x)=sin(-x)\times sin(5\pi+x)-sin(\frac{7\pi}{2}-x)cos(x-11\pi)$

a) Montrer que pour tout réel x on a $A(x)=1-2cos^2(x)$

b) Sachant que $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$ calculer $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $A\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

4) Soit α un réel tel que $\alpha\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[$ et $tan(\alpha)=\sqrt{7}$. Calculer $cos(\alpha)$ et $sin(\alpha)$

5) Soit y un réel tel que $tan(y)\neq 0$ et $sin(y)\neq 0$. Montrer que $\dfrac{1}{sin^2(y)}=1+\dfrac{1}{tan^2(y)}$



Exercice 4 (Statistiques)

Exercice 9 de la série 10 page 84.

Correction : https://drive.google.com/file/d/1Wf8A2JVTSqOirSbDz7lOBvI1VPpUxsRj/view?usp=sharing

11

Trigonométrie 2

HIYAB



1) Rappel 1

Activité 1 :

1) Représenter l'intervalle $[-\pi;\pi]$ sur un cercle trigonométrique.

2) Représenter l'intervalle $[0;2\pi]$ sur un cercle trigonométrique.



Activité 2 :

Compléter le tableau suivant :

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
sin					
cos					
tan					

Activité 3 :

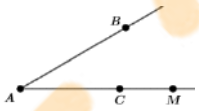
Représenter sur un cercle trigonométrique les nombres : 0 ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; π ; $-\pi$; 2π

Activité 4 :

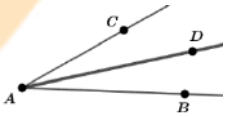
1) Existe-il un réel x tel que $cos(x)=2$? ; 2) Existe-il un réel y tel que $sin(y)=3$?

Remarques 1 :

- La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.
- Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle.
- La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles égaux.
- Le centre du cercle inscrit est le point d'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle.
- La somme des mesures des angles géométriques d'un triangle est égale à π.
- Tout triangle non rectangle a tous ses angles sont aigus (on dit dans ce cas que le triangle est acutangle) ou au plus un angle obtus (on dit dans ce cas que le triangle est obtus).
- Si $M\in[AC)$ alors $B\hat{A}M=B\hat{A}C$



- Relation de Chasles : $B\hat{A}C=B\hat{A}D+D\hat{A}C$



- Si b désigne la longueur d'un côté d'un triangle et h la hauteur relative à ce côté, l'aire de ce triangle est $S=\frac{1}{2}\times b\times h$

2) Equations et inéquations trigonométriques

2-1 L'équation $cos(x)=a$ et les inéquations $cos(x)>a$ et $cos(x)<a$

Rappel 2 :

$1=cos(....)$; $\frac{\sqrt{3}}{2}=cos(....)$; $\frac{\sqrt{2}}{2}=cos(....)$; $\frac{1}{2}=cos(....)$; $0=cos(....)$; $-cos(a)=cos(.....)$

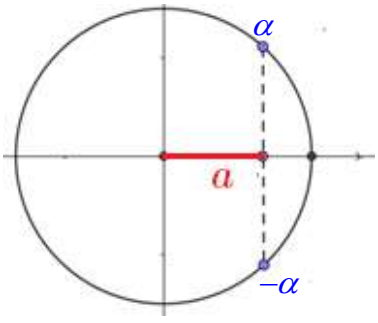
Propriété 1

On considère l'équation $cos(x)=a$ avec $a\in]-1;1[$ et S l'ensemble de ses solutions.

Il existe $\alpha\in]0;\pi[$ tel que $a=cos(\alpha)$

Et $S=\{\alpha+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\alpha+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

Autrement dit : $cos(x)=cos(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2k\pi & /k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=-\alpha+2k\pi & /k\in\mathbb{Z}\end{cases}$



Remarque 2 :

Pour résoudre l'inéquation $cos(x) > a$ ou $cos(x) < a$ avec $a \in]-1;1[$ dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation $cos(x) = a$

Exemple 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) $cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E_1) et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En utilisant le cercle trigonométrique précédent résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les inéquations :

$cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



Application 1 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $cos(x) = -\frac{1}{2}$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En déduire les solutions dans $[0;2\pi]$ des inéquations : $cos(x) > -\frac{1}{2}$; $cos(x) < -\frac{1}{2}$; $cos(x) \geq -\frac{1}{2}$; $cos(x) \leq -\frac{1}{2}$

Remarque 3 : Cas particulier

- Si $a > 1$ *ou* $a < -1$ alors l'équation $cos(x) = a$ n'admet pas de solution : $S = \varnothing$
- L'ensemble de solutions de l'équation $cos(x) = -1$ est $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
- L'ensemble de solutions de l'équation $cos(x) = 1$ est $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

2-2 L'équation $sin(x) = a$ et les inéquations $sin(x) > a$ et $sin(x) < a$

Rappel 3 :

$1 = sin(....)$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = sin(....)$; $\frac{\sqrt{2}}{2} = sin(....)$; $\frac{1}{2} = sin(....)$; $0 = sin(....)$; $-sin(a) = sin(.....)$

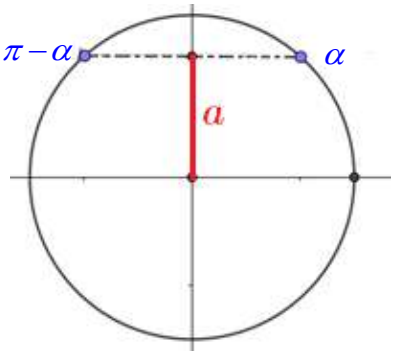
Propriété 2

On considère l'équation $sin(x) = a$ avec $a \in]-1;1[$ et S l'ensemble de ses solutions.

Il existe $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ tel que $a = sin(\alpha)$

Et on a $S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Autrement dit : $sin(x) = sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



Remarque 4 :

Pour résoudre l'inéquation $sin(x) > a$ ou $sin(x) < a$ avec $a \in]-1;1[$ dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation $sin(x) = a$

Application 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) $sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre dans $[-\pi;2\pi[$ l'équation (E_1) et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

3) En déduire les solutions dans $[-\pi;2\pi[$ des inéquations : $sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Remarque 5 : Cas particulier

- Si $a > 1$ *ou* $a < -1$ alors l'équation $sin(x) = a$ n'admet pas de solution : $S = \varnothing$
- L'ensemble de solutions de l'équation $sin(x) = -1$ est $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
- L'ensemble de solutions de l'équation $sin(x) = 1$ est $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2-3 L'équation $tan(x) = a$ et les inéquations $tan(x) > a$ et $tan(x) < a$

Rappel 4 :

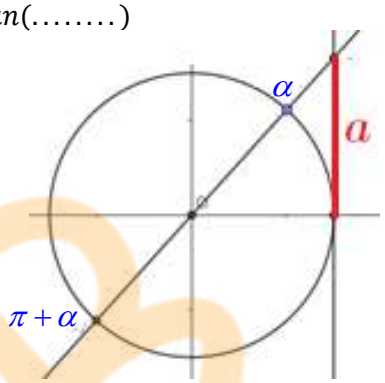
$1 = tan(....)$; $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = tan(....)$; $\sqrt{3} = tan(....)$; $0 = tan(....)$; $-tan(a) = tan(.....)$

Propriété 3

On considère l'équation $tan(x) = a$ et S l'ensemble de ses solutions.

Il existe $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = tan(\alpha)$ et on a $S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Autrement dit : $tan(x) = tan(\alpha) \Leftrightarrow \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$



Remarque 6 :

Pour résoudre l'inéquation $tan(x) > a$ ou $tan(x) < a$ avec $a \in]-1;1[$ dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation $tan(x) = a$

Application 3 :

1) Résoudre dans $[-\pi;\pi[$ l'équation $tan(x) = -1$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Résoudre dans $[-\pi;\pi[$ les inéquations : $tan(x) > -1$ et $tan(x) < -1$

3) Résoudre dans $\left[-\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right[$ l'équation $tan(2x - \frac{\pi}{3}) = -1$ (tu peux mettre $X = 2x - \frac{\pi}{3}$)

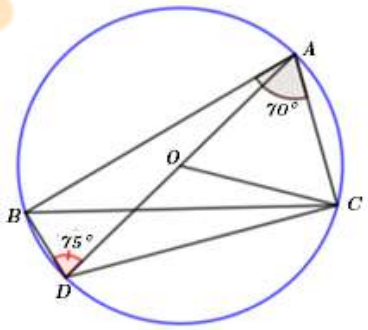
Exercices : Exercices de 1 à 12 de la série 11.

3) Angle inscrit - quadrilatère inscriptible - loi des sinus

Activité 4 :

$[AD]$ un diamètre d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O.

B et C de points de $(\mathcal{C})$ tel que $B\hat{A}C = 70°$ et $A\hat{D}B = 75°$ (voir la figure ci-dessous)



1) Déterminer la nature des triangles ABD et ACD.

2) Déterminer la mesure des angles suivants : $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $C\hat{A}O$ et $D\hat{B}C$.

3) Déterminer la nature du triangle AOC.

4) En déduire la mesure des angles $A\hat{O}C$ et $A\hat{B}C$.

5) Déterminer par deux méthodes la mesure des angles $A\hat{C}B$ et $B\hat{C}D$.

6) Déterminer la mesure de l'angle $B\hat{D}C$ et vérifier que $B\hat{D}C + B\hat{A}C = 180°$.

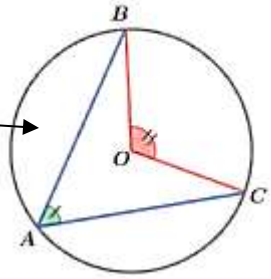
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

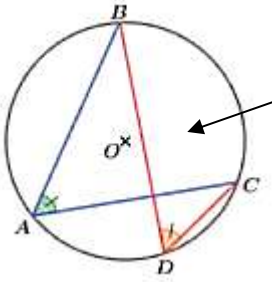
Propriétés 4

- Si deux angles sont inscrits dans un cercle et interceptent le même arc alors ils sont de même mesure.
- Si un angle au centre et un angle inscrit dans un cercle interceptent un même arc alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

$B\hat{O}C = 2B\hat{A}C$

$B\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{O}C$





$B\hat{A}C = B\hat{D}C$

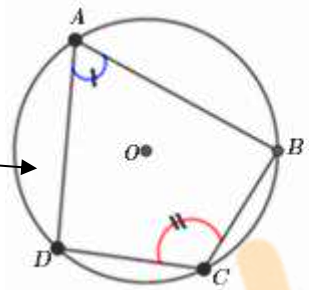
Propriété 5 : Quadrilatère inscriptible :

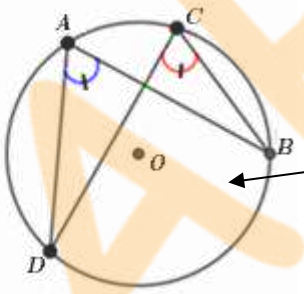
A, B et C sont trois point non alignés, (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et soit D un point du plan.

Le point D appartient au cercle (C) si et seulement si $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ ou $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \pi$

(Dans ce cas on dit que $ABCD$ est un **quadrilatère inscriptible** et que les points A, B, C et D sont **cocycliques**)

$\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \pi$





$\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$

Application 4 :

Dans un trapèze isocèle, les côtés adjacents aux bases sont isométriques.

On considère le trapèze isocèle $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$, M le point d'intersection de (AC) et (BD) et N est le point d'intersection de (AD) et (BC).

1) Montrer que $B\hat{A}D + B\hat{C}D = \pi$ puis déduire que $ABCD$ est inscriptible.

2) Soit O le centre du cercle circonscrit au trapèze $ABCD$.

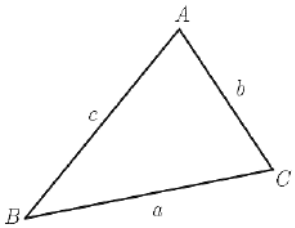
Montrer que $D\hat{O}M + D\hat{A}M = \pi$ puis déduire que $AMOD$ est inscriptible.

Théorème 1 : Loi des sinus

Soit ABC un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit.

On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $B\hat{A}C = \hat{A}$, $C\hat{B}A = \hat{B}$, $A\hat{C}B = \hat{C}$ on a :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$



Théorème 2 : Aire d'un triangle

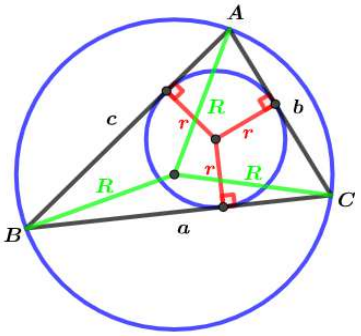
Soit ABC un triangle.

R et r sont respectifs les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC.

On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et soit p le demi-périmètre du triangle ABC $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

L'aire du triangle ABC est :

- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \frac{1}{2}a \times b \times \sin\hat{C} = \frac{1}{2}b \times c \times \sin\hat{A} = \frac{1}{2}a \times c \times \sin\hat{B}$



Application 5 :

ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$, $\widehat{ACB} = \frac{3\pi}{4}$ et $AB = 6$. Calculer $\widehat{BAC}$ et AC.

Application 6 :

ABC un triangle tel que $BC = 4$, $AC = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

1) En utilisant la loi des sinus déterminer $sin(\widehat{ABC})$.

2) En déduire $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.



Application 7 :

1) Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de coté 5.

2) En déduire R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit.

Application 8 :

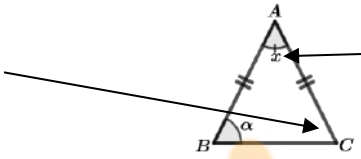
Calculer l'aire du triangle ABC sachant que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

Remarques 7 :

- Si ABC est un triangle isocèle en A alors :

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2}$ et $\widehat{BAC} = \pi - 2\widehat{ABC} = \pi - 2\widehat{ACB}$

$\widehat{ACB} = \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$



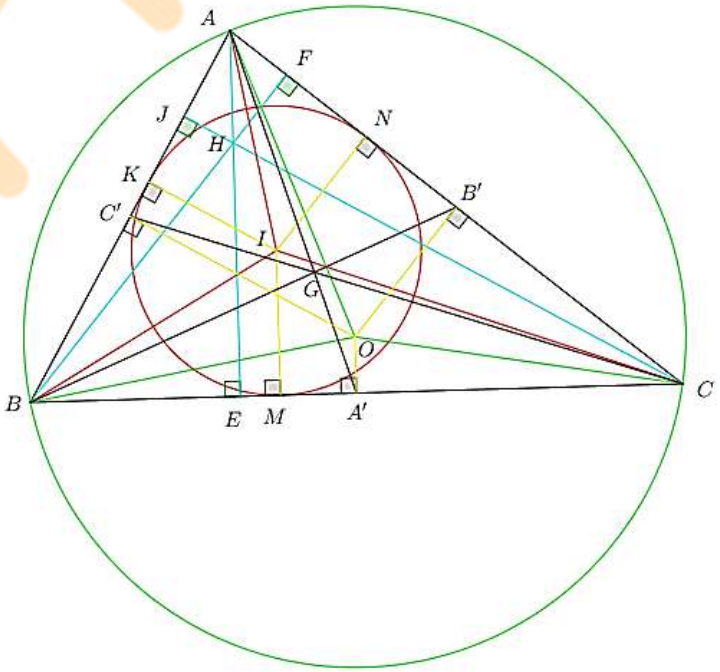
$x = \pi - 2\alpha$

- Si un triangle est isocèle dont l'un de ces angle égale à $60°$ alors il est équilatéral.
- Dans un triangle, une médiane est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.
- Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes de ce triangle.
- Dans un triangle, une hauteur est une droite passant par un sommet et coupant perpendiculairement le côté opposé.
- L'orthocentre est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

Exercices : Exercices de 13 à 24 de la série 11.

Pour la recherche :

- Cercle et inégalité d'Euler
- Point de Gergonne d'un triangle.
- Les cercles exinscrits et point de Nagel d'un triangle.
- Puissance d'un point par rapport à un cercle et l'axe radical de deux cercles.



HIYAB

Résumé 11 : Trigonométrie 2

Les équations trigonométriques de base :



- $cos(x) = cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\alpha + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $sin(x) = sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $tan(x) = tan(\alpha) \Leftrightarrow \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

Les inéquations trigonométriques de base :

Pour résoudre une inéquation trigonométrique de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.

Angle inscrit-angle au centre :

- Si deux angles sont inscrits dans un cercle et interceptent le même arc alors ils sont de même mesure.
- Si un angle au centre et un angle inscrit dans un cercle interceptent un même arc alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit.

Quadrilatère inscriptible :

A, B et C sont trois point non alignés, (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et soit D un point du plan.

Le point D appartient au cercle (C) si et seulement si $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ ou $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \pi$

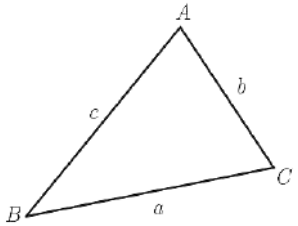
(Dans ce cas on dit que $ABCD$ est un **quadrilatère inscriptible** et que les points A, B, C et D sont **cocycliques**)

Loi des sinus :

Soit ABC un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit.

On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



Aire d'un triangle :

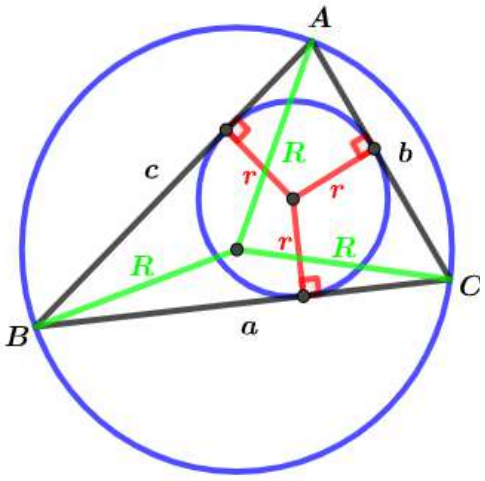
Soit ABC un triangle.

R et r sont respectifs les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC.

On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et soit p le demi-périmètre du triangle ABC.

L'aire du triangle ABC est :

- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2} b \times c \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} a \times c \times \sin \hat{B}$



Équations trigonométriques

Exercice 1

Résoudre dans l'intervalle I les équations :

1) $4sin(x) = -2$; $I = \mathbb{R}$

2) $cos(2x) = \frac{1}{2}$; $I =]-\pi; 2\pi]$

3) $\sqrt{2}cos(3x) = 1$; $I =]-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$

4) $\sqrt{3}tan(x) = -3$; $I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$

5) $cos^3(x) + sin^2(x) = 1$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $sin(x) = -sin\frac{\pi}{7}$; $I = \mathbb{R}$

2) $cos(2x) = -cos\frac{\pi}{8}$; $I = [0; 2\pi]$

3) $cos(3x) = -sin\frac{\pi}{3}$; $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

4) $cos(3x) = -sin(x)$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = cos\frac{\pi}{7}$; $I = \mathbb{R}$

2) $cos(2x)\,cos(3x) = 0$; $I =]-\pi; \pi]$

3) $tan(x).tan(2x) = 1$; $I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$

4) $tan(x) = sin(x)$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $tan(x) = tan\left(\frac{7\pi}{11}\right)$; $tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

2) Résoudre dans l'intervalle I les équations :

a) $tan\ (x) = tan\frac{\pi}{5}$; $I = [0\,; 3\pi]$

b) $tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; $I = [-2\pi; \pi]$

Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $sin(x) = cos\frac{\pi}{8}$; $I = [0\,; 3\pi]$

2) $sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $I = \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $sin(x) = \frac{1}{2}$; $I = \left[-\frac{\pi}{4}; 3\pi\right]$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $sin(x).cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

3) $sin^2(x) - 16 = 0$; 4) $sin^2(x) - cos^2(x) = 0$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) $tan\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = tan(3x)$

3) $sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

4) $tan\left(x + \frac{4\pi}{3}\right).tan(2x) = 1$

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$(E): \cos^3 x + \sin^3 x + 2 = 3(\cos x + \sin x)(1 - \cos x\,.\,\sin x)$
et S l'ensemble des solutions de (E).

1) Montrer que $x \in S$ équivaut à
$(\cos x + \sin x)(1 - \cos x\,.\,\sin x) = 1$.

2) On pose $\cos x + \sin x = t$

a) Montrer que $x \in S$ équivaut à $t^3 - 3t + 2 = 0$

b) Résoudre l'équation à $t^3 - 3t + 2 = 0$.

c) En déduire l'ensemble S.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} cos\,2x = cos\,y \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} sin\,x = sin\,y \\ x - 2y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

3) $\begin{cases} tan\,x = tan\,y \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} sin(2x - y) = 0 \\ cos(x - 2y) = 0 \end{cases}$

Inéquations trigonométriques

Exercice 10

Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

1) $cos(x) \geq \frac{1}{2}$; $I =]-\pi; \pi]$

2) $cos(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; $I = [0; 2\pi]$

3) $tan(x) > -1$; $I = [0; 2\pi]$

4) $sin(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $I = [0; 2\pi]$

5) $tan(x) < -\sqrt{3}$; $I = [-\pi; \pi]$



Exercice 11

Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ les inéquations :

$\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x \leq \frac{1}{2}$; $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan x \geq 1$; $\tan x \leq \sqrt{3}$; $\tan x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 12

Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ les inéquations :

$cos(x)\,.\,sin(x) \geq 0$; $2\sin^2(x) + sin(x) \leq 0$;

$2\cos^2(x) - cos(x) > 0$;

$(2\sin(x) - 1)\left(\sqrt{3}\tan(x) + 1\right) > 0$

Loi des sinus - aire d'un triangle

Exercice 13

Soit ABC un triangle tel que :

$\hat{B} = \frac{\pi}{6}$, $BA = c = \sqrt{3}$ et $AC = b = \sqrt{3}$

Calculer $\hat{A}$, $\hat{C}$, BC, S, R et r

Correction : https://drive.google.com/file/d/15aGjiCOau4HXlFkYJWEuHnzyDR72-LxT/view?usp=sharing

Exercice 14

Soit ABC un triangle tel que :
$\hat{A} = \frac{\pi}{4}$, $BC = a = 4$ et $AC = b = 4$
Calculer AB, $\hat{B}$, $\hat{C}$, S, R et r

Exercice 15

Soit ABC un triangle tel que :
$\hat{A} = \frac{\pi}{4}$, $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$ et $R = 4$
Calculer AB, AC, BC, $\hat{C}$, S, R et r

Exercice 16

Soit ABC un triangle tel que :
$AB = \sqrt{3}$, $AC = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{2}$ et $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$
1) Calculer $\sin\widehat{BAC}$ puis déduire une mesure de $\widehat{BAC}$
2) Vérifier que $\widehat{ABC} = \frac{5\pi}{12}$ puis déduire la valeur de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
3) Calculer l'aire du triangle ABC ainsi que les deux rayons des deux cercles inscrit et circonscrit du triangle ABC.

Exercice 17

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 4$, $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ et $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$
On pose $AC = b$ et $BC = a$
1) Montrer que $b = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
2) a) Montrer que $a^2 + 4a\sqrt{6} - 48 = 0$
b) Calculer a puis déduire la valeur de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
3) Calculer l'aire du triangle ABC ainsi que les deux rayons de ses deux cercles inscrit et circonscrit.

Exercice 18

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle (C) de centre O et de rayon R.
H est le projeté orthogonal de O sur (BC).
Le demi droit $[OH)$ coupe le cercle (C) au point I.
On pose $\widehat{BAC} = \alpha$
1) Montrer que :
$IC = 2R.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $CH = 2R.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
2) Déduire que : $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

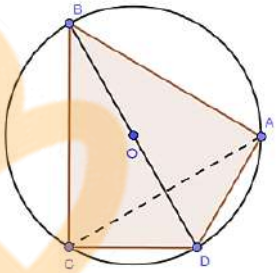
Exercice 19

Soit ABC un triangle, on pose
$BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$
1) Montrer que : $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \frac{b^2+c^2}{a^2}\sin^2\hat{A}$
2) Déterminer la nature du triangle ABC dans le cas où $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \sin^2\hat{A}$
3) Montrer que $\sin\hat{A} - \sin\hat{B} = \frac{1}{2R}(a-b)$
4) Déduire que :
$c(\sin\hat{A} - \sin\hat{B}) + a(\sin\hat{B} - \sin\hat{C}) + b(\sin\hat{C} - \sin\hat{A}) = 0$

Angles inscrits-quadrilatères inscriptibles

Exercice 20

Un cerf-volant est quadrilatère dont une des diagonales est un axe de symétrie.
On veut établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cerf-volant soit inscriptible.
On considère un cerf-volant $ABCD$ inscriptible et O le milieu de $[BD]$
1) On suppose que $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$
M.q $ABCD$ est inscriptible.
2) On suppose que $ABCD$ est inscriptible



a) Vérifier que $[BD]$ est un diamètre du cercle circonscrit au $ABCD$.
b) Déterminer la nature des triangles BCD et BAD.
c) On déduire que : $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$ puis conclure

Exercice 21

Soit (C) un cercle, $[BC]$ une corde, et $A \in (C)$ tels que les arcs AB et AC soient égaux. Soient $[AD]$ et $[AE]$ deux autres cordes d'extrémités A, qui coupent $[BC]$ en F et en G respectivement.
Montrer que $DEFG$ est inscriptible.

Exercice 22

Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E, les droites (AD) et (BC) se coupent en F.
1) Montrer que les milieux des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.
2) Montrer que le quadrilatère $CFDE$ est inscriptible.

Exercice 23

Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On supposera pour simplifier que H est intérieur au triangle (triangle acutangle). On considère H_A , H_B et H_C les symétriques de H respectivement par rapport à (BC), (AC) et (AB)
Montrer que les quadrilatères :
AH_ABC , AH_BBC et AH_CBC sont inscriptibles.

Exercice 24 (Exercice d'olympiade nationale)

ABC un triangle et (C) son cercle circonscrit. On considère un point E de la tangente (T) au cercle (C) au point A. Les points P et Q sont respectivement les projections orthogonales de E sur (AB) et (AC)
1) Montrer que $(PQ) \perp (BC)$
2) La tangente (T) et la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupent la droite (BC) respectivement aux points F et D. Montrer que $FD=FA$

Correction : https://drive.google.com/file/d/15aGjiCOau4HXlFkYJWEuHnzyDR72-LxT/view?usp=sharing

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL4

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$sin(x)=-\frac{1}{2}$; $cos(x)=-\frac{1}{2}$; $tan(x)=-\sqrt{3}$; $2\,sin^2(x)+7\,sin(x)+3=0$; $cos(x)=1$

$sin(x)=1$; $cos(x)=-\frac{3}{2}$; $sin(3x)=sin(x+\frac{\pi}{4})$; $\sqrt{3}tan(2x+1)=1$; $cos(2x+\frac{\pi}{3})=sin(5x-\frac{\pi}{6})$

Exercice 2

En utilisant le cercle trigonométrique résoudre dans $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes :

(I_1) $2sin(x)+\sqrt{2}<0$; (I_2) $2cos(x)+1\geq 0$

(I_3) $(2sin(x)+\sqrt{2})(2cos(x)+1)<0$; (I_4) $-1\leq tan(x)\leq 1$

Exercice 3

Partie A

Le but est de montrer que la symétrie de l'orthocentre d'un triangle acutangle par rapport à l'un de ses coté appartient à son cercle circonscrit.

Soit ABC un triangle acutangle et H son orthocentre (point d'intersection des hauteurs).

E est le point d'intersection des droites (AH) et (BC).

D est le point d'intersection de la droite (AH) et le cercle circonscrit au triangle ABC. (Voir la figure ci-contre)

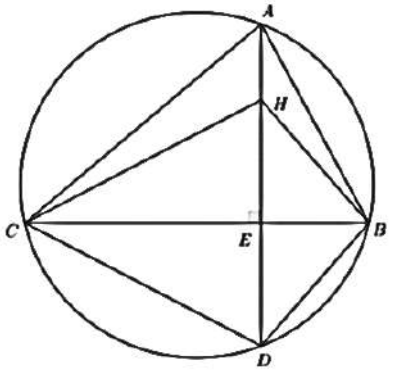
On pose $B\hat{A}C=\hat{A}$, $C\hat{B}A=\hat{B}$ et $A\hat{C}B=\hat{C}$

1) Montrer que : $C\hat{A}E=C\hat{A}D=\frac{\pi}{2}-\hat{C}$; $C\hat{B}D=\frac{\pi}{2}-\hat{C}$; $C\hat{D}B=\pi-\hat{A}$; $A\hat{B}D=\frac{\pi}{2}+(\hat{B}-\hat{C})$

$C\hat{D}E=C\hat{D}A=\hat{B}$; $A\hat{D}B=\hat{C}$; $B\hat{A}D=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$; $E\hat{C}D=B\hat{C}D=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$; $A\hat{C}D=\frac{\pi}{2}+(\hat{C}-\hat{B})$

2) Soit F le point d'intersection des droites (CH) et (AB).

Montrer que : $F\hat{C}B=H\hat{C}B=H\hat{C}E=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$



3) a) Montrer que $H\hat{C}D=\pi-2\hat{B}$

b) Déduire la mesure de l'angle $C\hat{H}D$ et la nature du triangle CHD.

4) a) En déduire que la droite (CE) est la médiatrice du segment $[HD]$

b) En déduire que E est le milieu de $[HD]$

5) Soit D' la symétrie de H par rapport à (BC)

En déduire que $D'=D$ et que D' appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Partie B

Le but est de calculer S', p' et r': l'aire, le demi périmètre et le rayon de cercle inscrit au triangle ABD'.

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) En utilisant la loi des sinus dans le triangle ABD' montrer que :

$AB=2Rsin(\hat{C})$, $BD'=2Rcos(\hat{B})$ et $AD'=2Rcos(\hat{B}-\hat{C})$

2) On suppose que $R=2\sqrt{2}$, $\hat{C}=\frac{\pi}{12}$, $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ et $sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

a) Montrer que $S'=2\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$ (Remarquer que $S'=\frac{1}{2}AD'\times AB\times sin(B\hat{A}D')$)

b) Montrer que $p'=2+\sqrt{2}+\sqrt{2(2-\sqrt{3})}$ (Remarquer que $p'=\frac{1}{2}(AB+AD'+BD')$) et déduire la valeur de r'.



Correction : https://drive.google.com/file/d/1JEZncuwk9BkWApv4bZ6UBCLE4Qe0hUve/view?usp=sharing

12

Fonctions numériques

HIYAB



1) Généralités

1-1 Fonction numérique d'une variable réelle

Activité 1 :

Pour une personne de taille x en cm, la relation qui nous donne sa masse idéale $f(x)$ en kg est donnée par :

$f(x)=x-100-\dfrac{x-150}{4}$

1) Montrer que $f(x)=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{125}{2}$ puis en déduire la nature de la relation (ou la fonction) qui lie x et $f(x)$.

2) Calculer la masse idéale dans les cas suivants : $x=158cm$; $x=164cm$; $x=182cm$

3) Déterminer la taille de la personne dont la masse idéale est $71kg$

4) Montrer algébriquement que l'équation $f(x)=-80,5$ n'a pas de solution dans l'ensemble $D=]0;300[$ puis donner une explication de ce résultat.

Définition 1 :

Une fonction f est une relation qui, à chaque nombre réel x d'un ensemble D, associe au plus, un nombre réel y noté $f(x)$.

- Le nombre $f(x)$ est appelé **l'image** de x par la fonction f.
- Le nombre x , s'il existe tel que $f(x)=y$, s'appelle **antécédent** de y par la fonction f.

Application 1 :

Soit f et g les deux fonctions numériques de la variable réelle x définies par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x-2}$ et $g(x)=x^2+3$

1) Calculer si possible l'image des nombres réels 1 ; 4 ; -4 ; 6 et 2 par la fonction f.

2) Déterminer s'ils existent les antécédents des nombres 3 ; 4 et 2 par la fonction g.

Remarques 1 :

- Une fonction f se note également par $f: x\mapsto f(x)$
- Pour déterminer les antécédents x d'un nombre b par la fonction f, on résout l'équation $f(x)=b$ d'inconnue x.

1-2 Ensemble de définition d'une fonction numérique

Définition 2 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x.

L'ensemble de définition de la fonction f, noté D ou D_f est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ est calculable dans $\mathbb{R}$.

Remarques 2 :

- Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction numérique, il faut se limiter aux nombres réels dont le dénominateur est différent de zéro et ce qui est à l'intérieur de la racine est positif...
- On dit qu'une fonction numérique f est définie sur I si I est une partie de D_f.
- L'ensemble de définition d'une fonction numérique f est appelé aussi le domaine de définition de f.

Propriété 1 : Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes ;

La fonction f	Ensemble de définition
$f=$ Polynôme	$D_f=\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,Q(x)\neq 0\}$
$f(x)=\sqrt{P(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,P(x)\geq 0\}$
$f(x)=\dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,Q(x)>0\}$

Rappel

Soit a un nombre réel, on a :

- $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq a\}=[a;+\infty[$;
- $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>a\}=]a;+\infty[$;
- $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\leq a\}=]-\infty;a]$;
- $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<a\}=]-\infty;a[$;
- $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq a\}=\mathbb{R}\setminus\{a\}=]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 1

Déterminons D_f l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=x^2-4x+3$; $f(x)=\dfrac{-x-6}{x+3}$; $f(x)=\sqrt{4x-2}$; $f(x)=\dfrac{-x-6}{\sqrt{7-x}}$

- Pour $f(x)=x^2-4x+3$ on a $D_f=\mathbb{R}$ car f est un polynôme.
- Pour $f(x)=\dfrac{-x-6}{x+3}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\,x+3\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/\,x\neq -3\}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$
- Pour $f(x)=\sqrt{4x-2}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\,4x-2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/\,x\geq\dfrac{1}{2}\}=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$
- Pour $f(x)=\dfrac{-x-6}{\sqrt{7-x}}$ on a $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\,7-x>0\}=\{x\in\mathbb{R}/\,x<7\}=\left]-\infty;7\right[$

Application 2 :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=\sqrt{x-1}$; $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-x-2}$; $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$; $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x^2+3}$; $f(x)=\sqrt{7-x}$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-1}$; $f(x)=\dfrac{3x+1}{x\sqrt{x+1}}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+3}$; $f(x)=tan(x)$

1-3 Egalité de deux fonctions

Définition 3 :

Soient f et g deux fonctions. D_f et D_g sont leurs ensembles de définition respectifs.

On dit que f et g sont **égales**, et on écrit $f=g$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $D_f=D_g$
- $f(x)=g(x)$ pour tout x de D_f



Exemple 2 :

On considère les deux fonctions f et g définies par : $f(x)=\sqrt{x^2}$ et $g(x)=|x|$

- On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$, donc $D_f=D_g$
- Pour tout x de D_f, on a : $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=g(x)$ alors $f=g$ et donc les deux fonctions f et g sont égales.

Application 3 :

Déterminer si les deux fonctions f et g sont égales dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ et $g(x)=x+1$

3) $f(x)=x+1$ et $g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$; 4) $f(x)=sin(x)$ et $g(x)=cos(x)\times\dfrac{sin(x)}{cos(x)}$

1-4 Représentation graphique d'une fonction numérique

Activité 2 :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=2x+1$

Construire le graphe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Définition 4 :

- Dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ **la courbe représentative** d'une fonction f, notée souvent $(\mathcal{C}_f)$, est l'ensemble des points $M(x;f(x))$ du plan où x parcourt D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
- Autrement dit : $M(x,y)\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow x\in D_f$ et $y=f(x)$

Remarque 3 :

L'équation $y=f(x)$ est appelée **l'équation de la courbe** $(\mathcal{C}_f)$.

Application 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les points appartenant à $(\mathcal{C}_f)$ parmi les points suivants : $O(0;0)$; $A(3;\dfrac{9}{4})$; $B(2;4)$; $C(-1;1)$

2) Fonction paire - Fonction impaire

2-1 Fonction paire

Activité 3 : On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=|x|-1$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que $f(-x)=f(x)$

3) Vérifier que $\begin{cases} f(x)=x-1 & si \quad x\geq 0 \\ f(x)=-x-1 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$

4) En déduire la nature de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, puis tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un axe de symétrie à déterminer.

Définition 5 : Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que D est **symétrique par rapport à zéro** si pour tout $x\in D$ on a $-x\in D$.

Exemple 3 :

Déterminer les parties symétriques par rapport à zéro parmi les parties suivantes :

$[-2;2]$; $[-2;1]$; $[-3;-2]\cup[2;4]$; $]2;9[$; $\mathbb{R}$; $\{-2;5;7;2;-7;-5:0\}$; $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$; $\mathbb{R}^*$; $[-3;-2]\cup[2;3]$; $]-1;1[$; $[0;+\infty[$; $\{-2;5;7;2;-7;0\}$

Remarques 4 :

- L'ensemble de définition de la fonction tangente : $x\mapsto tan(x)$ est $D_{tan}=\{\mathbb{R}\setminus\dfrac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$
- Pour tout $x\in D_{tan}$ on a $-x\in D_{tan}$ (D_{tan} est symétrique par rapport à zéro)
- Pour tout $x\in D_{tan}$ on a $\pi+x\in D_{tan}$

Définition 6 :

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.

On dit que f est une **fonction paire** si :

- D_f est symétrique par rapport à zéro ;
- Pour tout $x\in D_f$: $f(-x)=f(x)$



Exemple 4 :

Montrer que la fonction f définie par $f(x)=x^2$ est une fonction paire.

Application 5 :

Déterminer si f est une fonction paire dans les cas suivants :

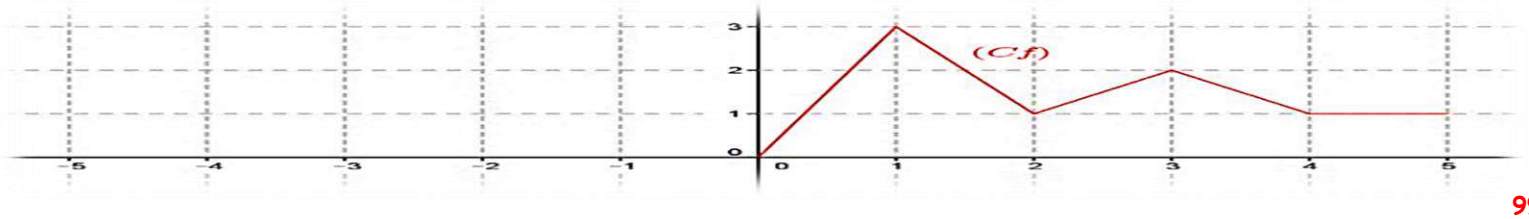
$f(x)=|x|-\dfrac{1}{x^2}$; $f(x)=\sqrt{x}+1$; $f(x)=cos(x)$; $f(x)=3x^2+2x-4$

Propriété 2 :

La courbe d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Application 6 :

Compléter la courbe suivant sachant que la fonction f est paire :



2-2 Fonction impaire

Activité 4 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2x$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Soit $x\in\mathbb{R}$, montrer que $f(-x)=-f(x)$

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ puis vérifier que $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par-rapport à l'origine du repère.

Définition 7 :

Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition.
On dit que f est une **fonction impaire** si :

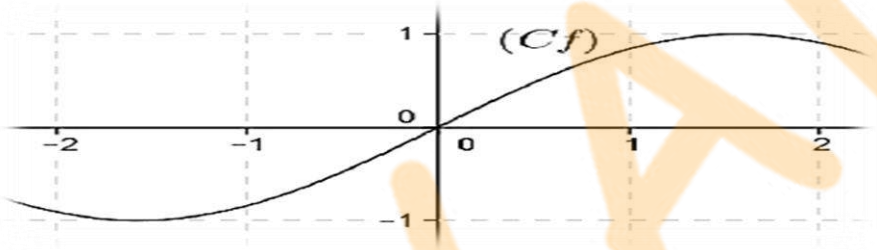
- D_f est symétrique par rapport à zéro ;
- Pour tout $x\in D_f$: $f(-x)=-f(x)$

Application 7 : Déterminer si f est une fonction impaire dans les cas suivants :

$f(x)=\dfrac{2}{x}$; $f(x)=x^2+x+1$; $f(x)=sin(x)$; $f(x)=tan(x)$

Propriété 3 :

La courbe d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

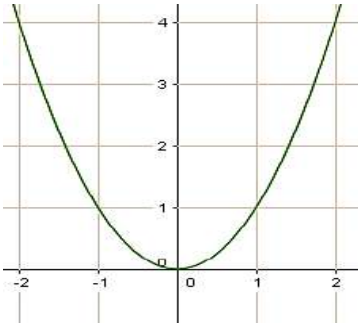


3) Variations d'une fonction numérique

3-1 Définitions

Activité 5 :

Soit f la fonction numérique représentée graphiquement dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-contre :



1) Déterminer puis comparer $f(-2)$ et $f(-1)$.

2) Comment les valeurs de $f(x)$ change lorsque les valeurs de x augmentes sur $[-2;0]$?

3) Déterminer puis comparer $f(2)$ et $f(1)$.

4) Comment les valeurs de $f(x)$ change lorsque les valeurs de x augmentes sur $[0;2]$?

Définition 8 :

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition. On dit que :

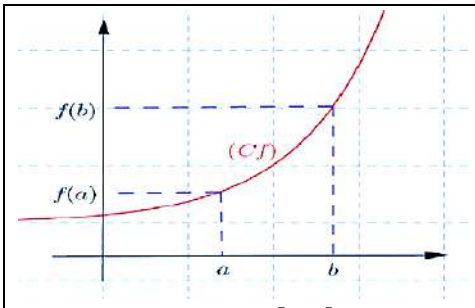
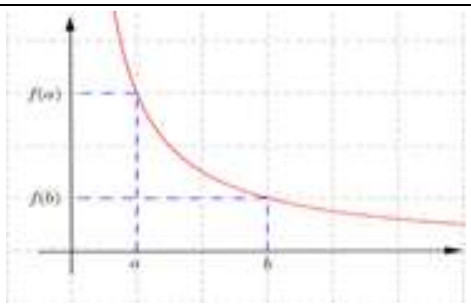
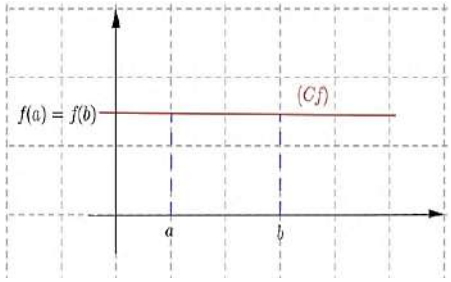
- f est **croissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)\leq f(y)$.
- f est **strictement croissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)<f(y)$.
- f est **décroissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)\geq f(y)$.
- f est **strictement décroissante** sur I si pour tous nombres x et y de I : si $x<y$, alors $f(x)>f(y)$.
- f est **constante** sur I si pour tous nombres x et y de I on a $f(x)=f(y)$.

Remarques 5 :

- Une fonction est dite monotone sur un intervalle I, si elle est croissante ou décroissante sur I.
- Une fonction est dite strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.
- En général on résume les variations d'une fonction dans un tableau appelé **tableau de variations** où on indique par une flèche « vers le haut » que la fonctionest croissante et par une flèche « vers le bas » que la fonction est décroissante.
- Dans l'activité précédente, on a f est décroissante sur l'intervalle $[-2;0]$et croissante sur l'intervalle $[0;2]$. Donc le tableau de variations de f est le suivant

x	-2		0		2
$f(x)$	4	↘	0	↗	4

Interprétations géométriques :

		
f est croissante sur $[a;b]$	f est décroissante sur $[a;b]$	f est constante sur $[a;b]$

Exemple 5 :

On considère les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x+4$ et $g(x)=x^2+1$

1) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

2) Etudier les variations de la fonction g sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$

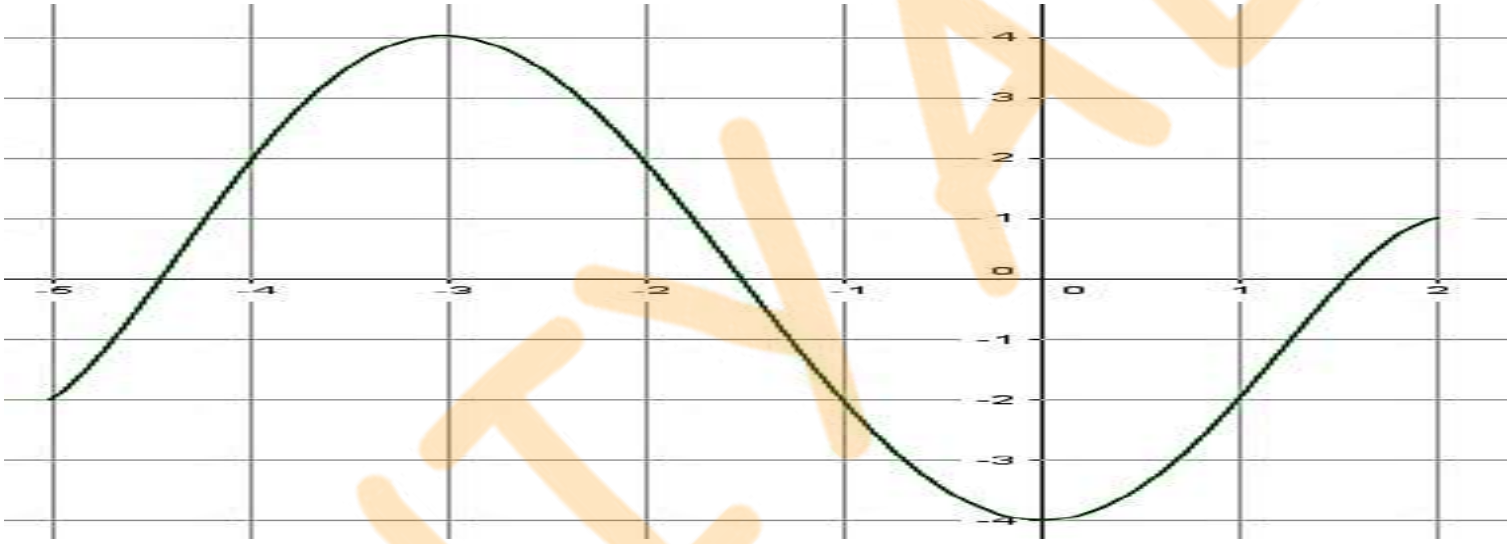
3) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$

4) Comparer sans calcul $g(-2)$ et $g(-3)$



Application 8 :

La courbe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthogonal :



1) Déterminer graphiquement les réels qui ont une image par la fonction f, puis déduire son ensemble de définition.

2) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

3-2 Taux de variation

Définition 9 :

Soient f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, x et y deux nombres distincts de D_f.

Le nombre $T=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est appelé **taux de variation** de f entre x et y.

Exemple 6 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-1$

Le taux de variation de f entre deux réels distincts x et y est $T=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{(3x-1)-(3y-1)}{x-y}=\dfrac{3x-3y}{x-y}=\dfrac{3(x-y)}{x-y}=3$

Propriété 4 :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. x et y sont deux éléments distincts de I.
T est le taux de variation de f entre x et y.

- Si $T\geq 0$ pour tous x et y de I, alors f est croissante sur I.
- Si $T>0$ pour tous x et y de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $T\leq 0$ pour tous x et y de I, alors f est décroissante sur I.
- Si $T<0$ pour tous x et y de I, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $T=0$ pour tous x et y de I, alors f est constante sur I.

Exemple 7 : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$

1) Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x)-f(y)=(x-y)(x+y-4)$

2) En déduire que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}$ est $T=x+y-4$

3) En utilisant le taux de variation, étudier les variations de f sur les intervalles $[2;+\infty[$ et $]-\infty;2]$

4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.



Application 9 : On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Soit x et y deux éléments de D_f. Montrer que $f(x)-f(y)=\dfrac{-(x-y)}{(x-1)(y-1)}$

3) En déduire que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de D_f est $T=\dfrac{-1}{(x-1)(y-1)}$

4) Etudier les variations de f sur les intervalles $]1;+\infty[$ et $]-\infty;1[$

5) Dresser le tableau de variations de f.

3-3 Variations et parité

Propriété 5 :

Soit f une fonction numérique telle que son domaine de définition D_f est symétrique par rapport à 0.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ inclus dans D_f et J le symétrique de I par rapport à 0 $(J=\{-x / \ x\in I\})$.

→ Dans le cas où f est paire, on a :

- Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur J.
- Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur J.

→ Dans le cas où f est impaire, on a :

- f à le même sens de variations sur I et J.

Exemple 8 :

1) Compléter le tableau suivant sachant que f est paire

x	-5		-2		0		2		5
$f(x)$			1				3		-1

2) Compléter le tableau suivant sachant que f est impaire

x	-5		-2		0		2		5
$f(x)$					0		-3		1

Remarques 6 :

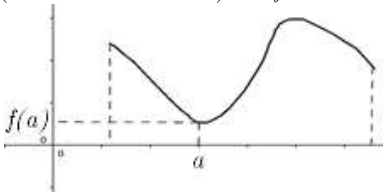
- Il suffit d'étudier les variations des fonctions paires et des fonctions impaires sur $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$
- L'ensemble $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ est appelé **l'ensemble d'étude** (des fonctions paires et des fonctions impaires)

4) Valeur minimale et valeur maximale d'une fonction numérique

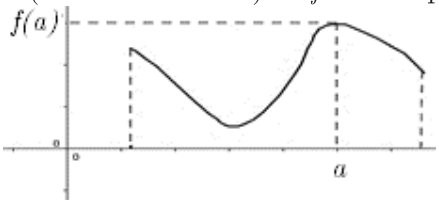
Définition 10 :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que $f(a)$ est **la valeur minimale** (ou le **minimum**) de f sur I si pour tout x de I on a : $f(x)\geq f(a)$.



- On dit que $f(a)$ est **la valeur maximale** (ou le **maximum**) de f sur I si pour tout x de I on a : $f(x)\leq f(a)$.



- On dit que $f(a)$ est un **extrémum** de f sur I si $f(a)$ est la valeur maximale ou la valeur minimale de f sur I.

Exemple 9 :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=-x^2+1$

Montrons que $f(0)$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

C'est-à-dire montrons que $f(x)\le f(0)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on a $f(x)-f(0)=(-x^2+1)-(0^2+1)=-x^2$ et on sait que $-x^2\le 0$ donc $f(x)-f(0)\le 0$ C.Q.F.D

Propriété 6 :

- M valeur maximale de f sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le M \text{ pour tout } x\in I \\ l'équation\ f(x)=M \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$
- m valeur minimale de f sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge m \text{ pour tout } x\in I \\ l'équation\ f(x)=m \text{ admet au moins une solution dans } I \end{cases}$

Application 10 :

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=x^2+6x+5$

1) a) Montrer que $f(x)\le -2$ pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$

b) Résoudre dans $\left]-\infty;0\right[$ l'équation $f(x)=-2$

c) En déduire que -2 est la valeur maximale de f sur $\left]-\infty;0\right[$

2) Montrer que -4 est la valeur minimale de g sur $\mathbb{R}$.

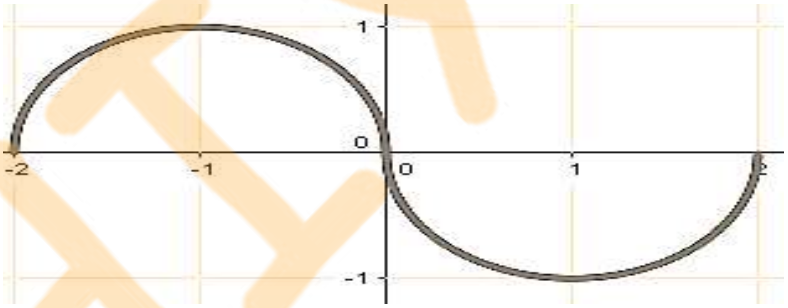


Remarques 7 :

- f admet une valeur maximale en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur maximale de f sur I .
- f admet une valeur minimale en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur minimale de f sur I .
- f admet un extrémum en a sur $I \Leftrightarrow f(a)$ valeur maximale ou valeur minimale de f sur I .

Application 11 :

Soit f la fonction numérique représenté sur un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ suivante :



1) Dresser le tableau de variations de f sur $[-2;2]$

2) La fonction f est-elle impaire ? justifier votre réponse.

3) Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $[-2;2]$

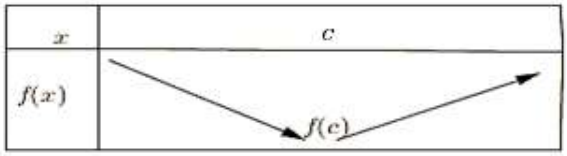
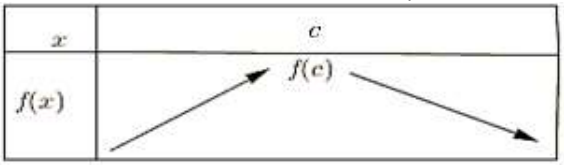
4) Déterminer trois intervalles dans lesquels la fonction f admet une valeur maximale locale en -1.

Remarque 8 :

- Les extremums de f sur $I=D_f$ sont appelés valeur maximale globale (ou absolue) et valeur minimale globale (ou absolue).
- Les extremums de f sur $I\ne D_f$ sont appelés valeur maximale locale et valeur minimale locale.

Propriété 7 : Extremums et variations

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle et c un élément de I

• Si le tableau de variations de f sur I s'écrit :  Alors $f(c)$ est la valeur minimale de f sur I	• Si le tableau de variations de f sur I s'écrit :  Alors $f(c)$ est la valeur maximale de f sur I

5) Etude de la fonction $x \mapsto ax^2$

Activité 6 :

Soient a un nombre réel non nul, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$.

1) Montrer que f est paire et déduire son ensemble d'étude D_E .

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}$ est $T = a(x+y)$

3) En déduire les variations de f sur D_E dans les cas $a>0$ et $a<0$

4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ dans les cas $a>0$ et $a<0$

5) En déduire le cas dont la fonction f admet une valeur minimale et le cas dont f admet une valeur maximale

Activité 7 :



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (utiliser l'activité précédente)

2) Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

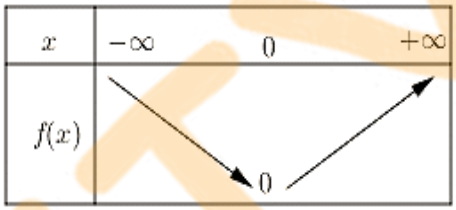
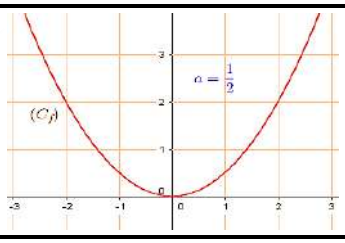
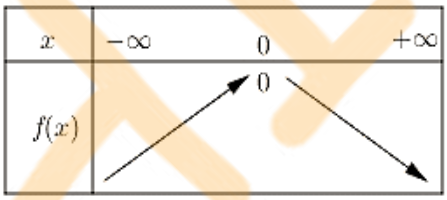
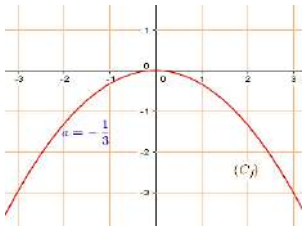
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$							

3) Représenter les points $M(x;f(x))$ du tableau précédent dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déduire l'allure de $(\mathcal{C}_f)$.

Définition 11 et propriété 8 :

Soit a un nombre réel non nul.

La courbe de la fonction $f : x \mapsto ax^2$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan est appelée **parabole** de **sommet** O et **d'axe de symétrie** la droite $x=0$ (l'axe des ordonnées).

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$
$a>0$		
$a<0$		

Exemple 10 :

Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé dans les cas suivants : 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$; 2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

6) Etude de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$

Activité 8 :

Soient a un nombre réel non nul, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{a}{x}$

1) Montrer que f est impaire et déduire son ensemble d'étude D_E .

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de $\mathbb{R}^*$ est $T = -\frac{a}{xy}$

3) En déduire les variations de f sur D_E dans les cas $a>0$ et $a<0$

4) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $a>0$ et $a<0$

Activité 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$

1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$ (utiliser l'activité précédente)

2) Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

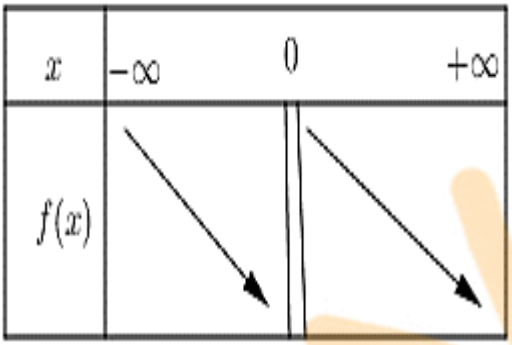
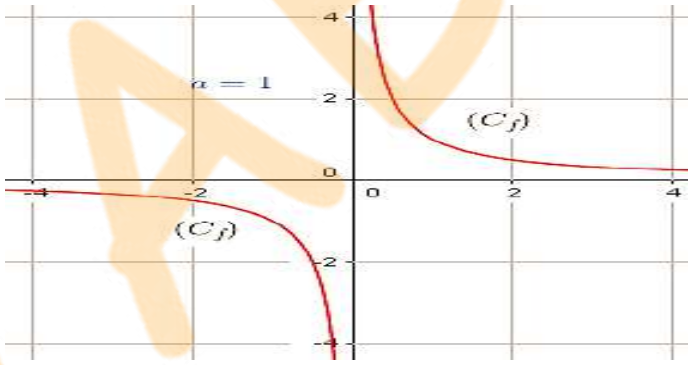
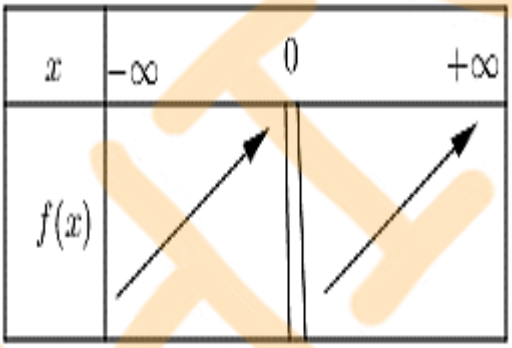
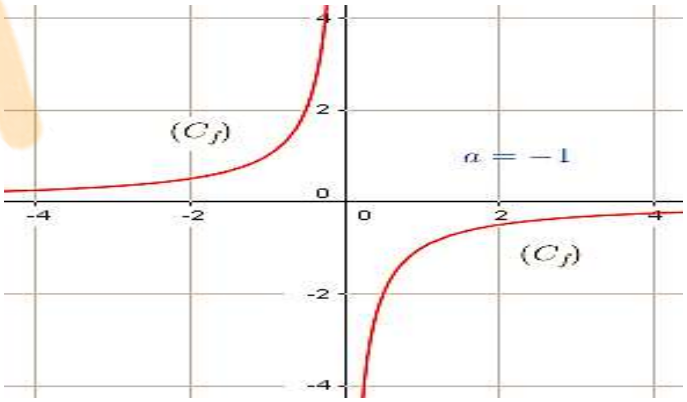
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$f(x)$							

3) Représenter les points $M(x;f(x))$ du tableau précédent dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déduire l'allure de $(\mathcal{C}_f)$.

Définition 12 et propriété 9 :

Soit a un nombre réel non nul.

La courbe de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{a}{x}$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan est appelée **hyperbole** de **centre** O et **d'asymptotes** les droites $x=0$ et $y=0$ (les axes du repère).

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$
$a>0$		
$a<0$		

Exemple 11 :

Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé dans les cas suivants : 1) $f(x)=\dfrac{3}{x}$; 2) $f(x)=-\dfrac{2}{x}$

7) Représentation graphique des fonctions $x\mapsto -f(x)$, $x\mapsto f(x)+a$ et $x\mapsto f(x+a)+b$

Soit f une fonction numérique et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

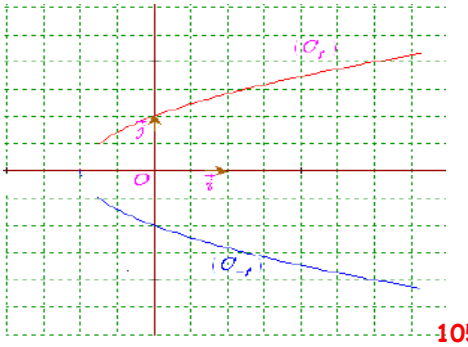
7-1 Représentation graphique de la fonction $-f: x\mapsto -f(x)$

Remarque 9 :

On a $M(x;f(x))\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow M'(x;-f(x))\in(\mathcal{C}_{-f})$

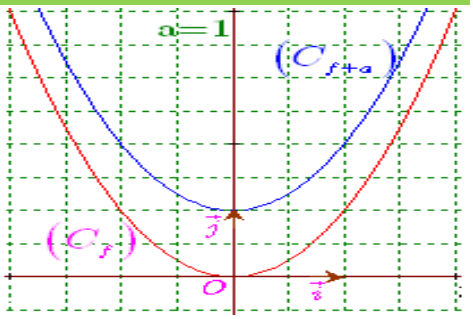
Donc $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{-f})$ sont symétriques par-rapport à l'axe des abscisses

Par conséquent, la courbe de la fonction $x\mapsto -f(x)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la symétrie axiale d'axe des abscisses.



7-2 Représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x)+a$

Remarque 10 :



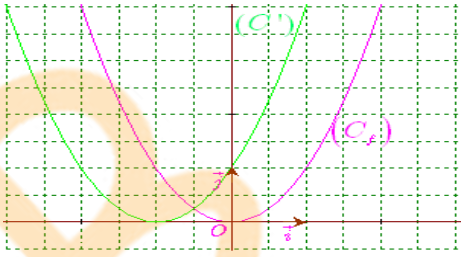
On a $M(x;f(x)) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow M'(x;f(x)+a) \in (\mathcal{C}_g)$

Donc $\overrightarrow{MM'}(0;a)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = 0\vec{i} + a\vec{j} = a\vec{j}$

Par conséquent, la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)+a$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v} = a\vec{j}$

7-3 Représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x+a)$

Remarque 11 :



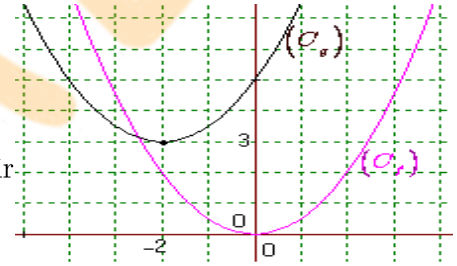
On a $M(x;f(x)) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow M'(x-a;f(x)) \in (\mathcal{C}_h)$

Donc $\overrightarrow{MM'}(-a;0)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = -a\vec{i} + 0\vec{j} = a\vec{i}$

Par conséquent, la courbe de la fonction $x \mapsto f(x+a)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v} = -a\vec{i}$

7-4 Représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x+a)+b$

Remarque 12 :



On a $M(x;f(x)) \in (\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow M'(x-a;f(x)+b) \in (\mathcal{C}_h)$

Donc $\overrightarrow{MM'}(-a;b)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = -a\vec{i} + b\vec{j}$

Par conséquent, la courbe de la fonction $g : x \mapsto f(x+a)+b$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x \mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v} = -a\vec{i} + b\vec{j}$

7-5 Applications

Application 12 :

On considère les fonctions f, g et h tels que $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$ et $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

1) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) a) Montrer que $g(x) = f(x+1)$ puis déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer.

b) Construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) a) Montrer que $h(x) = g(x)+1$ puis déduire que $(\mathcal{C}_h)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer.

b) Construire $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Application 13 :

On considère les fonctions f, g et h tels que $f(x) = \frac{3}{x}$, $f(x) = \frac{3}{x-1}$ et $h(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

1) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) Montrer que $g(x) = f(x-1)$ puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) Montrer que $h(x) = g(x)+2$ puis construire $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



Application 14 :

On considère les fonctions f et g tels que $f(x) = \frac{5}{x}$ et $h(x) = \frac{-3x+2}{x+1}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ puis construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2) Compléter par le nombre convenable l'égalité suivant $-3x+2 = -3(x+1)+....$ puis déduire que $g(x) = f(x+1)-3$

3) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Les fonctions de références : $x \mapsto ax^2+bx+c$, $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x \mapsto cos(x)$ et $x \mapsto sin(x)$

8-1 Etude de la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ tel que $a \neq 0$

Activité 10 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ tel que $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que le taux de variation de la fonction f entre deux éléments distincts x et y de D_f est $T=a\left(x+y+\dfrac{b}{a}\right)$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ dans les cas $a>0$ et $a<0$

4) Ecrire $f(x)$ sous la forme canonique et déduire que $f(-\dfrac{b}{2a})=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

5) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $a>0$ et $a<0$ puis déduire que f admet un extremum à déterminer.

6) On considère la fonction g définie par $g(x)=ax^2$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_g)$

b) Vérifier que $f(x)=g(x+\dfrac{b}{2a})+f(-\dfrac{b}{2a})$

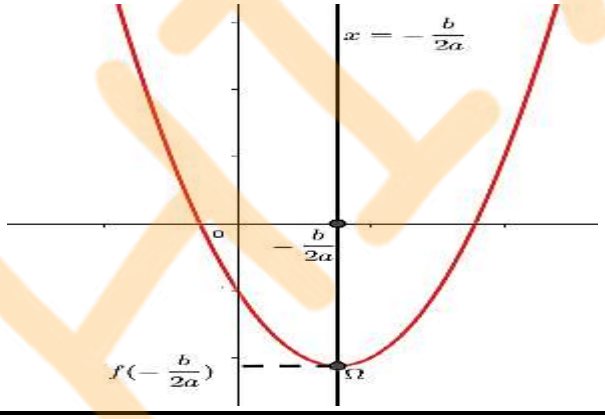
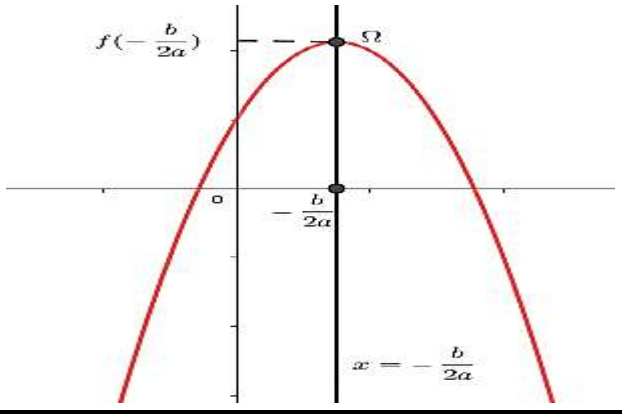
c) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer. (Utiliser la remarque 12)

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Propriété 10 :

Soit $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

La courbe de la fonction $f: x \mapsto ax^2+bx+c$ dans un repère du plan est une parabole de sommet $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\dfrac{b}{2a}$

	$a>0$	$a<0$
La courbe $(\mathcal{C}_f)$		
Tableau de variations de f	x : $+\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $-\infty$ $f(x)$: $\searrow$ $f(-\frac{b}{2a})$ $\nearrow$	x : $+\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $-\infty$ $f(x)$: $\nearrow$ $f(-\frac{b}{2a})$ $\searrow$
Extremums	$f(-\dfrac{b}{2a})$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$ ▯	$f(-\dfrac{b}{2a})$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$ ▯

Remarque 13 :

$(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport à la droite (Δ): $x=-\dfrac{b}{2a}$

Donc il suffit de tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$ et déduire $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ en utilisant la symétrie axiale d'axe (Δ)

Exemple 12 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+4x+1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$ puis déduire que f est ni paire, ni impaire.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Forme canonique

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Propriété 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ tel que $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$
Si $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ est la forme canonique de $f(x)$ alors la courbe de la fonction f est une parabole de sommet $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Exemple 13 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=2x^2-5x+3$

On a la forme canonique de $f(x)$ est $f(x)=2(x-\frac{5}{2\times 2})^2+\frac{(-5)^2-4\times 2\times 3}{4\times 2}$, c'est-à-dire $f(x)=2(x-\frac{5}{4})^2+\frac{49}{8}$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de sommet $\Omega\left(\frac{5}{4};\frac{49}{8}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\frac{5}{4}$

Application 15 :

On considère les fonction f et g définie par $f(x)=-3x^2+12x+4$ et $g(x)=x^2+4x+3$

1) Donner la forme canonique de f et de g
2) En déduire les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$

8-2 Etude de la fonction $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d\in\mathbb{R},\ c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

Activité 11 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d\in\mathbb{R},\ c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que le taux de variation de f entre deux éléments distincts x et y de D_f est :

$T=\frac{1}{c^2}\times\frac{\Delta}{(x+\frac{d}{c})(y+\frac{d}{c})}$ tel que $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

3) En déduire les variations de f sur les intervalles $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ dans les cas $\Delta>0$ et $\Delta<0$

5) Dresser le tableau de variations de f dans les cas $\Delta>0$ et $\Delta<0$

6) On considère la fonction g définie par $g(x)=\frac{-\frac{1}{c^2}\times(ad-bc)}{x}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_g)$

b) Vérifier que $f(x)=g(x+\frac{d}{c})+\frac{a}{c}$

c) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer. (Utiliser la remarque 12)

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

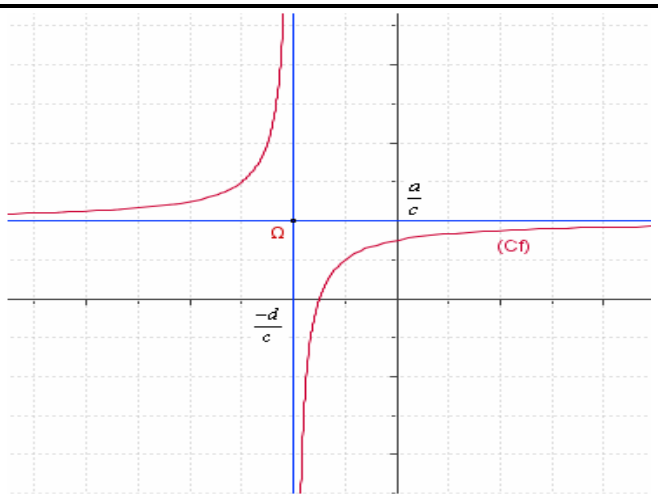
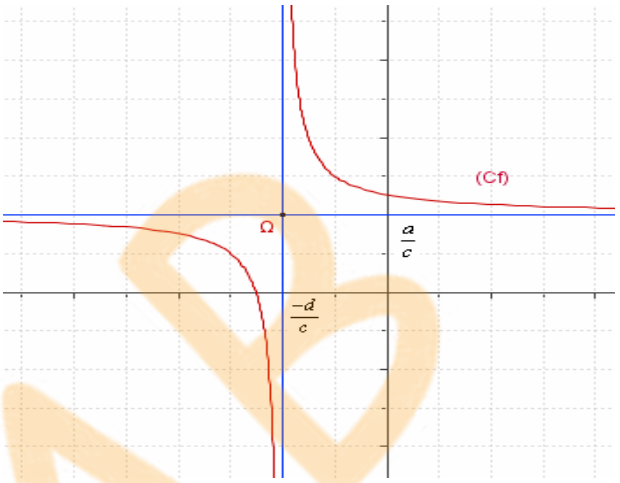
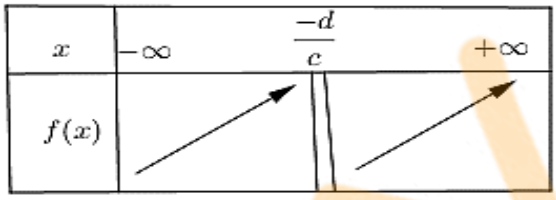
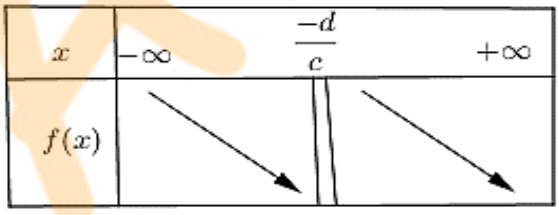
e) On pose $\alpha=\frac{d}{c}$, $\beta=\frac{a}{c}$ et $\lambda=-\frac{1}{c^2}\times(ad-bc)$. Montrer que $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x+\alpha}$ (Utiliser la question 6) b))

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Définition 13 et propriété 12 :

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$ est appelée **fonction homographique**.
- La courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$ dans un repère du plan est

une **hyperbole** de **centre** $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et **d'asymptotes** les droites $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
La courbe $(\mathcal{C}_f)$		
Tableau de variations de f		

Remarque 14 :

$(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

Exemple 14 :



On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Définition 14 et propriété 13 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$

Il existe des nombres réels α, β et λ tel que $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$

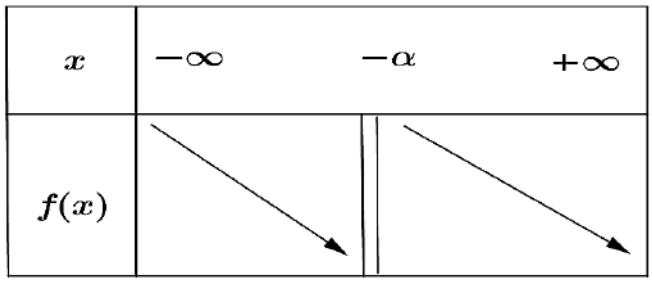
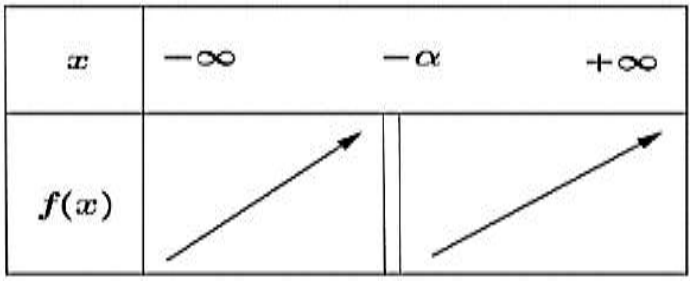
Cette formule est appelée **la formule réduite** de $f(x)$.

Propriété 14 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tel que $a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$

Si $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ est la forme réduite de $f(x)$ alors :

- La courbe de la fonction f est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites $x=-\alpha$ et $y=\beta$
- Tableau de variations de f :

$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
	

Exemple 15 :

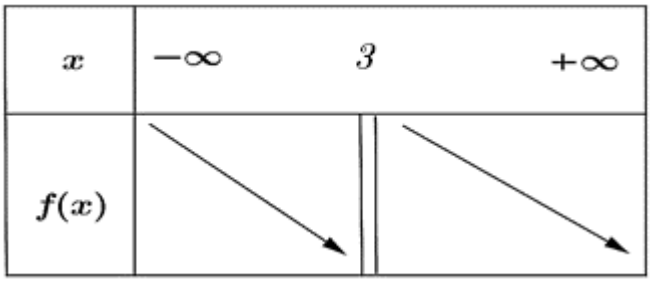
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

- On a la forme réduite de $f(x)$ est $f(x)=\dfrac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}$

Donc $(\mathcal{C}_f)$ est une hyperbole de centre $\Omega(3;2)$ et d'asymptotes les droites $x=3$ et $y=2$

- Tableau de variations de f :

Puisque $7>0$ alors :





Application 16 :

On considère les fonction f et g définie par $f(x)=\dfrac{4x+8}{x+6}$ et $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+3}$

1) Donner la forme réduite de f et de g

2) En déduire les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$

3) Dresser les tableaux de variations de f et de g

8-3 Fonction périodique

Définition 15 :

Soit T un nombre réel strictement positif.

On dit que f est **périodique** de période T si pour tout $x\in D_f$ on a : $\begin{cases}(x+T)\in D_f\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$

Exemple 16 :

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période : $T=2\pi$ car pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ cos(x+2\pi)=cos(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ sin(x+2\pi)=sin(x)\end{cases}$

- La fonction tangente est périodique de période : $T=\pi$ car pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ on a : $\begin{cases}(x+\pi)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\\ tan(x+\pi)=tan(x)\end{cases}$

Application 17 :

Montrer que T est une période de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=sin(2x)$ et $T=\pi$

2) $f(x)=cos(\pi x)$ et $T=2$

3) $f(x)=\dfrac{1}{1+sin^2(x)}$ et $T=\pi$

Propriété 15 :

Soit f une fonction périodique de période T et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

- Pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$, le nombre kT est aussi une période de la fonction f.
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est invariante par toute translation de vecteur $kT\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- Ainsi pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de de longueur T. (Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0;T]$ ou $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$).

8-4 Etude de la fonction $x\mapsto cos(x)$

Définition 16 :

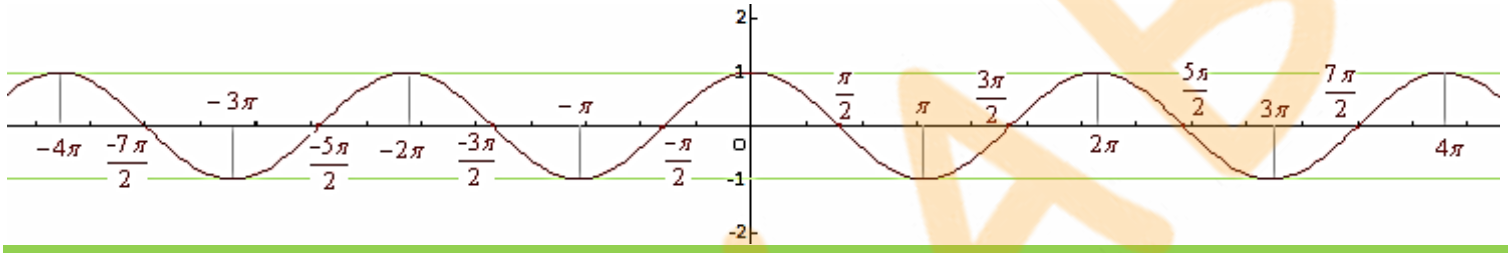
La fonction cosinus est la fonction qui, à chaque nombre réel x associe son cosinus : $cos(x)$ on écrit $x\mapsto cos(x)$

Propriété 16 :

La fonction $x\mapsto cos(x)$ est paire et périodique de période 2π.

Remarque 15 : La courbe de la fonction $x\mapsto cos(x)$ sur IR

Il suffit de représenter la courbe de la fonction $x\mapsto cos(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et compléter par translation :



8-5 Etude de la fonction $x\mapsto sin(x)$

Définition 17 :

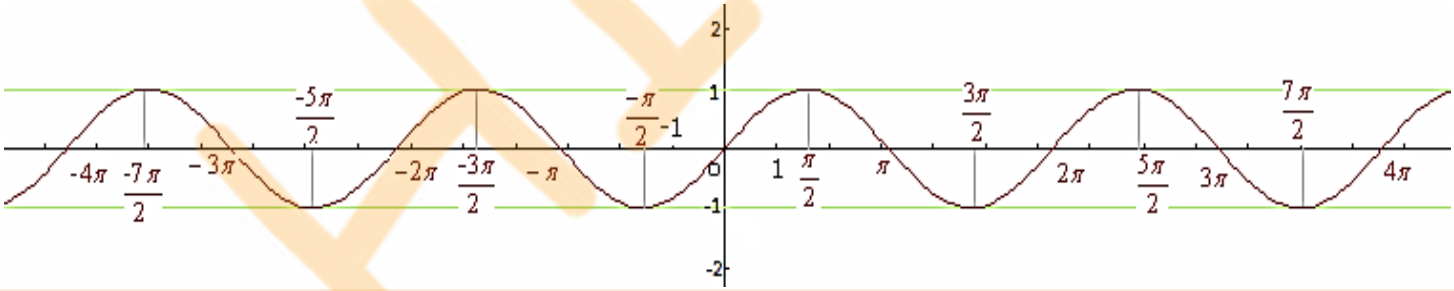
La fonction sinus est la fonction qui, à chaque nombre réel x associe son sinus : $sin(x)$ on écrit $x\mapsto sin(x)$

Propriété 17 :

La fonction $x\mapsto sin(x)$ est impaire et périodique de période 2π.

Remarque 16 : La courbe de la fonction $x\mapsto sin(x)$ sur IR

Il suffit de représenter la courbe de la fonction $x\mapsto sin(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et compléter par translation :

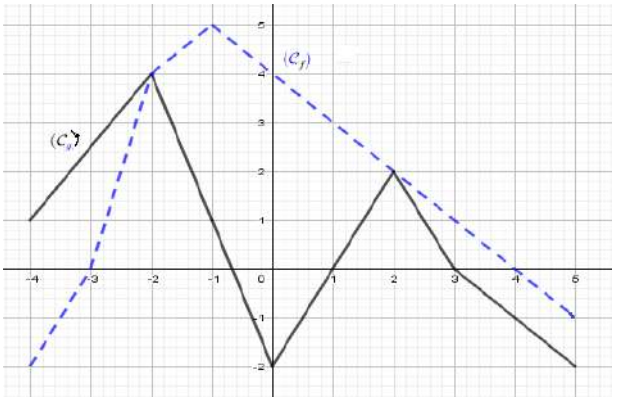


9) Résolution graphique des équations et inéquations

Activité 12 :

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ désignes les courbes de deux fonctions f et g sur l'intervalle $[-4;5]$

1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$
2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=4$
3) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 0$ et $f(x)\leq 0$
4) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 4$ et $f(x)\leq 4$
5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$
6) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq g(x)$ et $f(x)\leq g(x)$



Propriétés 18 :

Soient f et g deux fonctions numériques, $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs courbes respectives dans un repère et b un nombre réel.

- Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite d'équation $y = m$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq m$ (resp. $f(x)\leq m$) sont les l'intervalles dont $(\mathcal{C}_f)$ est situés au-dessus (resp. au-dessous) de la droite d'équation $y = m$.
- Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ (resp. $f(x)\leq g(x)$) sont les l'intervalles dont $(\mathcal{C}_f)$ est situés au-dessus (resp. au-dessous) de $(\mathcal{C}_g)$.

Application 18 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Dresser dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions f, g et h définies par :

$f(x)=x^2$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et $h(x)=x$

2) Résoudre graphiquement puis algébriquement les équations $f(x)=g(x)$, $f(x)=h(x)$ et $g(x)=h(x)$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>g(x)$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2\leq 1$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation $\dfrac{1}{x}-x\leq 0$

Application 19 :

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ des fonctions f et g définies par :

$f(x)=x^2-2x-3$ et $g(x)=\dfrac{-x-7}{x+1}$

2) Dresser dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

3) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $f(x)=0$

4) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 0$ et $f(x)\leq 0$

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=5$

6) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq 5$ et $f(x)\leq 5$

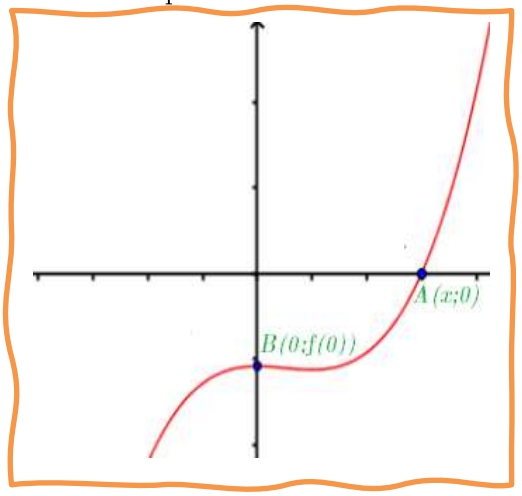
7) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

8) Résoudre graphiquement les inéquations $f(x)\geq g(x)$ et $f(x)\leq g(x)$



Remarque 17 : Les points d'intersection avec les axes du repère :

- Les points de la forme $M(x;0)$ tel que x est une solution de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
- Le point $B(0;f(0))$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des ordonnées.



Application 20 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-8x+7$

Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

Complément de cours : Etude des fonctions $x\mapsto f(|x|)$ et $x\mapsto |f(x)|$

Résumé 12 : Fonctions numériques

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit x et y deux éléments distincts de D_f, on pose $T(x;y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ (Le taux de variation de f entre x et y).

I un intervalle de D_f. On note "pour tout " par " prt "

Ensemble de définition d'une fonction

- $D_f=\{$les réels x pour lesquels on peut calculer $f(x)\}$
- Si f est un polynôme alors $D_f=\mathbb{R}$
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ Q(x)\neq 0\}$
- Si $f(x)=\sqrt{P(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ P(x)\geq 0\}$

Parité d'une fonction

Définition

- f est paire $\Leftrightarrow\begin{cases}D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0\\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(-x)=f(x)\end{cases}$
- f est impaire $\Leftrightarrow\begin{cases}D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0\\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(-x)=-f(x)\end{cases}$

Propriété

- f est paire $\Leftrightarrow\begin{cases}(\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport}\\ \text{à l'axe des ordonnés}\end{cases}$
- f est impaire $\Leftrightarrow\begin{cases}(\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport}\\ \text{à l'origine du repère}\end{cases}$

Variations d'une fonction

Définition :

- f est croissante sur $I\Leftrightarrow[(\text{prt } x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)\geq f(y)]$
- f est décroissante sur $I\Leftrightarrow[(\text{prt } x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)\leq f(y)]$
- f est constante sur $I\Leftrightarrow[(\text{prt } x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)=f(y)]$

Propriété :

- f est croissante sur $I\Leftrightarrow(\text{prt } x,y\in I):\ T(x;y)\geq 0$
- f est décroissante sur $I\Leftrightarrow(\text{prt } x,y\in I):\ T(x;y)\leq 0$
- f est constante sur $I\Leftrightarrow(\text{prt } x,y\in I):\ T(x;y)=0$

Variations et parité :

Soit I et J deux intervalles symétriques par rapport à 0 de D_f

- Si f est paire, alors :

f est croissante sur $I\Leftrightarrow f$ est décroissante sur J

f est décroissante sur $I\Leftrightarrow f$ est croissante sur J

- Si f est impaire, alors :

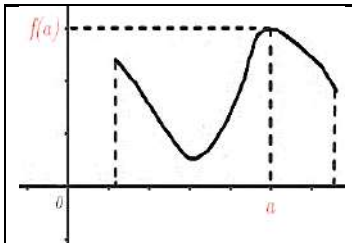
f est croissante sur $I\Leftrightarrow f$ est croissante sur J

f est décroissante sur $I\Leftrightarrow f$ est décroissante sur J

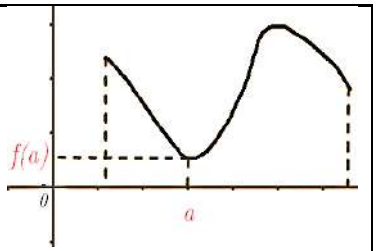
Valeur maximale - Valeur minimale

Définition

- $f(a)$ valeur maximale de f sur $I\Leftrightarrow(\text{prt } x\in I)\ f(x)\leq f(a)$
- $f(a)$ valeur minimale de f sur $I\Leftrightarrow(\text{prt } x\in I)\ f(x)\geq f(a)$



$f(a)$ valeur maximale



$f(a)$ valeur minimale

- $f(a)$ est un extremum de $f\Leftrightarrow\begin{cases}f(a)\ valeur\ maximale\ de\ f\\ \quad ou\\ f(a)\ valeur\ minimale\ de\ f\end{cases}$

Propriété

- M valeur maximale de f sur I

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\leq M\ pour\ tout\ x\in I\\ l'équation\ f(x)=M\ admet\ au\ moins\ une\ solution\ dans\ I\end{cases}$

- m valeur minimale de f sur I

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq m\ pour\ tout\ x\in I\\ l'équation\ f(x)=m\ admet\ au\ moins\ une\ solution\ dans\ I\end{cases}$

Egalité de deux fonctions

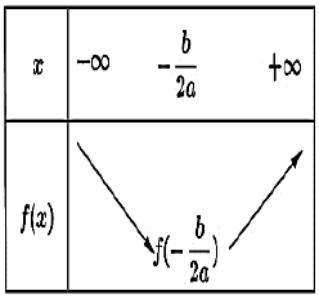
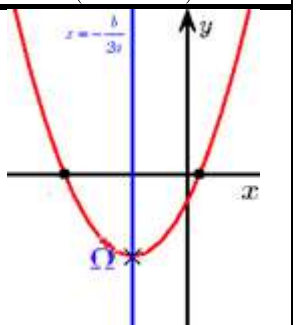
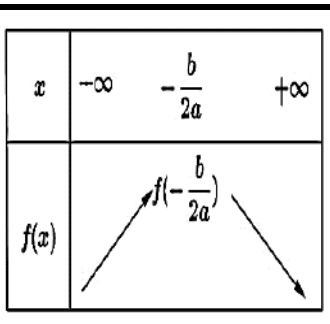
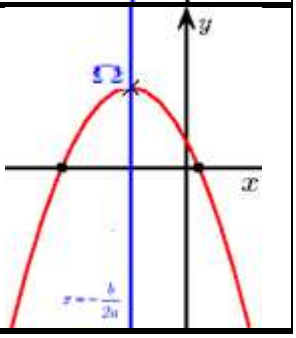
- $f=g\Leftrightarrow\begin{cases}D_f=D_g\\ (\text{prt } x\in D_f)\quad f(x)=g(x)\end{cases}$

Courbe d'une fonction

- $(\mathcal{C}_f)=\{M(x;f(x))/\ x\in D_f\}$
- $M(x;y)\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow x\in D_f$ et $f(x)=y$

Etude de la fonction f tel que $f(x)=ax^2+bx+c$

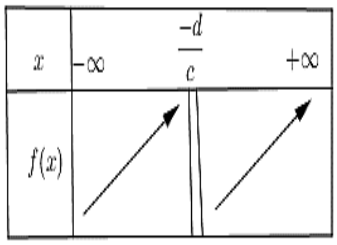
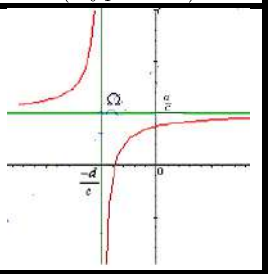
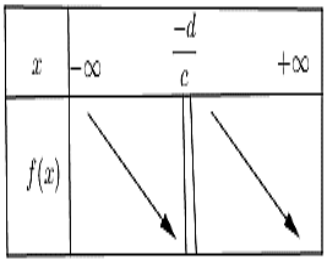
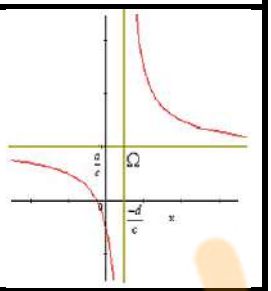
- f est appelé : fonction polynomiale de deuxième degré.
- $D_f=\mathbb{R}$
- $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de **sommet** $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ et d'**axe de symétrie** la droite $x=-\dfrac{b}{2a}$

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Parabole)
$a>0$		
$a<0$		

Si $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ est la forme canonique de $f(x)=ax^2+bx+c$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de sommet $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-\alpha$

Etude de la fonction g tel que $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

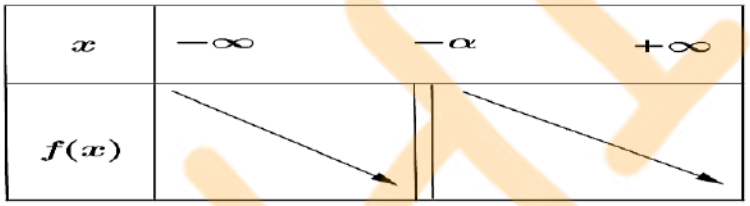
- g est appelé : fonction homographique
- $D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$
- $(\mathcal{C}_g)$ est une hyperbole de **centre** $\Omega\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'**asymptotes** les droites $x=\dfrac{-d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

	Tableau de variations de g	La courbe $(\mathcal{C}_g)$ (Hyperbole)
$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}>0$		
$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}<0$		

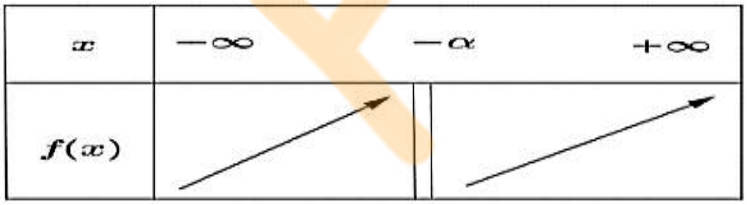
Si $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x+\alpha}$ est la forme réduite de $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ alors :

- $(\mathcal{C}_f)$ est une hyperbole de centre $\Omega(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites $x=-\alpha$ et $y=\beta$
- Tableau de variations de f :

Si $\lambda>0$



Si $\lambda<0$



Résolution graphique des équations et inéquations

L'équation	$f(x)=m$	$f(x)=g(x)$
Les abscisses des points d'intersection de	$(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ avec $(\mathcal{C}_g)$

L'inéquation	$f(x)>m$	$f(x)>g(x)$
Sont les intervalles dont	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$

Remarques :

- Une fonction f se note également par $f:x\mapsto f(x)$
- Pour déterminer les antécédents x d'un nombre b par la fonction f, on résout l'équation $f(x)=b$
- Pour déterminer D_f, il faut se limiter aux nombres réels dont le dénominateur est différent de zéro et ce qui est à l'intérieur de la racine est positif...
- $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ est l'ensemble d'étude des fonctions paires et des fonctions impaires.
- Une fonction est dite monotone sur un intervalle I, si elle est croissante ou décroissante sur I.
- Une fonction est dite strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Intersection avec les axes du repère

- Les points de la forme $M(x;0)$ tel que x est une solution de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
- Le point $B(0;f(0))$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des ordonnées.

Fonction périodique

Définition : Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases}f \text{ est périodique}\\ \text{de période } T\end{cases}\Leftrightarrow(\text{prt } x\in D_f):\begin{cases}(x+T)\in D_f\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$$

Exemples classiques :

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période : $T=2\pi$ car : $(\text{prt } x\in\mathbb{R}):\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ cos(x+2\pi)=cos(x)\end{cases}$

et $(\text{prt } x\in\mathbb{R}):\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ sin(x+2\pi)=sin(x)\end{cases}$

- La fonction tangente est périodique de période : $T=\pi$

car : $(\text{prt } x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}):\begin{cases}(x+\pi)\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\\ tan(x+\pi)=tan(x)\end{cases}$

Les fonctions $x\mapsto -f(x)$, $x\mapsto f(x)+a$ et $x\mapsto f(x+a)+b$

- La courbe de la fonction $x\mapsto -f(x)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la symétrie axiale d'axe des abscisses.
- La courbe de la fonction $x\mapsto f(x)+a$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=a\vec{j}$
- La courbe de la fonction $x\mapsto f(x+a)$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=-a\vec{i}$
- La courbe de la fonction $g:x\mapsto f(x+a)+b$ peut être dessiner à partir de la courbe de la fonction $x\mapsto f(x)$ en utilisant la translation de vecteur $\vec{v}=-a\vec{i}+b\vec{j}$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : TCSF

Série 12
Fonctions numériques

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$f_1(x)=x^3-3x+1$; $f_2(x)=2x-\sqrt{x}$;

$f_3(x)=x^2-3x+\frac{2}{x}$; $f_4(x)=\frac{2x}{x-5}$;

$f_5(x)=x^2-\sqrt{3x+4}$; $f_6(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$;

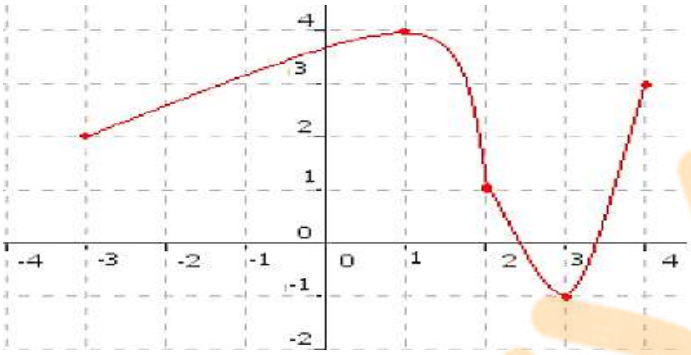
$f_7(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$; $f_8(x)=\frac{x^2+5}{x^2-1}$;

$f_9(x)=\frac{x+2}{\sqrt{3-x}}$; $f_{10}(x)=\frac{5x^3}{x^2-x+1}$;

$f_{11}(x)=\frac{|x|-x}{x^2+2x-3}$; $f_{12}(x)=\frac{x^3}{|x|-5}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[-3;4]$ par sa courbe :



1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de f

3) En déduire que $-1\le f(x)\le 4$ pour tout $x\in D_f$

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Justifier que f est ni paire ni impaire.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie par son tableau de variations sur $[-1;4]$:

x	-1		0		3		4
$f(x)$	-2	↗	5	↘	-3	↗	1

1) Déterminer les extrémums de f sur $[-1;4]$

2) Comparer $f(1)$ et $f(2)$

3) Sachant que f est paire dresser sa table de variations sur $[-4;4]$

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=-4x^2+4x+5$

1) Montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$

2) En déduire que $f(x)\le 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et déduire que 6 est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est paire.

2) En déduire $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$ l'ensemble d'étude de f.

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_E, on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\frac{x+y}{(x^2-1)(y^2-1)}$

4) Etudier les variations de f sur $[0;1[$ et $]1;+\infty[$

5) En déduire les variations de f sur $]-1;0]$ et $]-\infty;-1[$

6) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+4x+1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{-x+2}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 8 : (Exercice 3 de DL5)

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\left(x+\frac{4}{x}\right)$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est impaire.

2) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f, on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\left(1-\frac{4}{xy}\right)$

3) a) Etudier les variations de f sur $[2;+\infty[$ et sur $]0;2]$

b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;-2]$ et sur $[-2;0[$

4) En déduire que f admet une valeur minimale sur $]0;+\infty[$

5) On considère un rectangle d'aire 4 et de longueur d'une de ses dimensions est t

a) Montrer que le périmètre de ce rectangle est $2\left(t+\frac{4}{t}\right)$

b) En déduire la valeur minimale du périmètre de ce rectangle.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x-5}{2-x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Comment appelle-t-on la fonction f ? Déterminer D_f

2) Dresser le tableau de variations f de sur D_f

3) Déterminer les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$

4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1nbUtCeMmYLnn2NYfE6JJNZwC4L1Fl_8e/view?usp=sharing

Exercice 10 :

On considère les fonctions f et g tels que :

$f(x)=\frac{1}{x}$ et $h(x)=\frac{2x+3}{x+1}$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ puis construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Compléter par le nombre convenable l'égalité suivant $2x+1=2(x+1)+....$ puis déduire que $g(x)=f(x+1)+2$

3) En déduire que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation d'un vecteur à déterminer puis construire $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=-x^2+2x$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Vérifier que $f(x)=-(x-1)^2+1$ pour tout $x\in D_f$

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f on a : $T=2-x-y$

4) En utilisant le taux de variations étudier les variations de f sur $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$

5) Dresser le tableau de variations de f.

6) En déduire les extrémums de f

7) On considère la fonction g définie par : $g(x)=f(|x|)$

a) Montrer que g est paire.

b) Montrer que $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

c) En déduire le tableau de variations de g.

Exercice 12 :

A) On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+2x-3$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f, on a : $T=x+y+2$

4) Etudier les variations de f sur $[-1;+\infty[$ et $]-\infty;-1]$

5) Dresser le tableau de variations de f et déduire les extrémums de f

6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ puis le construire.

B) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\frac{4x}{|x|+1}$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g.

2) Montrer que g est impaire.

3) Montrer que $g(x)=4-\frac{4}{x+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

4) En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}^+$

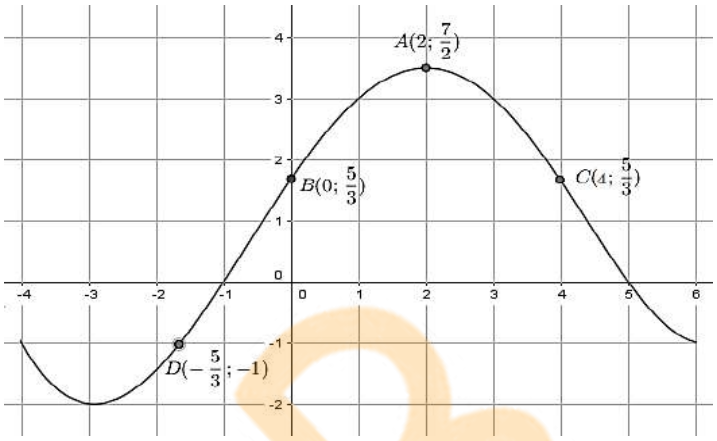
5) Dresser le tableau de variations de g sur D_g

6) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $(x^2+2x-3)(|x|+1)=4x$

Exercice 13 : (Exercice 1 de DL5)

Le graphe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



1) Vérifier que f est ni paire ni impaire.

2) Déterminer l'ensemble de définition de f.

3) Déterminer $f(-3)$, $f(3)$, $f(0)$ et $f(-1)$

4) Déterminer s'ils existent les antécédents des nombres : 3 ; $\frac{5}{3}$ et -3 par la fonction f

5) Déterminer la valeur maximale et minimale de f.

6) Dresser le tableau de variations de f.

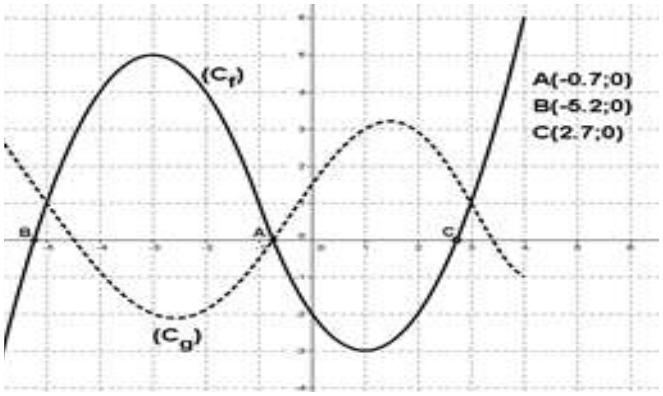
7) Résoudre graphiquement les équations : $f(x)=0$, $f(x)=3$ et $f(x)=-1$

8) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, $f(x)>3$ et $f(x)\leq -1$

9) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions g et h définies par : $h(x)=\frac{x}{f(x)}$ et $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$

Exercice 14 :

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ **et** $(\mathcal{C}_g)$ désignes les courbes de deux fonctions f et g sur l'intervalle $[-6;4]$



1) Déterminer $f(4)$, $f(1)$, $f(-1)$, $g(1)$ et $g(-3)$

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Résoudre les graphiquement l'équation : $f(x)=g(x)$

4) Résoudre les graphiquement les inéquations :

a) $f(x)\leq 0$ sur $[-4;2]$

b) $f(x)\geq g(x)$ sur $[-6;-2]$

5) Déterminer les extrémums de f sur $[-5;3]$

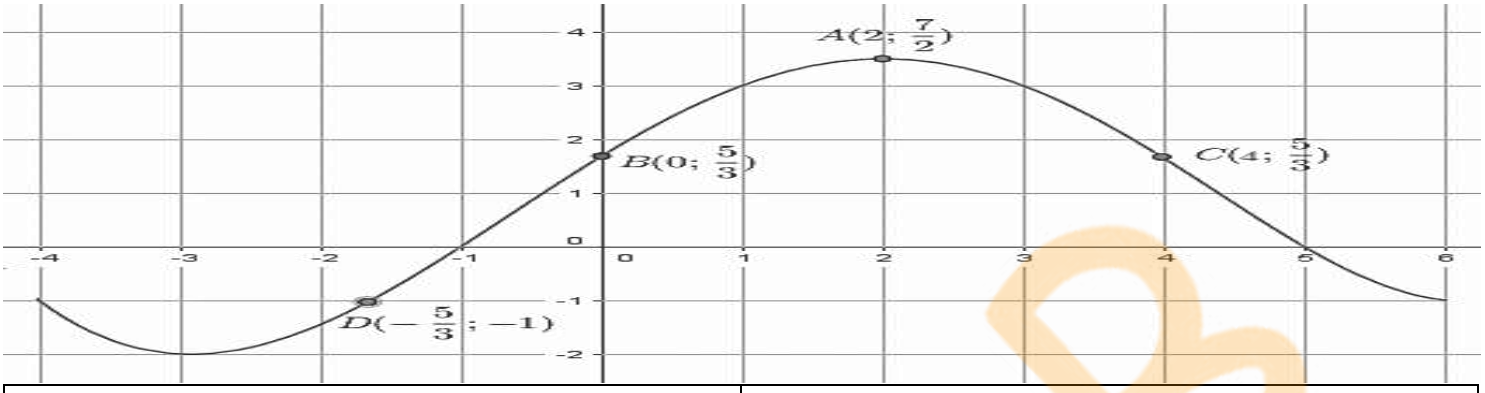
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL5

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

Le graphe ci-dessous représente la courbe d'une fonction numérique f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$



1) Vérifier que f est ni paire ni impaire.
2) Déterminer l'ensemble de définition de f.
3) Déterminer $f(-3)$, $f(3)$, $f(0)$ et $f(-1)$
4) Déterminer s'ils existent les antécédents des nombres :
3 ; $\frac{5}{3}$ et -3 par la fonction f
5) Déterminer la valeur maximale et minimale de f.
6) Dresser le tableau de variations de f.
7) Résoudre graphiquement les équations :
$f(x)=0$, $f(x)=3$ et $f(x)=-1$
8) Résoudre graphiquement les inéquations :
$f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, $f(x)>3$ et $f(x)\leq -1$
9) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions g et h définies par : $h(x)=\frac{x}{f(x)}$ et $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$

Exercice 2

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=\frac{x}{x-2}$ et $g(x)=x^2-2x$

1) Déterminer D_f et D_g
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$
3) Dresser les tableaux de variations de f et de g
4) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont concourantes au points $O(0;0)$, $A(1;-1)$ et $B(3;3)$
5) Montrer par deux méthodes que -1 est la valeur minimale de g sur D_g
6) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
7) Résoudre graphiquement l'équation : $g(x)=3$
8) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq 0$
9) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\frac{x}{x-2}-x(x-2)\geq 0$
10) Résoudre graphiquement l'inéquation : $g(x)\leq 2x-3$



Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\left(x+\frac{4}{x}\right)$

1) Déterminer D_f et vérifier que f est impaire.
2) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f, on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=2\left(1-\frac{4}{xy}\right)$
3) a) Etudier les variations de f sur $[2;+\infty[$ et sur $]0;2]$; b) En déduire les variations de f sur $]-\infty;-2]$ et sur $[-2;0[$
4) En déduire que f admet une valeur minimale sur $]0;+\infty[$
5) On considère un rectangle d'aire 4 et de longueur d'une de ses dimensions est t
a) Montrer que le périmètre de ce rectangle est $2\left(t+\frac{4}{t}\right)$; b) En déduire la valeur minimale du périmètre de ce rectangle.

Correction : https://drive.google.com/file/d/1GtzBGhf8RTpZpR0Ro9O116V7ralXeVN_/view?usp=sharing

13

Produit scalaire

HIYAB



1) Définition du produit scalaire

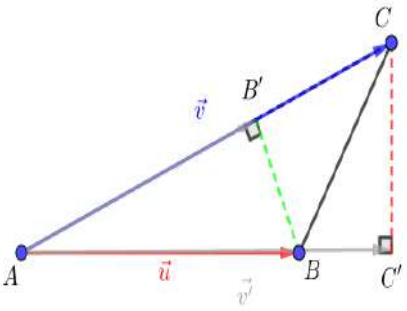
Activité 1 :

Soit ABC un triangle non rectangle.

Le point B' est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

Le point C' est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v'}=\overrightarrow{AC'}$ (Voir la figure ci-contre)



1) a) Vérifier que $B\hat{A}B'=C\hat{A}C'$ et $cos(B\hat{A}B')=\dfrac{AC'}{AC}=\dfrac{AB'}{AB}$

b) En déduire que $AB\times AC\times cos(B\hat{A}B')=AB\times AC'=AB'\times AC$

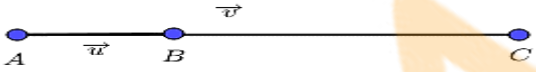
2) Vérifier que $B\hat{A}B'=B\hat{A}C$ et déduire que : $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v'}\|=AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

Définition 1 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on note A, B et C les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

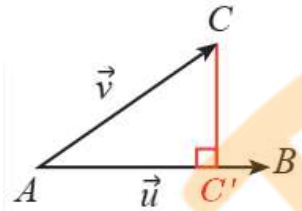
→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC$



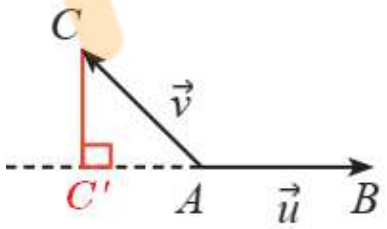
→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$



→ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ où C' est le projeté orthogonal du point C sur (AB)



$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=AB\times AC'$



$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=-AB\times AC'$

Propriété 1 et définition 2 : La formule trigonométrique du produit scalaire

- Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos(\alpha)$ ou α est une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$

- Quel que soit les points A, B et C du plan on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

Cette formule est appelée **la formule trigonométrique** du produit scalaire.



Remarques 1 :

- Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé **le carré scalaire** de $\vec{u}$ on le note $\vec{u}^2$, on écrit : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}$.

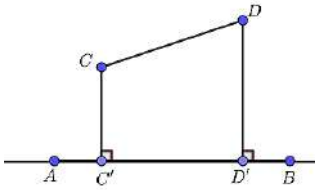
On a : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times cos(\vec{u};\vec{u})=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times 1=\|\vec{u}\|^2$, d'où $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ ou encore $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

- Pour tous points A et B du plan on a $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

Propriété 2 :

En général le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le nombre réel :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB) respectivement.



Exemple 1 :

$ABCD$ un rectangle de centre I tel que $AB=6$ et $AD=3$.

Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DI}$

Exemple 2 :

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=6$ et $\left(\overrightarrow{u;v}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

b) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\left(\overrightarrow{u;v}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

c) $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=5$ et $\left(\overrightarrow{u;v}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$cos(\pi-x)=-cos(x)$
$cos(\pi+x)=-cos(x)$
$cos(-x)=cos(x)$

2) Soit ABC un triangle tel que $AB=3$, $AC=4$ et $B\hat{A}C=\frac{4\pi}{3}$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

3) Soit MNE un triangle tel que $MN=5$, $ME=3$ et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ME}=-6$. Calculer $cos(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{ME})$.

Exercices : Exercices 1 et 2 de la série 13.

2) Les propriétés du produit scalaire

Activité 2 :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de même norme.

Soit O, A, B et C quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$.

On suppose que $A\hat{O}B=\frac{\pi}{3}$, $B\hat{O}C=\frac{\pi}{4}$ et $A\hat{O}C=\frac{\pi}{12}$

Calculer puis comparer $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$



Propriétés 3 : Les propriétés du produit scalaire

Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le nombre réel k on a :

- $\vec{v}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{v}$ on dit que le produit scalaire **est symétrique.**
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(k\times\vec{v})=k\times(\vec{u}.\vec{v})$ on dit que le produit scalaire **est linéaire.**
- $\vec{u}.\vec{u}\geq 0$ et l'égalité $\vec{u}.\vec{u}=0$ n'ayant lieu que pour $\vec{u}=\vec{0}$.

Exemple 3 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\left(\overrightarrow{u;v}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}^2$, $\vec{v}^2$ et $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v})$.

Remarque 2 :

Il découle des propriétés 3 que le comportement du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs et leur multiplication par un nombre réel suit des règles analogues à celles de la multiplication des nombres.

On retiendra en particulier certains produits scalaires remarquables (par analogie avec les identités remarquables)

Propriétés 4 : Les identités remarquables

Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Exemple 4 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\|=7$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

1) a) Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

b) En déduire la valeur de $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et de $\|\vec{u}-\vec{v}\|$

2) Vérifier que $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\geq\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et que $\|\vec{u}-\vec{v}\|\geq\|\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\|$

3) Vérifier que $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\geq|\vec{u}.\vec{v}|$

Propriété 5 : Résultat des identités remarquables

- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$;
- $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$

Exemple 5 :

Montrer que quels que soit les points A, B et C du plan on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Propriétés 6 et définition 3 :

- Quels que soit les points A, B et C du plan on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$
- On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\vec{u}.\vec{v}=0$ et on écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$
- Deux droites (AB)et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$



Exemple 6 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan tels que : $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=5$

Déterminer le réel a sachant que : $\left(a\times\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=13$.

Exemple 7 :

Soit ABC un triangle tel que $AB=1$, $AC=\sqrt{2}$ et $cos(B\hat{A}C)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et déduire la valeur de BC.

2) Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$, montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

Exercices : Exercices 3 et 4 de la série 13.

3) Théorème d'Al-Kashi

Activité 3 : Soit ABC un triangle.

1) Vérifier que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ et déduire que $\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2$

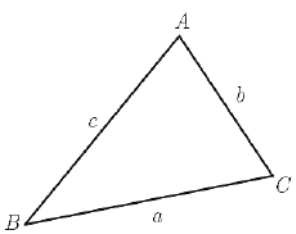
2) En déduire que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$ et $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

→ Cette dernière égalité est appelé le **théorème d'Al-Kashi.**

Théorème 1 : Théorème d'Al-Kashi

Quel que soit le triangle ABC on a :

- $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$
- $CA^2=BC^2+BA^2-2BC\times BA\times cos(C\hat{B}A)$
- $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times cos(A\hat{C}B)$





Propriété 7 : Résultat du théorème d'Al-Kashi

Quel que soit le triangle ABC on a :

$cos(B\hat{A}C)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$; $cos(C\hat{B}A)=\frac{BC^2+BA^2-CA^2}{2BC\times BA}$; $cos(A\hat{C}B)=\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA\times CB}$

Exemple 8 :

1) ABC un triangle tel que $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$ et $B\hat{A}C=\dfrac{\pi}{6}$. Calculer BC.

2) ABC un triangle tel que $AB=1$, $AC=\sqrt{2}$ et $BC=2$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $cos(B\hat{A}C)$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.

Exercices : Exercices 5 et 6 de la série 13.

4) Théorème de la médiane

Activité 4 : Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Soit M un point du plan.

1) En écrivant $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$ vérifier que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

2) En déduire que $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}$

3) En déduire que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{1}{4}AB^2$ et $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=2MI^2+\dfrac{1}{2}AB^2$

Propriété 8 : La propriété caractéristique du milieu d'un segment :

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Théorème 2 : Théorème de la médiane :

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$.

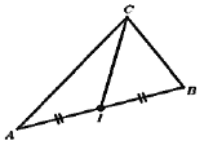
Pour tout point M du plan on a :
$$\begin{cases} MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{1}{4}AB^2 \\ MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{1}{2}AB^2 \end{cases}$$



Remarque 3 :

La troisième égalité du théorème de la médiane permet de calculer la médiane d'un triangle en fonction de ses côtés.

Dans cette égalité on pose $M=C$ on obtient : $CI^2=\dfrac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-\dfrac{1}{2}AB^2\right)$



Exemple 9 :

ABC un triangle et I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$et $[CA]$.

1) Sachant que $AB=4$, $BC=8$ et $CA=5$, calculer les distances CI, AJ et BK.

2) En utilisant le théorème de la médiane calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}$.

3) Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Propriété 9 : Les ensembles des points usuels du plan

Soit A et B deux points distinct du plan et R un réel strictement positif.

L'ensemble des points M du plan tel que	Nature
$MA=R$	Le cercle du centre A et de rayon R
$MA=0$	Le singleton $\{A\}$
$MA=-R$	L'ensemble vide
$MA=MB$	La médiatrice de segment $[AB]$

Exemple 10 :

A et B deux points du plan tel que $AB=4$.

En utilisant le théorème de la médiane déterminer l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

1) $MA^2+MB^2=16$; *2)* $MA^2+MB^2=8$; *3)* $MA^2+MB^2=0$

4) $MA^2-MB^2=0$; *5)* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=5$; *6)* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Exercices : Exercices 7 et 8 de la série 13.

5) Les relations métriques dans un triangle rectangle

Activité 5 :

Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) Vérifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$

2) a) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ équivalent à $BA^2=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}\geq 0$

b) En déduire que : ABC est un triangle rectangle en A équivalent à $BA^2=BH\times BC$.

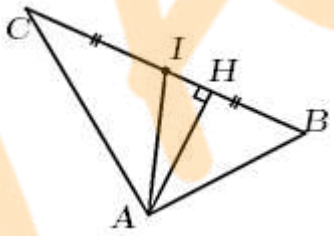
Propriétés 10 : Les relations métriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle.

I est le milieu du segment $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $BC^2=AB^2+AC^2$ (Théorème de Pythagore)
- $BA^2=BH\times BC$ ou $CA^2=CH\times CB$
- $HA^2=HC\times HB$
- $AI=\frac{1}{2}BC$

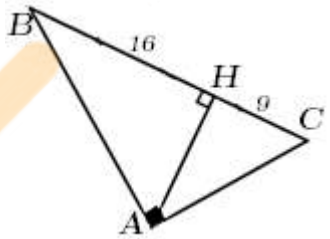


Exemple 11 :

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tel que :

$BH=16$ et $CH=9$

Calculer les distances BC, BA, CA et HA



Complément de cours : Formule de Héron

L'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre p est : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice : Exercice 9 de la série 13.

Pour la recherche :

- Le lien entre le produit scalaire et le travail d'une force en physique.
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski.
- Théorème de Ménélaüs et Théorème de Céva.



Résumé 13 : Produit scalaire

Définition du produit scalaire :

• Le **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ défini par :

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC$

→ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$ où C' est le projeté orthogonal du point C sur (AB)

La formule trigonométrique du produit scalaire :

• Quel que soit les points A, B et C du plan on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

• Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos(\alpha)$ ou α est une mesure de l'angle $(\hat{\vec{u};\vec{v}})$

Autre formule du produit scalaire :

• Quel que soit les points A, B et C du plan on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

• Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le nombre réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB) respectivement.

Les propriétés du produit scalaire :

Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $k\in\mathbb{R}$ on a :

• $\vec{v}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{v}$

• $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.\left(k\times\vec{v}\right)=k\times\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

• $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}$, $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ et $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

• $\vec{u}.\vec{u}\geq 0$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

• $\vec{u}.\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$

Les identités remarquables :

• $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

• $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

• $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Théorème d'Al-Kashi :

Quel que soit le triangle ABC on a :

• $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

• $CA^2=BC^2+BA^2-2BC\times BA\times cos(C\hat{B}A)$

• $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times cos(A\hat{C}B)$

Autres résultats

• $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

• $(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

• $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

• $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}+\vec{v}\|^2\right)$



• Quel que soit le triangle ABC on a :

$cos(B\hat{A}C)=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$

La propriété caractéristique du milieu d'un segment

• Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$

Pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Théorème de la médiane :

• Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :

$$\begin{cases}MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2\\ MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2\end{cases}$$

• La troisième égalité du théorème de la médiane permet de calculer la médiane d'un triangle ABM.

Les relations métriques dans un triangle rectangle :

Soit ABC un triangle. I est le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

• $BC^2=AB^2+AC^2$ (Théorème de Pythagore)

• $BA^2=BH\times BC$ ou $CA^2=CH\times CB$

• $HA^2=HC\times HB$

• $AI=\frac{1}{2}BC$

Formule de Héron :

• L'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre p est : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice 1

Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$:

1) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\left(\overrightarrow{u;v}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

2) $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=1$ et $\left(\overrightarrow{u;v}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

3) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $\left(\overrightarrow{u;v}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\left(\overrightarrow{u;v}\right)\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 2

1) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB=4$. Calculer par deux méthodes $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC=6$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

3) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ sachant que :
$\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$ et $\vec{u}.\vec{v}=-2\sqrt{6}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle tels que :
$AB=1$, $AC=3$ et $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$

2) Soit E le point du plan tel que $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

a) Montrer que $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

c) Soit I le milieu du segment $[AB]$.
Montrer que $(AB)\perp(IE)$

Exercice 4

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et en D.
O est le milieu de $[AD]$
On pose $AB=a$, $DC=b$ et $AD=c$



1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

2) En écrivant $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.
Montrer que $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=ab-\frac{c^2}{4}$

Exercice 5

1) ABC est un triangle tel que :
$AB=3$, $AC=5$ et $\hat{A}=\frac{\pi}{4}$. Calculer BC.

2) MNP est un triangle tel que :
$MN=\sqrt{3}$, $NP=2$ et $\hat{N}=\frac{5\pi}{6}$. Calculer MP.

Exercice 6

ABC est un triangle $AB=6$, $AC=5$ et $BC=7$

1) En utilisant le théorème d'Al-Kashi montrer que :
$cos(\hat{A})=\frac{1}{5}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis déduire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$.

3) Soit H le projeté de A sur (BC).
Calculer la distance : BH

Exercice 7

ABC un triangle tel que $AB=6$, $AC=4$ et $BC=5$
Soit I le milieu du segment $[BC]$, Calculer AI

Exercice 8

ABM un triangle, I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.
Sachant que $AB=4$, $AM=3$ et $BM=4$ calculer les distances MI, AK et BJ.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tel que
$AH=4$ et $A\hat{B}C=\frac{\pi}{6}$.

Calculer les distances BA, CA, BC, BH et CH

Exercice 10 : Exercice d'olympiade

Soit a, b et c trois réels strictement positifs.
Montrer que :
$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geq\sqrt{c^2+a^2+ca}$
Indications :
Considérons un quadrilatère $ABCD$ tel que
$A\hat{D}B=\frac{\pi}{3}$ et $B\hat{D}C=\frac{\pi}{3}$
On pose $AD=a$, $BD=b$ et $DC=c$

1) Construire une figure.
2) Calculer AB et BC en fonction de a, b et c
3) En déduire que :
$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geq\sqrt{c^2+a^2+ca}$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1qwKeGSTyrkmGFS7c1yzr36pBrrMIGD0I/view?usp=sharing

Exercice 11 : La loi des sinus

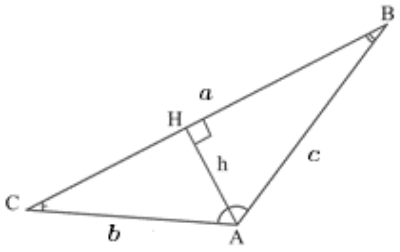
On considère un triangle ABC et on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

On note $AH = h$, $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.

b) En déduire que $c \times sin(B) = b \times sin(C)$.

2) Montrer que $\frac{a}{sin(A)} = \frac{b}{sin(B)} = \frac{c}{sin(C)}$.



Exercice 12 : Inégalité d'Euler.

Soit ABC un triangle.

On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$

Soit $X, Y, Z \in \mathbb{R}$ tel que :

$X = 2(p-a)$, $Y = 2(p-b)$ et $Z = 2(p-c)$

1) Vérifier que X, Y et Z sont strictement positif.

2) Vérifier que $X + Y = 2c$, $Y + Z = 2a$ et $Z + X = 2b$

3) En déduire que $abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c)$ (Rappel : pour tout réels $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ on a $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$)

4) On note R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

a) En utilisant la formule de Héron, déduire que $R \geq 2r$

L'inégalité $R \geq 2r$ est appelée : inégalité d'Euler.

b) Montrer que $p^3 \geq 27(p-a)(p-b)(p-c)$ (Rappel : pour tout réels $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ on a $(x+y+z)^3 \geq 27xyz$)

c) En utilisant la formule de Héron, déduire que $p \geq 3\sqrt{3}r$

Exercice 13

Soit ABC un triangle, on note O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$

Soit H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

1) Montrer que :

$2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$, $2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2$ et $2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$

2) a) Montrer que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ tel que A' est le milieu du segment $[BC]$

b) En déduire que $(AH) \perp (BC)$

3) a) Montrer que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et déduire que $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ tel que B' est le milieu du segment $[CA]$

b) En déduire que $(BH) \perp (CA)$

4) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC

5) En déduire que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ où G est le centre de gravité du triangle ABC

6) Montrer que $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ et déduire que $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

7) Montrer que :

$$cos(2A) + cos(2B) + cos(2C) = \frac{9OG^2 - 3R^2}{2R^2}$$

Exercice 14 : Exercice d'olympiade

Soit ABC un triangle, on pose

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$

R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

1) En utilisant la formule de Héron montrer que :

$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ Et $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

2) On pose $B\hat{A}C = A$, $C\hat{B}A = B$ et $A\hat{C}B = C$

On suppose que :

$cos(2A) + cos(2B) + cos(2C) = -4cos(A)cos(B)cos(C) - 1$

Et $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - 4Rr - r^2)$

En utilisant l'exercice précédent déduire que :

$cos(A)cos(B)cos(C) = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$

Et $cos(A)cos(B)cos(C) \leq \frac{1}{8}$

3) En déduire que le triangle ABC est rectangle si et seulement si $p = 2R + r$

Exercice 15 : Exercice d'olympiade

O, G, H et I désignes respectifs le centre du cercle circonscrit, le centre du gravité, l'orthocentre et le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC.

On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$

R et r sont les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC respectivement.

1) a) Montrer que $OI^2 = R^2 - 2Rr$

b) En déduire que $R \geq 2r$

2) Montrer que $OH^2 = R^2 - 2p^2 + 2(2R+r)^2$

3) a) Montrer que $IH^2 = 2r^2 - p^2 + (2R+r)^2$

b) En déduire que $OH \geq \sqrt{2} \times IH$

4) Montrer que $IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 - 16Rr + 5r^2)$

5) Déduire que $\sqrt{16Rr - 5r^2} \leq p \leq \sqrt{2r^2 + (2R+r)^2}$

14

Transformations



1) Translation – Symétrie centrale – Symétrie axiale

1-1 Définitions des transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Activité 1 :

Soit $ABCD$ un carré de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Construire une figure convenable.

2) a) Déterminer l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

b) Déterminer l'image du point B par la translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

c) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Activité 2 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Déterminer les symétrie de chacun des points A, B et O par rapport au point O.

2) En déduire la symétrie de la droite (AB) par rapport au point O.



Activité 3 :

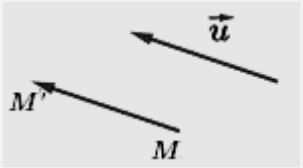
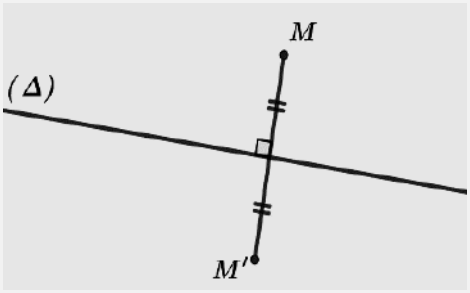
Soit $ABCD$ un losange de centre O, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Construire une figure convenable.

2) a) Déterminer les symétrie de chacun des points B, O et I par rapport à la droite (AC).

b) En déduire la symétrie de la droite (IO) par rapport à la droite (AC).

Définitions 1 :

Translation	La symétrie centrale	La symétrie axiale
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La **translation** du vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$.  On dit que M' est l'image de M par la translation du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $t_{\vec{u}}(M)=M'$. Ainsi $t_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	Soit I un point du plan. La **symétrie centrale** de centre I est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par : Si : $M \neq I$, alors I est le milieu du segment $[MM']$. Si : $M=I$, alors $M'=M$.  On dit que M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre I, on note $S_I(M)=M'$. Ainsi si : $M \neq I$, alors : $S_I(M)=M' \Leftrightarrow I$ est le milieu du segment $[MM']$	Soit (Δ) une droite du plan. La **symétrie axiale** d'axe (Δ) est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par : Si : $M \in (\Delta)$, alors $M'=M$. Si : $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$.  On dit que M' est l'image de M par la symétrie axiale d'axe (Δ), on note $S_{(\Delta)}(M)=M'$. Ainsi si : $M \notin (\Delta)$, alors : $S_{(\Delta)}(M)=M' \Leftrightarrow (\Delta)$ est la médiatrice du segment $[MM']$

Remarques 1 : Les points invariant

- Il n'y a aucun point invariant par une translation de vecteur non nul, et tous les points sont invariant par la translation du vecteur nul.
- $S_I(I)=I$, on dit que le point I est invariant par la symétrie centrale S_I et c'est le seul point invariant par S_I.
- Si $M \in (\Delta)$, alors $S_{(\Delta)}(M)=M$. Les points de (Δ) sont les seuls points invariants par la symétrie axiale $S_{(\Delta)}$.

Remarques 2 :

- $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$; $t_{\vec{0}}(A)=A$
- $t_{-\vec{u}}(A)=B \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(B)=A$.
- $S_I(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$
- $S_I(M)=M' \Leftrightarrow S_I(M')=M$.
- $S_{(\Delta)}(M)=M' \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M')=M$.
- La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est appelé aussi symétrie orthogonale ou réflexion.



1-2 L'image des figures par les transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Activité 4 :

Soit (C) un cercle de centre A et de rayon R. B est un point de (C).

1) a) Construire A' et B' les images respectives des points A et B par la symétrie centrale S_I.

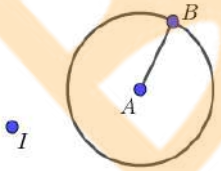
b) Montrer que $A'B'=R$ et $(A'B')\parallel(AB)$.

2) Soit M un point de (C) et M'son image par la symétrie centrale S_I.

On note (C') le cercle de centre A' et de rayon R.

a) Vérifier que $A'M'=R$ et déduire que $M'\in(C')$.

b) En déduire que l'image du cercle (C) par la symétrie centrale S_I est le cercle (C').



Définition 2 :

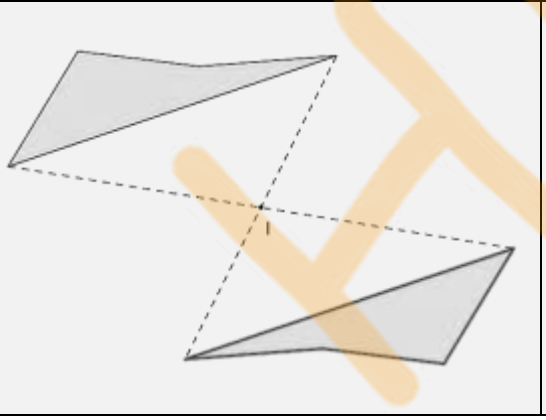
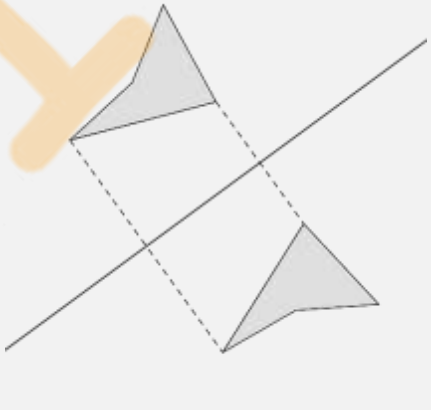
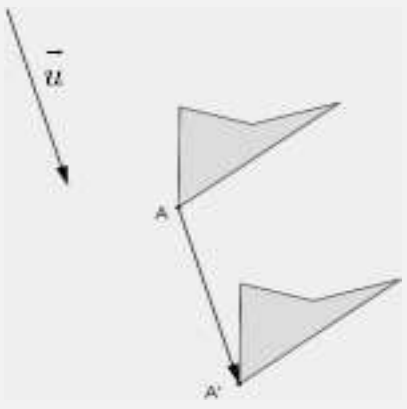
Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

- L'image d'une figure par la transformation T est l'image de tous ces points par cette transformation.

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $T((\xi))$ l'image de (ξ) par la transformation T.

- Si un point M appartient à (ξ) alors son image $T(M)$ appartient à $T((\xi))$.

Autrement dit : Si $M\in(\xi)$ alors $T(M)\in T((\xi))$

Symétrie centrale	Symétrie axiale	Translation
		

Propriétés 1 : L'image des figures usuelles

Soit T une symétrie centrale, une symétrie axiale ou une translation.

Soit A, B et C trois points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$et $T(C)=C'$.

1) L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par la transformation T est un cercle de centre $T(A)=A'$ et de même rayon R.

2) L'image d'un segment par la transformation T est un segment de même longueur.

- On note $T([AB])$ l'image du segment $[AB]$ par la transformation T.
- On a : $T([AB])=[A'B']$.

3) L'image d'un angle géométrique par la transformation T est un angle de même mesure.

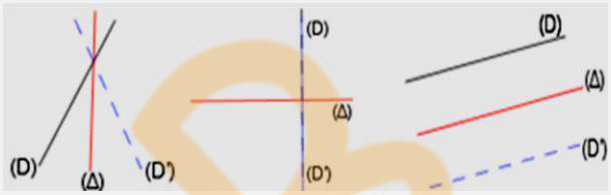
- On note $T\left(B\hat{A}C\right)$ l'image de l'angle $B\hat{A}C$ par la transformation T
- On a : $T\left(B\hat{A}C\right)=B'\hat{A}'C'$ de plus : $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$.

4) L'image d'une droite par une symétrie centrale ou par une translation est une droite qui lui est parallèle.

- On note $T\left((AB)\right)$ l'image de la droite (AB) par la transformation T
- On a : $T\left((AB)\right)=\left(T(A)T(B)\right)$ c'est-à-dire $T\left((AB)\right)=(A'B')$ de plus si T est une symétrie centrale ou une translation alors $(AB)//(A'B')$.

5) L'image d'une droite (D) par une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une droite (D') :

- Si $(D)\parallel(\Delta)$ alors $(D')\parallel(\Delta)$.
- Si (D) est perpendiculaire à (Δ) alors $(D')=(D)$.
- Si (D) coupe (Δ) en un point M alors (D') coupe (Δ) en M.



6) L'image d'une demi-droite par la transformation T est une demi-droite.

Exemple 1 :

Soit ABC un triangle isocèle en A et O le milieu du segment $[BC]$.

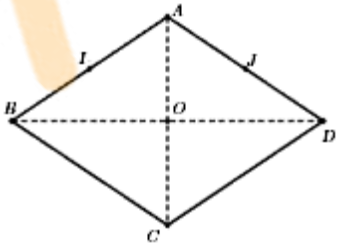
1) Déterminer l'image de la droite (AB) par S_O .
2) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par S_O .
3) Déterminer l'image de l'angle $A\hat{B}O$ par S_O .



Exemple 2 :

Soient $ABCD$ un losange du centre O, I et J sont respectifs les milieux des segments $[AB]$et $[AD]$

1) Déterminer les images des points B, O et I par $S_{(AC)}$.
2) Déterminer l'image de la droite (IO) par $S_{(AC)}$.
3) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par $S_{(AC)}$.
4) Déterminer l'image de l'angle $A\hat{B}O$ par $S_{(AC)}$.



1-3 Les propriétés des transformations : symétrie centrale - symétrie axiale - translation

Propriétés 2 :

La propriété caractéristique de la symétrie centrale

Soit T une transformation du plan.

T est une symétrie centrale si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$

La propriété caractéristique de la translation

Soit T une transformation du plan.

T est une translation si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

Exemple 3 :

ABC un triangle, on note $\vec{u}=\overrightarrow{BA}$, $t_{\vec{u}}(A)=A'$, $t_{\vec{u}}(C)=C'$, $S_B(A)=A''$ et $S_B(C)=C''$.

1) Construire une figure.
2) En utilisant la propriété caractéristique de la translation et de la symétrie centrale. Montrer que $\overrightarrow{C'A'}=-\overrightarrow{C''A''}$.

Activité 5 :

Soit T une translation $t_{\vec{u}}$ ou une symétrie centrale S_I.

Soit A, B, C et D quatre points du plan tel que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

On pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$., $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

1) Supposons que $T=t_{\vec{u}}$. En utilisant la propriété caractéristique de la translation montrer que $\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{C'D'}$.

2) Supposons que $T=S_I$. En utilisant la propriété caractéristique de la symétrie centrale montrer que $\overrightarrow{A'B'}=3\overrightarrow{C'D'}$.

Propriétés 3 :

Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

Soit A, B, C et D quatre points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

T conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

Si : $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ où α est un réel, alors $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$.

On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le coefficient de colinéarité.

T conserve l'alignement des points :

- Les images de trois points alignés par la transformation T sont trois points alignés.

Autrement dit : Si A, B et C sont trois points alignés, alors les points A', B' et C' sont alignés.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'alignement des points.

T conserve le milieu d'un segment :

A et B sont deux points distincts du plan.

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors le point $I'=T(I)$ est le milieu du segment $[A'B']$.

On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le milieu.

T conserve le parallélisme :

- Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$.

Autrement dit : Les images de deux droites parallèles par la transformation T sont deux droites parallèles.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent le parallélisme.

Exemple 4 :

ABC est un triangle rectangle en A et O le milieu de $[BC]$.

On note $S_{(AB)}(O)=I$ et $S_{(AC)}(O)=J$

1) Construire une figure.

2) Montrer que $t_{\overrightarrow{OA}}(B)=I$ et $t_{\overrightarrow{OA}}(C)=J$

3) Les points I, A et J sont-ils alignés ? Justifier.

4) Démontrer que A est le milieu de $[IJ]$.



Activité 6 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et $t_{\vec{u}}$ la translation du vecteur $\vec{u}$.

A et B deux points du plan, on pose $t_{\vec{u}}(A)=A'$ et $t_{\vec{u}}(B)=B'$.

1) En utilisant la propriété caractéristique de la translation montrer que $A'B'=AB$.

2) Soit C un point du plan tel ABC est un triangle, on pose $t_{\vec{u}}(C)=C'$.

a) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont identiques puis en déduire que $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$.

b) En déduire que si $(AB)\perp(AC)$ alors $(A'B')\perp(A'C')$.

Propriétés 4 :

Soit T une symétrie centrale ou une symétrie axiale ou une translation.

Soit A, B, C et D quatre points du plan, on pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$., $T(C)=C'$ et $T(D)=D'$.

T conserve la distance :

- $A'B' = AB$.

Autrement dit : La distance entre deux points est égale à celle de leurs images par la transformation T.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent les distances ou qu'elles sont isométries.

T conserve les mesures des angles géométriques :

- $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$.

Autrement dit : l'image d'un angle géométrique par la transformation T est un angle de même mesure.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent les mesures des angles géométriques.
- Remarque : la symétrie axiale inverse les mesures des angles orientés.

T conserve l'orthogonalité :

- Si : $(AB) \perp (CD)$, alors $(A'B') \perp (C'D')$.

Autrement dit : Les images de deux droites perpendiculaires par la transformation T sont deux droites perpendiculaires.

- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'orthogonalité.

T conserve l'intersection des figures géométriques :

- Si un point est l'intersection de deux figures géométriques alors son image par la transformation T est l'intersection des images de ces deux figures par cette transformation.
- On dit que la symétrie centrale, la symétrie axiale et la translation conservent l'intersection.

Exemple 5 : Soit $OABC$ un rectangle.

On considère la translation t de vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{OC}$.

1) Construire les points O', A', B' et C' les images respectives des points O, A, B et C par la translation t.

2) Montrer que le quadrilatère $O'A'B'C'$ est un rectangle.

3) Soit M un point du plan, on pose $t_{\vec{u}}(M) = N$. Montrer que $CM = C'N$.

2) Homothétie

2-1 Définition d'une homothétie

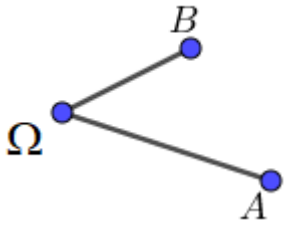
Activité 7 :

Soient Ω , A et B trois points non alignés du plan (Voir la figure ci-contre)

1) Construire les points A' et B' tels que $\overrightarrow{\Omega A'} = 3\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = 3\overrightarrow{\Omega B}$

A' est appelé l'image du point A par l'homothétie de centre Ω et du rapport 3 .

On écrit $h_{(\Omega;3)}(A) = A'$ ou $h(A) = A'$



2) a) Déterminer l'image du point B par l'homothétie h de centre Ω et du rapport 3 .

b) Déterminer $h(\Omega)$.

3) Déterminer l'image de la droite (AB) par l'homothétie h (C'est-à-dire déterminer $h((AB))$)

4) Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{AB}$ et déduire que $h((AB)) \parallel (AB)$

5) Soit M un point distinct des points Ω , A et B . On pose $h(M) = M'$.

Déterminer la relation vectorielle qui permet de construire le point M'.



Définition 3 :

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.

La transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M}$ s'appelle **l'homothétie** de centre Ω et du rapport k .

On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et du rapport k , on écrit :

$h_{(\Omega;k)}(M) = M'$ ou $h(M) = M'$

Ainsi : $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M}$

Remarques 3 :

Soit $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

- Si $h(A)=A'$ alors les points A', A et Ω sont alignés.
- Si $k\neq 1$ alors le centre Ω d'homothétie h est le seul point invariant par cette homothétie.
- Si $|k|>1$ on dit que $h_{(\Omega;k)}$ est un agrandissement de rapport $|k|$.
- Si $|k|<1$ on dit que $h_{(\Omega;k)}$ est une réduction de rapport $|k|$.
- $h_{(\Omega;k)}(M)=M' \Leftrightarrow h_{\left(\Omega;\frac{1}{k}\right)}(M')=M$
- Tous les points du plan sont invariants par l'homothétie de rapport $k=1$.
- Si $k=-1$ alors $h_{(\Omega;-1)}(M)=M'$ signifie $\overrightarrow{\Omega M}=-\overrightarrow{\Omega M'}$ donc $h_{(\Omega;-1)}$ est la symétrie centrale de centre Ω.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 6 :

1) Soit I et A deux points distincts du plan.
   a) Construire l'image A' de A par l'homothétie de centre I et de rapport 3.
   b) Construire A'' l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport -2.
2) Quel est le rapport de l'homothétie de centre O et qui transforme le point A en B tel que $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{OB}$?

Exemple 7 :

A, B et C trois points du plan et soit h l'homothétie de centre A tel que $h(B)=C$.

Déterminer le rapport de l'homothétie h dans les cas suivants :

1) $\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{AB}$
2) $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$

2-2 L'image des figures usuelles par l'homothétie

Définition 4 :

Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport k.

- L'image d'une figure par l'homothétie h est l'image de tous ces points par cette homothétie.

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $h((\xi))$ l'image de (ξ) par l'homothétie h.

- Si un point M appartient à (ξ) alors son image $h(M)$ appartient à $h((\xi))$.

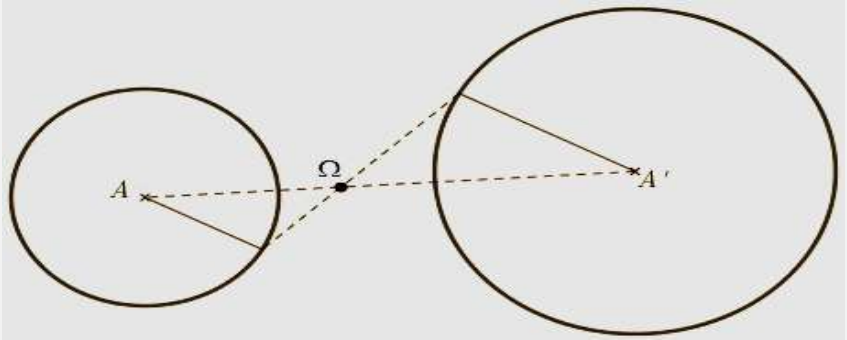
Autrement dit : Si $M\in(\xi)$ alors $h(M)\in h((\xi))$

Propriétés 5 :

h désigne une homothétie de centre Ω et de rapport k.

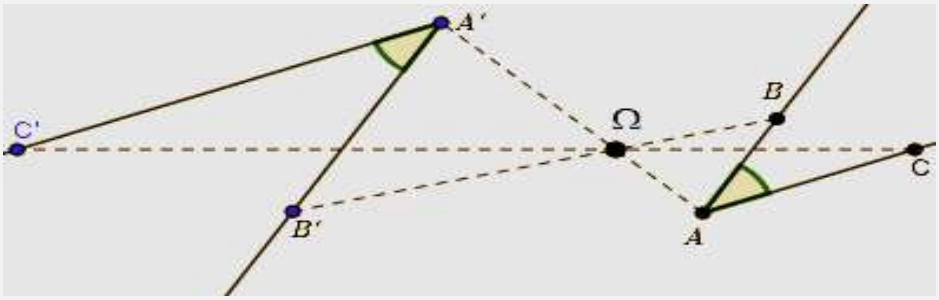
Soient A, B, C et D quatre points du plan, on pose : $h(A)=A'$, $h(B)=B'$, $h(C)=C'$ et $h(D)=D'$

1) L'image d'une figure géométrique par une homothétie est l'image de tous ces points par cette homothétie.
2) L'image d'un segment par une homothétie est un segment.
   - On note $h([AB])$ l'image du segment $[AB]$ par l'homothétie h.
   - On a $h([AB])=[A'B']$
3) L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par une homothétie h est un cercle de centre A' et de rayon $|k|\times R$.



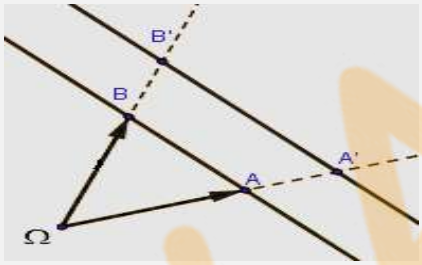
4) L'image d'un angle géométrique par une homothétie est un angle de même mesure

- On note $h\left(B\hat{A}C\right)$ l'image de l'angle $B\hat{A}C$ par l'homothétie h.
- On a $h\left(B\hat{A}C\right)=B'\hat{A}'C'$ de plus on a $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$



5) L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle

- On note $h\left((AB)\right)$ l'image de la droite (AB) par l'homothétie h
- On a $h\left((AB)\right)=(h(A)h(B))$ c'est-à-dire $h\left((AB)\right)=(A'B')$ de plus on a $(AB)\parallel(A'B')$



- Si le centre de l'homothétie h appartient à une droite (Δ) alors $h\left((\Delta)\right)=(\Delta)$

6) L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite.

7) L'image du triangle ABC par l'homothétie h est le triangle $A'B'C'$.

- On dit que ABC et $A'B'C'$ sont des triangles homothétiques.
- Si S et S' sont les aires respectives des triangles ABC et $A'B'C'$ alors $S'=k^2\times S$.

2-3 Les propriétés d'homothétie

Activité 8 :

Ω un point du plan et $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

1) On pose $h(M)=M'$ et $h(N)=N'$, montrer que $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

2) Soit T une transformation du plan qui admet un unique point invariant A.

On suppose que $T(M)=M'$, $T(N)=N'$ et $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N du plan.

En choisissant $N=A$ montrer que T est une homothétie et que $k\neq 1$.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Propriété 6 : La propriété caractéristique d'homothétie

Soit T une transformation du plan.

T est une homothétie de rapport $k\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ si et seulement si pour tous points M et N du plan d'images M' et N' respectivement par T on a $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$

Remarque 4 : Conséquence :

Si M et N sont deux points du plan, M' et N' sont leurs images par l'homothétie $h_{(\Omega;k)}$ alors $M'N'=|k|\times MN$

En général l'homothétie ne conserve pas les distances.

Exemple 8 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme, on considère l'homothétie h de centre D et de rapport -2.

1) Construire les points A', B' et C' tels que $h(A)=A'$, $h(B)=B'$ et $h(C)=C'$.

2) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Activité 9 :

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.

On considère les points A, B, C et D tel que $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ avec $(\alpha\in\mathbb{R})$

Soit $h_{(\Omega;k)}$ l'homothétie de centre I et de rapport k.

On pose $h(A)=A'$, $h(B)=B'$, $h(C)=C'$ et $h(D)=D'$. Montrer que $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$

Propriétés 7 :

h est une homothétie de centre Ω et de rapport k.

Soient A, B, C et D quatre points du plan, on pose : $h(A)=A'$, $h(B)=B'$, $h(C)=C'$ et $h(D)=D'$.

L'homothétie conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

Si $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ où α est un réel alors : $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$.

L'homothétie conserve l'alignement des points :

Si A, B et C sont trois points alignés alors les points A', B'et C' sont alignés.

L'homothétie conserve le milieu d'un segment :

Si A et B sont deux points distincts du plan et I est le milieu du segment $[AB]$ alors le point $I'=h(I)$ est le milieu du segment $[A'B']$.

L'homothétie conserve le parallélisme :

Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$

Autrement dit : Les images de deux droites parallèles par une homothétie sont deux droites parallèles.

L'homothétie conserve les mesures des angles géométriques :

- $B'\hat{A}'C'=B\hat{A}C$

Autrement dit : L'image d'un angle géométrique par une homothétie est un angle de même mesure.

- $(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})\equiv(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})[2\pi]$ on dit que l'homothétie conserve les mesures des angles orienté.

L'homothétie conserve l'orthogonalité :

Si $(AB)\perp(CD)$ alors $(A'B')\perp(C'D')$

Autrement dit : Les images de deux droites perpendiculaires par une homothétie sont deux droites perpendiculaires.

L'homothétie conserve l'intersection des figures géométriques :

Soit (ξ) une figure géométrique. On note $h((\xi))$ l'image de (ξ) par l'homothétie h.

- Si $M\in(\xi)$ alors $h(M)\in h((\xi))$
- Si un point est l'intersection de deux figures géométriques alors son image par une homothétie est l'intersection des images de ces deux figures par cette homothétie.

Exercice :

$ABCD$ un parallélogramme et M le point tel que $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.



1) Construire une figure convenable.

2) On considère l'homothétie h de centre A et qui transforme C en M.

a) Déterminer k le rapport de l'homothétie h.

b) Construire le point M' l'image de D par l'homothétie h.

3) Soit I l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{M'M}$.

a) Montrer que $h(B)=I$.

b) En déduire que $(IM')\parallel(BD)$.

4) Soit (Δ) une droite passant par A et qui coupe la droite (IM) en F et (BC) en E.

a) Déterminer les images des droites (BC) et (Δ) par l'homothétie h. ; b) Montrer que $h(E)=F$.

Résumé 14 : Transformations

Soit T une symétrie centrale S_I ou une translation $t_{\vec{u}}$ ou une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ ou une homothétie $h_{(\Omega;k)}$.

A, B, C, D, M et N des points du plan.

On pose : $T(A)=A'$, $T(B)=B'$, $T(C)=C'$, $T(D)=D'$, $T(M)=M'$ et $T(N)=N'$,

Soit k un réel non nul. (ξ) et (Γ) deux figures du plan.

		La symétrie centrale S_I	La translation $t_{\vec{u}}$	La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$	L'homothétie $h_{(\Omega;k)}$
M' est l'image de M		I est le milieu du segment $[MM']$	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	(Δ) médiatrice de $[MM']$	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$
Les points invariants par		I	……	Les points de (Δ)	Ω
Les propriétés de la transformation T	Propriété caractéristique	$\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$	……	$\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$
	T conserve la distance (sauf si $T=h_{(\Omega;k)}$ avec $\lvert k\rvert\neq 1$)	$A'B'=AB$			$A'B'=\lvert k\rvert AB$
	T conserve le coefficient de colinéarité	Si $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ alors : $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$			
	T conserve l'alignement	Si A, B et C est alignés alors les points A', B' et C' sont alignés			
	T conserve le milieu	Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors le point $I'=T(I)$ est le milieu de $[A'B']$			
	T conserve le parallélisme	Si $(AB)\parallel(CD)$ alors $(A'B')\parallel(C'D')$			
	T conserve les mesures des angles géométriques	$B'\hat{A}'C'=B\hat{A}C$			
	T conserve l'orthogonalité	Si $(AB)\perp(CD)$ alors $(A'B')\perp(C'D')$			
	T conserve l'appartenance	Si $M\in(\xi)$ alors $T(M)\in T((\xi))$			
	T conserve l'intersection	Si $(\xi)\cap(\Gamma)=M$ alors $T((\xi))\cap T((\Gamma))=M'$			
L' image des figures usuelles	L'image d'un segment est un segment	$T([AB])=[A'B']$			
	L'image d'une droite est une droite	$T((AB))=(A'B')$ et si $T\neq S_{(\Delta)}$ alors $(A'B')\parallel(AB)$			
	L'image d'un cercle de centre A et de rayon R	est un cercle de centre A' et de même rayon R			est un cercle de centre A' et de rayon $\lvert k\rvert\times R$

- $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$; • $S_I(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM}$
- Si le centre de l'homothétie h appartient à une droite (Δ) alors $h((\Delta))=(\Delta)$
- Si $h(A)=A'$ alors les points A', A et Ω sont alignés.
- Si $k=-1$ alors $h_{(\Omega;-1)}$ est la symétrie centrale de centre Ω.
- Tous les points du plan sont invariants par l'homothétie de rapport $k=1$.
- Il n'y a aucun point invariant par une translation de vecteur non nul, et tous les points sont invariant par la translation du vecteur nul.
- L'image d'une figure par la transformation T est l'image de tous ces points par cette transformation.



Exercice 1

ABC est un triangle. D est un point de $[AC]$ tel que : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. On pose :

$S_{(AB)}(D)=D'$, $S_{(AB)}(C)=C'$, $S_B(A)=A'$,

$S_B(D')=D''$ et $S_B(C')=C''$.

1) Construire une figure.

2) Montrer que. $\overrightarrow{A'D''}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A'C''}$

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A.

ABB' et ACC' deux triangles équilatéraux.

Les droites (BB') et (CC') se coupent en point I.

Les droites (CB') et (BC') se coupent en point J.

Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).

Montrer que les points A, I et J sont alignés.

Exercice 3

ABC un triangle équilatéral et I le milieu de $[BC]$.

Soit A', B', C' et I' les images respectifs de A, B, C et I par la symétrie centrale S_O tel que O est le milieu de $[AC]$

Montrer que les droites $(CI')\perp(B'A)$

Exercice 4

ABC un triangle rectangle en B.

1) Construire le point D la symétrie de C par rapport à la droite (AB).

2) Soit E le milieu de $[AC]$, déterminer F la symétrie de E par rapport à la droite (AB).

3) Montrer que $CE=DF$ et $CF=DE$.

Exercice 5

Soient $ABCD$ un rectangle de centre O et S la symétrie axiale d'axe (BD) et soit A' et C' les images respectives de A et C par la symétrie axiale S.

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que $AA'CC'$ est un rectangle.

Exercice 6

Soit ABC un triangle.

- B' et C' deux points du plan tels que :

$S_A(B)=B'$ et $S_A(C)=C'$.

- B'' et C'' deux points du plan tels que :

$S_{\overline{AC}}(B)=B''$ et $S_{\overline{AC}}(C)=C''$.

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que $(B'C')\parallel(B''C'')$.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

I et J sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD). K et L les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur la droite (AC)

Soit S_O la symétrie centrale de centre O.

1) Déterminer $S_O(I)$ et $S_O(K)$.

2) Soit E l'orthocentre du triangle OBC et F l'orthocentre du triangle ODA. Montrer que O est le milieu de $[EF]$.

Exercice 8

Soient h l'homothétie de centre I et de rapport 3, h' l'homothétie de centre O et de rapport -2.

Déterminer les relations vectorielles des homothéties h et h'

Exercice 9

I, A, B, M et N des points du plan et soit h l'homothétie de centre I et de rapport k.

1) On suppose que $h(M)=A$ et $h(N)=B$

Exprimer avec des relations vectorielles les écritures précédentes.

2) En déduire que $\overrightarrow{h(M)h(N)}=k\overrightarrow{MN}$

Exercice 10

Soient A, B et L trois points du plan tels que $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Déterminer le rapport de l'homothétie de centre L qui transforme A en B.

Exercice 11

Soit $C(O;2)$ et $C'(O';1)$ deux cercles tel que $OO'=7$

On considère l'homothétie $h\left(I,\frac{-1}{2}\right)$ de centre I et de rapport $k=-\frac{1}{2}$ qui transforme O en O'.

1) Faire une figure.

2) Quelle est l'image de (C) par l'homothétie$h$?

Exercice 12

Soient ABC un triangle du sommet A.

B' le point tel que $\overrightarrow{BB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

C' le point tel que $C'\in(AC)$ et $(B'C')\parallel(BC)$

Soit h l'homothétie de centre A et qui transforme B en B'.

1) Déterminer le rapport de l'homothétie h.

2) Montrer que $h(C)=C'$

Exercice 13

ABC un triangle et (C) son cercle circonscrit et soit D le point tel que A et D sont diamétralement opposés.

Soit I le milieu de $[BC]$.

Soit B' le point tel que B est le milieu de $[AB']$.

Soit C' le point tel que C est le milieu de $[AC']$.

Le point H est la projection orthogonale du point D sur la droite $(B'C')$.

1) Construire la figure.

2) Montrer que le point H est le milieu du $[B'C']$.

Montrer que les points A, I et H sont alignés.

Correction :

https://drive.google.com/file/d/168dMw47cKCzq4lubqiA8KtwQ95btHmU4/view?usp=sharing

Exercice 14

Soit A et B deux points distincts du plan
On considère la transformation T qui associe à chaque point M du plan le point M' tel que
$3\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

1) Déterminer vectoriellement O le point invariant par la transformation T.

2) Déterminer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$.

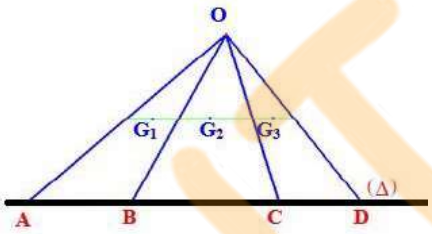
3) En déduire la nature de la transformation T.

Exercice 15

Soit A et B deux points distincts du plan
On considère la transformation T qui associe à chaque point M du plan le point M' tel que
$2\overrightarrow{M'A}-2\overrightarrow{M'B}+3\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$
Montrer que T est une translation de vecteur à déterminer.

Exercice 16

A, B, C et D quatre points d'une droite (Δ) et O un point n'appartient pas à (Δ).
Soit G_1, G_2 et G_3 les centres de gravité des triangles OAB, OBC et OCD respectivement.
En utilisons l'homothétie, montrer que G_1, G_2 et G_3 sont alignés.

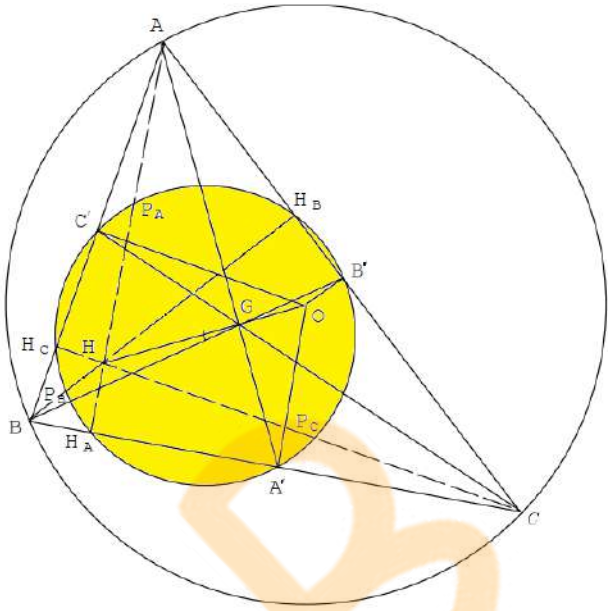


Exercice 17 : Cercle d'Euler

Si ABC est un triangle. Alors les milieux A', B' et C' de ses côtés, les milieux P_A, P_B et P_C des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$, où H est son orthocentre, et les pieds H_A, H_B et H_C des hauteurs. Sont sur un même cercle appelé le cercle d'Euler.
Le centre de ce cercle est le milieu de $[OH]$ où O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Démonstration :

Nous avons vu (Série 2/ Exercice 13) que l'orthocentre H, le centre de gravité G, et le centre du cercle circonscrit O d'un triangle sont situé sur une même droite appelé la droite d'Euler.
Et que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$
On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et R son rayon.



1) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$
On pose $h(O)=\Omega$ et on désigne par Γ' le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{R}{2}$

a) Montrer que $h(\Gamma)=\Gamma'$

b) Montrer que $h(A)=A'$, $h(B)=B'$ et $h(C)=C'$

c) En déduire que $A'\in\Gamma'$, $B'\in\Gamma'$ et $C'\in\Gamma'$

2) Vérifier que $\overrightarrow{G\Omega}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ puis montrer que Ω est le milieu du segment $[OH]$

3) Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$
On désigne par P_A, P_B et P_C les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$

a) Vérifier que $h'(O)=\Omega$

b) En déduire que $h'(\Gamma)=\Gamma'$

c) Montrer que $h'(A)=P_A$, $h'(B)=P_B$ et $h'(C)=P_C$

d) En déduire que $P_A\in\Gamma'$, $P_B\in\Gamma'$ et $P_C\in\Gamma'$

4) Soit (D_A) la droite parallèle à $(A'O)$ passant par Ω
On désigne par H_A, H_B et H_C les pieds de hauteurs issues de A, B et C respectivement.

a) Montrer que (D_A) est la médiatrice de $[A'H_A]$

b) En déduire que $\Omega H_A=\frac{R}{2}$ puis que $H_A\in\Gamma'$.

c) Démontrer que $H_B\in\Gamma'$ et $H_C\in\Gamma'$.

Application :

Soit I et I' les centres des cercles inscrits aux triangles ABC et $A'B'C'$ respectivement.
Montrer que les points I, G et I' sont alignés.

15

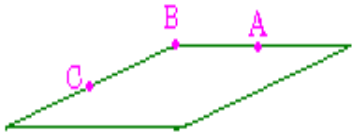
Géométrie de l'espace



1- التقاطع و التوازي في الفضاء

1.1 المستوى

ـ ثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C تحدد مستوى نرمز له ب : (ABC)



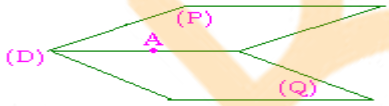
خاصيات

1ـ مستقيمان متقاطعان قطعا يحددان كذلك مستوى

2ـ مستقيمان متوازيان قطعا يحددان مستوى

3ـ مستقيم و نقطة خارجه يحددان مستوى

4ـ إذا كان لمستويين مختلفين نقطة مشتركة فهما يتقاطعان في مستقيم يمر من هذه النقطة .



5ـ جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صحيحة في كل مستوى من مستويات الفضاء.

2.1 الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

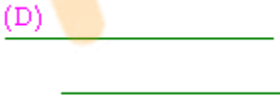
A ـ مستوائيان :

يوجدان ضمن نفس المستوى

فهما إما :

1ـ متوازيين :

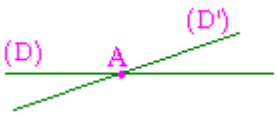
أ ـ متوازيان قطعا



ب ـ منطبقان



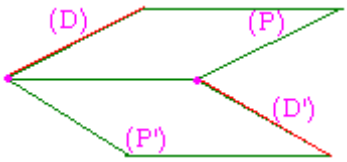
2 ـ متقاطعين :



B ـ غير مستوائيان

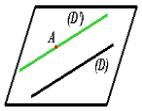
إذا كانا مستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين نقول إنهما غير مستوائيين.

(لا يوجدان ضمن نفس المستوى)

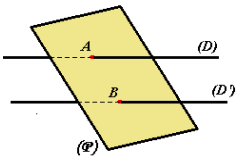


خاصيات

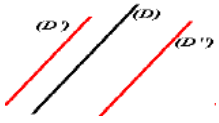
1. يوجد مستقيم وحيد يمر من نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما



2. إذا قطع مستوى أحد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الأخر.



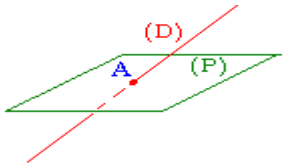
3ـ إذا كان مستقيمان متوازيان في الفضاء فإن كل مستقيم يوازي أحدهما يكون موازيا للأخر



3.1 الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

(D) مستقيم ضمن الفضاء و (P) مستوى ضمن الفضاء

1ـ المستقيم و المستوى يتقاطعان في نقطة



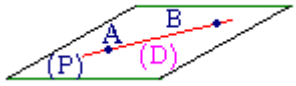
$(D)\cap(P)=\{A\}$

2ـ المستقيم و المستوى متوازيان $(D)\parallel(P)$

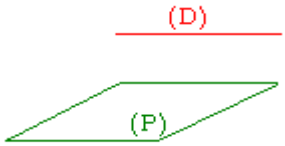
أ ـ منطبقان

يعني المستقيم ضمن المستوى

$(D)\subset(P)$



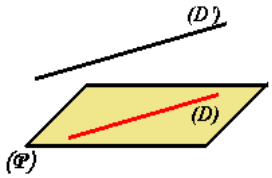
ب ـ متوازيان قطعا



$(D)\cap(P)=\varnothing$

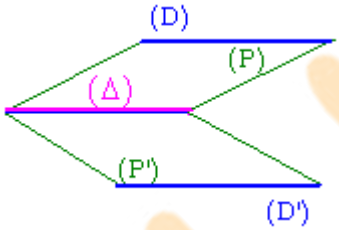
خاصيات

1ـ يكون مستقيم موازيا لمستوى إذا وجد ضمن هذا المستوى مستقيم يوازيه .



2ـ إذا توازى مستويان في الفضاء فان كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الأخر

3ـ مبرهنة السقف: إذا اشتمل مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا،فإن تقاطعهما هو مستقيم موازٍ لهذين المستقيمين المتوازيين.



4ـ إذا كانت نقطتان من مستقيم تنتميان إلى مستوى فان المستقيم المار منهما يوجد ضمن هذا المستوى

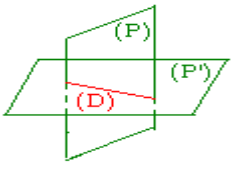
4.1 الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

(P) و (P') مستويان في الفضاء

(P) و (P') يكونان إما :

1ـ متقاطعين في مستقيم.

$(P)\cap(P')=(D)$

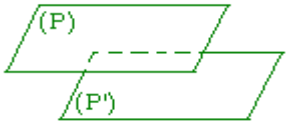


2ـ متوازيين $(P)\parallel(P')$

أ ـ منطبقين $(P)=(P')$



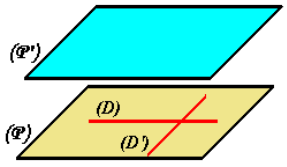
ب ـ متوازيان قطعا



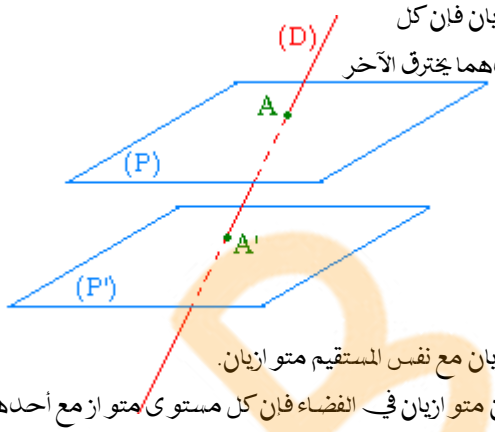
$(P)\cap(P')=\varnothing$

خاصيات

1. يكون مستويان متوازيين إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين و موازيين للمستوى الآخر



2. إذا توازى مستويان فان كل مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر



3. المستويان المتوازيان مع نفس المستقيم متوازيان.

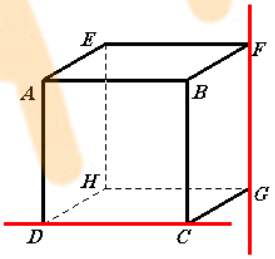
4. إذا كان مستويان متوازيان في الفضاء فان كل مستوى متوازٍ مع أحدهما يكون موازيا للأخر.

2- التعامد في الفضاء

1.2 المستقيمات المتعامدة في الفضاء

نقول إن مستقيمان متعامدين في الفضاء إذا وجد مستقيمان مستوائيان متعامدان موازيان لهما .

مثال: $ABCDEFGH$ ،مكعب



نلاحظ أنّ: المستقيمين (DC) و (FG) متعامدان، لأن

(DC) و (BC) مستوائيان و متعامدان في النقطة C ،و (BC) و (FG) متوازيان و (DC) يوازي نفسه.

خاصيات

1. إذا كان مستقيمان متعامدين في الفضاء فان كل مستقيم موازٍ لأحدهما يكون متعامدا مع الأخر.

2. إذا توازى مستقيمان في الفضاء فان كل مستقيم متعامد مع أحدهما يكون عموديا مع الأخر.

مثال : $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(DC)\perp(AE)$ و $(BF)\perp(GH)$

2.2 تعامد مستقيم ومستوى في الفضاء

نقول إن مستقيم عمودي على مستوى في الفضاء إذا كان عموديا على جميع مستقيمات هذا المستوى.

خاصيات

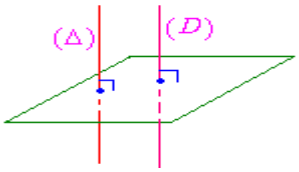
1. يكون مستقيم عموديا على مستوى في الفضاء إذا كان عموديا على مستقيمين متقاطعين ضمن هذا المستوى

مثال : $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(BF)\perp(ABC)$

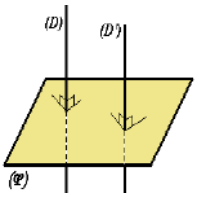
2. يكون مستقيمان متعامدان في الفضاء إذا كان أحدهما عمودي على مستوى يحتوي على الأخر.

مثال : $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(DC)\perp(AE)$ و $(BF)\perp(GH)$

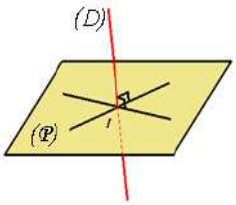
3. إذا توازى مستقيمان في الفضاء فإن كل مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر.



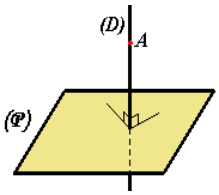
4. المستقيمان العموديان على نفس المستوى متوازيان



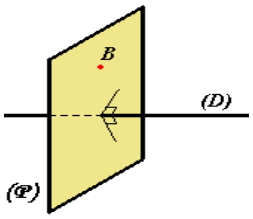
5. إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستوى فانه عمودي على كل مستقيمات هذا المستوى



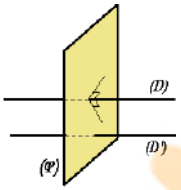
6. يوجد مستقيم وحيد يمر من نقطة معلومة ويعامد مستوى معلوم



7. يوجد مستوى وحيد يمر من نقطة معلومة ويعامد مستقيما معلوما

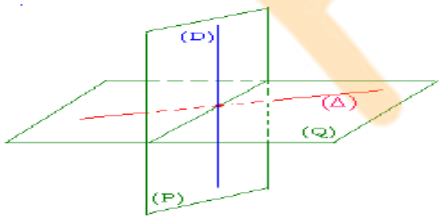


8. المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر



3.2 تعامد وتوازي مستويين في الفضاء

نقول إن مستويان متعامدين في الفضاء إذا وجد ضمن أحدهما مستقيم عمودي على المستوى الآخر

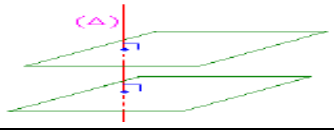


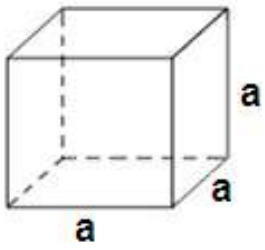
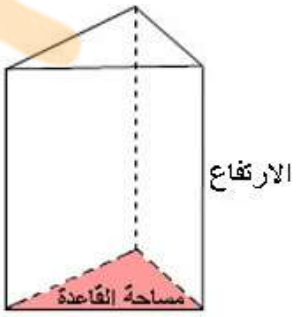
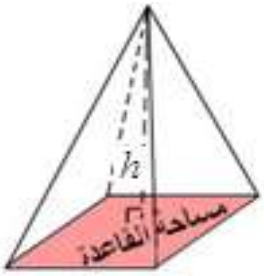
مثال : $ABCDEFGH$ مكعب. بين أن : $(DCD)\perp(ABG)$

خاصيات

2. إذا كان مستويان متعامدين مع نفس المستقيم فانهما يكونان متوازيان.

4. إذا توازى مستويان في الفضاء فان كل مستقيم عمودي على أحدهما يكون عموديا على الآخر.



المجسم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
مكعب طول ضلعه a 	$S_L = 4a^2$	$S_T = 6a^2$	$V = a^3$
متوازي مستطيلات أبعاده a و b و c 	$S_L = 2(ac + bc)$ أو $S_L = 2(ab + bc)$ أو $S_L = 2(ac + ab)$	$S_T = 2(ab + bc + ac)$	$V = abc$
موشور قائم إرتفاعه h 	$S_L = P_B \times h$ محيط القاعدة : P_B المساحة الجانبية : S_L	$S_T = S_L + 2 \times S_B$ مساحة القاعدة : S_B المساحة الكلية : S_T	$V = S_B \times h$
أسطوانة قائمة شعاعها R و ارتفاعها h 	$S_L = P_B \times h$ أي $S_L = 2\pi R \times h$	$S_T = S_L + 2 \times S_B$ أي $S_T = 2\pi R(R + h)$	$V = S_B \times h$ أي $V = \pi R^2 \times h$
هرم إرتفاعه h 	مجموع مساحات الأوجه الجانبية	$S_T = S_L + S_B$	$V = \frac{1}{3} S_B \times h$

ملاحظة هامة

قاعدة الهرم يمكن أن تكون مربعا أو مستطيلا أو خماسيا أو دائرة ....

بسم الله الرحمن الرحيم

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

سلسلة التمارين رقم 15

الهندسة الفضائية

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

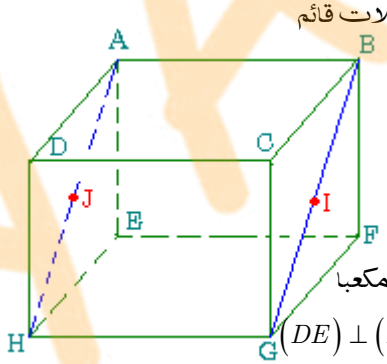
التمرين 1

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، النقطتان N و M منتصفا القطعتين $[BF]$ و $[AB]$ على التوالي.

1. أنشئ الشكل
2. بين أن $(CG) \perp (AB)$ و $(MN) \parallel (AF)$ و $(MN) \parallel (DG)$
3. بين أن المستقيمين (MN) و (EF) متقاطعان.
4. بين أن المستقيمين (MN) و (FG) غير مستوائيان.
5. بين أن $(MN) \subset (AEF)$ و $(EM) \parallel (DCG)$ و $(EH) \perp (MBN)$
6. بين أن المستقيم (EN) يقطع المستوى (ABC).
7. بين أن $(MBN) = (AEF)$ و $(NFG) \parallel (ADH)$ و $(MBC) \perp (AEH)$
8. بين أن المستويين (BCH) و (ADF) متقاطعان.

التمرين 2

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات قائم



1. بين أن $(AD) \perp (EF)$
2. ليكن I منتصف $[BG]$ و J منتصف $[AH]$

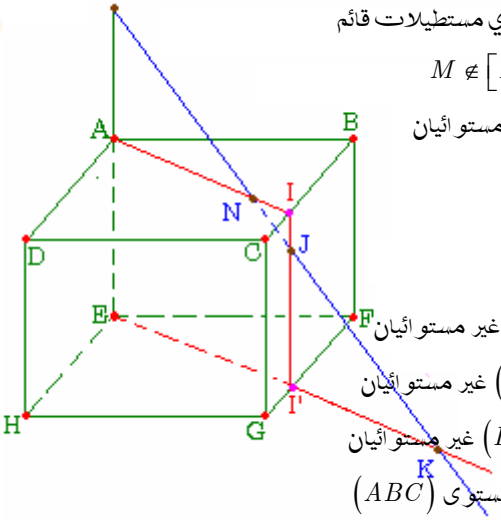
بين أن: $(IJ) \perp (AEH)$

3. بين أن إذا كان $ABCDEFGH$ مكعبا فإن: $(ABG) \perp (DCF)$ و $(DE) \perp (BG)$

التمرين 3

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم

$M \in [EA]$ بحيث $M \notin [EA]$



1. بين أن (MB) و (EF) مستوائيان واستنتج أنهما متقاطعان
2. نفس السؤال بالنسبة لـ: (MC) و (EG)
3. بين أن: (AB) و (EH) غير مستوائيان
4. بين أن: (EG) و (DC) غير مستوائيان
5. بين أن: (MB) و (DC) غير مستوائيان
6. لتكن N نقطة من المستوى (ABC)

أ. بين أن (MN) يقطع (EFG) و ارسم K نقطة تقاطعهما

ب. بين أن (MN) يقطع (CBF) و ارسم J نقطة تقاطعهما

7. ليكن O منتصف $[BH]$ بين أن: $G;O;A$ نقط مستقيمية
8. ارسم تقاطع (ACG) و (DBF)

التمرين 4

$ABCD$ مستطيل ضمن مستوى (P)

و (Δ) مستقيم عمودي على (P)

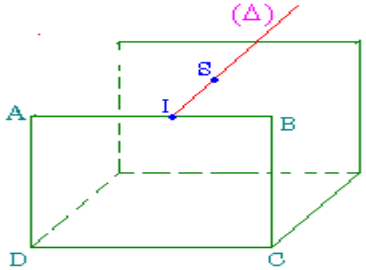
ويقطع $[AB]$ في I "$I \neq A; I \neq B$"

نعتبر نقطة S من (Δ) بحيث $(SA) \perp (SB)$

1) أ. بين أن: $(SAD) \perp (AD)$

ب. استنتج أ: $(SBH) \perp (SAD)$

2) أ. حدد (Δ') تقاطع (SAD) و (SBH) ثم أنشئه.



ب. بين أن: $(\Delta') \parallel (P)$

التمرين 5

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه I، M نقطة مخالفة للنقطة A وتنتمي إلى المستقيم المار من A والعمودي على المستوى (ABC) و J منتصف $[MC]$

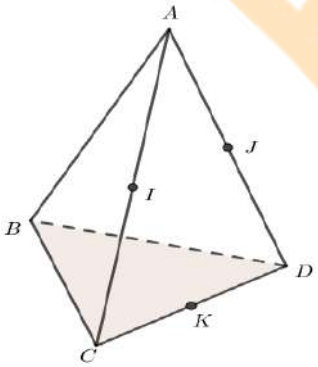
1. أنشئ الشكل
2. بين أن $(IJ) \parallel (MA)$
3. حدد تقاطع المستويين (JBD) و (MAC)
4. بين أن $(JBD) \perp (ABC)$

التمرين 6

نعتبر في الفضاء رباعي أوجه $ABCD$

I و J و K هي على التوالي منتصفات $[AC]$ و $[AD]$ و $[CD]$

و G مركز ثقل المثلث ACD



1. أ. بين أن النقط B و C و I و J غير مستوائية.

ب. حدد $(BCJ) \cap (BDI)$

2. أ. بين أن المستويين (BIJ) و (BCD) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) المار من B والموازي للمستقيم (CD)

3. أ. لنفترض أن المثلث BCD متساوي الساقين رأسه B وأن المستقيم (AK) عمودي على المستوى (BCD)

بين أن المستقيم (CD) عمودي على المستوى (ABK)

ب. استنتج أن $(BG) \perp (\Delta)$

Correction : https://drive.google.com/file/d/1-y6F8Yhbnug_r-VjYyKCI2QxNoqkl8ay/view?usp=sharing

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL6

TCSF
Mathématique
Aissa HIYAB

Dans l'exercice 1 les parties A), B), C) et D) sont indépendants et dans l'exercice 2 les parties A) et B) sont indépendants.

Exercice 1 (Produit scalaire)

A) ABC un triangle tel que $AB=3$, $AC=1$ et $cos(B\hat{A}C)=\frac{-1}{3}$

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que $BC=2\sqrt{3}$

3) Soit I le milieu du segment $[AB]$, calculer CI

4) a) Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que $cos(A\hat{C}B)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$ et F le milieu du segment $[BC]$

a) Ecrire $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$

b) En déduire que $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) Montrer que $DF=\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) Montrer que $(DF)\perp(AB)$

e) En déduire la nature du triangle ADF

6) En utilisant la formule de Héron, montrer que l'aire du triangle ABC est ADF



B) Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) tel que $AH=3$ et $A\hat{B}C=\frac{\pi}{6}$

1) Calculer les distances BA, CA, BC, BH et CH

2) On suppose que $AB=6$

Déterminer l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

a) $MA^2+MB^2=218$; b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=40$

C) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan montrer que :

1) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

2) $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

D) Soit m_1, m_2 et m_3 les médianes d'un triangle ABC. Montrer que

$m^2+{m_2}^2+{m_3}^2=\frac{3}{4}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$

Exercice 2 (Transformations)

A) Soit $ABCD$ un parallélogramme, I et J deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

1) Construire une figure convenable

2) Vérifier que $t_{\vec{u}}(I)=J$, $t_{\vec{u}}(A)=B$ et déduire que $t_{\vec{u}}((AI))=(BJ)$

3) a) Soit h une homothétie, montrer que $h((BA))\|(DC)$

b) On suppose que $h(B)=C$ montrer que $h((BA))=(DC)$

(remarquer que $B\in(BA)$)

4) Dans la suite de cette partie on suppose que $h(B)=C$ et que I est le centre de h.

a) Montrer que le rapport de h est $k=-2$.

b) Soit E l'image de J par h.

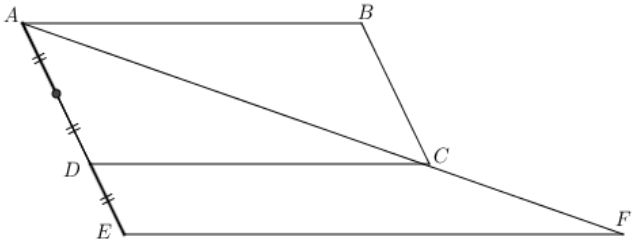
Montrer que $\overrightarrow{EC}=-2\overrightarrow{JB}$, $\overrightarrow{EI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$

5) Soit F le point d'intersection des droites (BA) et (ID), montrer que $h(F)=D$

6) On pose $h(A)=A'$ montrer que les points D, C et A' sont alignés.

B) Soit $ABCD$ un parallélogramme, E le point du plan tel que : $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Soit F la projeté de E sur (AC) parallèlement à (DC)



On considère l'homothétie h de centre A tel que $h(D)=E$

1) Montrer que le rapport de l'homothétie h est $k=\frac{3}{2}$

2) Déterminer l'image du point C par l'homothétie h

3) En déduire la distance EF on fonction de DC

4) Soit J l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

a) Montrer que $h(B)=J$

b) En déduire que $(BD)\|(JE)$

Exercice 3 (Géométrie de l'espace)

Exercice 1 de la série 15

Correction : https://drive.google.com/file/d/14LBed-CdwLj8brEzuuPXcpPJx9KZJ9jE/view?usp=sharing

Mathématiques

Tronc commun sciences et tronc commun technologique

Programme Marocain-BIOF

15 cours bien détaillés

15 résumés bien précis

15 séries d'exercices corrigées

6 devoirs libre corrigés

Exercices et stratégies d'olympiades

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques

Première année Bac sciences expérimentales

Programme Marocain-BIOF

12 cours bien détaillés

12 résumés bien précis

12 séries d'exercices corrigées

6 devoirs libre corrigés

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques

Première année Bac sciences mathématiques

Tome 1

Programme Marocain-BIOF

12 Cours bien détaillés

12 Résumés bien précis

12 Séries d'exercices

6 Devoirs libre

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques

2BSM A&B

Tome 1

Programme Marocain-BIOF

Rappel des cours

Séries d'exercices et problèmes

Devoirs libre

Extraits du bac

Révision et examens blancs

Astuces pour les concours

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant