Thierno Korka DIALLO
Ingénieur Polytechnicien - Diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

COLLECTION CRACKS

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

# Mathématiques

## Recueil de devoirs

## 2nde S

Seydou Diop

158 exercices classés en 20 devoirs

EXERCICES CORRIGÉS

EDITION 2019 — ib

# Collection NASAA

# Mathématiques

# 2nde S

# Recueil de devoirs


**AUTEUR**

**Thierno Korka DIALLO**

Ingénieur Polytechnicien - Diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès – Directeur Technique de SENESAC





Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

# Préface

Ce livre s'adresse aux élèves de Seconde S.

Il est conçu et structuré pour aider l'élève à surmonter les difficultés auxquelles il est confronté dans son travail mais aussi de se mesurer à un niveau de difficulté supérieure.

Il comprend 158 exercices variés, divisés en 20 sujets et classés suivant leur pertinence et leur niveau de difficulté.

Toutefois, il est clair que ce manuel ne saurait se substituer aux professeurs dans leurs enseignements, ni empiéter sur les programmes ultérieurs, mais il vient en appoint aux activités déjà effectuées en classe.

J'espère que cet ouvrage atteindra le principal objectif pour lequel il a été conçu à savoir constituer un répertoire d'exercices pour le travail crypto-personnel des élèves afin d'améliorer le niveau des élèves en mathématiques.

Ce document est perfectible. Toute suggestion ou jugement inspirés par une critique vraiment scientifique est pour moi le bienvenu. Envers les préjugés de ce qu'on appelle « l'opinion publique », à laquelle je n'ai jamais fait de concessions, j'ai pour devise, après comme avant, la parole du Grand Florentin : Suis ton chemin et laisse dire les gens.

« Un vrai génie est un vrai rêveur. Mais le vrai génie est celui qui parvient à transformer ses rêves en réalité »

Thierno Korka DIALLO

Thiès, le 28 Août 2017

# Remerciements

Parmi ceux qui m'ont fait bénéficier de leur avis, de leurs conseils et de leur expérience, je souhaite remercier **M. Andrey GAVRILYUK**, mathématicien russe et médaillé d'or (classé 1er) aux Olympiades Internationales de Mathématiques de 2007, mon ami, frère et cousin **Mamadou Dian DIALLO**, brillant étudiant en doctorat de mathématiques à l'université de Ziguinchor, pour ses précieuses contributions, **M. Ibnou Abasse NDIAYE,** professeur de mathématiques au lycée Blaise DIAGNE, **M. Modou FAYE** professeurs de Mathématiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor, pour son soutien, **mon professeur de mathématiques en TSI M. Ibrahima DIAO** (lycée Djignabo), **M. Ismaïla FATY** (lycée Djignabo), **M. Moussa FALL** professeur de Mathématiques au Lycée Elhadj Omar Lamine Badji de Ziguinchor. Je tiens également à honorer ma dette contractée auprès de mes anciens professeurs des Sciences Physiques notamment **M. Mafal FALL**, ancien professeur de Sciences Physiques au Lycée Djignabo de Ziguinchor, secrétaire général du syndicat RÉEL, **M. Babacar POUYE** (lycée Djignabo), **M. Yaya THIAM** (lycée Djignabo), **M. Daouda SOW** (lycée Djignabo), **M. Abdou GUENE** (lycée Djignabo), **M. Feu Ousmane FALL,** Paix à son âme (lycée Djignabo), **M. DIAKITÉ** (LSLL), **Messieurs YAGUE** et **FAYE** professeurs de Sciences Physique au Lycée Elhadj Omar Lamine BADJI.

J'adresse des remerciements particuliers à **M. Waly NDIAYE** (lycée de Saly), **M. CISSE** (lycée Demba DIOP), **M. FALL** (Maison d'Education Mariama BA), **M. Omar Kata NIASS** (lycée Taiba Niassène), **M. DINE NDIAYE** pour son soutien constant, **M. NGOM** (lycée Saydou Nourou TALL), **M. Mouhamadou KA** (lycée de Ouakam), **M. DIONE** (lycée Seydina limamoulaye).

J'adresse des remerciements particuliers à de brillants élèves ingénieurs polytechniciens : **M. Saer DIA, M. Elhadj Baba THIAM, M. Samba CISSE** pour leur soutien constant.

J'adresse mes remerciements particuliers à mes amis et camarades de Promotion de TSI : **Khadim NDIAYE, Salimata Dédji MANE** et **Maïmouna BALDE**.

## Contacts de Thierno Korka DIALLO

**Téléphone (Sénégal)** : (+221) 77 465 32 33 — **Mail** : korka1991@yahoo.com

**Page facebook** : Club de l'Excellence — **Groupe Facebook** : Les Amis du Club de l'Excellence

**Alerte 1** : *Un travail laborieux constellé d'ardues journées et nuits entières a été consacré pour la rédaction de ce présent ouvrage et ceci dans la seule souche de la mise en gage de votre réussite.*

*Aidez-nous donc à nous soucier davantage de votre réussite, à vivre de notre passion en vous gardant de photocopier ce présent ouvrage.*

*Nous vous implorons de ne pas emprunter les sentiers battus de cet acte tant indigne qu'infâme qu'est la piraterie.*

**Alerte 2** : *Dans l'intention de ternir mon image, des éléments malintentionnés publient des « annales » en mon nom. De ce fait, Je décline toute ma responsabilité quant à l'utilisation par une tierce personne de mon nom ou de mes documents protégés à fins personnelles ou lucratives.*

# — Table des matières —


| DEVOIRS | ÉNONCÉS | SOLUTIONS |
|---|---|---|
| Devoir numéro 1 | Page 07 | Page 54 |
| Devoir numéro 2 | Page 09 | Page 59 |
| Devoir numéro 3 | Page 11 | Page 61 |
| Devoir numéro 4 | Page 13 | Page 67 |
| Devoir numéro 5 | Page 15 | Page 70 |
| Devoir numéro 6 | Page 17 | Page 79 |
| Devoir numéro 7 | Page 20 | Page 88 |
| Devoir numéro 8 | Page 22 | Page 96 |
| Devoir numéro 9 | Page 24 | Page 100 |
| Devoir numéro 10 | Page 27 | Page 106 |
| Devoir numéro 11 | Page 29 | Page 114 |
| Devoir numéro 12 | Page 32 | Page 119 |
| Devoir numéro 13 | Page 35 | Page 127 |
| Devoir numéro 14 | Page 37 | Page 132 |
| Devoir numéro 15 | Page 39 | Page 136 |
| Devoir numéro 16 | Page 41 | Page 142 |
| Devoir numéro 17 | Page 43 | Page 147 |
| Devoir numéro 18 | Page 45 | Page 154 |
| Devoir numéro 19 | Page 47 | Page 158 |
| Devoir numéro 20 | Page 50 | Page 164 |

# Première partie

# Enoncés

## Génie = 1% d'inspiration + 99% de transpiration

**Méditez ...**

" On ne peut jamais acquérir le savoir sans emprisonner son âme charnelle, sans la souffrance, la fatigue, la faim et la soif. Quiconque veut avoir la science doit tout lui donner. Entraîne-toi à la veillée nocturne, à la résistance à la faim et à la soif. Quiconque ne le cherche pas ainsi, ne l'aura point. Toi qui veux acquérir le savoir, révise à chaque fois, à chaque instant. "

**Cheikh Ahmadou BAMBA**



**Professeur Cheikh Anta DIOP**

Le professeur Cheikh Anta DIOP (1923 — 1986) fut un historien, anthropologue et homme politique sénégalais. Il a mis l'accent sur l'apport de l'Afrique et en particulier de l'Afrique noire à la culture et à la civilisation mondiale. Cheikh Anta DIOP a toutefois eu un indéniable rôle de visionnaire en ce qui concerne la place de l'Afrique dans l'histoire.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 1

# Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 01

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

« C'est parce que le savoir vient en dormant que celui-ci arrive si lentement »

Thierno Korka DIALLO

### EXERCICE 1

1) En utilisant le développement de $(a-b)^2$, démontrer que : $2ab \leqslant a^2+b^2$.

2) Montrer que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$.

3) Soient $a, b$ et $c$ sont des réels quelconques. Prouver que : $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

### EXERCICE 2

Calculer et donner le résultat sous la forme la plus simple possible.

1) $A = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{25}{7}$ 2) $B = \frac{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{7}}$ 3) $C = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{7}}}}$ 4) $D = \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

5) $E = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\left(1-\frac{3}{2}\right)$ 6) $F = \frac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}}$ 7) $G = \frac{1}{\frac{4}{5}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}$ 8) $H = \frac{2+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{2}}$

9) $I = \frac{1-\frac{4}{3}+\frac{1}{9}}{1+\frac{4}{3}-\frac{1}{9}}$ 10) $J = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1-\frac{1}{2}}{-2+\frac{1}{4}}$ 11) $K = \frac{8}{3} + \frac{5}{8} - \frac{4}{9}$ 12) $L = \frac{4-\frac{2}{3}}{5}$

### EXERCICE 3

Comparer les nombres $x$ et $y$ (sans utiliser de machine, mais les propriétés des inégalités) dans chacun des cas suivants :

a) $x = 3\sqrt{5}$ et $y = 2\sqrt{11}$ b) $x = 3+2\sqrt{2}$ et $y = 2+\sqrt{13}$

c) $x = \sqrt{8}+\sqrt{5}$ et $y = \sqrt{7}+\sqrt{6}$ d) $x = 2\sqrt{3}+\sqrt{7}$ et $y = \sqrt{11}+\sqrt{3}$

e) $x = 5+2\sqrt{3}$ et $y = 4+2\sqrt{5}$ f) $x = \sqrt{5}+\sqrt{7}$ et $y = \sqrt{12+2\sqrt{35}}$

## EXERCICE 4

Encadrer $x+y$, $x-y$, $xy$ et $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;-2]$.

## EXERCICE 5

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.

O est un point donné et M est le point tel que : $\overrightarrow{MO} = -3\overrightarrow{MG}$.

1) Démontrer que : $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$. Placer le point M.

2) Démontrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

## EXERCICE 6

On considère un losange ABCD dont les diagonales se coupent en O et tel que $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) = -54°$.
Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés suivants :

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BD}\right)$ $\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BD}\right)$ $\left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$ $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$ $\left(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\right)$ $\left(\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)$ $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OC}\right)$

## EXERCICE 7

Fanta dit à son frère Mahtar : « J'ai 6 fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. »

Mahtar lui répond : « Quand tu auras 6 fois l'âge que j'ai, la somme de nos âges fera 79 ans. »

Déterminer les âges de Fanta et de Mahtar.

## EXERCICE 8

Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit l'application $f$ du plan dans lui-même qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ fait correspondre le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases}x' = x + a\\y' = y + b\end{cases}$ avec $a$ et $b$ deux réels donnés.

1) Montrer que $f$ est une translation.

2) On suppose que $a = 1$ et $b = -3$. Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation : $x + 3y - 1 = 0$.

Trouver une équation de la droite $(\mathcal{D}')$ image de $(\mathcal{D})$ par $f$.

Devoir numéro 2

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 02

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Soient $a$ et $b$ deux réels non nuls tels que $ab > 0$. Montrer que :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$$

2) En déduire que : $\forall\, a > 0,\ a+\frac{1}{a} \geqslant 2$.

### EXERCICE 2

Simplifier :

1) $A = \frac{(a^2bc)^3}{(ab)^2}$ 2) $B = \frac{a^3b^2c^4}{(a^2bc^3)^2}$ 3) $C = \frac{a^{-3}b^4c}{ab^{-1}c^2}$

4) $D = \frac{a}{(bc)^2}\cdot\frac{a^4b^2}{(ba)^{-5}}$ 5) $E = A \times B \times C \times D$ 6) $F = \frac{4x^2y^3-(3xy)^2y}{x^2y^2(-2x^3)}$

7) $G = \frac{(-a)^7(b^3c^2)^4}{-b^3c(-a)^4}$ 8) $H = \frac{(a^2b^3)^{-2}}{(ab^2)^{-3}}$ 9) $I = \frac{(a^2b^3c)^2(a^3c)}{(ab)^4(c^2a)^2\,(bc)}$

### EXERCICE 3

1) On donne $F = 2x - y + 1$. Encadrer F sachant que $|x-1| < 0{,}02$ et $|y+1| < 0{,}05$.

2) Encadrer $x$, $y$, $x+y$ et $x-y$ et donner une valeur approchée de $xy$, de $\frac{x}{y}$ dans chacun des cas suivants.

a) $x \approx 0{,}197$ à $5.10^{-4}$ près ; $y \approx 22\,471\,000$ à $5.10^{-4}$ près ;

b) $x \approx 17{,}31$ à $5.10^{-3}$ près ; $y \approx 123{,}2$ à $2.10^{-4}$ près.

### EXERCICE 4

1) $|x-5| = 0$ 2) $|x+3| = -4$ 3) $|x^{2008} - 2009| = 1 - \sqrt{3}$

4) $\left|\left|3x-\frac{3}{4}\right|-6\right|=0$ 5) $|-2x+1|=3$ 6) $\left||x-1|+6\right|=0$

## EXERCICE 5

Soit ABÇ un triangle. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. Soit G le point tel que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$. En déduire que $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GA'}$.

2) Montrer de même que $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GC'}$.

3) En déduire que les trois médianes sont concourantes en G. (Le point G est appelé centre de gravité du triangle).

## EXERCICE 6

On considère un rectangle ABCD tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$. On note α la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

1) Construire les demi-droites D$x$ et D$y$ telles que : $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{Dx}\right)=\alpha$ et $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{Dy}\right)=-\alpha$.

2) Démontrer que les droites (D$x$) et (AC) sont orthogonales, et qu'il en est de même des droites (D$y$) et (DB).

3) Les demi-droites D$x$ et D$y$ coupent respectivement (AC) en E et F.
Démontrer que la droite (BD) est tangente au cercle passant par les points D, E, F. Démontrer de même que la droite (DF) est tangente au cercle circonscrit au rectangle ABCD.

4) Exprimer en fonction de α la mesure des angles non orientés EDF, DFE, et DAE.

## EXERCICE 7

Fred et Sarah sont les aînés d'une même et grande famille. Fred a deux fois moins de frères que de sœurs, tandis que Sarah a autant de sœurs que de frères.

Combien d'enfants y a-t-il dans cette famille ?

## EXERCICE 8

Interpréter, en utilisant une homothétie, les égalités vectorielles suivantes :

1) $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BA}$ 2) $2\overrightarrow{MN}=-5\overrightarrow{MP}$ 3) $3\overrightarrow{RS}=2\overrightarrow{RG}$

Devoir numéro 3

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 03

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Démontrer que :

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

2) Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels strictement positifs. Prouver que : $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

### EXERCICE 2

1) Ecrire sous la forme $2^m\,3^n\,5^p$ ($m$, $n$, $p$ entiers relatifs) l'expression suivante : $A = \frac{(0,09)^{-3}\times(0,16)^2\times 25}{(0,0075)^{-1}\times 810^3}$

2) Simplifier l'expression suivante : $B = \frac{a^8\times(b^2c^3d^{-1})^5}{-b^4c^2(ad^{-2})^3}$

### EXERCICE 3

1) Encadrer le nombre $x^2 + y^2 + 4x - 2y$ sachant que : $-5 < y < 2$ et $3 < x < 4$.

2) Encadrer chacun des nombres $xy$ et $x^2y$ sachant que : $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$.

3) Soit $C = -5u + 3$. Encadrer C sachant que $-3{,}58$ est une valeur approchée de $u$ à 0,01 près.

### EXERCICE 4

1) $\left|3 - \frac{x}{2}\right| = \frac{x}{3} + 6$

2) $|-5x + 1| = |5x - 8|$

3) $|3x + 4| = |x - 1|$

4) $|x| + |x - 1| = 5$

5) $|5x + 7| = |3 - 2x|$

6) $|5x - 3| = |x + 1|$

7) $|x - 1| = d(x\,;\,-6)$

8) $\left|\frac{5}{x} - \frac{x}{5}\right| + |3x^2 - 15x| = 0$

9) $d(x\,;3) = 2d(x\,;\,-1)$

### EXERCICE 5

Soit ABC un triangle non rectangle ; O le centre et r le rayon de son cercle circonscrit (C).

1) On considère le point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 3

a) Montrer que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC'}$, avec A', B', C' milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
b) En déduire que : (AH) ⊥ (BC) et (BH) ⊥ (CA).
Que représente alors le point H ?
2) On désigne par I, J, K les milieux de [AH], [BH], [CH] .Montrer que les segments [OH], [IA'], [JB'], [KC'] ont le même milieu Ω.
3) Montrer que : $\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{\Omega J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{\Omega K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.
En déduire que les points I, J, K appartiennent au cercle (C') de centre Ω et de rayon $\frac{r}{2}$.
4) Montrer que : $\overrightarrow{\Omega A'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{\Omega B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{\Omega C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.
En déduire que les points A', B', C' appartiennent au cercle (C').
5) On désigne par $A_1$, $B_1$, $C_1$ les pieds sur (BC), (CA), (AB) des hauteurs du triangle ABC.
Montrer que les points $A_1$, $B_1$ et $C_1$ sont éléments du cercle (C').
6) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que les points O, G et H sont alignés.
7) Les résultats précédents sont-ils vérifiés lorsque le triangle ABC est rectangle ? Faire par exemple une figure avec le triangle ABC rectangle en A.
Que dire des points O, G, H, Ω, lorsque le triangle ABC est équilatéral ?

**NOTES**

(i) (C') est appelé cercle d'Euler du triangle ABC.
(ii) Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, la droite (OH) est appelée droite d'Euler de ABC.

## EXERCICE 6

Soit $x$ un réel appartenant à $[0\,;\,1]$.

1) Montrer que $x^4 - 8x^3 \leqslant 0$ et $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \geqslant 0$.

2) Développer $\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2$ et en déduire que : $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x}$.

3) Développer $\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right)^2$ et en déduire que : $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \geqslant \sqrt{1+x}$.

4) Déduire des questions précédentes que $1 + \frac{x}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+x}$ à $\frac{x^2}{8}$ près.

5) **Application** : Donner une valeur approchée de $\sqrt{1,00005}$ à $3{,}125 \cdot 10^{-10}$ près.

## EXERCICE 7

1) Supposons que $x$ et $y$ soient deux réels satisfaisant le système suivant : $\begin{cases} 2^x - 2^y = 1 \\ 4^x - 4^y = \frac{5}{3} \end{cases}$

Déterminer $x - y$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $3^x + 4^x = 5^x$.

## EXERCICE 8

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts. Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A transformant B en C.

1) $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ 2) $\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ 3) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 04

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) On désigne par $\phi$ le nombre d'or : $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vérifier les égalités suivantes : $\phi^2 = 1 + \phi$, $\phi^{-1} = \phi - 1$ et $\phi^3 = 2\phi + 1$.

2) Calculer $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$. En déduire $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

### EXERCICE 2

Factoriser chacune des expressions suivantes :

a) $E = (a^2 + b^2 - 9)^2 - 4a^2b^2$

b) $F = (9x^2 - 12x + 4) + (x-3)^2 - (2x+1)^2$

c) $G = (x+y)^3 - x^3 - y^3$

d) $H = x + y + xy + 1$

e) $K = (x^2-1)^2 + (2x)^2$

f) $Q = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^2 - 4x - 4$

g) $I(x) = 2(3-x)(3+x) - 4(x+1)(2-x)$

h) $J(x) = (3x-1)^2 - 9$

### EXERCICE 3

1) Traduire la double inégalité : $2 \leqslant x \leqslant 5$ à l'aide de la valeur absolue.

2) Trouver $a$ et $b$ tels que l'intervalle $[a\,;\,b]$ ait pour centre 5 et pour rayon 2.

3) Traduire l'inégalité $|x - 7{,}3| \leqslant 0{,}001$ en langage de valeur approchée et d'incertitude.

### EXERCICE 4

Factoriser les expressions :

1) $P_1(x) = x^2 - 3x + 2$

2) $P_2(x) = x^2 - 4x + 3$

3) $P_3(x) = x^2 - 5x + 6$

4) $P_4(x) = x^2 - 4x + 4$

5) $P_5(x) = 3x^2 + 2x - 1$

6) $P_6(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

## EXERCICE 5

Soit A, B et C trois points non alignés. On définit les points M, N et P par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

1) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que les points M, N et P sont alignés et que N est le milieu de [MP].

3) Construire les point Q et R tels que $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Que peut-on dire des droites (MN) et (QR) ? Justifier.

## EXERCICE 6

On donne l'équation (E) du second degré : $mx^2 - (2m+3)x + (m-1) = 0$, $x$ étant l'inconnue et $m$ le paramètre réel.

1) Pour quelle valeur de $m$ l'équation est-elle du second degré ?

2) On suppose $m \neq 0$.

a) Calculer le discriminant $\Delta$ en fonction de $m$.

b) Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles (E) admette deux solutions distinctes.

c) Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles (E) admette deux solutions de signes contraires.

d) Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles (E) admette deux solutions positives.

e) Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles (E) admette deux solutions négatives.

f) Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles (E) admette deux solutions opposées.

g) Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles (E) admette deux solutions inverses.

## EXERCICE 7

Afin d'encourager son fils à étudier la géométrie, tonton Bouba accepte de lui donner 100 F CFA pour chaque problème correctement résolu. Mais il lui prend 50 F CFA dans le cas contraire. Après 26 problèmes, le garçon obtient 500 F CFA. Déterminer le nombre de problèmes qu'il a correctement résolus et celui des problèmes qu'il n'a pas correctement résolus.

## EXERCICE 8

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts tels que $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{BC}$. Déterminer le rapport de :

1) L'homothétie de centre A qui transforme C en B.

2) L'homothétie de centre B qui transforme A en C.

3) L'homothétie de centre C qui transforme A en B.

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 05

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

Soit deux réels strictement positifs $x$ et $y$.

1) Démontrer que : $\frac{1}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2xy}$ et que $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$.

2) Soit trois réels $a$, $b$, $c$, strictement positifs. Démontrer que :

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

### EXERCICE 2

Rendre plus simple les expressions suivantes :

1) $A = \sqrt{6^2+8^2}$

2) $B = \left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

3) $C = \frac{3\sqrt{60}-7\sqrt{15}}{\sqrt{500}-\sqrt{405}}$

4) $D = \sqrt{27}-5\sqrt{12}+\sqrt{300}$

5) $E = \frac{5}{3-\sqrt{2}}-\frac{8}{3+\sqrt{2}}$

6) $F = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}}$

7) $G = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

8) $H = \frac{1-5\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}+\frac{1+5\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$

9) $I = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}}$

### EXERCICE 3

Compléter les phrases suivantes :

1) Si $x = 8{,}754$, alors l'arrondi d'ordre 0 de $x$ est égal à.....

2) Si $x = 2{,}4905$, alors l'arrondi d'ordre 0 de $x$ est égal à .....

3) Si $x = 10{,}6542$, alors l'arrondi d'ordre 0 de $x$ est égal à.....

4) Un ordre de grandeur du nombre 29857 est.....

5) Un ordre de grandeur du nombre 185378 est.....

6) Un ordre de grandeur du nombre 0,007374 est .....

## EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $9(x-1)^2-(x-4)^2=0$ 2) $x^2-100=0$ 3) $2x^2+2x-3=0$

4) $(x-4)(x+7)-(2x+3)(x+7)=0$ 5) $x^2+2x-3=0$ 6) $(x+1)^2=(x+1)$

7) $x^2+2x+1=(2x-3)(x+1)$ 8) $x^2-2x-5=0$ 9) $4x^2-3x-10=0$

10) $(x-2)^4-5(x-2)^2+6=0$ 11) $-3x+x^2\sqrt{3}+3=0$ 12) $x+3\sqrt{x}-1=0$

## EXERCICE 5

On considère trois points A, B, C non alignés affectés des coefficients respectifs 1, 2, et $-3$.

1) Ces points pondérés ont-ils un barycentre ?

2) Montrer que lorsque M se déplace dans le plan, le vecteur $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$ reste constant. On note $\vec{u}$ ce vecteur constant. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$.

3) Construire les barycentres : A' de (B ; 2) et (C ; $-3$) ; B' de (C ; $-3$) et (A ; 1) et C' de (A ; 1) et (B ; 2).

Démontrer que $\vec{u}=-\overrightarrow{AA'}=-2\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{CC'}$.

Que peut-on en déduire pour les droites (AA'), (BB') et (CC') ?

## EXERCICE 6

Soit l'équation (E) d'inconnue réelle $x$ : $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=0$

1) a) Montrer que 0 n'est pas solution de (E).

b) En déduire que (E) a les mêmes solutions que (E') : $x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

2) On pose $X=x+\frac{1}{x}$.

a) Montrer que $x^2+\frac{1}{x^2}=X^2-2$.

b) Montrer que si $x$ est solution de (E'), alors X est solution de l'équation (E'') : $X^2+10X+24=0$.

3) Résoudre (E''), puis en déduire les solutions de (E).

4) Utiliser la même méthode pour résoudre l'équation : $2x^4-9x^3+8x^2-9x+2=0$.

## EXERCICE 7

Résoudre les systèmes d'inéquations suivantes :

1) $\begin{cases} x+2y\geqslant 9 \\ 3x-2y\geqslant 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y\leqslant 9 \\ 3x-2y\geqslant 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y\leqslant 9 \\ 3x-2y\leqslant 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-5y\geqslant 5 \\ -3x+y<3 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x<y-5 \\ x+y\geqslant 13 \end{cases}$. 6) $\begin{cases} 2x+y-3<0 \\ -4x+y+9>0 \end{cases}$

## EXERCICE 8

On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] et M un point du plan. Construire l'image de M par l'homothétie qui transforme A en C et B en D.

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 06

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Montrer que pour tous réels $a$ et $b$, $|a+b|^2 \leqslant |a|^2 + 2|ab| + |b|^2$.

(On rappelle que pour tout réel $a$, $|a|^2 = a^2$ et $a \leqslant |a|$).

En déduire que $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (inégalité triangulaire).

2) a) Appliquer l'inégalité triangulaire à $(a+b)+(-b)$ puis à $(a+b)+(-a)$.

b) En déduire que : $-|a+b| \leqslant |a| - |b|$ et $|a| - |b| \leqslant |a+b|$.

c) Etablir ainsi que pour tous réels $a$ et $b$, $||a| - |b|| \leqslant |a+b|$.

### EXERCICE 2

1) Etudier le signe, puis calculer les carrés des réels suivants :

$$X = \sqrt{5} - \sqrt{6} \quad ; \quad Y = \sqrt{5} - \sqrt{2} \quad ; \quad Z = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

2) En déduire une écriture simplifiée des nombres :

$$A = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} \quad ; \quad B = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} \quad ; \quad C = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

### EXERCICE 3

Soit $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$ des nombres réels, $a$ un nombre réel non nul et $f$ le polynôme défini pour tout nombre réel $x$ par : $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

1) On considère la propriété (P) pour tout nombre réel $x$ non nul : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$.

a) Démontrer que si $f$ vérifie (P) et si $\alpha$ est racine de $f$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est également une racine de $f$.

b) Démontrer que $f$ vérifie la propriété (P) si et seulement si $\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}$.

En déduire que 0 n'est pas une racine de $f$.

c) Soit le polynôme $f$ défini par $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$.

Mettre $f$ sous la forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.

2) On suppose désormais que $f$ vérifie la propriété (P).

a) Démontrer, pour tout nombre réel $x$ non nul, que :

$$\frac{f(x)}{x^2} = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + .b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c$$

b) Soit $\alpha$ un nombre réel non nul. Démontrer que $\alpha$ est une racine de $f$ si et seulement si $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ est une racine du polynôme g défini pour tout nombre réel X par : $g(X) = aX^2 + bX + c - 2a$

**Indication** : Utiliser le développement $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

c) **Application**

Soit $f$ et g définis par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 \; ; \quad g(x) = 6x^2 - 35x + 50$$

Calculer les racines de g puis celles de $f$.

## EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, on demande :
(i) De donner une représentation paramétrique de la droite (D).
(ii) De déterminer les points d'intersection de (D) avec les axes.
(iii) De tracer (D).

1) (D) passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

2) (D) passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

3) (D) passe par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et a pour coefficient directeur $-2$.

4) (D) a pour équation : $x + 2y - 3 = 0$.

## EXERCICE 5

Soit ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AC], J le milieu de [BD].

Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, et M le milieu de [LK]. Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1) Justifier l'existence du barycentre G du système : {(A ; 1), (B ; 2), (C ; 1), (D ; 2)}.

2) En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).

3) Montrer que G est en M, que M, I, J sont alignés et donner la position de M sur (IJ).

4) Faire une figure soignée où tous les points considérés sont reportés.

## EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ avec $m$ paramètre réel.

(a) $(2m+1)x-3>0$ (b) $(m^2-1)x-m<1$ (c) $mx-2(x+m)\geqslant x+1$

(d) $x^2-m<0$ (e) $x^2-m^2<0$ (f) $m^2x^2-m^2>0$

## EXERCICE 7

1) Développer $g(x)=(x-2)(x+6)$ puis résoudre l'équation $g(x)=0$.

2) Etudier le signe de $g(x)$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}$.

3) Trouver le domaine de définition de chacune des fonctions :

a) $f_1(x)=\frac{1}{g(x)}$ b) $f_2(x)=\frac{1}{|g(x)|}$ c) $f_3(x)=\sqrt{g(x)}$ d) $f_4(x)=\frac{1}{\sqrt{|g(x)|}}$

4) Démontrer que, quels que soient $a$ et $b$ : $g(a)-g(b)=(a-b)[(a+2)+(b+2)]$.

5) En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

## EXERCICE 8

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère l'application $h$ du plan dans lui-même, qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}2x-1\\2y+3\end{pmatrix}$.

1) Démontrer qu'il existe un unique point I tel que $h(I)=I$.

2) Démontrer que $h$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 07

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que : $a+b+c=0$. On pose $U = ab+bc+ca$ et $V = abc$.

Le but de l'exercice est de démontrer que :

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{5}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{5}\right)$$

1) Montrer que : $a^2+b^2+c^2 = -2U$.

2) Montrer que pour tout réel $x$, on a : $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3+Ux-V$.

3) En déduire les égalités suivantes :

$$a^3 = V-aU \quad ; \quad a^4 = aV-a^2U \quad ; \quad a^5 = -UV+aU^2+a^2V$$

4) À l'aide des égalités précédentes, montrer que :

$$a^3+b^3+c^3 = 3V \; ; \quad a^4+b^4+c^4 = 2U^2 \quad ; \quad a^5+b^5+c^5 = -5UV$$

5) En déduire que :

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)$$

### EXERCICE 2

1) Soit $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. Calculer $A^2$ et en déduire une expression plus simple de A.

2) Soit $A = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$. Calculer $A^2$. En déduire une expression simple de A.

CE $\Sigma\pi\int$

## Devoir numéro 7

### EXERCICE 3

1) Compléter le tableau suivant :

| | En termes de | | | |
|---|---|---|---|---|
| | valeur absolue | Distance | Intervalle | Encadrement |
| 1) | $\lvert 5-x\rvert \leqslant 3$ | | | |
| 2) | | $d(x;-4)>2$ | | |
| 3) | | | $x \in [2;4]$ | |
| 4) | | | | $-2 \leqslant x \leqslant 2$ |

2) On pose $X = \frac{a}{1+a^2}$ où $a$ est un réel positif. Prouver que l'on a : $0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}$.

### EXERCICE 4

1) $\left|\frac{x^2}{5}-5\right| + |x^3-25x| = 0$

2) $|3x-1| + |5-x| = x+6$

3) $|5x+7| - 3|3-2x| = x-4$

4) $|x+1| + |-2x+1| = 7$

5) $|3x-1| + |x+1| = 1$

6) $|2x-3| + |3x-5| = x-1$

7) $|2x-3| + |3x-5| = |x-1|$

8) $|-2x+6| + |-x+1| = 0$

9) $|5x+10||x-2| = 5x+10$

10) $|-2x+6| - |-x+1| = 3$

11) $|x^2-1| + |x+1| = 0$

12) $|x-1| + |x+1| = 0$

### EXERCICE 5

On donne deux points A et B et on appelle I le milieu de [AB].

1) Démontrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.

2) Dans cette question, on suppose AB = 4. Déterminer, suivant la valeur de $k$ (constante donnée), l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M tels que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$.

3) Quel est l'ensemble obtenu pour $k = 0$ ?

### EXERCICE 6

Soit l'équation : $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$.

1) Etudier suivant les valeurs de $m$ l'existence et le signe des racines.

2) Déterminer $m$ pour que l'une des racines soit le triple de l'autre.

3) Montrer que les racines vérifient alors la relation : $3(x_1+x_2)^2 = 16x_1x_2$.

4) La réciproque est-elle exacte ?

### EXERCICE 7

Etudier la parité des fonctions $f$ et g définies par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ et $g(x) = \frac{3x}{x^2+1}$.

Devoir numéro 8

# Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 08

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Ecrire, dans chacun des cas suivants, le réel A sous forme scientifique :

a) A = 9 19 631770 b) A = 27 000 000 000000

c) A = 0,000 007 277 d) A = 12 420 000

e) A = 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 662 62 (constante de Planck, en joule seconde).

2) Ecrire, dans chacun des cas suivants, le réel B sous forme décimale :

a) $B = 4{,}168\times10^{-3}$ b) $B = 6{,}429793\times10^{-2}$ c) $B = 2{,}051738\times10^{2}$

d) $B = 264{,}5872\times10^{-6}$ e) $B = 5{,}258\times10^{6}$ f) $B = 37{,}00025\times10^{-1}$

### EXERCICE 2

Déterminer E∩F et E∪F dans chacun des cas suivants :

a) $E = \{x, x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 2\}$ | $F = \{x, x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leqslant 2\}$

b) $E = \{x, x \in \mathbb{R} \ \ |x| < 5\}$ | $F = \{x, x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\}$

c) $E = \{x, x \in \mathbb{R} \mid |x+3| < 2\}$ | $F = \{x, x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leqslant 3\}$

### EXERCICE 3

1) Calculer cos$x$ et tan$x$, sachant que $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Sachant que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, calculer $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3) Calculer sans l'aide d'une calculatrice les sommes suivantes :

a) $S = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ b) $S' = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

### EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble $(D_m)$ des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ qui vérifient l'équation : $(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0$

Devoir numéro 8

1) Montrer que, quel que soit $m \in \mathbb{R}$, $(D_m)$ est une droite.
2) Dans chacun des cas suivants, trouver $m$ pour que :
a) $(D_m)$ passe par $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
b) $(D_m)$ passe par l'origine du repère.
c) $(D_m)$ soit parallèle à l'axe des abscisses.
d) $(D_m)$ soit parallèle à l'axe des ordonnées.
e) $(D_m)$ ait pour coefficient directeur $-1$.
f) $(D_m)$ soit parallèle à la droite d'équation $x - 3y - 5 = 0$.
3) Existe-t-il un point commun à toutes les droites $(D_m)$ ?

## EXERCICE 5

1) Construire un triangle ABC tel que AC = 12, BA = 10, et CB = 8 puis placer le barycentre G de (A ; 1), (B ; 2) et (C ; 1).
2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$
3) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$
a) Montrer que B appartient à (E).
b) Déterminer et représenter l'ensemble (E).
4) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$$

## EXERCICE 6

Soit (E) : $(m-1)x^2 + (2m-4)x + m + 1 = 0$.

1) Etudiant l'existence et le signe des racines de (E).

2) Déterminer une relation indépendante de $m$ liant les racines $x_1$ et $x_2$ de (E) au cas où elles existent.

3) On suppose $m = 0$. Sans chercher les racines $x_1$ et $x_2$ de (E) déterminer $(x_1 - x_2)^2$, $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1}$.

## EXERCICE 7

On considère la fonction $f$, définie par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

1) Calculer le taux de variation de $f$ entre deux réels $a$ et $b$.

2) Prouver que le taux de variation calculé au 1) est positif si $a$ et $b$ sont supérieurs à 1, et négatif si $a$ et $b$ sont inférieurs à 1.

3) En déduire le sens de variation de la fonction $f$.

## EXERCICE 8

Soient deux points fixes et distincts A et B.

À tout point M, on associe le point M', image M par $f$, comme suit : $3\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

1) Construisez $f(A)$ et $f(B)$.

2) Démontrer qu'il existe un point Q invariant par $f$.

3) Exprimer $\overrightarrow{QM'}$ en fonction de $\overrightarrow{QM}$ et en déduire la nature de la transformation $f$.

Devoir numéro 9

# Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 09

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Calculer sous forme scientifique le réel :

$$X = \frac{2 \times 10^4 \times 3 \times 10^5 \times 7 \times 10^8 \times 0{,}3 \times 10^{-4}}{6{,}3 \times 10^5 \times 25 \times 10^{-4} \times 21 \times 10^3}$$

2) Calculer le nombre suivant et donner le résultat sous forme scientifique :

$$B = \frac{2 \times 10^{-3} - 2{,}6 \times 10^{-4}}{4{,}1 \times 10^{-2} + 19 \times 10^{-3}}$$

3) Déterminer le plus grand des deux nombres : $A = \frac{1{,}0000004}{(1{,}0000006)^2}$ et $B = \frac{(0{,}9999995)^2}{0{,}9999998}$.

### EXERCICE 2

#### Première partie

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs tels que $a \leqslant b$.

On appelle « moyenne arithmétique de $a$ et $b$ » le nombre réel $m(a,b) = \frac{a+b}{2}$. Le nombre réel $g(a,b) = \sqrt{ab}$ est appelé « moyenne géométrique de $a$ et $b$ » et le nombre réel $h(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$ est appelé « moyenne harmonique de $a$ et $b$ » et le nombre réel $q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ est appelé « moyenne quadratique de $a$ et $b$ ».

1) Calculer $m(2,4)$, $g(2,4)$, $h(2,4)$ et $q(2,4)$.

2) Montrer que : $a \leqslant h(a,b) \leqslant g(a,b) \leqslant m(a,b) \leqslant q(a,b) \leqslant b$.

3) Montrer que : $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

4) En déduire que, pour tous réels $a$, $b$ et $c$ on a :

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geqslant \sqrt{2}(a+b+c)$$

5) Montrer que pour tous réels $a$, $b$ et $c$ on a : $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

6) En déduire que, pour tous réels $a$, $b$ et $c$ on a : $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$.

**Deuxième partie**

Soient $x$, $y$ et $z$ les longueurs des côtés d'un triangle.

1) Montrer que :

$$x \geqslant \sqrt{x+y-z}\cdot\sqrt{x-y+z}\,;\ y \geqslant \sqrt{y+x-z}\cdot\sqrt{y+z-x}\,;\ z \geqslant \sqrt{y+z-x}\cdot\sqrt{x+z-y}$$

2) Montrer alors que : $xyz \geqslant (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

3) En déduire que : $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

## EXERCICE 3

Caractériser par une inégalité du type : $|x-a| \leqslant r$ ou $|x-a| \geqslant r$ ; $|x-a| < r$ ou $|x-a| > r$

$I_1 = [-1\,;3]$ ; $I_2 = ]-\infty\,;-1[\cup]3\,;+\infty[$ ; $I_3 = ]-5\,;-2[$ ; $I_4 = ]-\infty\,;-5[\cup]-2\,;+\infty[$

## EXERCICE 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A(−3 ; 4) et les droites $(D_1)$ d'équation : $3x+2y+15=0$ et $(D_2)$ de représentation paramétrique :

$$(D_2) : \begin{cases} x = -1-2k \\ y = 3+k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

1) Vérifier que A appartient à la droite $(D_2)$.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(D_3)$ perpendiculaire à $(D_2)$ en A.
3) Montrer que les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ sont sécantes en un point qu'on notera I. Déterminer les coordonnées du point I.

4) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AI).

## EXERCICE 5

Soit ABC un triangle quelconque.
1) Construire :
a) Le barycentre G de (A ; 3) et (B ; 3).
b) Le barycentre E de (B ; 3) et (C ; 1).
c) Le barycentre F de (A ; 3) et (C ; 1).
2) Soit I le barycentre de (A ; 3), (B ; 3) et (C ; 1). Démontrer que :
a) Les points A, I et E sont alignés.
b) Les points B, I et F sont alignés, ainsi que C, I et G.
Que peut-on en déduire pour les droites (AE), (BF) et (CG) ?
3) Construire le barycentre E' de (B ; 3) et (C ; −1).
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{E'G}$ et $\overrightarrow{GF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En déduire que E', F et G sont alignés.

4) Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles. Soit H le symétrique de A par rapport à B et K le point d'intersection des droites (E'H) et (EF). Montrer que $\overrightarrow{E'K} = \frac{3}{2}\overrightarrow{E'H}$.

## EXERCICE 6

On considère l'équation $(E_m)$ pour $m \in \mathbb{R}$ : $(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$.

1) Déterminer l'ensemble des réels $m$ tels que $(E_m)$ soit du second degré.

2) Résoudre l'équation pour $m = -2$.

3) Pour quelles valeurs de $m$, $(E_m)$ admet-elle deux solutions distinctes.

4) Pour quelles valeurs de $m$, $(E_m)$ admet-elle deux solutions positives.

5) Pour quelles valeurs de $m$, 2 est-il solution de $(E_m)$. Déterminer l'autre solution.

## EXERCICE 7

Soit $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.

2) Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$.

3) Déterminer une équation de $(C_f)$ dans le repère $\left(S\left(\frac{1}{2}\right), \vec{i}, \vec{j}\right)$.

## EXERCICE 8

Soit OAB un triangle isocèle de sommet principal O, tel que : mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

1) Déterminer les points : $r_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}(A)$ et $r_{\left(O,-\frac{\pi}{4}\right)}(B)$.

2) Construire, à la règle et au compas, les points :

a) $r_{\left(O,-\frac{\pi}{4}\right)}(A)$ b) $r_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}(B)$ c) $r_{\left(A,\frac{3\pi}{8}\right)}(B)$ d) $r_{\left(B,-\frac{3\pi}{8}\right)}(A)$ e) $r_{\left(B,\frac{3\pi}{8}\right)}(O)$ f) $r_{\left(A,-\frac{3\pi}{8}\right)}(O)$

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 10

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

Montrer que si $a, a', b, b', c$ et $c'$ sont positifs tels que : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors :

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$$

### EXERCICE 2

1) Soit $n$ un entier naturel non nul. Exprimer sous forme de quotient sans radical au dénominateur les nombres suivants :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \; ; \quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \; ; \quad \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} \; ; \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

2) En déduire une expression plus simple de :

### EXERCICE 3

Déterminer l'intersection (∩) et l'union (∪) des intervalles I et J.

a) $I = [3;5]$ ; $J = [4;6]$

b) $I = ]3;5]$ ; $J = [4;6[$

c) $I = [3;5[$ ; $J = [4;6[$

d) $I = [30;50[$ ; $J = [55;60[$

e) $I = [30;+\infty[$ ; $J = ]-\infty;60]$

f) $I = ]-\infty;5[$ ; $J = [-4;2[$

g) $I = ]-20;5]$ ; $J = [5;+\infty[$

h) $I = ]-20;5[$ ; $J = ]5;+\infty[$

i) $I = ]-20;5[$ ; $J = [5;+\infty[$

j) $I = ]0;5[$ ; $J = [0;+\infty[$

### EXERCICE 4

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

1) Déterminer une équation de la droite $(D_1)$, médiatrice de $[AB]$, et vérifier que $D\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ appartient à $(D_1)$.

2) Déterminer une équation de la droite $(D_2)$, hauteur issue de A dans le triangle ABC, et vérifier que $E\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ appartient à $(D_2)$.

3) Prouver que $(D_1)$ et $(D_2)$ sont sécantes et calculer les coordonnées de leur point d'intersection, noté F.

4) Calculer, au dixième de degré près, une mesure de l'angle aigu formé par les droites $(D_1)$ et $(D_2)$.

## EXERCICE 5

Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre I et M un point quelconque de ce cercle $(\mathcal{C})$.
Le point D est défini par : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{ID}$.

1) Prouver que les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM}$ sont nuls.

2) En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.

3) Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IG}$.

## EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1) $\frac{x+4}{2x-3} + \frac{2x-3}{x+4} = 2$

2) $-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x+\frac{1}{x}\right) - 2 = 0$

3) $\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{x}{x-1}$

4) $\frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{2} = 0$

5) $\frac{2x-2}{2x+1} = 2 - \frac{2x}{2x-1}$

6) $\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{6x+1}{3x-2}$

7) $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1}$

8) $\frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9} = \frac{x-5}{x-6} - \frac{x-6}{x-7}$

9) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = 0$

## EXERCICE 7

1) Représenter dans un même repère orthonormal sur l'intervalle $[-4 ; 3]$.

— La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2$.

— La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 10$.

2) Utiliser ces représentations graphiques pour résoudre graphiquement :

a) L'équation $(x+2)^2 = 5x + 10$.

b) L'inéquation $(x+2)^2 \leqslant 5x + 10$.

3) Retrouver les résultats précédents par le calcul.

## EXERCICE 8

Soit ABCD un rectangle tel que : $\text{mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$.

Construire à la règle et au compas l'image de ce rectangle par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 11

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 11

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Soit $x$ un nombre réel démontrer que : $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

2) En utilisant l'égalité précédente déterminez la valeur exacte de chacun des nombres :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \quad ; \quad A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

### EXERCICE 2

Soit $x$ un nombre réel quelconque.

1) Prouver que :

$$|(1-2x)^3 - (1-6x)| = x^2|12 - 8x|$$

2) On suppose que $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

a) Prouver que $|12 - 8x| \leqslant 16$.

b) En déduire que :

$$|(1-2x)^3 - (1-6x)| \leqslant 16x^2$$

b) Donner une valeur approchée du nombre $(0{,}9998)^3$ à la précision $16.10^{-8}$.

### EXERCICE 3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| = |\cos 2x|$ et placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) : $\begin{cases} x - y = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases}$

b) Sachant que le couple $\left\{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) ; \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right\}$ est solution de (S), préciser les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) ; \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) ; \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) ; \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

## EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Donner une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(4 ; 4)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

2) Donner une équation cartésienne de la droite (D) tangente au cercle en A(6,2).

3) On considère les points B(5 ; −1) et C(−1 ; 5). Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle en un point I dont on déterminera ses coordonnées.

4) Déterminer une équation de la droite $(D_1)$ passant par C et tangente au cercle autre que (BC).

5) On considère les points E(0, ½) et F(−4, ½). Soit M$(x, y)$ un point quelconque du plan.

a) Donner une équation cartésienne de l'ensemble (G) des points M du plan tels que $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 12$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (G).

b) Retrouver géométriquement les résultats de a) en montrant que $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = MK^2 - \frac{EF^2}{2}$ avec K milieu de [EF].

## EXERCICE 5

Résoudre dans R les équations suivantes :

(a) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ (b) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$ (c) $2x^4 + 11x^2 + 5 = 0$

(d) $x^4 + x^2 - 6 = 0$ (e) $14x^4 - 9x^2 + 1 = 0$ (f) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$

(g) $\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^2 + 2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) - 3 = 0$ (h) $x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$ (i) $x^4 + 4x^2 - 1 = 0$

(j) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$ (k) $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + 6\left(x - \sqrt{2}\right) + 9 = 0$ (l) $1 - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^4} = 0$

## EXERCICE 6

Déterminer les valeurs du nombre réel $m$ pour lesquelles le barycentre des points A et B affectés respectivement coefficients de $m$ et $m^2 + m + 1$ est le symétrique de A par rapport à B.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

## EXERCICE 7

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 4x + 7$.

1) Etudier le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$. On séparera le cas où $x < -2$ du cas où $x > -2$.

2) $f$ admet-elle un maximum ou un minimum? Si oui, calculer sa valeur.

3) Tracer $(C_f)$ sur l'intervalle $[-6 ; 2]$.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 2$.

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x + 1$.

## EXERCICE 8

Soit $(\Delta)$ une droite et O un point extérieur à cette droite.

1) a) Construire l'image $(\Delta')$ de $(\Delta)$ par le quart de tour direct de centre O. On écrira et justifiera le programme de construction.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $(\Delta)$ et $\vec{u}'$ un vecteur directeur de $(\Delta')$. Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ ?

2) Même question avec le quart de tour indirect de centre O.

Devoir numéro 12

# Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 12

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Calculer, pour tout $n$ entier supérieur ou égal à 2 :

$$A = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

2) Calculer :

$$B = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right).$$

3) Calculer en fonction de $n$ :

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

### EXERCICE 2

1) Montrer :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$$

2) Montrer :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad E(x) + E(x+y) + E(y) \leqslant E(2x) + E(2y)$$

### EXERCICE 3

Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

(a) $x^2 + 2x + 3$ (b) $x^2 - 4x + 8$ (c) $x^2 - x - 20$ (d) $2x^2 + 4x - 7$

(e) $4x^2 + 2x - 3$ (f) $-x^2 - \frac{1}{2}x + 3$ (g) $-x^2 + 4x - 8$ (h) $-3x^2 - 6x + 1$

(i) $3x^2 + 12x - 7$ (j) $-x^2 + x + 2$ (k) $-2x^2 - 2x + 5$ (l) $-2x^2 - 2x + 1$

## EXERCICE 4

Dans le repère orthonormal ci-dessous, placer les points A (3 ; 6) et B (0 ; 6).

1) On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points tels que : $2MA^2 + OM^2 - MB^2 = 68$.

a) Montrer que : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\mathcal{E}) \iff x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$.

b) En déduire que $(\mathcal{E})$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracer l'ensemble $(\mathcal{E})$.

2) Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $C\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et de rayon $\frac{5}{2}$. En donner une équation sous forme développée.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{C})$ ; on notera I celui dont l'ordonnée est la plus grande, et J l'autre point.

4) a) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{E})$ en J(0 ; −1) ; on note $T_J$ cette droite.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ en J ; on note $T'_J$ cette droite.

b) Montrer que ces deux droites sont perpendiculaires (On dit que les cercles sont orthogonaux).

## EXERCICE 5

On considère un triangle non aplati ABC de centre de gravité G.

1) Ecrire la relation vectorielle vérifiée par le point G.

2) Soit $f$ l'application du plan $\mathcal{P}$ dans V (ensemble des vecteurs du plan), définie pour tout $M \in \mathcal{P}$ par :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

a) Montrer que $\forall M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) Montrer que si $M_1$ et $M_2$ sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{f(M_1)} = \overrightarrow{f(M_2)}$ alors ils sont confondus. En déduire que G est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$.

3) Soient A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

a) Montrer que $\forall M \in \mathcal{P}$ : $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'C}$.

b) En déduire que $3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$.

c) En déduire que les trois médianes de ABC sont concourantes.

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 12

## EXERCICE 6

Déterminer sans calcul le signe des racines, lorsqu'elles existent, pour les équations :

a) $2x^2 + 7x - 11 = 0$ b) $-4x^2 - 3 + 6 = 0$ c) $4x^2 + 3x + m - 1 = 0$

d) $3x^2 + 8x + 1 = 0$ e) $5x^2 - 3x - 7 = 0$ f) $(m-2)x^2 + 4x - 7 = 0$

## EXERCICE 7

Soit $f$ la fonction définie sur $[-3 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$.

1) Démontrer que $f$ peut s'écrire : $f(x) = 2 - \frac{7}{x+5}$.

2) Démontrer que $f$ est croissante sur $[-3 ; +\infty[$.

3) a) Démontrer que $f$ admet un minimum, le préciser.

b) Démontrer que $f$ admet un majorant, en préciser un.

c) En déduire que $f$ est bornée et indiquer un encadrement de $f$.

## EXERCICE 8

Soit $(\Delta)$ une droite et O un point extérieur à cette droite.

1) a) Construire l'image $(\Delta')$ de $(\Delta)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On écrira et justifiera le programme de construction.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $(\Delta)$ et $\vec{u}'$ un vecteur directeur de $(\Delta')$. Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ ?

2) Même question avec la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 13

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 13

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Rendre rationnel le dénominateur de la fraction : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$, puis la mettre sous la forme d'une différence de deux fractions ayant toutes deux le nombre 1 pour numérateur.

2) **Application** : Calculer la somme : $S = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

### EXERCICE 2

Déterminer les nombres $x$ tels que :

1) $E\left(\frac{x}{3}\right) = -2$ 2) $E(5x-2) = 3$ 3) $E\left(\frac{1}{x}\right) = -4$ 4) $E(2x-1) = E(x-4)$

### EXERCICE 3

Démontrer que, pour tout réel t :

1) $(\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2\cos t \sin t$
2) $(\cos t - \sin t)^2 = 1 - 2\cos t \sin t$
3) $(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2$
4) $(\cos t + \sin t)^2 - (\cos t - \sin t)^2 = 4\sin t \cos t$
5) $\sin^4 t - \cos^4 t = \sin^2 t - \cos^2 t$
6) $\sin^4 t - \cos^4 t + 2\cos^2 t = 1$

### EXERCICE 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soient le point $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. On note (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1) Le point O appartient-il à (D) ? Le point $B\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ?

2) Donner une équation de (D) et la tracer. Quelles sont les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes ?

3) C est le point tel que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AO}$. Déterminer les coordonnées de C ainsi qu'une équation de la droite (BC). La tracer et déterminer son intersection avec (D).

4) Soit (D') la droite passant par $D\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et parallèle à (D). Donner une équation de (D'), la tracer et déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées de son point d'intersection K avec (BC).

5) Soit (δ) la droite d'équation $x + 2y - 4 = 0$. Déterminer son vecteur directeur ainsi que deux de ses points. Tracer (δ). Que peut-on en dire ? Déterminer ses points d'intersection avec (D) et (D').

Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

6) Montrer de trois manières différentes que la figure formée par (D), (D'), (δ) et (BC) est un parallélogramme.

## EXERCICE 5

1) Soit ABC un triangle de centre de gravité G.

a) Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) Soit O le milieu de [BC]. Montrer que pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{OA}$.

c) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $MA^2 + MB^2 = 10$ b) $MA^2 - MB^2 = 8$

## EXERCICE 6

Déterminer deux nombres, connaissant leur somme S et leur produit P.

a) S = 19 et P = 78 b) S = 21 et P = 104 c) S = 14a et P = 48a

d) S = 2a et P = $a^2 - 9$ e) S = 33 et P = 132 f) S = 42 et P = 416

## EXERCICE 7

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 - x)$.

1) Montrer que pour tout réel $x$, on a $f(x) \leqslant \frac{1}{4}$.

2) En déduire que la fonction $f$ admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.

3) Démontrer que $f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ et montrer que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; ½[$ et décroissante sur $]½ ; +\infty[$.

## EXERCICE 8

Soit ABCD un carré tel que mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note E, F, G et H les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et B en A. Déterminer son centre et son angle.

2) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme B en D et A en A. Déterminer son centre et son angle.

3) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en F. Déterminer son centre et son angle.

4) a) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en E. Déterminer son centre.

b) Soit α la mesure principale de son angle. Démontrer que $\tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = 2$. En déduire, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de α.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 14

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 14

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $|-2x+1|=3$ 2) $|3-2x|+2010=0$ 3) $|2x-4|+|5-x|=9$

4) $|x-4|=\frac{21}{5}$ 5) $|x-6|=10$ 6) $|3-3x|=5$

### EXERCICE 2

1) Sachant que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2) Sachant que $\cos t=\frac{4}{5}$ et $\sin t>0$, calculer $\sin t$ et $\tan t$.

3) Sachant que $\sin t=\frac{9}{41}$ et $\cos t<0$, calculer $\cos t$ et $\tan t$.

4) On donne $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

5) Sachant que $\tan t=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ et $\sin t<0$, calculer $\cos t$ et $\sin t$.

### EXERCICE 3

Former une équation du second degré, connaissant ses deux racines :

a) $x'=4$ et $x''=7$ b) $x'=3$ et $x''=-7$ c) $x'=m$ et $x''=2m-1$

d) $x'=212$ et $x''=16$ e) $x'=0$ et $x''=1$ f) $x'=-1$ et $x''=-1$

### EXERCICE 4

1) Compléter le tableau suivant, où $\ell$ désigne la longueur de l'arc de cercle de rayon R, intercepté par l'angle $\alpha$ mesuré en degrés :

| $\ell$ | | | $\frac{\pi}{4}R$ | | $\frac{2\pi}{5}R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 60 | 120 | | 30 | |

2) Compléter le tableau suivant, où $\ell$ désigne la longueur de l'arc de cercle de rayon R, intercepté par l'angle $\alpha$ mesuré en radians :

| $\ell$ | | | $\frac{\pi}{6}R$ | | $\frac{5\pi}{8}R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $2\pi$ | $\pi$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | |

## EXERCICE 5

Soit A, B et C trois points non alignés $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels vérifiant les conditions d'existence des barycentres suivants :

G barycentre de $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$

$G_1$ barycentre de $\{(A,-\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$

$G_2$ barycentre de $\{(A,\alpha)(B,-\beta)(C,\gamma)\}$

$G_3$ barycentre de $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,-\gamma)\}$

Démontrer que les droites $(AG_1)$, $(BG_2)$ et $(CG_3)$ sont concourantes en G.

## EXERCICE 6

On considère trois points A, B, C non alignés affectés des coefficients respectifs 1, 2, et −3.

1) Ces points pondérés ont-ils un barycentre ?

2) Montrer que lorsque M se déplace dans le plan, le vecteur $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$ reste constant. On note $\vec{u}$ ce vecteur constant. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$.

3) Construire les barycentres : A' de (B ; 2) et (C ; −3) ; B' de (C ; −3) et (A ; 1) et C' de (A ; 1) et (B ; 2).
Démontrer que $\vec{u}=-\overrightarrow{AA'}=-2\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{CC'}$.
Que peut-on en déduire pour les droites (AA'), (BB') et (CC') ?

## EXERCICE 7

Soient A, B et C trois points non alignés. On considère l'application $f$ définie par : $f:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ ; $M\longmapsto M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

1) Construire les points A' et B' images respectives de A et B par $f$.

2) Montrer que $f$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

## EXERCICE 8

Les points A et B ont pour coordonnées respectives (2 ; −3 ; 5) et (3 ; 1 ; −2) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $5\overrightarrow{BA}$.

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 15

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1) $|3x-2| = 4-5x$ 2) $\sqrt{(2x+3)^2} = x+1$ 3) $|2x-7| = x+4$

4) $|x+5| = x+5$ 5) $|2x+1| = -x+2$ 6) $|2x-2| = x-2$

7) $|x+2| = 3x-6$ 8) $|x-3| = 3-x$ 9) $|5x+3| = x+7$

### EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, calculer $\cos t$ et $\sin t$ sachant que :

1) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ et que $\tan t = 2$ 2) $-\frac{\pi}{2} < t < 0$ et que $\tan t = -\sqrt{3}$

3) $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ et que $\tan t = -\frac{1}{3}$ 4) $-\pi < t < -\frac{\pi}{2}$ et que $\tan t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

### EXERCICE 3

Déterminer la valeur de $m$ du paramètre de l'équation : $mx^2 + (2m-1)x + m - 3 = 0$ pour que l'on ait :

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 7$$

### EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants en utilisant un changement de variables convenable :

1) $\begin{cases} 7x + 8(y-1)^2 = 2 \\ 9x + 10(y-1)^2 = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7\sqrt{y} + \frac{8}{x-2} = 2 \\ 9\sqrt{y} + \frac{10}{x-2} = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7|x^2+2x| + 8y = 2 \\ 9|x^2+2x| + 10y = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=-7 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \\ \sqrt{x}-2\sqrt{y}=-3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4\frac{x-1}{x+2}+5\frac{y+1}{y-2}=-7 \\ 3\frac{x-1}{x+2}-2\frac{y+1}{y-2}=12 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4(x^2-2)+5(y^2-4)=-7 \\ 3(x^2-2)-2(y^2-4)=12 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{4}{2x-1}+\frac{3}{2(3y+2)}=21 \\ \frac{5}{6x-3}-\frac{2}{15y+10}=19 \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x-3)^2+y-2=8 \\ 3(x-3)^2+5y-10=-10 \end{cases}$

## EXERCICE 5

Soit ABC un triangle. On note $a, b, c$ les longueurs des côtés, O le centre du cercle circonscrit, R son rayon, et H l'orthocentre. Montrer que : $OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

## EXERCICE 6

1) Soit ABC un triangle, construire les points I, J et K définis par :
— I est le barycentre de (A ; 2) et (C ; 1).
— J est le barycentre de (A ; 1) et (B ; 2).
— K est le barycentre de (C ; 1) et (B ; −4).
2) Exprimer B comme barycentre de (K ; α) et (C ; 1) (α étant un réel à déterminer).
3) Quel est le barycentre de (A ; 2), (K ; 3) et (C ; 1) ?
4) Déduire du 3) que I, J, K sont alignés. Que représente J pour le segment [IK] ?
5) L étant le milieu de [CI] et E celui de [KC], démontrer que IJEL est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B et C.

## EXERCICE 7

Dans la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

## EXERCICE 8

On considère un tétraèdre SABC et un plan $(\mathcal{P})$ défini par trois points M, N, P tels que :

M ∈ [SA] et M ≠ A, M ≠ S ; N et P ne sont pas situés sur les arêtes du tétraèdre ; N appartient à la face SBC et P à la face SAC ; (MP) et (SC) sont sécantes en I extérieur au segment [SC] ; (MP) et (AC) sont sécantes en R appartenant au segment [AC].

1) Démontrer que le plan $(\mathcal{P})$ est sécant aux quatre faces du tétraèdre.

2) Construire, sur une figure en perspective, la section plane du tétraèdre par le plan $(\mathcal{P})$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 16

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $|5-x| \geqslant 3$ 2) $|x+2| < 3$ 3) $d(1\,;\,5x) < 2$

4) $|2-3x| < 4$ 5) $|2x+3| > 6$ 6) $|3x+8| \geqslant 2$

7) $|2x-1| < 2$ 8) $|2-x| > 3$ 9) $|x+3| \geqslant 2\sqrt{2}-3$

### EXERCICE 2

Résoudre par la méthode de substitution les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-5y=-21 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-3y=-48 \\ x+11y=16 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+5y=-9 \\ x+7y=-19 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=10 \\ xy=-16 \end{cases}$

### EXERCICE 3

Résoudre dans R les inéquations du seconde degré suivantes :

(a) $-3x^2+4x-\frac{4}{3} \geqslant 0$ (b) $-x^2-x-\frac{1}{4} < 0$ (c) $-4x^2-3x+1 \leqslant 0$

(d) $-x^2-4x-5 > 0$ (e) $-2x^2+3x+1 > 3x^2+5x-1$ (f) $-5x^2+4x-12 < 0$

(g) $(-x^2-7)(x^2-x-2) \geqslant 0$ (h) $x^2-x-15 \leqslant 0 \leqslant -x^2+3x+4$ (i) $-x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{36} > 0$

(j) $(x-1)^2+(3-x)^2 < 0$ (k) $x^2-4x+4 \leqslant 0$ (l) $-3x^2+4x-\frac{4}{3} \geqslant 0$

### EXERCICE 4

Démontrer les relations suivantes :

1) $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$

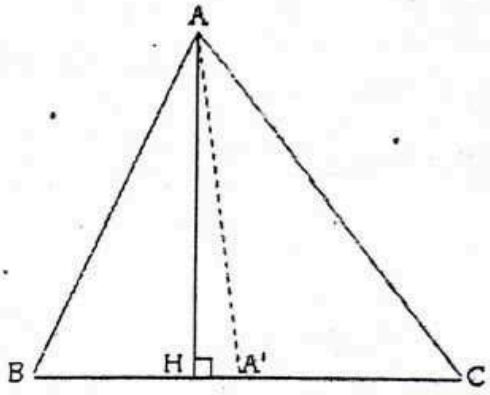
2) $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

3) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

4) $\tan 3x = \tan x \frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$

## EXERCICE 5

On donne, dans le plan $\mathcal{P}$, un triangle ABC, sa médiane (AA') et sa hauteur (AH).




1) Développer le carré scalaire $\left(\overrightarrow{BC}\right)^2$, en écrivant le vecteur $\overrightarrow{BC}$ de la forme $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

2) En déduire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

3) Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

4) En déduire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AA'^2 - \frac{1}{4}BC^2\right)$.

5) Montrer que : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH} \times \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BA}\right)^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

6) En déduire que : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = BA^2 - \overrightarrow{BH} \times \overrightarrow{BC}$.

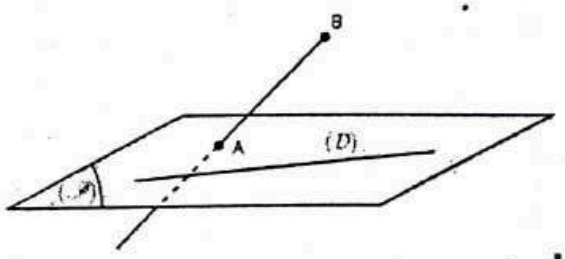
7) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AH}\right)^2 = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HB}\right) \cdot \overrightarrow{AC}$.

8) En déduire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH^2 + \overrightarrow{HB} \times \overrightarrow{HC}$.

## EXERCICE 6

Soit une droite $(\mathcal{D})$ et un point A n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$. Soit $(\mathcal{P})$ le plan défini par $(\mathcal{D})$ et A, B un point n'appartenant pas au plan $(\mathcal{P})$.

Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) ne sont pas coplanaires.




## EXERCICE 7

Soit ABC un triangle équilatéral tel que mes $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$, G son centre de gravité et A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB].

Déterminer deux couples de droites $((\Delta), (\Delta'))$ tels que la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ soit l'application « $S_{(\Delta)}$ suivie de $S_{(\Delta')}$ ».

## EXERCICE 8

Le polynôme $P(x) = x^3 - 14x + 8$ admet trois racines distinctes $a$, $b$ et $c$.

1) Sans les déterminer, calculer $a + b + c$, $abc$, $a^2 + b^2 + c^2$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

2) Calculer $P(-4)$ puis déterminer toutes les racines de $P(x)$ et le factoriser.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 17

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 17

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1) $|x-1| \geqslant 3x-2$
2) $|1-9x| < 2x+1$
3) $|1+3x| \leqslant x+2$
4) $|x+2|+|-x+3| \leqslant 5$
5) $|5x+7|-3|3-2x| > x-4$
6) $|x+6|+|x-10| \leqslant 16$
7) $|3-x| \geqslant |3+x|-2|x|$
8) $|2x-5| \leqslant |x-4|$

### EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $(2x-3)^2-(2x-3)(x^2+x+1) \leqslant 0$
(b) $(-9x^2+12x-4)(2x^2+x-6) > 0$
(c) $(2x^2-2x\sqrt{5}+1)(-2x^2-9x+5) \geqslant 0$
(d) $(3x+2)^2 < (x^2+5x+2)^2$
(e) $(3x^2-x+1)^2 \geqslant (2x^2+9x-4)^2$
(f) $(3x^2-x+1)^2 \leqslant (2x^2+9x-4)^2$

### EXERCICE 3

1) Montrer que : $16\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right)=1$

2) Montrer que : $\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{3}{2}$

3) Montrer que : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{25\pi}{8}\right)\cdot\sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)=1$

### EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $\frac{x+3}{2(x-1)} < \frac{3(x-8)}{x-5}$
(b) $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6} > -1$
(c) $\frac{3x^2-6x+4}{2x^2-x-1} > 2$
(d) $\frac{x+5}{3-x}-\frac{2x+1}{x+2} > \frac{23}{4}$
(e) $\frac{x-4}{x-1}-\frac{x}{3-x} \leqslant 1$
(f) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2x-3} \leqslant \frac{6}{6x-7}$
(g) $\frac{(x-1)(3x^2+x-10)}{1-2x} > 0$
(h) $\frac{x^2-x-20}{-x^2-5} < 0$
(i) $\frac{x^2-4}{x+1} \leqslant 0$

Thierno Kórka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 17

## EXERCICE 5

(ABC) est un triangle équilatéral et l'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

Soit G l'isobarycentre du triangle.

1) Montrer que :

$$GA^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$$

2) Déduire la valeur de :

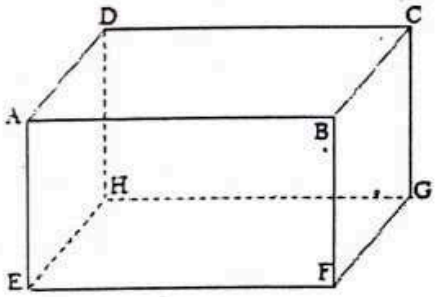
$$(b^2 - c^2)GA^2 + (c^2 - a^2)GB^2 + (a^2 - b^2)GC^2$$

3) Déterminer les points M du plan (ABC) tels que :

$$(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2$$

## EXERCICE 6

Soit le cube ABCDEFGH ci - contre :




1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ sont–ils coplanaires ?

2) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{HD}$ sont–ils coplanaires ?

3) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BC}$ sont–ils coplanaires ?

## EXERCICE 7

1) Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré 3, qui s'annule en 0 et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x+1) - P(x) = x^2$$

2) Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Démontrer que : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = P(n+1) - P(n)$.

b) En déduire que : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Vérifier ce résultat sur quelques exemples.

## EXERCICE 8

Prouver que, pour tous réels $x$ et $y$, on a : $5x^2 + y^2 + 4 \geq 4x + 4xy$
Pour quelles valeurs de $x$ et $y$ l'égalité a-t-elle lieu ?



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 18

# Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 18

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\frac{1}{1+\frac{3}{\frac{3}{|x+3|}-1}} = \frac{1}{7}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{1+\frac{3}{\frac{1}{4}+\frac{1}{|x+2|}}} \leqslant \frac{1}{7}$$

### EXERCICE 2

Sachant que $\sin t + \cos t = a$, démontrer que : $\sin^5 t + \cos^5 t = \frac{a}{4}(5 - a^4)$

### EXERCICE 3

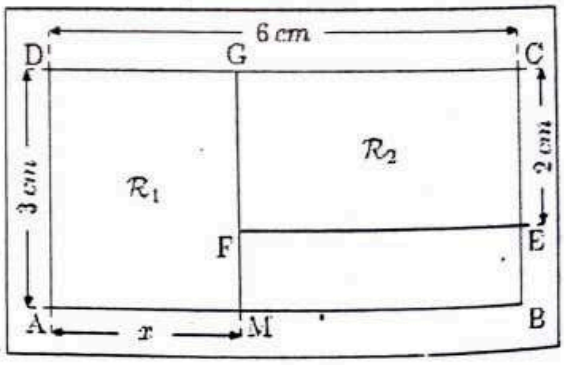
Description de la figure ci-dessous :

(i) ABCD est un rectangle tel que AD = BC = 3 cm;

(ii) M est un point du segment [AB] tel que AM = $x$ avec $0 < x < 6$ et $x$ exprimé en cm ;

(iii) E est le point du segment [CB] tel que CE = 2 cm.

On note $R_1$ le rectangle AMGD et $R_2$ le rectangle FECG.




1) $P_1$ et $P_2$ sont les périmètres des rectangles $R_1$ et $R_2$, exprimés en cm.

a) Calculer $P_1$ et $P_2$ en fonction de $x$.

b) Pour quelle valeur de $x$ les périmètres $P_1$ et $P_2$ sont-ils égaux ?

2) $S_1$ et $S_2$ sont les aires des rectangles $R_1$ et $R_2$ exprimées en $cm^2$.

a) Calculer $S_1$ et $S_2$ en fonction de $x$.

b) Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on : $S_2 < S_1$ ?

## EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants par la méthode de Cramer :

**NB** : pour le 3), on discutera suivant les valeurs de $m$.

1) $\begin{cases} 6z - 3t = \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}z + \frac{\sqrt{3}}{2}t = -\frac{1}{2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a + 5b = 3 \\ 2a - b + 5 = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ -2x + 4y = -10 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = -2 \end{cases}$

## EXERCICE 5

Soit A, B et C trois points d'une droite orientée $(\Delta)$ et I le milieu de $[AB]$.

1) On donne $\overline{AC} = 1$ et $\overline{CB} = -\frac{5}{2}$.

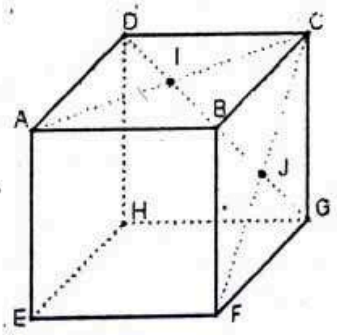
a) Démontrer que pour tout point M de $(\Delta)$ : $-\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} = -4$.

b) Calculer $2\overline{MA} - 3\overline{MB} + \overline{MC}$ puis $(1 + a)\overline{MA} + (a - 1)\overline{MB} - 2a\overline{MC}$, où $a \in \mathbb{R}$.

2) Etablir que pour tout point M de $(\Delta)$ : $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MI}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}$ et $\overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MI}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}$.

## EXERCICE 6

Dans le cube ABCDEFGH, le point I est le centre de la face ABCD et le point J celui de la face BCGF. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires.




## EXERCICE 7

Soit le polynôme suivant : $P(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$ puis en déduire que $P(x) = x^2$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 19

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 19

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) $|-5x+2| \geqslant |x+2|$ 2) $|2x-3| \geqslant |x+2|$ 3) $|x-3| \leqslant -2x+1$

4) $|2x-3| < -|x+2|$ 5) $|7-5x| > 3$ 6) $|2x-3| \leqslant \frac{5}{2}$

### EXERCICE 2

1) Exprimer en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$ les expressions suivantes :

a) $A(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos(2\pi - x) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$

b) $B(x) = 3\cos(-x) + 5\cos(\pi - x) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos(3\pi + x) + \sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$

2) a) Trouver une relation simple entre $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ puis entre $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$.

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)=0$.

3) a) Donner la mesure principale de chacun des angles suivants dont une mesure est :

$$\alpha_1 = \frac{31\pi}{3} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{179\pi}{4} \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{-143\pi}{6}$$

b) Placer sur le cercle trigonométrique les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$ repérés par les angles $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$.

### EXERCICE 3

1) $\begin{cases} mx + y = (m+1)^2 \\ 2x - y = 3 + 2m \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (m+1)x - y = 2m + 3 \\ (2m+3)x - 4y = 4m + 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} mx + 3y + 2 = 0 \\ 3x + y - m = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (m-1)x + (3m-2)y = 2 \\ (2m-1)x - 2y = m + 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$

Devoir numéro 19

## EXERCICE 4

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

## EXERCICE 5

Soit ABCD un parallélogramme, F milieu de [AB], H et G deux points définis par $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$.

1) Que peut-on conjecturer sur les points A, G et C ?

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$.

3) Démontrer la conjecture.

## EXERCICE 6

On pose $A(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.

Déterminer la condition sur $p, q, r$ pour que l'une des racines de A soit la somme des autres.

## EXERCICE 7

On appelle polynôme symétrique un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.

**Exemple** : $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) : $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2) Montrer que si $x_0$ est solution de (E), alors $\frac{1}{x_0}$ est solution de (E).

3) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

4) Calculer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

5) En posant $X = x + \frac{1}{x}$, montrer que l'équation (E') se ramène à une équation du second degré.

6) Résoudre l'équation du second degré, puis en déduire les solutions de l'équation (E).

7) Démontrer que le polynôme $P(x) = x^n - 1$ est divisible par $x - 1$ et ceci pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire que le nombre $11^n - 1$ est divisible par 10.

En posant $x = 11$, on obtient : $P(11) = 11^n - 1$ qui est donc divisible par $11 - 1 = 10$.

8) Démontrer que le polynôme $Q(x) = x^n + 1$ est divisible par $x + 1$ et ceci pour $n$ impair. En déduire que le nombre $6^n + 1$ est divisible par 7 si $n$ est impair. Que peut-on dire si $n$ est pair ?

9) Démontrer que le polynôme $R(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par le polynôme $4x(x+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le quotient pour $n \in \{2, 3\}$.

## EXERCICE 8

On se place dans un triangle ABC. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A, et on suppose que AH = 4 cm, CH = 3 cm et BH = 4 cm. Par un point M du segment [AC], on fait passer une droite parallèle à (AH) qui coupe (CH) en N. On désigne par $x$ la longueur du segment [AM] (en centimètres).

1) a) Calculer la longueur AC.

b) Quelles sont les valeurs possibles de la variable $x$ ?

c) Exprimer la longueur CM en fonction de $x$.

2) a) Démontrer, grâce au théorème de Thalès, que $MN = 4 - \frac{4}{5}x$.

b) Démontrer, grâce au théorème de Thalès, que $CN = 3 - \frac{3}{5}x$.

3) En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que : $MB^2 = x^2 - \frac{8}{5}x + 32$.

4) À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer les valeurs de $MB^2$ lorsque $x$ varie de 0 à 5 de 0,1 en 0,1. Quelle semble être la valeur de $x$ qui rend la quantité $MB^2$ minimale ?

5) Démontrer, en la développant, l'expression suivante :

$$MB^2 = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$$

6) On pose, pour $x \in [0\,;\,5]$, $f(x) = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$.

a) Déterminer le tableau de variation de $f$.

b) En quelle valeur de $x$ la fonction $f$ atteint-elle son minimum ? Que vaut ce minimum ?

c) En déduire la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.

Devoir numéro 20

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# DEVOIR NUMÉRO 20

## Classes de Seconde S — Durée : 03 heures

### EXERCICE 1

1) $|3x-2+\sqrt{5}| \leqslant 0$
2) $|2-4x| \leqslant 3$
3) $|4x-5| \geqslant 3$
4) $|5-4x| \leqslant 3$
5) $|7x-9| \geqslant 5$
6) $|7x-9| > 0$
7) $|-x+5| \leqslant 2$
8) $|4x-1| \geqslant 4$
9) $|x-2| < 3$

### EXERCICE 2

**Première partie**

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inconnue $(x;y)$, par la méthode de Cramer :

a) $\begin{cases} 4x-5y=3 \\ 3x+y=\frac{7}{20} \end{cases}$
b) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-2y=-2 \end{cases}$

2) Déduire de ce qui précède la résolution des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} \frac{4}{x+1}-\frac{5}{y-3}=3 \\ \frac{3}{x+1}+\frac{1}{y-3}=\frac{7}{20} \end{cases}$
b) $\begin{cases} 4x^2-5\lvert y+2\rvert=3 \\ 3x^2+\lvert y+2\rvert=\frac{7}{20} \end{cases}$
c) $\begin{cases} 4(1-x)^2-5y=3 \\ 3(1-x)^2+y=\frac{7}{20} \end{cases}$

**Deuxième partie**

A la fin d'une partie de chasse, Korka s'exclame : « Je n'ai tué que des lièvres et des perdrix et j'ai en tout 10 têtes et 26 pattes.»

Déterminer le nombre de lièvres et de perdrix que Korka a tués.

### EXERCICE 3

1) On donne : $x = a\cos t - b\sin t$ et $y = a\sin t + b\cos t$ où $a$ et $b$ sont des réels.

Calculer $x^2+y^2$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

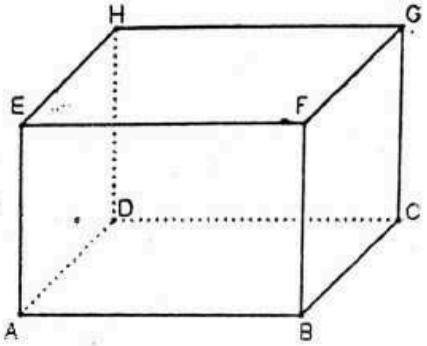
2) On donne le système suivant, dans lequel $x$ et $y$ sont les inconnues et $a \in \mathbb{R}$ : $\begin{cases} x\cos a + y\sin a = 1 \\ x\sin a - y\cos a = 1 \end{cases}$

Calculer $x^2 + y^2$.

## EXERCICE 4

Soit ABCDEFGH un cube d'arête de longueur $a$.

Démontrer que la droite (EC) est orthogonale à la droite (AF).




## EXERCICE 5

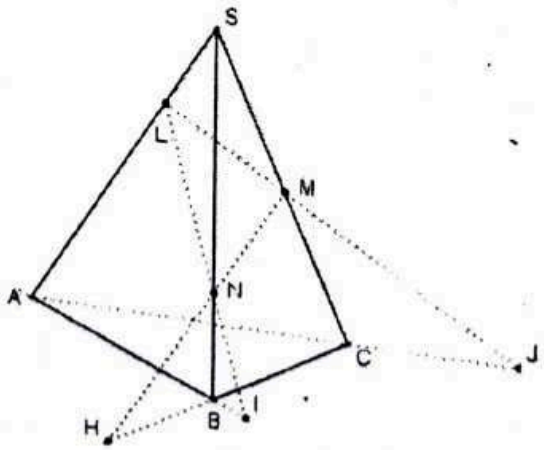
On se place dans un plan (P) euclidien rapporté à un repère orthonormé. Calculer la distance du point A à la droite (D) dans les cas suivants :

1) A $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et (D) passe par le point B $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

2) A $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et (D) passe par le point B $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et orthogonale au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

3) A $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et (D) est donnée par l'équation cartésienne $x + 2y + 3 = 0$.

## EXERCICE 6



CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 20

Sur la figure ci-dessus, SABCD est un tétraèdre, L est un point de ]SA[, M un point de ]SC[ et N un point de ]SB[.

Les droites (MN) et (BC) se coupent au point H, les droites (NL) et (AB) se coupent au point I, les droites (LM) et (AC) se coupent au point J.

Démontrer que les points H, I et J sont alignés.

## EXERCICE 7

On considère le polynôme $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1$ où $n \geqslant 2$.

1) Former le polynôme de $xP(x) - P(x)$.

2) En déduire une factorisation de $x^n - 1$.

3) On pose $x = \frac{a}{b}$ où $a$ et $b$ deux nombres réels quelconques avec $b \neq 0$. Factoriser $a^n - b^n$.

4) Soit le polynôme $A(x) = x^3 + px^2 + qx + r$. On suppose que l'équation $A(x) = 0$ admet la solution $x = \alpha$.

Montrer que l'on peut écrire $A(x) = (x - \alpha)B(x)$, avec $B(x)$ étant un polynôme du second degré que l'on déterminera.

5) **Application** : Vérifier que $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ admet la racine $x = 2$ puis résoudre l'équation.

## EXERCICE 8

$m$ et $n$ étant deux entiers positifs ou nuls, donner les différentes valeurs possibles de l'expression :

$$f(m,n) = \frac{5 \times (-1)^m + 7 \times (-1)^{n+1} + 8 \times (-1)^{m+n}}{2 \times (-1)^{m-n}}$$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

# Deuxième partie

# SOLUTIONS

## Après l'effort, le réconfort

**Méditez ...**

" Essaie toujours de te cacher toi qui est à la quête du savoir. Ainsi tu t'épargneras les épreuves et les peines. Aie de la détermination ainsi tu dépasseras ta génération. "

**Cheikh Ahmadou BAMBA**



### — Professeur Souleymane NIANG —

Le professeur Souleymane Niang (1929 - 2010) fut un grand mathématicien spécialiste de la science du calcul (la mécanique) et deuxième recteur noir de l'université Cheikh Anta DIOP. Il fut l'un des premiers mathématiciens d'Afrique. Il a élaboré et démontré un théorème qui porte son nom : le théorème Niang.

Devoir numéro 1

# Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 01

## EXERCICE 1

1) On sait que tout carré est positif donc : $(a-b)^2 \geqslant 0$

Ainsi : $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0 \implies \underline{2ab \leqslant a^2 + b^2}$

2) En ajoutant $a^2 + b^2$ à chacun des deux membres de l'inégalité précédente, on obtient :

$$2ab + (a^2 + b^2) \leqslant (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) \implies a^2 + 2ab + b^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$$

Or $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ donc $\underline{(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)}$

3) On écrit : $2ab \leqslant a^2 + b^2$ ; $2ca \leqslant c^2 + a^2$ ; $2bc \leqslant b^2 + c^2$.

Ainsi : $2ab + 2bc + 2ca \leqslant (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (b^2 + c^2) = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$

Ou encore : $2(ab + bc + ca) \leqslant 2(a^2 + b^2 + c^2)$

En simplifiant partout par 2, on obtient : $\underline{ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2}$

## EXERCICE 2

1) On a :

$$A = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{25}{7} = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{5 \times 5}{7} = \frac{3}{2} - \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7 - 2 \times 5}{2 \times 7} = \frac{21 - 10}{14} = \frac{11}{14}$$

*Conclusion* : $\underline{A = \frac{11}{14}}$

2) On a :

$$B = \frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{5}}{\frac{1}{3} - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{3 \times 5 - 2 \times 4}{2 \times 5}}{\frac{1 \times 7 - 2 \times 3}{3 \times 7}} = \frac{\frac{15 - 8}{10}}{\frac{7 - 6}{21}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{1}{21}} = \frac{7}{10} \times \frac{21}{1} = \frac{147}{10}$$

*Conclusion* : $\underline{B = \frac{147}{10}}$

3) On a :

$$C=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{7}}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{7}}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{7}{8}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{15}{8}}}=\frac{1}{1+\frac{8}{15}}=\frac{1}{\frac{23}{15}}=\frac{15}{23}$$

*Conclusion* : $\underline{C=\frac{15}{23}}$

4) On pose $D_1=1+\frac{1}{2}$ et $D_2=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$. On a :

$$D_1=1+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}\ ;\quad D_2=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{\frac{4}{3}}=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

Ainsi :

$$D=\frac{1+\frac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{D_1}{D_2}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$$

Donc : $\underline{D=\frac{6}{7}}$

5) On a :

$$E=\frac{2}{3}-\frac{7}{3}\left(1-\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}-\frac{7}{3}\left(\frac{2-3}{2}\right)=\frac{2}{3}-\frac{7}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$$

*Conclusion* : $\underline{E=\frac{11}{6}}$

6) On a :

$$F=\frac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{6}{21}+\frac{5}{21}}{\frac{5-1}{3}}=\frac{\frac{11}{21}}{\frac{4}{3}}=\frac{11}{21}\times\frac{3}{4}=\frac{11}{28}$$

*Conclusion* : $\underline{F=\frac{11}{28}}$

7) On a :

$$G=\frac{1}{\frac{4}{5}}-\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{5\times3-2\times4}{4\times3}=\frac{15-8}{12}=\frac{7}{12}$$

*Conclusion* : $\underline{G=\frac{7}{12}}$

8) On a :

$$H=\frac{2+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2\times3+1}{3}}{\frac{3\times2-1}{2}}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}}=\frac{7}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{14}{15}$$

*Conclusion* : $H = \frac{14}{15}$

11) Le dénominateur commun est 72. Donc :

$$K = \frac{8}{3} + \frac{5}{8} - \frac{4}{9} = \frac{192}{72} + \frac{45}{72} - \frac{32}{72} = \frac{192 + 45 - 32}{72} = \frac{205}{72}$$

*Conclusion* : $K = \frac{205}{72}$

12) On a :

$$L = \frac{4 - \frac{2}{3}}{5} = \frac{\frac{4 \times 3 - 2}{3}}{5} = \frac{12 - 2}{3 \times 5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

*Conclusion* : $L = \frac{2}{3}$

## EXERCICE 3

a) On a : $x^2 = 45$ et $y^2 = 44$, donc $x > y$ (puisque $x$ et $y$ sont positifs).

b) On a : $x^2 - y^2 = 12\sqrt{2} - 4\sqrt{13}$. En posant $a = 12\sqrt{2}$ et $b = 4\sqrt{13}$, on obtient $a^2 = 288$ et $b^2 = 208$, d'où $a^2 > b^2$ et, par suite $a > b$ et $x^2 > y^2$, puis enfin $x > y$ (car $x$ et $y$ sont tous deux positifs).

c) On a : $x^2 - y^2 = 2\left(\sqrt{40} - \sqrt{42}\right) < 0$. Donc $x < y$.

d) On a : $\sqrt{7} < \sqrt{11}$, donc (en ajoutant $2\sqrt{3}$ aux deux membres), $\sqrt{7} + 2\sqrt{3} < \sqrt{11} + 2\sqrt{3}$. Donc $x < y$.

e) On a $x - y = 1 - 2\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) = 1 - \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

On pose $a = 4$ et $b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$. Alors $a^2 - b^2 = 8 - 2\sqrt{15}$.

Posons enfin $a' = 8$ et $b' = 2\sqrt{15}$. On a $a'^2 - b'^2 = 64 - 60 = 4 > 0$ et puisque $a$, $b$, $a'$ et $b'$ sont tous positifs, il en résulte $a' > b' \implies a^2 - b^2 > 0 \implies a > b \implies \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} > 1$ et donc $(x - y) < 0$.

Finalement, on a $x < y$

f) On a $x^2 = 12 + 2\sqrt{35}$ et $y^2 = 12 + 2\sqrt{35}$. Donc, $x^2 = y^2$ et comme $x$ et $y$ sont tous deux positifs, il en résulte que $x = y$.

## EXERCICE 4

(i) En effet, $x \in [3;6] \implies 3 \leqslant x \leqslant 6$; $y \in [-4;-2] \implies -4 \leqslant y \leqslant -2$

En sommant ces inégalités, on en déduit que : $\underline{-1 \leqslant x + y \leqslant 4}$

(ii) En effet, $x \in [3;6] \implies 3 \leqslant x \leqslant 6$; $y \in [-4;-2] \implies 2 \leqslant -y \leqslant 4$

En sommant ces inégalités, on en déduit que : $\underline{5 \leqslant x - y \leqslant 10}$

(iii) On ne peut multiplier des inégalités que lorsqu'elles concernent des réels positifs. On va donc écrire $3 \leqslant x \leqslant 6$ et $2 \leqslant -y \leqslant 4$. En multipliant ces inégalités, on trouve $6 \leqslant -xy \leqslant 24$ soit finalement l'encadrement $\underline{-24 \leqslant xy \leqslant -6}$

(iv) On commence par remarquer que :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant -\frac{1}{4} \implies \frac{1}{4} \leqslant -\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}$$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

En multipliant les inégalités, il vient :

$$\frac{3}{4} \leqslant -\frac{x}{y} \leqslant \frac{6}{2} = 3$$

Soit finalement l'encadrement : $\underline{-3 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant -\frac{3}{4}}$

## EXERCICE 5

1) On a : $\overrightarrow{MO} = -3\overrightarrow{MG} \Rightarrow \overrightarrow{MO} + 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$

Ainsi : $4\overrightarrow{MO} = -3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$.

Connaissant les positions des points O et G, on construit facilement M.

2) En effet, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

Or G est centre de gravité du triangle ABC donc G est isobarycentre des points A, B et C.

Ainsi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et donc $\underline{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}}$

## EXERCICE 7

Soit $x$ l'âge de Fanta au présent et $y$ l'âge de Makhtar au présent.

Fanta dit à Makhtar : "J'ai six fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as" se traduit par : $x = 6(y - (x - y))$ (1)

Voir le graphique :

| | Passé | Présent |
|---|---|---|
| Fanta | $y$ | $x$ |
| Makhtar | $y - (x - y)$ | $y$ |

Makhtar répond : "Quand tu auras six fois l'âge que j'ai, la somme de nos âges fera 79 ans" se traduit par : $6x + 6y - x + y = 79$ (2)

Voir le graphique :

| | Présent | Futur |
|---|---|---|
| Makhtar | $y$ | $6y - (x - y)$ |
| Fanta | $x$ | $6y$ |

(1) donne : $x = 6(y - (x - y)) = 12y - 6x \Rightarrow 12y - 6x = 0$ (1)'

(2) donne : $6x + 6y - x + y = 79 \Rightarrow 13y - x = 79$ (2)'

(1)' et (2)' donne le système suivant : $\begin{cases} 12y - 7x = 0 & (i) \\ 13y - x = 79 & (ii) \end{cases}$

On a un système d'équation à deux inconnues qu'on peut résoudre par la méthode de substitution.

(ii): $x = 13y - 79$ (ii)'

(ii)' dans (i) donne : $12y - 7(13y - 79) = 0 \implies y = 7$

(ii) donne : $x = 13y - 79 = 12$

*Conclusion* : $\mathbf{S = \{x = 12\ ;\ y = 7\}}$

## EXERCICE 8

1) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a : $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et donc $f$ est une translation est vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

2) On a : $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$. Alors $x + 3y - 1 = 0 \iff (x' - 1) + 3(y' + 3) - 1 = 0$

Ou encore : $\mathbf{(D') : x' + 3y' + 7 = 0}$

Devoir numéro 2

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 02

## EXERCICE 1

1) On a : $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ et en divisant par $ab > 0$, on obtient : $\underline{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2}$

2) On a :

$(a-1)^2 \geqslant 0$ ou encore $a^2 + 1 - 2a \geqslant 0$ ou encore $a^2 + 1 \geqslant 2a$ et en divisant par $a > 0$, on obtient le résultat : $\underline{\forall\, a > 0,\ a + \frac{1}{a} \geqslant 2}$

## EXERCICE 2

1) On a : $A = \frac{(a^2bc)^3}{(ab)^2} = \frac{a^6b^3c^3}{a^2b^2} = a^{6-2}b^{3-2}c^3 = a^4bc^3$. Donc $\underline{A = a^4bc^3}$

2) On a : $B = \frac{a^3b^2c^4}{(a^2bc^5)^2} = \frac{a^3b^2c^4}{a^4b^2c^{10}} = a^{3-4}b^{2-2}c^{4-10} = a^{-1}b^0c^{-6} = a^{-1}c^{-6}$. Donc : $\underline{B = a^{-1}c^{-6}}$

3) On a : $C = \frac{a^{-3}b^4c}{ab^{-1}c^2} = a^{-3-1}b^{4+1}c^{1-2} = a^{-4}b^5c^{-1}$. Donc : $\underline{C = a^{-4}b^5c^{-1}}$

4) On a : $D = \frac{a}{(bc)^2} \cdot \frac{a^4b^2}{(ba)^{-5}} = \frac{a}{b^2c^2} \cdot \frac{a^4b^2}{b^{-5}a^{-5}} = a^{1+5}b^{2-2+5}c^{-2} = a^{10}b^5c^{-2}$. Donc : $\underline{D = a^{10}b^5c^{-2}}$

5) On a : $E = a^4bc^3 \times a^{-1}c^{-6} \times a^{-4}b^5c^{-1} \times a^{10}b^5c^{-2} = a^{4-1-4+10}b^{1+5+5}c^{3-6-1-2} = a^9b^{11}c^{-6}$

Donc : $\underline{E = a^9b^{11}c^{-6}}$

6) On a :

$$F = \frac{4x^2y^3 - (3xy)^2y}{x^2y^2(-2x^3)} = \frac{4x^2y^3 - 9x^2y^3}{-2x^2y^2(x^3)} = \frac{-5x^2y^3}{-2x^2y^2(x^3)} = \frac{5y}{2x^3} \quad \Rightarrow \quad \underline{F = \frac{5y}{2x^3}}$$

7) On a :

$$G = \frac{(-a)^7(b^3c^2)^4}{-b^3c(-a)^4} = \frac{-a^7b^{3\times4}c^{2\times4}}{-b^3ca^4} = \frac{-a^7b^{12}c^8}{-b^3ca^4} = a^{7-4}b^{12-3}c^{8-1} = a^3b^9c^7 \quad \Rightarrow \quad \underline{G = a^3b^9c^7}$$

8) On a : $H = \frac{(a^2b^3)^{-2}}{(ab^2)^{-3}} = \frac{a^{-4}b^{-6}}{a^{-3}b^{-6}} = a^{-4+3}b^{-6+6} = a^{-1}$. Donc : $\underline{H = a^{-1}}$

9) On a :

$$I = \frac{(a^2b^3c)^2(a^3c)}{(ab)^4(c^2a)^2(bc)} = \frac{(a^4b^6c^2)\times(a^3c)}{(a^4b^4)\times(c^4a^2)\times(bc)} = a^{4+3-4-2}\times b^{6-4-1}\times c^{2+1-4-1} = a^1b^1c^{-2}$$

Donc : $\underline{I = abc^{-2}}$

## EXERCICE 4

1) On trouve : $\underline{S = \{5\}}$

2) On trouve : $\underline{S = \{\emptyset\}}$

3) Soit à résoudre : $|x^{2008} - 2009| = 1 - \sqrt{3}$

En effet, $1 - \sqrt{3} < 0$ et $|x^{2008} - 2009| \geqslant 0$

Donc la solution n'existe pas. *Conclusion* : $\underline{S = \{\emptyset\}}$

5) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $|-2x + 1| = 3$

En effet, $|-2x + 1| = 3 \iff -2x + 1 = 3$ ou $-2x + 1 = -3$

Ainsi : $|-2x + 1| = 3 \iff x = -1$ ou $x = 2$. *Conclusion* : $\underline{S = \{-1\ ;\ 2\}}$

## EXERCICE 5

1) En effet, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$.

Or A' milieu de [BC] donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ et par conséquent : $\underline{\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}}$

On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \implies \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AG}$. Comme $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$ on obtient $\underline{\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}}$

2) En effet, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C}$.

Or B' milieu de [AC] donc $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$ et par conséquent : $\underline{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GB'}}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \implies \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG}$. Comme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GB'}$ on obtient $\underline{\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GB'}}$

On établit de même que $\underline{\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GC'}}$

3) En effet,

(i) $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$ : les points A, A' et G sont alignés. Autrement dit, G appartient à la droite (AA').

(ii) $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GB'}$ : les points B, B' et G sont alignés. Autrement dit, G appartient à la droite (BB').

(iii) $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GC'}$ : les points C, C' et G sont alignés. Autrement dit, G appartient à la droite (CC').

Finalement, G appartient aux trois droites (AA'), (BB') et (CC'). Ainsi les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

*Remarque* : (AA') est la médiane issue du sommet A du triangle ABC. De même, (BB') est la médiane issue du sommet B du triangle ABC et (CC') est la médiane issue du sommet C du triangle ABC.

## EXERCICE 7

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 2

Notons $f$ le nombre de filles et g le nombre de garçons de cette famille.

Fred a donc g — 1 frères et $f$ sœurs, et le texte indique alors que $f = 2(g-1)$. D'autre part, Sarah a elle $f-1$ sœurs et g frères, et l'énoncé nous dit alors que $f-1=g$.

En remplaçant g par $f-1$ dans la première égalité, on trouve $f = 2(f-2)$, ce qui conduit à $f = 4$ puis à $g = f-1 = 3$, ce qui donne un total de 7 enfants.

**EXERCICE 8**

1) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA} \iff \underline{h(B\,;\,4)(A) = C}$ 2) $2\overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MP} \iff \underline{h\left(M\,;\,-\frac{5}{2}\right)(P) = N}$

3) $3\overrightarrow{RS} = 2\overrightarrow{RG} \iff \underline{h\left(R\,;\,\frac{3}{2}\right)(S) = G}$

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 03

## EXERCICE 1

1) Pour tous réels $a$ et $b$ deux réels strictement positifs, $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$

Ainsi : $\frac{a+b}{ab} \geqslant \frac{2\sqrt{ab}}{ab}$ puisque $ab > 0$

Ou encore : $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{2\sqrt{ab}}{ab} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$

Donc : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{2}{\sqrt{ab}}$ (1)

- Par ailleurs, $a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \implies \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (2)

(1) et (2) impliquent : $\underline{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}}$

2) Pour tous réels $a$ et $b$ deux réels strictement positifs, on a :

$$\begin{cases} a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \\ a+c \geqslant 2\sqrt{ac} \\ b+c \geqslant 2\sqrt{bc} \end{cases} \implies (a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{ac} \times 2\sqrt{bc} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

$$\underline{(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc}$$

## EXERCICE 2

1) On a :

$$(0{,}09)^{-3} = \left(\frac{100}{9}\right)^3 = \left(\frac{2^2 \times 5^2}{3^2}\right)^3 = \frac{2^6 \times 5^6}{3^6} \quad ; \quad (0{,}16)^2 = \left(\frac{4}{25}\right)^2 = \left(\frac{2^2}{5^2}\right)^2 = \frac{2^4}{5^4}$$

$$(0{,}0075)^{-1} = \frac{400}{3} = \frac{2^4 \times 5^2}{3} \quad ; \quad 810^3 = (3^4 \times 2 \times 5)^3 = 3^{12} \times 2^3 \times 5^3$$

$$A = \frac{\frac{2^6 \times 5^6}{3^6} \times \frac{2^4}{5^4} \times 5^2}{\frac{2^4 \times 5^2}{3} \times 3^{12} \times 2^3 \times 5^3} = \frac{2^6 \times 5^6 \times 2^4 \times 5^2 \times 3}{2^4 \times 5^2 \times 3^{12} \times 2^3 \times 5^3 \times 3^6 \times 5^4} = 2^{6+4-4-3} \times 3^{1-12-6} \times 5^{6+2-2-3-4}$$

$$= 2^3 \times 3^{-17} \times 5^{-1}$$

*Conclusion* : $\underline{A = 2^3 \times 3^{-17} \times 5^{-1}}$

2) On a :

$$B = \frac{a^8 \times (b^2c^3d^{-1})^5}{-b^4c^2(ad^{-2})^3} = -\frac{a^8b^{10}c^{15}d^{-5}}{a^3b^4c^2d^{-6}} = -a^{8-3}b^{10-4}c^{15-2}d^{-5+6} = -a^5b^6c^{13}d$$

*Conclusion* : $\underline{B = -a^5b^6c^{13}d}$

## EXERCICE 3

3) $-3{,}58$ est une valeur approchée de $u$ à 0,01 près se traduit par $|-3,58-u| < 0,01$
On a : $|-3,58-u| < 0,01 \iff -0,01 < -3,58-u < 0,01 \iff 3,57 < -u < 3,59$
Ainsi : $3,57 \times 5 < -5u < 3,59 \times 5 \implies 20,85 < -5u+3 < 20,95$.
*Conclusion* : $\underline{20,85 < C < 20,95}$

## EXERCICE 4

1) On trouve : $\underline{S = \{54\}}$

2) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $|-5x+1| = |5x-8|$

En effet,

$$|-5x+1| = |5x-8| \iff -5x+1 = 5x-8 \quad \text{ou} \quad -5x+1 = -5x+8$$

Ainsi : $|-5x+1| = |5x-8| \iff x = \frac{9}{10}$

*Conclusion* : $\underline{S = \left\{\frac{9}{10}\right\}}$

3) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $|3x+4| = |x-1|$

En effet,

$$|3x+4| = |x-1| \iff 3x+4 = x-1 \text{ ou } 3x+4 = -x+1$$

Ainsi : $|3x+4| = |x-1| \iff x = -\frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{3}{4}$

*Conclusion* : $\underline{S = \left\{-\frac{5}{2}\ ;\ -\frac{3}{4}\right\}}$

4) Soit à résoudre : $|x| + |x+1| = 5$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|x\|$ | $-x$ | | $-x$ | | $x$ | |
| $\|x+1\|$ | $-x-1$ | | $0$ | $x+1$ | | $x+1$ |
| $\|x\|+\|x+1\|$ | $-2x-1$ | | $1$ | | | $2x+1$ |

On fait une résolution par intervalles.

Dans $]-\infty\,;-1]$ : $|x| + |x+1| = -2x-1 = 5 \implies x = -3 \in ]-\infty\,;-1]$ (9)

Dans $]-1\,;0]$ : $|x| + |x+1| = 1 = 5$ Impossible (10)

Dans $]0;+\infty[$ : $|x|+|x+1|=2x+1=5 \iff x=2\in]0;+\infty[$ (11)

En regroupant (9), (10) et (11), on obtient l'ensemble solution.

*Conclusion* : $\mathbf{S=\{2;-3\}}$

5) Soit à résoudre : $|5x+7|=|3-2x|$.

Cette équation équivaut à résoudre : $5x+7=+(3-2x)$ ou $5x+7=-(3-2x)$

Donc $x=-\frac{4}{7}$ ou $x=-\frac{10}{3}$

*Conclusion* : $\mathbf{S=\left\{-\frac{4}{7};-\frac{10}{3}\right\}}$

6) **Rappel** : Pour tous réels $x$ et $y$, $(|x|=|y|) \iff x=y$ ou $x=-y$.

Donc l'équation proposée équivaut à : $5x-3=x-1$ ou $5x-3=-x+1$

Soit : $x=\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{2}{3}$

*Conclusion* : $\mathbf{S=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}}$

7) On a : $d(x;-6)=|x--6|=|x+6|$

Ainsi :

$$|x-1|=d(x;-6) \iff |x-1|=|x+6| \iff x-1=x+6 \text{ ou } x-1=-x-6$$

Ou encore : $-1=6$ absurde ! ou $x=-\frac{5}{2}$.

*Conclusion* : $\mathbf{S=\left\{-\frac{5}{2}\right\}}$

8) **Rappel** : La somme de deux nombres positifs est nulle si et seulement ces deux nombres sont tous nuls.

L'équation existe si et seulement si $x\neq 0$. Donc $D_V=\mathbb{R}^*$. Ainsi :

$$\left|\frac{5}{x}-\frac{x}{5}\right|+|3x^2-15x|=0 \iff \begin{cases}\left|\frac{5}{x}-\frac{x}{5}\right|=0\\ |3x^2-15x|=0\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{5}{x}-\frac{x}{5}=0 & (1)\\ 3x^2-15x=0 & (2)\end{cases}$$

(1) On a : $\frac{5}{x}-\frac{x}{5}=0 \iff \frac{5}{x}=\frac{x}{5} \iff x^2=25 \iff x=\pm 5$.

(2) On a : $3x^2-15x=0 \iff 3x(x-5)=0 \iff 3x=0$ ou $x-5=0$

Ainsi on obtient deux solutions : $x=0\notin D_V$ et $x=5\in D_V$.

*Conclusion* : $\mathbf{S=\{5\}}$

9) On a : $d(x;3)=|x-3|$ et $2d(x;-1)=2|x--1|=2|x+1|$.

Ainsi :

$d(x;3) = 2d(x;-1) \Leftrightarrow |x-3| = 2|x+1| \Leftrightarrow x-3 = 2(x+1)$ ou $x-3 = -2(x+1)$.

Donc : $x = -5$ ou $x = \frac{1}{3}$.

*Conclusion* : $\underline{S = \left\{-5 ; \frac{1}{3}\right\}}$

## EXERCICE 6

1) En effet : $x \in [0;1] \implies x \leqslant 8 \implies x - 8 \leqslant 0$ (1)

Par ailleurs : $x \in [0;1] \implies -x^3 \leqslant 0$ (2)

Donc (1) et (2) donnent : $-x^3(x-8) \geqslant 0 \implies x^3(x-8) \leqslant 0 \implies x^4 - 8x^3 \leqslant 0$

*Conclusion* : $\underline{x^4 - 8x^3 \leqslant 0}$

On a : $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} = \frac{-x^2+4x+8}{8}$ donc $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ et $-x^2 + 4x + 8$ sont de même signes.

Pour montrer que : $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \geqslant 0$, on pourra étudier le signe de $-x^2 + 4x + 8$.

On pose alors : $-x^2 + 4x + 8 = 0$ qui est un trinôme du second degré admettant pour racines $x_1 = 2 - 2\sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + 2\sqrt{3}$. Donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $0$ | | $1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+4x+8$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc pour tout $x \in [0;1]$, $-x^2 + 4x + 8 \geqslant 0 \implies \underline{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \geqslant 0, \ \forall x \in [0;1]}$.

2) On a : $\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2 = \left(\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{8}\right)^2 = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^4}{64} - 2 \times \frac{x^2}{8}\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}$

Or : $x^4 - 8x^3 \leqslant 0 \implies \frac{x^4 - 8x^3}{64} \leqslant 0 \implies \frac{x^4}{64} - \frac{x^3}{8} \leqslant 0$

En ajoutant $1 + x$ de part et d'autre : $1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64} \leq 1 + x$ (1)

Or : $1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2$

Donc (1) devient : $\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2 \leq 1 + x$

En passant aux racines carrés : $\sqrt{\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2} = \left|1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right| = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}$

*Conclusion* : $\mathbf{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}}$

3) On a :

$$\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}\right)^2 = \left(\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{x^2}{8}\right)^2 = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^4}{64} + 2\times\frac{x^2}{8}\left(1+\frac{x}{2}\right) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}$$

Or : $x^4 + 8x^3 + 32x^2 = x^2(x^2 + 8x + 32) \geq 0$

Donc en factorisant par 64 : $64\left(\frac{x^4+8x^3+32x^2}{64}\right) = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}\right) \geq 0$

En ajoutant $1 + x$ de part et d'autre : $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64} \geq 1+x$ (2)

Or : $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64} = \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}\right)^2$

Donc (2) devient : $\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}\right)^2 \geq 1+x$

En prenant la racine carré, on a : $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8} \geq \sqrt{1+x}$

*Conclusion* : $\mathbf{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8} \geqslant \sqrt{1+x}}$

4) En effet, comme $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8} \geq \sqrt{1+x}$ et $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}$

On en déduit l'encadrement : $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}$

Ainsi : $-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right) \leq +\frac{x^2}{8} \Rightarrow \left|\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\right| \leq \frac{x^2}{8}$

*Conclusion* : $\frac{x^2}{8}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+x}$ à $1+\frac{x}{2}$.

5) On pose : $x = 5\cdot10^{-5}$

Donc : $1+\frac{5\cdot10^{-5}}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+5\cdot10^{-5}}$ à $\frac{(5\cdot10^{-5})^2}{8}$ près.

Autrement dit : 1,000025 est une valeur approchée de 1,00005 à $3{,}125.10^{-10}$ près.

**EXERCICE 7**

1) Notons $A = 2^{x-y}$.

Ainsi : $1 = 2^x - 2^y = 2^y(2^{x-y} - 1) = 2^y(A-1) \implies 2^y(A-1) = 1$

D'autre part,

$$\frac{5}{3} = 4^x - 4^y = 4^y(4^{x-y} - 1) = 4^y(A^2 - 1) = 4^y(A+1)(A-1) = 4^y(A+1) \times \frac{1}{2^y} = 2^y(A+1)$$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} 2^y(A-1) = 1 \\ 2^y(A+1) = \frac{5}{3} \end{cases}$

En faisant le rapport, on obtient :

$$\frac{A-1}{A+1} = \frac{3}{5} \iff A = 4 \iff 2^{x-y} = 4 = 2^2 \iff \underline{x - y = 2}$$

2) Divisons l'équation par $5^x$ : $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Posons $\sin t = \frac{3}{5}$ et $\cos t = \frac{4}{5}$ donc : $\underline{x = 2}$.

## EXERCICE 8

1) $\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ le rapport de l'homothétie est donc $-3$.

2) $\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ le rapport de l'homothétie est donc $-3$.

3) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ le rapport de l'homothétie est donc $-1$.

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 04

## EXERCICE 1

1) On a :

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\sqrt{5}+5) = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{4+(2+2\sqrt{5})}{4} = 1+\frac{2+2\sqrt{5}}{4} = 1+\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\phi$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \phi - 1$$

$$\phi^3 = \phi^2 \times \phi = (1+\phi)\times\phi = \phi + \phi^2 = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$$

On conclut que : $\underline{\phi^2 = 1+\phi \ ; \ \phi^{-1} = \phi - 1 \ ; \ \phi^3 = 2\phi + 1}$

2) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2-1 = 1 \Rightarrow \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow \sqrt{2} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

On conclut que : $\underline{\sqrt{2} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$

## EXERCICE 2

a) On a :

$$\begin{aligned} E &= (a^2+b^2-9)^2 - 4a^2b^2 = (a^2+b^2-9)^2 - (2ab)^2 = [a^2+b^2-9-2ab][a^2+b^2-9+2ab] \\ &= [a^2+b^2-2ab-9][a^2+b^2+2ab-9] = [(a-b)^2-3^2][(a+b)^2-3^2] \\ &= [(a-b-3)(a-b+3)][(a+b-3)(a+b+3)] \end{aligned}$$

*Conclusion* : $\underline{E = (a-b-3)(a-b+3)(a+b-3)(a+b+3)}$

b) On a :

$$\begin{aligned} F &= (9x^2-12x+4)+(x-3)^2-(2x+1)^2 = F = (3x-2)^2+(x-3)^2-(2x+1)^2 \\ &= (3x-2)^2+(x-3-2x-1)(x-3+2x+1) = (3x-2)^2+(-x-4)(3x-2) \\ &= (3x-2)[3x-2-x-4] = (3x-2)(2x-6) \end{aligned}$$

*Conclusion* : $\underline{F = (3x-2)(2x-6)}$

c) On a :

$$G = (x+y)^3 - x^3 - y^3 = (x+y)^3 - (x^3+y^3) = (x+y)^3 - (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$= (x+y)[(x+y)^2 - (x^2 - xy + y^2)] = (x+y)[x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + xy - y^2]$$
$$= (x+y)[2xy + xy] = 3xy(x+y)$$

*Conclusion* : $\underline{G = 3xy(x+y)}$

d) On a:

$$H = x + y + xy + 1 = x + xy + y + 1 = x(y+1) + (y+1) = (x+1)(y+1)$$

*Conclusion* : $\underline{H = (x+1)(y+1)}$

e) On développe : $K = (x^2-1)^2 + (2x)^2$

$$K = (x^2-1)^2 + (2x)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$$

*Conclusion* : $\underline{K = (x^2+1)^2}$

f) On a:

$$Q = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^2 - 4x - 4 = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - (x^2 + 4x + 4)$$
$$= (x+2)^3 - (x+2)^2 = (x+2)^2[(x+2) - 1] = (x+1)(x+2)^2$$

*Conclusion* : $\underline{Q = (x+1)(x+2)^2}$

## EXERCICE 3

1) En effet,

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{7}{2} \leqslant x - \frac{7}{2} \leqslant 5 - \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} \leqslant x - \frac{7}{2} \leqslant +\frac{3}{2}$$

La relation $-\frac{3}{2} \leqslant x - \frac{7}{2} \leqslant +\frac{3}{2}$ se traduit par $\underline{\left|x - \frac{7}{2}\right| \leqslant \frac{3}{2}}$

2) L'intervalle $[a\,;\,b]$ ait pour centre 5 si : $\frac{a+b}{2} = 5$

L'intervalle $[a\,;\,b]$ ait pour rayon 2 si : $\frac{b-a}{2} = 2$

On est amené à résoudre le système : $\begin{cases} b + a = 10 \\ b - a = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad b = 7 \;;\; a = 3$

3) En effet, $|x - 7{,}3| \leqslant 0{,}001 \iff |7{,}3 - x| \leqslant 0{,}001$.

Ainsi 7,3 est une valeur approchée du réel $x$ à 0,001 près (ou avec incertitude 0,001).

## EXERCICE 4

1) On trouve : $\underline{P_1(x) = (x-1)(x-2)}$

2) On trouve : $\underline{P_2(x) = (x-1)(x-3)}$

3) On trouve : $\underline{P_3(x) = (x-3)(x-2)}$

4) On trouve : $\underline{P_4(x) = (x-2)^2}$

5) On trouve : $\underline{P_5(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)}$

6) On trouve : $\underline{P_6(x) = (x^2+1)^2}$

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 4

## EXERCICE 5

1) On a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CN}$

Or $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Par ailleurs, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \underbrace{\overrightarrow{CP}}_{\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}} + \overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Ainsi : $\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

2) On a : $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = 2\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$ implique que les points M, P et N sont alignés.

Par ailleurs, $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$

On conclut que N est le milieu de [MP].

3) On a : $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{QR} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

Ainsi : $\overrightarrow{QR} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$

La relation $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$ signifie que les droites (QR) et (MN) sont parallèles.

## EXERCICE 7

Soit $x$ le nombre de problèmes qu'il a correctement résolus.

Soit $y$ le nombre de problèmes qu'il n'a pas correctement résolus.

(i) Après 26 problèmes se traduit par : $x + y = 26$ (1)

(ii) Tonton Bouba accepte de lui donner 100 F CFA pour chaque problème correctement résolu et il lui prend 50 F CFA dans le cas contraire. Après 26 problèmes, le garçon obtient 500 F CFA se traduit par : $100x - 50y = 500$ (2)

(1) et (2) nous donnent : $\begin{cases} x + y = 26 & (3) \\ 100x - 50y = 500 & (4) \end{cases}$

En simplifiant (4), le système devient : $\begin{cases} x + y = 26 & (3) \\ 2x - y = 10 & (4) \end{cases}$

On trouve, après résolution du système : $x = 12$ et $y = 14$.

Donc le gosse a résolu 12 problèmes correctement et a faussé 14 problèmes.

## EXERCICE 8

1) Si $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ et $h(A\,;\,k)(C) = B$, alors $k = \frac{4}{5}$

2) Si $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $h(B\,;\,k)(A) = C$, alors $k = -\frac{1}{4}$

3) Si $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$ et $h(C\,;\,k)(A) = B$, alors $k = \frac{1}{5}$

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 05

## EXERCICE 1

1) On sait que pour tous réels $x$ et $y$ strictement positifs : $x^2 + y^2 \geqslant 2xy > 0$.

Ce qui donne après inversion des termes : $\underline{\frac{1}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2xy}}$

En multipliant partout par le terme positif $(x + y)$, on obtient : $\underline{\frac{x+y}{x^2+y^2} \leqslant \frac{x+y}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$

2) De même, $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ et $\frac{b+c}{b^2+c^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ et $\frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$.

En sommant ces trois inégalités, on obtient :

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\underline{\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

## EXERCICE 2

1) On a : $A = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

*Conclusion* : $\underline{A = 10}$

2) On a :

$$B = \left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 14 - 4\sqrt{6}$$

*Conclusion* : $\underline{B = 14 - 4\sqrt{6}}$

3) On a :

$$C = \frac{3\sqrt{60}-7\sqrt{15}}{\sqrt{500}-\sqrt{405}} = \frac{3\sqrt{2^2\times 15}-7\sqrt{15}}{\sqrt{10^2\times 5}-\sqrt{9^2\times 5}} = \frac{6\sqrt{15}-7\sqrt{15}}{10\sqrt{5}-9\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{3}$$

*Conclusion* : $\underline{C = -\sqrt{3}}$

4) On a :

$$D = \sqrt{27} - 5\sqrt{12} + \sqrt{300} = \sqrt{3^2 \times 3} - 5\sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{10^2 \times 3} = 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

*Conclusion* : $\underline{D = 3\sqrt{3}}$

5) On a :

$$E = \frac{5}{3-\sqrt{2}} - \frac{8}{3+\sqrt{2}} = \frac{5(3+\sqrt{2}) - 8(3-\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{15+5\sqrt{2}-24+8\sqrt{2}}{9-2} = \frac{-9+13\sqrt{2}}{7}$$

*Conclusion* : $\underline{E = \frac{-9+13\sqrt{2}}{7}}$

6) On a :

$$F = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} = \sqrt{\frac{(5\sqrt{2}-7)^2}{(5\sqrt{2})^2 - 7^2}} = |5\sqrt{2}-7| = 5\sqrt{2}-7$$

*Conclusion* : $\underline{F = 5\sqrt{2} - 7}$

7) On a :

$$G = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2}} = \frac{|\sqrt{2}-1|}{|\sqrt{2}+1|} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = 3-2\sqrt{2}$$

*Conclusion* : $\underline{G = 3 - 2\sqrt{2}}$

8) On trouve : $\underline{H = -\frac{62}{5}}$

## EXERCICE 3

1) Si $x = 3{,}754$, alors l'arrondi d'ordre 0 de $x$ est égal à $3 + 1 = 4$.

2) Si $x = 2{,}4305$, alors l'arrondi d'ordre 0 de $x$ est égal à 2.

3) Si $x = 10{,}6542$, alors l'arrondi d'ordre 0 de $x$ est égal à $10 + 1 = 11$.

4) $3\times10^6$ est un ordre de grandeur de 29857

5) $2\times10^6$ est un ordre de grandeur de 185378

6) $7\times10^{-3}$ est un ordre de grandeur de 0,007374

## EXERCICE 4

1) On trouve : $\underline{S = \left\{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{4}\right\}}$

2) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.

$$x^2 - 100 = 0 \iff x^2 = 100 \iff x = \pm 10$$

Donc $S = \{-10 ; 10\}$

3) On calcule le discriminant : $\Delta' = 1 - 2 \times -3 = 7$.

On obtient deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$.

*Conclusion* : $S = \left\{\frac{-1-\sqrt{7}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right\}$

4) On a :

$$(x-4)(x+7) - (2x+3)(x+7) = (x+7)(x-4-2x-3) = (x+7)(-x-7)$$

Ainsi :

$$(x-4)(x+7) - (2x+3)(x+7) \iff (x+7)(-x-7) = 0 \iff x+7 = 0 \text{ ou } -x-7 = 0$$

Donc : $(x-4)(x+7) - (2x+3)(x+7) = 0 \iff x = -7$

*Conclusion* : $S = \{-7\}$

5) On calcule le discriminant $\Delta = 1 - 1 \times -3 = 4 = 2^2$.

On obtient deux solutions distinctes $x_1 = -1 - 2 = -3$ et $x_2 = -1 + 2 = 1$.

*Conclusion* : $S = \{-3 ; 1\}$

6) On a : $(x+1)^2 = (x+1) \iff (x+1)^2 - (x+1) = 0 \iff (x+1)(x+1-1) = 0$

Ainsi $(x+1)^2 = (x+1) \iff x(x+1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -1$

*Conclusion* : $S = \{-1 ; 0\}$

7) On a : $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = (2x-3)(x+1) \iff (x+1)^2 - (2x-3)(x+1) = 0$

Ainsi : $(x+1)(x+1-2x+3) = 0$ ou encore $(x+1)(-x+4) = 0$

Alors : $x = -1$ ou $x = 4$

*Conclusion* : $S = \{-1 ; 4\}$

8) On a : $\Delta' = 6 > 0$ donc $x_1 = 1 - \sqrt{6}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{6}$. *Conclusion* : $S = \{1 - \sqrt{6} ; 1 + \sqrt{6}\}$

9) On calcule le discriminant : $\Delta = 9 - 4 \times 4 \times -10 = 169 = 13^2$.

On obtient deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{3-13}{8} = -\frac{5}{4}$ et $x_2 = \frac{3+13}{8} = 2$..

*Conclusion* : $S = \left\{-\frac{5}{4} ; 2\right\}$

10) On pose : $t = (x-2)^2$. L'équation initiale devient alors : $t^2 - 5t + 6 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$.

On obtient deux solutions distinctes : $t_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $t_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

Pour $t_1 = 2$, on a : $(x-2)^2 = 2 \Rightarrow x-2 = \sqrt{2}$ ou $x-2 = -\sqrt{2}$. Ainsi : $\begin{cases} x_1 = 2+\sqrt{2} \\ x_2 = 2-\sqrt{2} \end{cases}$

Pour $t_2 = 3$, on a : $(x-2)^2 = 3 \Rightarrow x-2 = \sqrt{3}$ ou $x-2 = -\sqrt{3}$. Ainsi : $\begin{cases} x_3 = 2+\sqrt{3} \\ x_4 = 2-\sqrt{3} \end{cases}$

*Conclusion* : $\underline{S = \{2+\sqrt{2}\,;\, 2-\sqrt{2}\,;\, 2+\sqrt{3}\,;\, 2-\sqrt{3}\}}$

11) Soit à résoudre : $x^2\sqrt{3} - 3x + 3 = 0$.

On un trinôme du second degré en $x$ donc : $\Delta = 3^2 - 4(\sqrt{3}) \times 3 = 9 - 12\sqrt{3} < 0$

*Conclusion* : $\underline{S = \{\emptyset\}}$

12) On pose : $t = \sqrt{x}$, donc $t \geqslant 0$.

$$x + 3\sqrt{x} - 1 = 0 \iff t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} < 0 \;;\; t_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} > 0$$

Donc : $\sqrt{x} = t_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et donc : $x = \left(\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)^2$

*Conclusion* : $\underline{S = \left\{\left(\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)^2\right\}}$

## EXERCICE 6

1) a) En remplaçant $x$ par 0, on aurait, si 0 était solution de (E), $0^4 + 10 \times 0^3 + 26 \times 0^2 + 10 \times 0 + 1 = 0$, soit $1 = 0$, ce qui est impossible.
b) On peut donc, si x est une solution de (E), diviser les deux membres par $x^2$ (puisque $x \neq 0$), ce qui donne (E').

2) a) On a : $X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, d'où $X^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

b) (E') est équivalente à : $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$, soit à : $(X^2 - 2) + 10X + 26 = 0$ ou finalement à : $X^2 + 10X + 24 = 0$.

3) (E'') a pour solutions $X_1 = -4$ et $X_2 = -6$.

Les solutions de (E) sont donc les réels $x$ tels que : $x + \frac{1}{x} = -4$ (1) *ou* $x + \frac{1}{x} = -6$ (2). *L'équation (1) équivaut, après réduction au même dénominateur, à :* $x^2 + 4x + 1 = 0$, *qui a pour solutions* $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ *et* $x_1' = -2 - \sqrt{3}$ . *L'équation (2) équivaut, après réduction au même dénominateur, à :* $x^2 + 6x + 1 = 0$, *qui a pour solutions* $x_2 = -3 - 2\sqrt{2}$ *et* $x_1' = -3 + 2\sqrt{2}$ . *L'ensemble des solutions de (E) est donc :*

$$\underline{S = \{-2-\sqrt{3}\,;\, -2+\sqrt{3}\,;\, -3+2\sqrt{2}\,;\, -3-2\sqrt{2}\}}$$

4) L'équation réduite correspondante est $2X^2 - 9X + 4 = 0$. Elle a pour racines $\frac{1}{2}$ et 4.

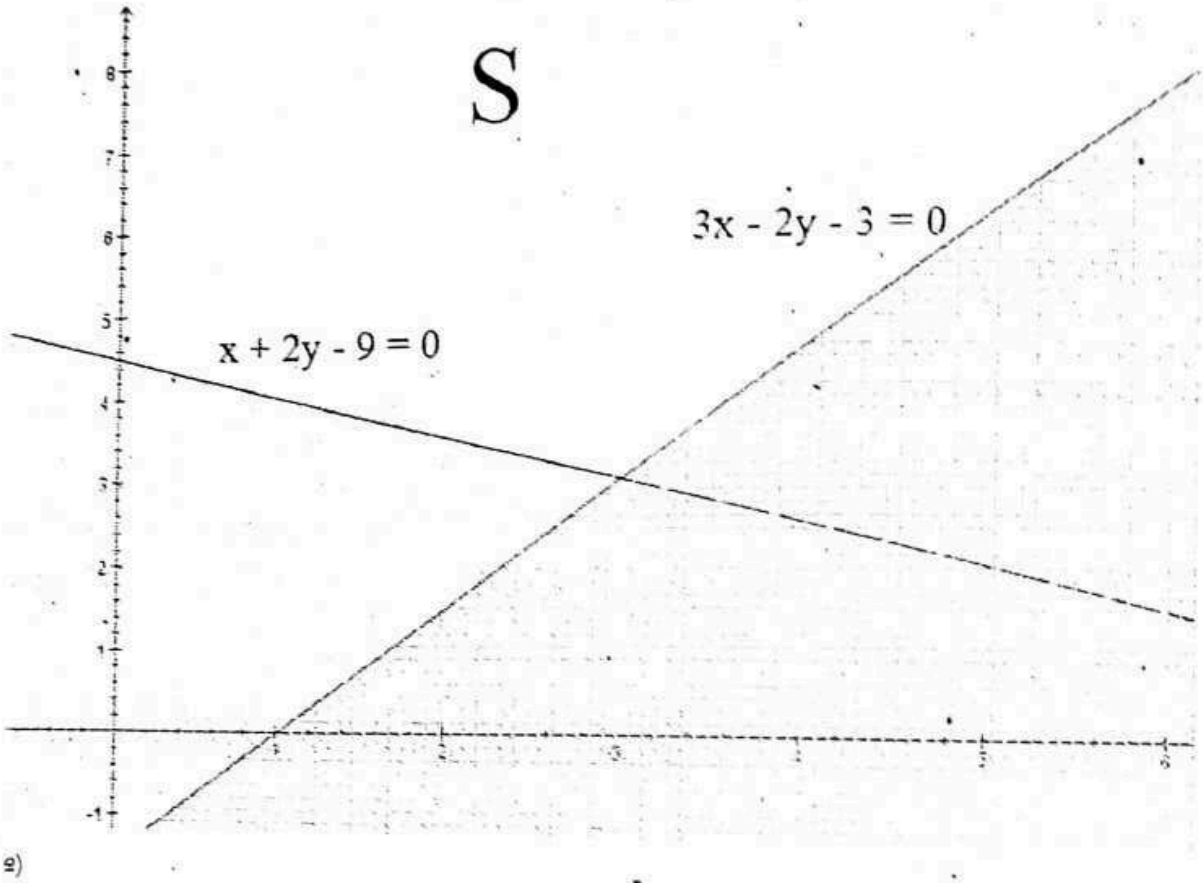
En posant à nouveau $X = x + \frac{1}{x}$, *on trouve :* $\underline{S = \{2-\sqrt{3}\,;\, 2+\sqrt{3}\}}$

## EXERCICE 7

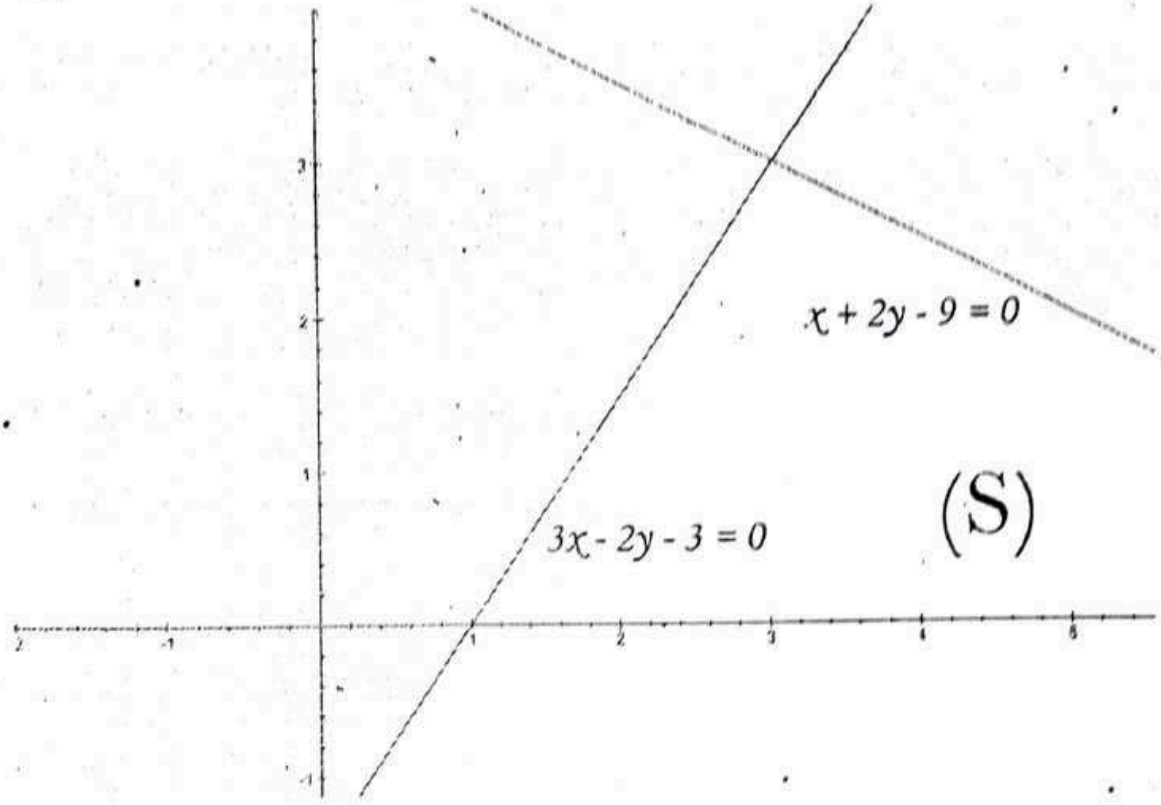
CE $\Sigma\pi\int$

Devoir numéro 5

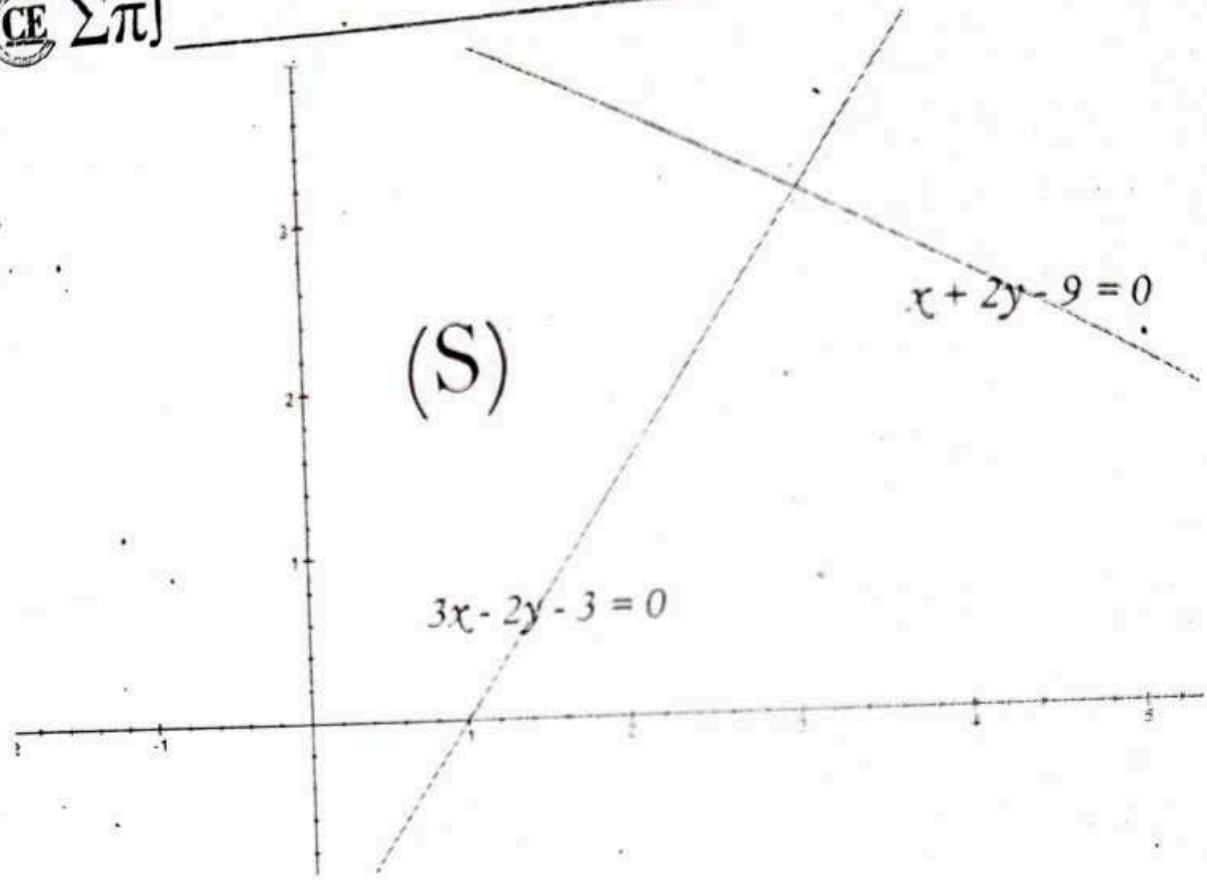
1)



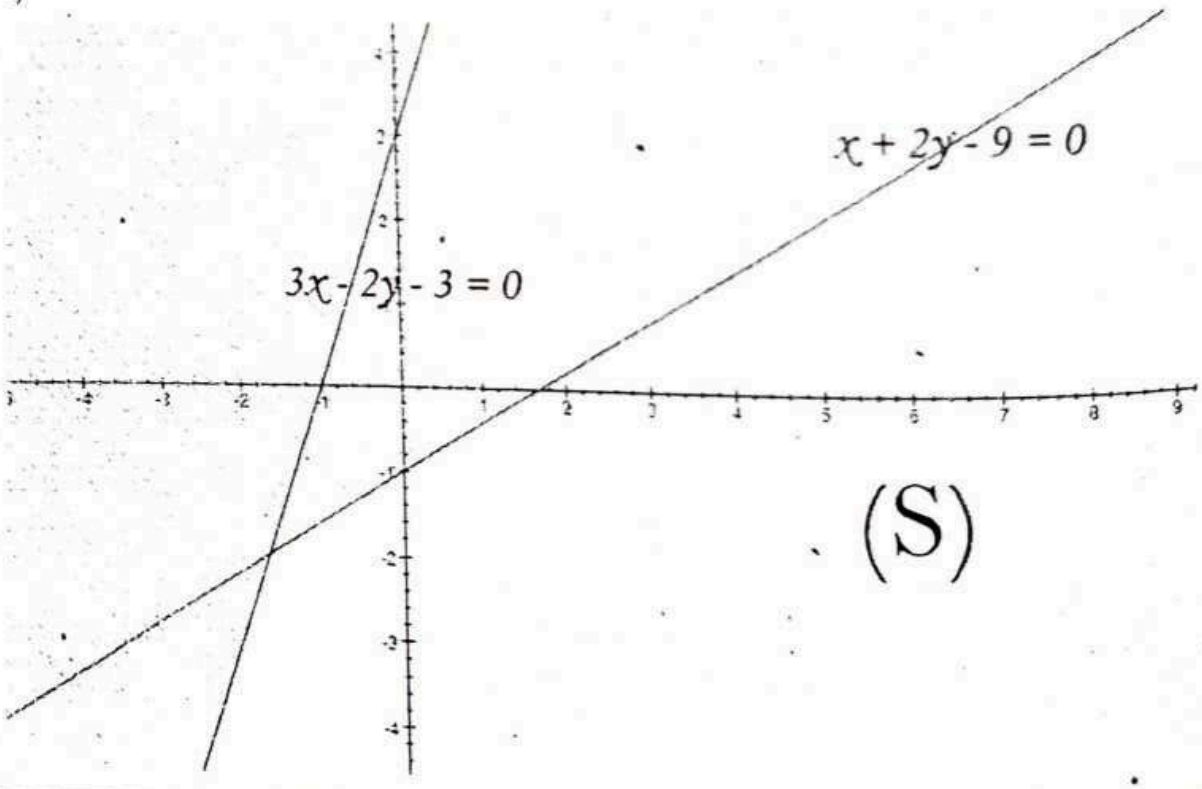

2)



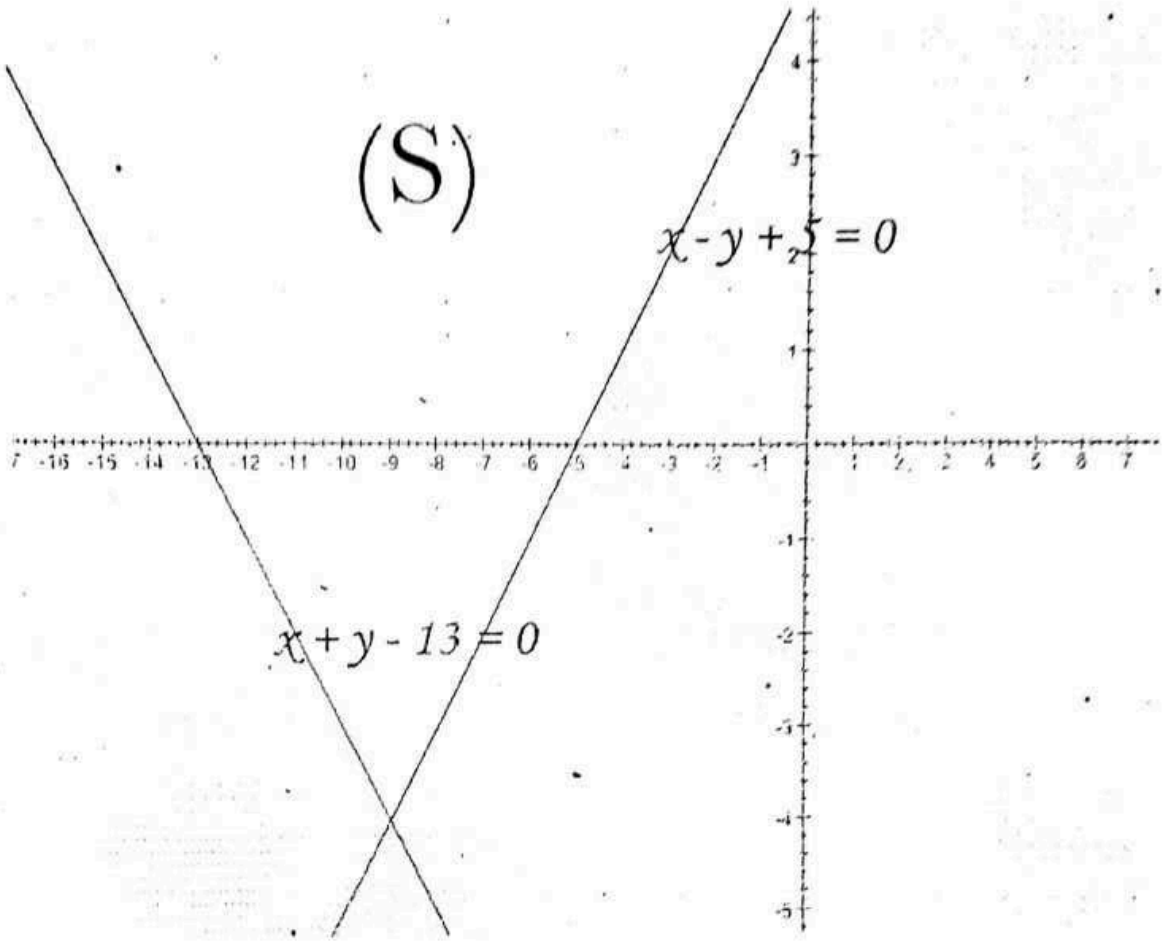

3)




4)



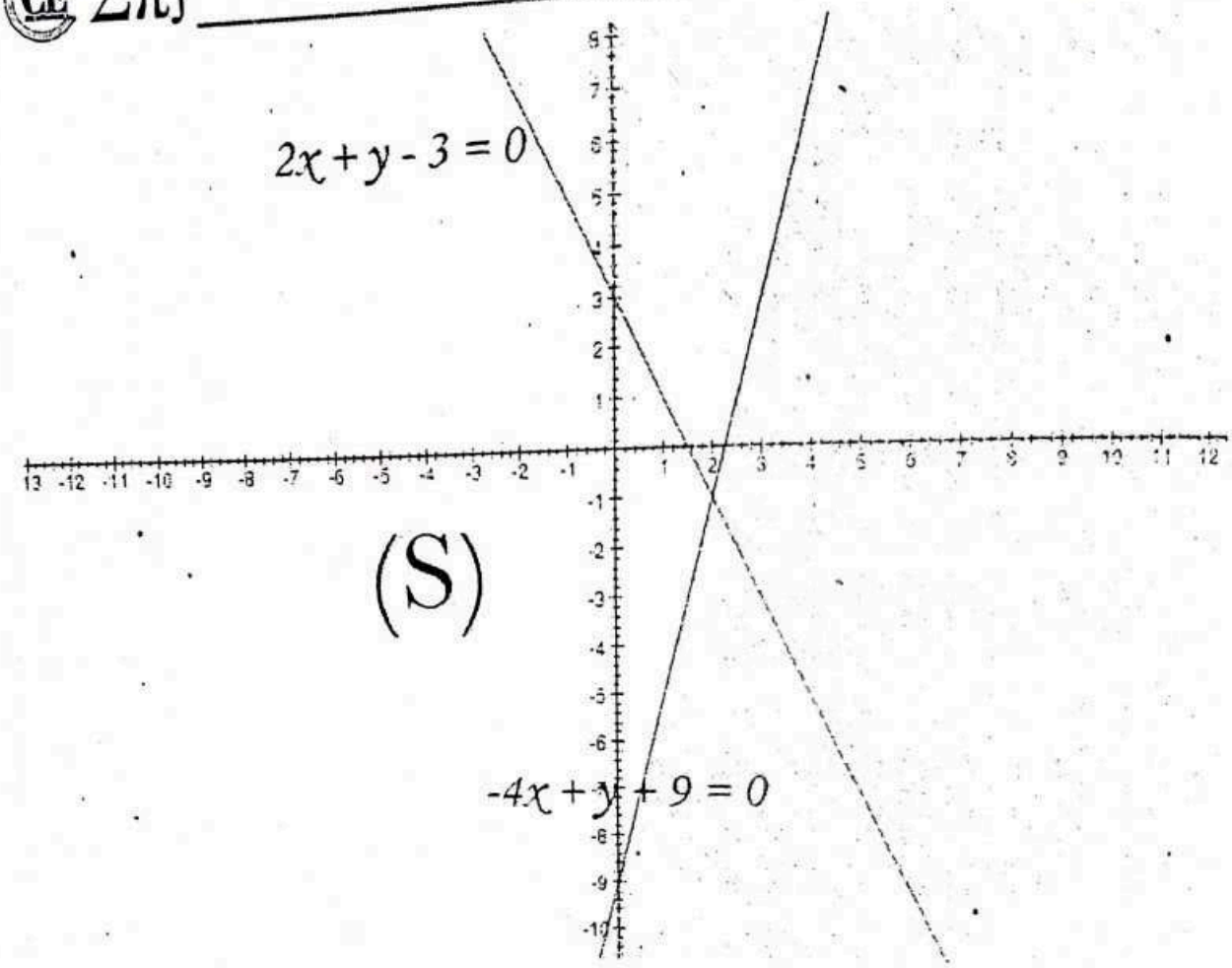
5)




6)



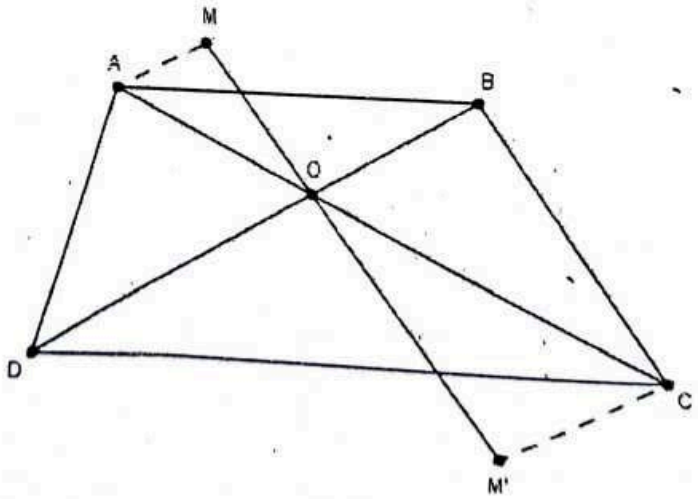
Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès




## EXERCICE 8

L'homothétie qui transforme A en C et B en D a pour centre O, le point d'intersection de (AC) et (BD).

L'image de M par cette homothétie est M', point d'intersection avec (OM) de la parallèle à (AM) passant par C.



Devoir numéro 6

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 06

## EXERCICE 1

1) En effet, $|a| \geqslant a$ et $|b| \geqslant b \implies |a| + |b| \geqslant a + b$

Donc : $(|a| + |b|)^2 \geqslant (a+b)^2 = |a+b|^2 \implies \underline{|a|^2 + |b|^2 + 2|a| \cdot |b| \geqslant |a+b|^2}$

*Déduction*

Comme : $|a|^2 + |b|^2 + 2|a| \cdot |b| \geqslant |a+b|^2 \implies \sqrt{(|a| + |b|)^2} \geqslant \sqrt{|a+b|^2}$

Donc : $\big||a| + |b|\big| = |a| + |b| \geqslant \big||a+b|\big| = |a+b|$

*Conclusion* : $\underline{|a| + |b| \geqslant |a+b|}$

2) a) *Application*

L'inégalité triangulaire appliquée à $(a+b) + (-b)$ donne :

$$|a| + |b| \geqslant |a+b| \implies |a+b| + |b| \geqslant |a+b-b| = |a|$$

Donc : $\underline{|a+b| + |b| \geqslant |a|}$ (1)

L'inégalité triangulaire appliquée à $(a+b) + (-a)$ donne :

$$|a| + |b| \geqslant |a+b| \implies |a+b| + |a| \geqslant |a+b-a| = |b|$$

Donc : $\underline{|a+b| + |a| \geqslant |b|}$ (2)

*Conclusion* : $\underline{|a+b| + |b| \geqslant |a| \ ; \ |a+b| + |a| \geqslant |b|}$

b) *Déduction*

(2) donne : $|a+b| + |a| \geqslant |b| \implies |a+b| \geqslant |b| - |a| \implies \underline{-|a+b| \leqslant |a| - |b|}$ (3)

(1) donne : $|a+b| + |b| \geqslant |a| \implies |a+b| \geqslant |a| - |b| \implies \underline{|a+b| \geqslant |a| - |b|}$ (4)

c) (3) et (4) donne : $-|a+b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a+b| \implies \big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b|$ (définition de la valeur absolue)

*Conclusion* : $\underline{\big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b|}$

## EXERCICE 1

1) On a :

(i) On a : $X = \sqrt{5} - \sqrt{6} \approx -0{,}21 < 0 \Rightarrow \underline{X < 0}$

(ii) On a : $Y = \sqrt{5} - \sqrt{2} \approx 0{,}82 > 0 \Rightarrow \underline{Y > 0}$

(iii) On a : $Z = \sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3{,}86 > 0 \Rightarrow \underline{Z > 0}$

2) On a :

(i) On a : $A = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)^2} = |\sqrt{5} - \sqrt{6}| = -(\sqrt{5} - \sqrt{6}) = \sqrt{6} - \sqrt{5} \Rightarrow \underline{A = \sqrt{6} - \sqrt{5}}$

(ii) On a : $B = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2} = |\sqrt{5} - \sqrt{2}| = +(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \sqrt{5} - \sqrt{2} \Rightarrow \underline{B = \sqrt{5} - \sqrt{2}}$

(iii) On a : $C = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2} = |\sqrt{6} + \sqrt{2}| = +(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \sqrt{6} + \sqrt{2} \Rightarrow \underline{C = \sqrt{6} + \sqrt{2}}$

## EXERCICE 3

1) a) Si $f$ vérifie (P) et si $\alpha$ est racine de $f$, alors on a : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$ et $f(\alpha) = 0$.

En remplaçant $\alpha$ dans (P), on obtient : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{f(\alpha)}{\alpha^4}$

On a

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{f(\alpha)}{\alpha^4} \Leftrightarrow 0 = f(\alpha) = \alpha^4 f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha^4 f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\frac{1}{\alpha}$ est racine de $f$

On conclut que si $f$ vérifie (P) et si $\alpha$ est racine de $f$ alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est également une racine de $f$.

b) Si $f$ vérifie la propriété (P), alors $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$ ou encore $f(x) = x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)$.

On a : $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Donc : $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^4\left(\frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + e\right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.

Ainsi : $f(x) = x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$

Par identification, on obtient : $\underline{\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}}$

On vérifie facilement la réciproque.

*Vérifions maintenant que 0 n'est pas racine de f*

En effet, $f(0) = e = a \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de $f$.

c) On a : $f(2) = 2 \times (2)^4 - 13 \times (2)^3 + 24 \times (2)^2 - 13 \times 2 + 2 = 130 - 130 = 0$

Donc 2 est une racine évidente de $f$. On déduit alors que $\frac{1}{2}$ est aussi une racine de $f$.

Il existe alors un polynôme de degré 2 tel que $f(x) = 2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+bx+c)$.

Développons l'expression de $f$

$$f(x) = (2x^2-5x+2)(x^2+bx+c) = 2x^4 + (2b-5)x^3 + (2c-5b+2)x^2 + (2b-5c)x + 2c = f(x)$$
$$= 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$$

Par identification, on a : $2c = 2 \iff c = 1$ ; $2b - 5c = -13 \iff b = -4$.

Ainsi : $f(x) = 2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-4x+1)$.

Factorisons le polynôme $x^2 - 4x + 1$. On a : $x^2 - 4x + 1 = (x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$.

Donc $\underline{f(x) = 2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})}$

2) a) Si $f$ vérifie la propriété (p) alors $\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}$ et donc $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$

On a :

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{ax^4+bx^3+cx^2+bx+a}{x^2} = \frac{ax^4}{x^2} + \frac{bx^3}{x^2} + \frac{cx^2}{x^2} + \frac{bx}{x^2} + \frac{a}{x^2} = ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}$$
$$= \left(ax^2 + \frac{a}{x^2}\right) + \left(bx + \frac{b}{x}\right) + c = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c$$

b) Transformons l'expression de $\frac{f(x)}{x^2}$.

$$\frac{f(x)}{x^2} = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c$$
$$= a\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a$$

Si $\alpha$ est une racine de $f$, alors $f(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} = 0$ et donc :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha^2} = a\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + b\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + c - 2a \implies a\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + b\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + c - 2a = 0$$

Ainsi $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ est une racine du polynôme $g(X) = aX^2 + bX + c - 2a$.

On vérifie facilement la réciproque.

c) On pose $6x^2 - 35x + 50 = 0 \implies x_1 = \frac{5}{2}$ ; $x_2 = \frac{10}{3}$.

On a : $x_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$ donc 2 et $\frac{1}{2}$ sont des racines de $f$.

De même, $x_2 = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{3}}$ donc 3 et $\frac{1}{3}$ sont des racines de $f$.

On conclut que les racines de $f$ sont 2, $\frac{1}{2}$, 3 et $\frac{1}{3}$.

## EXERCICE 4

1) (i) Déterminons une représentation paramétrique de (D) :

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in$ (D). Alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. Alors $\begin{cases}x-1=-3t\\y-2=2t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1-3t\\y=2+2t\end{cases}$

Donc (D) : $\begin{cases}x=1-3t\\y=2+2t\end{cases}$

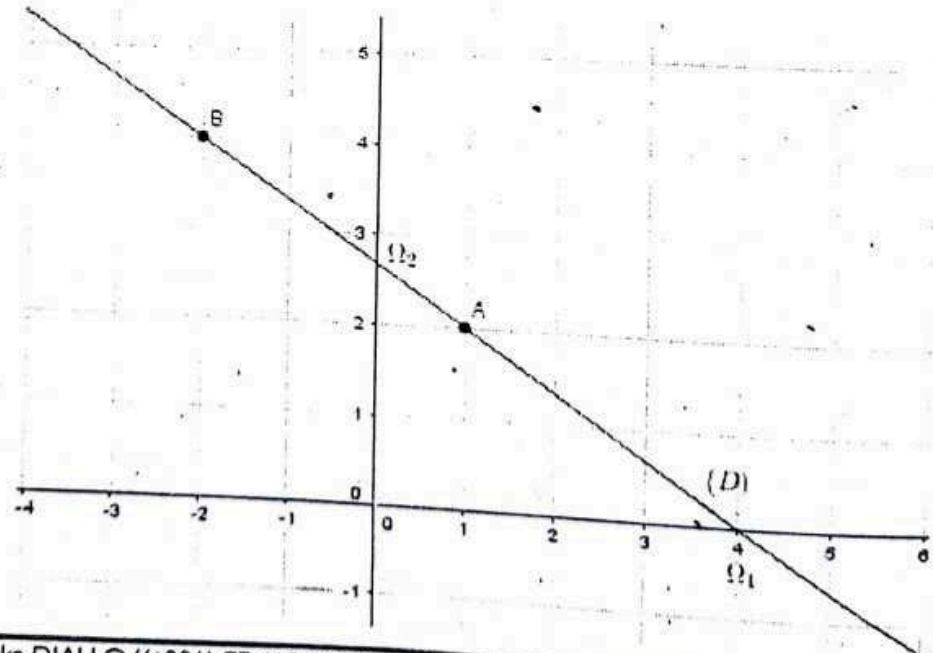
(ii) Intersection de (D) avec l'axe des abscisses : On pose $y = 0$ alors $2 + 2t = 0$ et donc $t = -1$.

Ce qui donne : $x = 1 - 3(-1) = 4$. Donc (D) coupe l'axe des abscisses au point $\Omega_1\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

Intersection de (D) avec l'axe des ordonnées : On pose $x = 0$ alors $1 - 3t = 0$ et donc $t = \frac{1}{3}$.

Ce qui donne : $y = 2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$. Donc (D) coupe l'axe des abscisses au point $\Omega_2\begin{pmatrix}0\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}$

(iii) Courbe



2) (i) (D) une représentation paramétrique de (D) : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$ donc (D) : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$

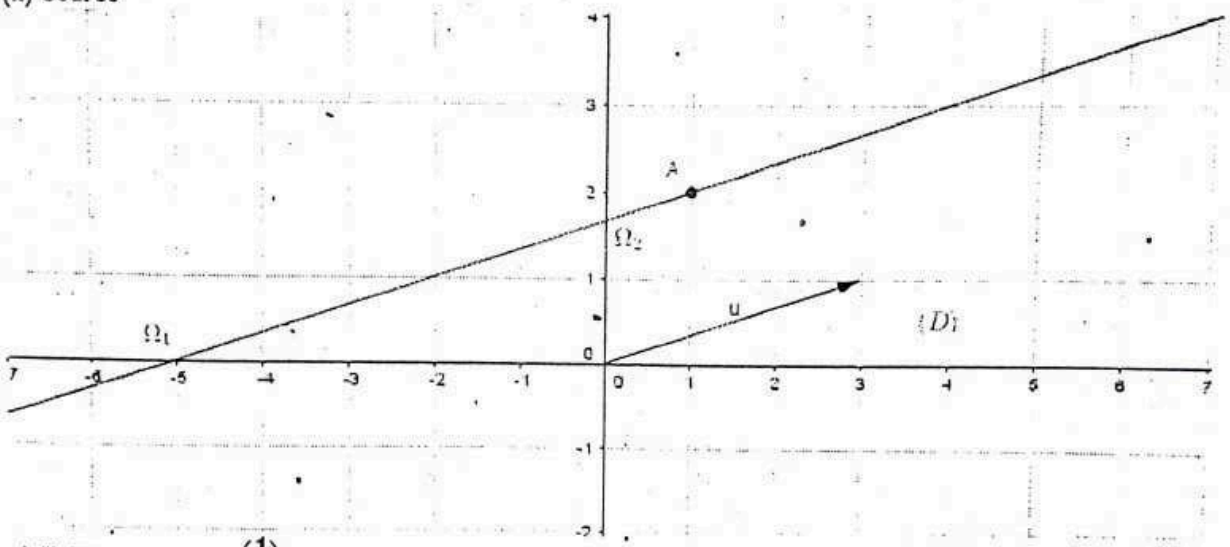
(ii) Intersection de (D) avec l'axe des abscisses : On pose $y = 0$ alors $2 + t = 0$ et donc $t = -2$.

Ce qui donne : $x = 1 + 3(-2) = -5$. Donc (D) coupe l'axe des abscisses au point $\Omega_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Intersection de (D) avec l'axe des ordonnées : On pose $x = 0$ alors $1 + 3t = 0$ et donc $t = -\frac{1}{3}$.

Ce qui donne : $y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$. Donc (D) coupe l'axe des abscisses au point $\Omega_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

(ii) Courbe




3) (i) (D) passe par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et a pour coefficient directeur $-2$.

(D) : $y = -2x + c$. (D) passe par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors : $y_A = -2x_A + c \implies c = y_A + 2x_A = 4$.

Ainsi (D) : $y = -2x + 4$ ou encore : (D) : $2x + y - 4 = 0$. Posons $x = t$, on tire : $y = -2t + 4$

Ainsi : (D) : $\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 4 \end{cases}$

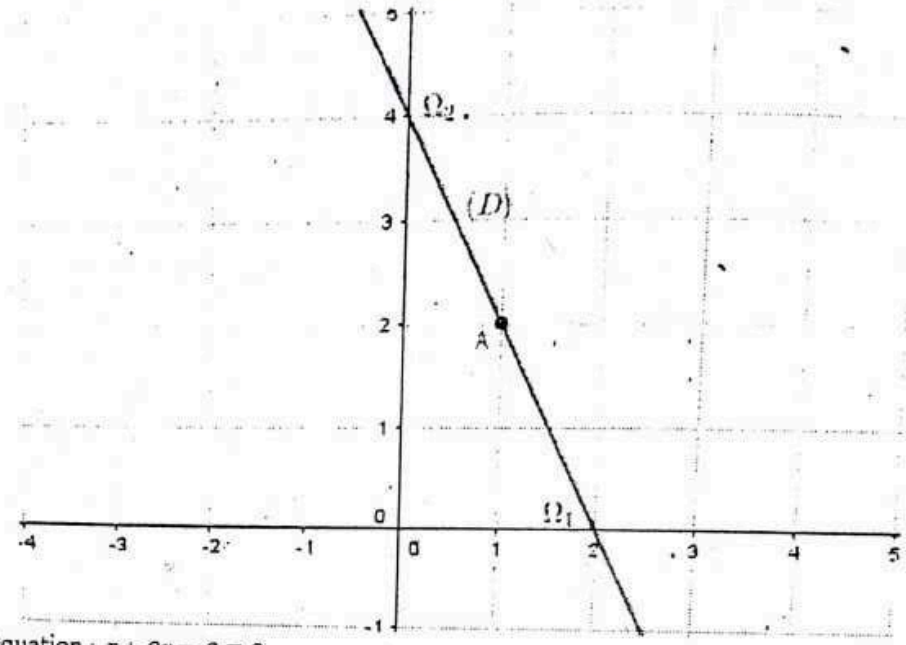
(ii) Intersection de (D) avec l'axe des abscisses : On pose $y = 0$ alors $-2t + 4 = 0$ et donc $t = 2$.

Ce qui donne $x = 2$. Donc (D) coupe l'axe des abscisses au point $\Omega_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Intersection de (D) avec l'axe des ordonnées : On pose $x = 0$ alors $t = 0$. Ce qui donne : $y = 4$.

Donc (D) coupe l'axe des abscisses au point $\Omega_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) Courbe :




4) (D) a pour équation : $x + 2y - 3 = 0$.

(i) Posons $x = t$, on tire : $y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} = \frac{3}{2} - \frac{t}{2}$

Ainsi : (D) : $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$

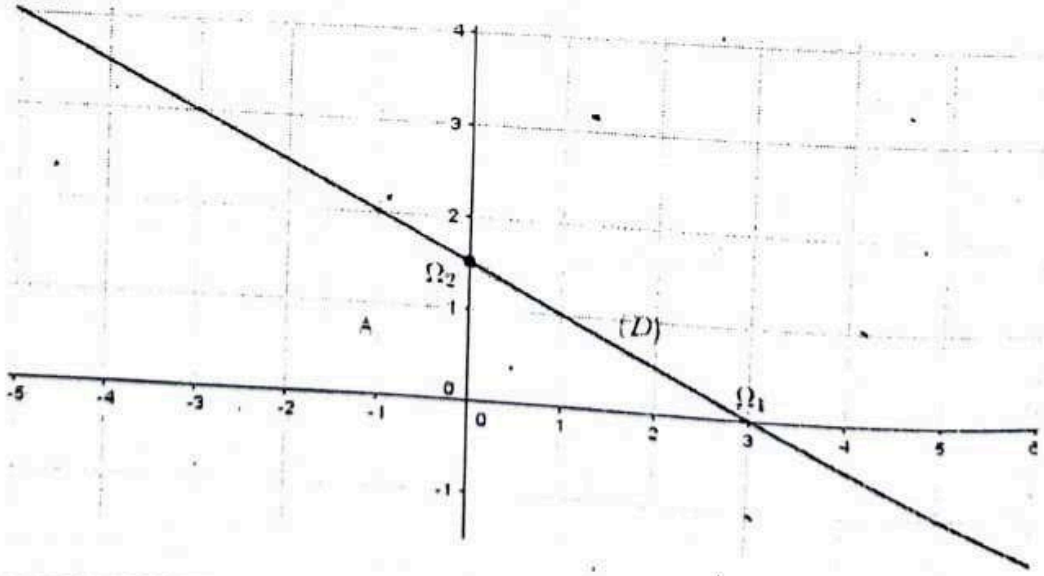
(ii) Intersection de (D) avec l'axe des abscisses : On pose $y = 0$ alors $x = 3$.

Donc (D) coupe l'axe des abscisses au point $\Omega_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Intersection de (D) avec l'axe des ordonnées : On pose $x = 0$ alors $y = \frac{3}{2}$.

Donc (D) coupe l'axe des abscisses au point $\Omega_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(iii) Courbe :



## EXERCICE 5

1) La somme des coefficients vaut : $1 + 2 + 1 + 2 = 6 \neq 0$ donc $G = \text{bar}\{(A;1),(B;2),(C;1),(D;2)\}$ existe.

2) (i) : $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB} \iff \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ donc $K = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, 2)\}$.

(ii) : $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD} \iff \overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{LD} = \vec{0}$ donc $L = \text{bar}\{(C, 1) ; (D, 2)\}$.

$G = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1) ; (D, 2)\} = \text{bar}\{(K, 3) ; (L, 3)\}$ donc $G \in (KL)$.

Par ailleurs,

(j) I milieu de $[AC]$ donc $I = \text{bar}\{(A, 1) ; (C, 1)\}$.

(jj) J milieu de $[BD]$ donc $J = \text{bar}\{(B, 2) ; (D, 2)\}$.

Or $G = \text{bar}\{(A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1) ; (D, 2)\} = \text{bar}\{(I, 2) ; (J, 4)\}$ donc $G \in (IJ)$.

3) On avait vu que $G = \text{bar}\{(K, 3) ; (L, 3)\}$ donc G est isobarycentre de $[KL]$ ou encore G est milieu du segment $[KL]$. Or, M est milieu de $[KL]$ donc $G = M$.

Comme $G \in (IJ)$ alors G, I et J sont alignés ou encore M, I et J sont alignés car $M = G$.

*Position de M sur (IJ)*

$M = G = \text{bar}\{(I ; 2)(J ; 4)\}$ donc le point M est tel que : $\overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

## EXERCICE 6

a) On a : $(2m + 1)x - 3 > 0 \iff (2m + 1)x > 3$ (a)

(i) Si $m \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$, alors $2m + 1 < 0$ et donc (a) devient : $x < \frac{3}{2m+1}$

*Conclusion 1* : $S_1 = \left]-\infty ; \frac{3}{2m+1}\right[$

(ii) Si $m = -\frac{1}{2}$, alors (a) devient : $0 > 3$ impossible

*Conclusion 2* : $S_2 = \emptyset$

(iii) Si $m \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, alors $2m + 1 > 0$ et donc (a) devient : $x > \frac{3}{2m+1}$

*Conclusion 3* : $S_3 = \left]\frac{3}{2m+1} ; +\infty\right[$

*Conclusion finale* : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left]-\infty ; \frac{3}{2m+1}\right[ \cup \left]\frac{3}{2m+1} ; +\infty\right[$

b) On a : $(m^2 - 1)x - m < 1 \iff (m^2 - 1)x < m + 1$ (a)

| $m$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^2 - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(i) Si $m \in ]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[, m^2-1>0$ et (a) devient : $x < \frac{m+1}{m^2-1} = \frac{1}{m-1}$ et donc $S_1 = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{m-1}\right[$

(ii) Si $m \in ]-1\,;\,1[, m^2-1<0$ et (a) devient : $x > \frac{m+1}{m^2-1} = \frac{1}{m-1}$ et donc $S_2 = \left]\frac{1}{m-1}\,;\,+\infty\right[$

*Conclusion* : $\underline{S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{m-1}\right[\cup\left]\frac{1}{m-1}\,;\,+\infty\right[}$

c) $mx-2(x+m) \geqslant x+1$

On a : $mx-2(x+m) \geqslant x+1 \iff mx-2x-2m-x-1 \geqslant 0 \iff (m-3)x \geqslant 2m+1$ (a)

(i) Si $m \in ]-\infty\,;\,3[,\ m-3<0$ et (a) devient : $x \leqslant \frac{2m+1}{m-3}$ et donc $S_1 = \left]-\infty\,;\,\frac{2m+1}{m-3}\right]$

(ii) Si $m \in ]3\,;\,+\infty[,\ m-3>0$ et (a) devient : $x \geqslant \frac{2m+1}{m-3}$ et donc $S_2 = \left[\frac{2m+1}{m-3}\,;\,+\infty\right[$

*Conclusion* : $\underline{S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty\,;\,\frac{2m+1}{m-3}\right]\cup\left[\frac{2m+1}{m-3}\,;\,+\infty\right[}$

d) (i) Si $m>0$, alors : $x^2-m<0 \iff (x-\sqrt{m})(x+\sqrt{m})<0 \iff x \in ]-\sqrt{m}\,;\,\sqrt{m}[$

(ii) Si $m<0$, alors $x^2-m>0$ et donc $x^2-m<0$ est impossible et par conséquent $S=\emptyset$

*Conclusion* : $\underline{S = ]-\sqrt{m}\,;\,\sqrt{m}[}$

e) (i) Si $m>0$, alors : $x^2-m^2<0 \iff (x-m)(x+m)<0 \iff x \in ]-m\,;\,m[$

(ii) Si $m<0$, alors $x^2-m^2<0 \iff (x-m)(x+m)<0 \iff x \in ]m\,;\,-m[$

*Conclusion* : $\underline{S = ]-m\,;\,m[\cup]m\,;\,-m[}$

## EXERCICE 7

1) $g(x) = (x-2)(x+6) = x(x+6)-2(x+6) = x^2+4x-12$.

Donc $\underline{g(x) = x^2+4x-12}$

$g(x)=0 \iff (x-2)(x+6)=0 \iff x-2=0$ ou $x+6=0 \iff x \in \{2\,;\,-6\}$

Donc $\underline{S = \{2\,;\,-6\}}$

2) La fonction g s'annule aux points 2 et —6. On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-6$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = x^2+4x-12$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

D'après le tableau de signe de g, on déduit que g s'annule aux points —6 et 2 ; positif sur $]-\infty\,;\,-6[\cup]2\,;\,+\infty[$ ; négatif sur $]-6\,;\,2[$.

3) a) $f_1(x) = \frac{1}{g(x)}$ existe si et seulement si : $g(x) \neq 0 \iff x \notin \{2\,;\,-6\}$

Domaine de définition de $f_1$ : $D_{f_1} = \mathbb{R} - \{2\,;\,-6\}$

b) $f_2(x) = \frac{1}{|g(x)|}$ existe si et seulement si : $|g(x)| \neq 0 \iff g(x) \neq 0 \iff x \notin \{2\,;\,-6\}$

Domaine de définition de $f_2$ : $D_{f_2} = \mathbb{R} - \{2\,;\,-6\}$

c) $f_3(x) = \sqrt{g(x)}$ existe si et seulement si : $g(x) \geqslant 0$. D'après le tableau de signe de g, on a g positif sur $]-\infty\,;\,-6[ \cup ]2\,;\,+\infty[$.

Domaine de définition de $f_3$ : $D_{f_3} = ]-\infty\,;\,-6[ \cup ]2\,;\,+\infty[$

d) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{|g(x)|}}$ existe si et seulement si : $g(x) \neq 0 \iff x \notin \{2\,;\,-6\}$

Domaine de définition de $f_4$ : $D_{f_4} = \mathbb{R} - \{2\,;\,-6\}$

4) Quels que soient $a$ et $b$ :

$$g(a) - g(b) = (a^2 + 4a - 12) - (b^2 + 4b - 12) = a^2 - b^2 + 4a - 4b = (a-b)(a+b) + 4(a-b)$$
$$= (a-b)[a+b+4] = (a-b)[(a+2) + (b+2)]$$

Donc $g(a) - g(b) = (a-b)[(a+2) + (b+2)]$

5) On a :

$$g(a) - g(b) = (a-b)[(a+2) + (b+2)] \implies \frac{g(a) - g(b)}{a-b} = (a+2) + (b+2)$$

(i) Si $a > -2$ et $b > -2$ alors, $\frac{g(a)-g(b)}{a-b} > 0$ et donc g est croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$

(ii) Si $a < -2$ et $b < -2$ alors, $\frac{g(a)-g(b)}{a-b} < 0$ et donc g est décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$

## EXERCICE 8

1) Le système $\begin{cases} x = 2x - 1 \\ y = 2y + 3 \end{cases}$ a une seule solution $(1\,;\,-3)$ donc $I\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est le seul point tel que $h(I) = I$.

2) Si $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est l'image par $h$ de $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors : $\begin{cases} x = 2x - 1 \\ y = 2y + 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 1 = 2(x-1) \\ y + 3 = 2(y+3) \end{cases} \implies \overline{IM'} = 2\overline{IM}$ ;
donc $h$ est l'homothétie de centre I et de rapport 2.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 07

## EXERCICE 1

1) On a : $a+b+c=0 \implies (a+b+c)^2=0$.

Or $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ et $ab+bc+ca=U$

Donc $a^2+b^2+c^2+2U=0 \implies \underline{a^2+b^2+c^2=-2U}$

2) Développons l'expression : $(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)$. On a :

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

Or $a+b+c=0$ et $ab+bc+ca=U$, on obtient :

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-0x^2+Ux-V=x^3+Ux-V$$

Ce qu'il fallait démontrer : $\underline{(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+Ux-V}$

3) On a : $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+Ux-V$ (1)

(i) En posant $x=a$ dans (1), on obtient : $a^3+aU-V=0$ ou encore $\underline{a^3=V-aU}$ (2)

(ii) En multipliant la relation (2) par $a$, on obtient : $\underline{a^4=a(V-aU)=aV-a^2U}$ (3)

(iii) En multipliant la relation (3) par $a$, on obtient : $a^5=a^2V-a^3U=a^2V-(V-aU)U$

En développant cette dernière expression, on obtient : $\underline{a^5=-UV+aU^2+a^2V}$

4) On a : $a^3=V-aU$ ; de même, $b^3=V-bU$ et $c^3=V-cU$.

En sommant ces trois dernières relations, on obtient : $a^3+b^3+c^3=3V-(a+b+c)U$

Et comme $a+b+c=0$, on obtient directement $\underline{a^3+b^3+c^3=3V}$

De même, $a^4=aV-a^2U$ et $b^4=bV-b^2U$ et $c^4=cV-c^2U$

En sommant ces trois dernières relations, on obtient : $a^4+b^4+c^4=(a+b+c)V-(a^2+b^2+c^2)U$

Et comme $a+b+c=0$ et $a^2+b^2+c^2=-2U$, on obtient directement $\underline{a^4+b^4+c^4=2U^2}$

De même, $a^5=-UV+aU^2+a^2V$ et $b^5=-UV+bU^2+b^2V$ et $c^5=-UV+cU^2+c^2V$

En sommant ces trois dernières relations, on obtient :

$$a^5 + b^5 + c^5 = -3UV + (a+b+c)U^2 + (a^2+b^2+c^2)V = -3UV + 0 \cdot U^2 + (-2U)V = -5UV$$

• Ainsi : $\underline{a^5 + b^5 + c^5 = -5UV}$

5) On a : $a^5 + b^5 + c^5 = -5UV \implies \frac{a^5+b^5+c^5}{5} = -UV$

Or : $a^2 + b^2 + c^2 = -2U \implies \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = -U$ et $a^3 + b^3 + c^3 = 3V \implies \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = V$

Donc : $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right) = (-U) \times V$ et comme $\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = -UV$, on obtient directement le résultat.

$$\underline{\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)}$$

## EXERCICE 2

1) On a : $A^2 = \left(\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2 = 9 - 4\sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}$

En développant : $A^2 = 18 - 2 = 16$

Donc : $A = 4$ ou $A = -4$

Comme $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}} < 0 \implies A = -4$

*Conclusion* : $\underline{A = -4}$

2) On a :

$$A^2 = \left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}\right)^2$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} + 2 + \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{(3+2\sqrt{2})^2 + (3-2\sqrt{2})^2}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} + 2 = 36$$

Ainsi $\underline{A^2 = 36}$. Comme A est un réel positif, donc $\underline{A = 6}$

## EXERCICE 3

1) On obtient le tableau suivant :

| | En termes de | | | |
|---|---|---|---|---|
| | valeur absolue | Distance | Intervalle | Encadrement |
| 1) | $\lvert 5-x \rvert \leq 3$ | $d(x;5) \leq 3$ | $x \in [2;8]$ | $2 \leq x \leq 8$ |
| 2) | $\lvert x+4 \rvert > 2$ | $d(x;-4) > 2$ | $x \in ]-\infty;-6[ \cup ]-2;+\infty[$ | $x > -2$ ou $x < -6$ |
| 3) | $\lvert x-3 \rvert \leq 1$ | $d(x;3) \leq 1$ | $x \in [2;4]$ | $2 \leq x \leq 4$ |
| 4) | $\lvert x \rvert \leq 2$ | $d(x;0) \leq 2$ | $x \in [-2;2]$ | $-2 \leq x \leq 2$ |

2) Il est évident que X est positif car $1 + a^2 > 0$ et $a \geq 0$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Montrons à présent que $X \leqslant \frac{1}{2}$. En effet,

$$X - \frac{1}{2} = \frac{a}{1+a^2} - \frac{1}{2} = \frac{2a-1-a^2}{2(1+a^2)} = -\frac{a^2-2a+1}{2(1+a^2)} = -\frac{(a-1)^2}{2(1+a^2)} \leqslant 0$$

Ainsi $X - \frac{1}{2} \leqslant 0$ ou encore $X \leqslant \frac{1}{2}$.

*Conclusion* : $\mathbf{0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}}$

## EXERCICE 4

1) On trouve $\mathbf{S = \{-5\,;\,+5\}}$

2) Les binômes $3x - 1$ et $5 - x$ ayant pour zéros $\frac{1}{3}$ et 5 respectivement, nous allons écrire l'équation sans valeur absolue dans chacun des trois intervalles : $]-\infty\,;\,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}\,;5]$ et $[5\,;\,+\infty[$.

1er cas : Si $x \in ]-\infty\,;\,\frac{1}{3}]$

Alors $|3x-1| = 1-3x$ et $|5-x| = 5-x$ (car $x$ étant inférieur ou égal à $\frac{1}{3}$ est *a fortiori* inférieur ou égal à 5 et par conséquent $5 - x$ est positif).

Ainsi, l'équation devient : $1 - 3x + 5 - x = x + 6 \Leftrightarrow -5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, valeur convenable, puisque $0 \in ]-\infty\,;\,\frac{1}{3}]$.

2ème cas : si $x \in [\frac{1}{3}\,;5]$

Alors $|3x-1| = 3x-1$ et $|5-x| = 5-x$ et l'équation s'écrit :

$3x - 1 + 5 - x = x + 6 \Leftrightarrow x = 2$, valeur convenable, puisque appartenant à l'intervalle considéré.

3ème cas : si $x \in [5\,;\,+\infty[$

Alors $|3x-1| = 3x-1$ et $|5-x| = x-5$ et l'équation s'écrit :

$3x - 1 + x - 5 = x + 6 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$, *valeur à rejeter* puisque n'appartenant pas à l'intervalle $[5\,;\,+\infty[$

*Conclusion* : $\mathbf{S = \{0\,;\,2\}}$

3) On écrit tout sans symbole de valeur absolue.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{7}{5}$ | | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert 5x+7\rvert$ | $-5x-7$ | | 0 | $5x+7$ | | $5x+7$ |
| $\lvert 3-2x\rvert$ | $3-2x$ | | $3-2x$ | | 0 | $2x-3$ |

Dans $]-\infty\,;\,-\frac{7}{5}]$, l'équation devient : $-5x - 7 - 3(3-2x) = x - 4 \Rightarrow x - 16 = x - 4$.

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 7

Dans $\left]-\frac{7}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right]$, l'équation devient $5x+7-3(3-2x)=x-4 \Rightarrow x=-\frac{1}{5}\in\left]-\frac{7}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right]$

Dans $\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation devient $5x+7-3(-3+2x)=x-4 \Rightarrow x=10\in\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$

*Conclusion* : $S=\left\{10\,;\,-\frac{1}{5}\right\}$

+) Soit à résoudre l'équation $|x+1|+|-2x+1|=7$.

On pose $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ; $-2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $\lvert x+1\rvert$ | $-x-1$ | 0 | $x+1$ | | $x+1$ |
| $-2x+1$ | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $\lvert -2x+1\rvert$ | $-2x+1$ | | $-2x+1$ | 0 | $2x-1$ |
| $\lvert x+1\rvert+\lvert -2x+1\rvert$ | $-3x$ | | $-x+2$ | | $3x$ |

(i) Sur $]-\infty\,;\,-1]$, $|x+1|+|-2x+1|=7 \Leftrightarrow -3x=7 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{3}\in]-\infty\,;\,-1]$

(ii) Sur $\left[-1\,;\,\frac{1}{2}\right]$, $|x+1|+|-2x+1|=7 \Leftrightarrow -x+2=7 \Leftrightarrow x=-5\notin\left[-1\,;\,\frac{1}{2}\right]$

(iii) Sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $|x+1|+|-2x+1|=7 \Leftrightarrow 3x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}\in\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

*Conclusion* : $S=\left\{\frac{7}{3}\,;\,-\frac{7}{3}\right\}$

5) On a : $2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ; $5-x=0 \Leftrightarrow x=5$.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1/3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-1$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $\lvert 3x-1\rvert$ | $1-3x$ | | $1-3x$ | 0 | $3x-1$ |
| $x+1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $\lvert x+1\rvert$ | $-x-1$ | 0 | $x+1$ | | $x+1$ |
| $\lvert 3x-1\rvert+\lvert x+1\rvert$ | $-4x$ | | $2-2x$ | | $4x$ |

(i) Sur $]-\infty\,;-1]$, $|3x-1|+|x+1|=1 \Leftrightarrow -4x=1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$. Or $-\frac{1}{4}\notin]-\infty\,;-1]$ donc $S_1=\{\emptyset\}$

(ii) Sur $\left[-1\,;\,\frac{1}{3}\right]$, $|3x-1|+|x+1|=1 \Leftrightarrow 2-2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2}\notin\left[-1\,;\,\frac{1}{3}\right]$ donc $S_2=\{\emptyset\}$

(iii) Sur $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, $|3x-1|+|x+1|=1 \Leftrightarrow 4x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$. Or $\frac{1}{4}\notin[5\,;+\infty[$ donc $S_3=\{\emptyset\}$

*Conclusion* : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{\emptyset\}$

6) L'équation existe si et seulement si $x-1\geq 0$. Donc $D_V=[1\,;+\infty[$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

On a : $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ ; $3x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$.

| $x$ | $+\infty$ | $3/2$ | $5/3$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2x-3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $\lvert 2x-3\rvert$ | $3-2x$ | $0$ | $2x-3$ | $2x-3$ |
| $3x-5$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\lvert 3x-5\rvert$ | $5-3x$ | $5-3x$ | $0$ | $3x-5$ |
| $\lvert 2x-3\rvert+\lvert 3x-5\rvert$ | $8-5x$ | $2-x$ | | $5x-8$ |

(*i*) Sur $]-\infty;\frac{3}{2}]$, $|2x-3|+|3x-5|=x-1 \Leftrightarrow 8-5x=x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Or $\frac{3}{2}\in]-\infty;\frac{3}{2}]$ donc $S_1=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

(*ii*) Sur $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right]$, $|2x-3|+|3x-5|=x-1 \Leftrightarrow 2-x=x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Or $\frac{3}{2}\in\left[\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right]$ donc $S_2=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

(*iii*) Sur $\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$, $|2x-3|+|3x-5|=x-1 \Leftrightarrow 5x-8=x-1 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$.

Or $\frac{7}{4}\in\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$ donc $S_3=\left\{\frac{7}{4}\right\}$

*Conclusion* : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\}$

7) On a : $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ ; $3x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ ; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $3/2$ | $5/3$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-3$ | $-$ | $-$ | $0$ $+$ | | $+$ |
| $\lvert 2x-3\rvert$ | $3-2x$ | $3-2x$ | $0$ $2x-3$ | | $2x-3$ |
| $3x-5$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\lvert 3x-5\rvert$ | $5-3x$ | $5-3x$ | $5-3x$ | $0$ | $3x-5$ |
| $x-1$ | | $0$ $+$ | | | |
| $\lvert x-1\rvert$ | $1-x$ | $0$ $x-1$ | $x-1$ | | $x-1$ |
| $\lvert 2x-3\rvert+\lvert 3x-5\rvert$ | $8-5x$ | $8-5x$ | $2-x$ | | $5x-8$ |

(*i*) Sur $]-\infty;1]$, $|2x-3|+|3x-5|=|x-1| \Leftrightarrow 8-5x=1-x \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$.

Or $\frac{7}{4}\notin]-\infty;1]$ donc $S_1=\{\emptyset\}$

(*ii*) Sur $\left[1;\frac{3}{2}\right]$, $|2x-3|+|3x-5|=|x-1| \Leftrightarrow 8-5x=x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Or $\frac{3}{2}\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$ donc $S_2=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

(*iii*) Sur $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right]$, $|2x-3|+|3x-5|=|x-1| \Leftrightarrow 2-x=x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Or $\frac{3}{2}\in\left[\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right]$ donc $S_3=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

(iv) Sur $\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$, $|2x-3|+|3x-5|=|x-1| \iff 5x-8=x-1 \iff x=\frac{7}{4}$.

Or $\frac{7}{4}\in\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$ donc $S_3=\left\{\frac{7}{4}\right\}$

*Conclusion* : $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\left\{\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\}$

8) En effet,

$$|-2x+6|+|-x+1|=0 \iff |-2x+6|=-|-x+1| \iff \begin{cases}|-2x+6|=0\\|-x+1|=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=3\\x=1\end{cases}$$

*Conclusion* : $S=\{\emptyset\}$

9) L'équation existe si et seulement si : $5x+10\geqslant 0$. Donc $D_V=[-2;+\infty[$

Pour tout $x\in D_V$, $|5x+10||x-2|=5x+10 \iff (5x+10)|x-2|=5x+10$

Ainsi : $(5x+10)|x-2|-(5x+10)=0$

Ou encore : $(5x+10)(|x-2|-1)=0$

Ou encore : $5x+10=0$ ou $|x-2|-1=0$

Ou encore : $x=-2$ ou $|x-2|=1$

Ou encore : $x=-2$ ou $x-2=1$ ou $x-2=-1$

Ou encore : $x=-2$ ou $x=3$ ou $x=1$

*Conclusion* : $S=\{-2;1;3\}$

10) On a : $-2x+6=0 \iff x=3$ ; $-x+1=0 \iff x=1$.

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+6$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\|-2x+6\|$ | $2x-6$ | | $2x-6$ | 0 | $-2x+6$ | |
| $-x+1$ | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $\|-x+1\|$ | $-x+1$ | 0 | $x-1$ | | $x-1$ | |
| $\|-2x+6\|-\|-x+1\|$ | $3x-7$ | | $x-5$ | | $-3x+7$ | |

(i) Sur $]-\infty;1]$, $|-2x+6|-|-x+1|=3 \iff 3x-7=3 \iff x=\frac{10}{3}$.

Or $\frac{10}{3}\notin]-\infty;1]$ donc $S_1=\{\emptyset\}$

(ii) Sur $[1;3]$, $|-2x+6|-|-x+1|=3 \iff x-5=3 \iff x=8$. Or $8\notin[1;3]$ donc $S_2=\{\emptyset\}$

(iii) Sur $[3;+\infty[$, $|-2x+6|-|-x+1|=3 \iff -3x+7=3 \iff x=\frac{4}{3}$.

Or $\frac{4}{3}\notin[3;+\infty[$ donc $S_3=\{\emptyset\}$

*Conclusion* : $\underline{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{\emptyset\}}$

11) On a : $|x^2 - 1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1||x+1|$.

Ainsi : $|x^2 - 1| + |x+1| = 0 \iff |x-1||x+1| + |x+1| = 0 \iff |x+1|(|x-1|+1) = 0$

Or : $|x-1| + 1 \neq 0$ donc : $|x+1|(|x-1|+1) = 0 \iff |x+1| = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1$.

*Conclusion* : $\underline{S = \{-1\}}$

## EXERCICE 5

1) I le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$. On a :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IA}\cdot\underbrace{\overrightarrow{IB}}_{-\overrightarrow{IA}} = MI^2 - IA^2$$

*Conclusion* : $\underline{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2}$

2) AB = 4 donc IA = 2. On a : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k \iff MI^2 - IA^2 = k \iff MI^2 = IA^2 + k = k + 4$

Trois cas sont possibles :

(i) Si $k + 4 < 0$ ou encore si $k < -4$ alors $MI^2 < 0$ ce qui est impossible. Donc $(\mathcal{E}) = \emptyset$

(ii) Si $k + 4 = 0$ ou encore si $k = -4$ alors $MI^2 = 0$ et donc $(\mathcal{E}) = \{I\}$

(iii) Si $k + 4 > 0$ ou encore si $k > -4$ alors $MI = \sqrt{k+4}$ et donc $(\mathcal{E})$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+4}$

3) Si $k = 0$, $MI^2 = AI^2$ et donc $(\mathcal{E})$ est le cercle de centre I et rayon = AI donc $r = \frac{1}{2}AB$.

$(\mathcal{E})$ est le cercle de diamètre [AB]

## EXERCICE 6

1) On calcule le discriminant (réduit) de l'équation : $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2+2) = 2m - 1$

| $m$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta$ | $-$ | $+$ | |

(i) Si $m \in ]-\infty ; \frac{1}{2}[$, alors $\Delta < 0$ et l'équation $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ n'admet aucune solution.

(ii) Si $m = \frac{1}{2}$, alors $\Delta = 0$ et l'équation $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ admet une racine double $x_0 = \frac{3}{2}$ qui est une solution positive.

(iii) Si $m \in ]\frac{1}{2} ; +\infty[$, alors $\Delta > 0$ et l'équation $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = m + 1 - \sqrt{2m-1}$ et $x_2 = m + 1 + \sqrt{2m-1}$.

- Pour déterminer le signe des solutions, on étudie leur somme et de leur produit.

$$S = x_1 + x_2 = 2(m+1) \ ; \ P = x_1x_2 = m^2 + 2$$

N'oublions pas que $m \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ donc $2(m+1) > 0$ et donc $S > 0$. Il est clair que $P = m^2 + 2 > 0$.

$S > 0$ et $P > 0$ et donc $x_1$ et $x_2$ sont deux solutions positives.

2) On résout $x_2 = 3x_1$.

Ainsi : $m + 1 + \sqrt{2m-1} = 3\left(m + 1 - \sqrt{2m-1}\right) \implies 2\sqrt{2m-1} = m + 1$

En élevant au carré, on obtient : $4(2m-1) = m^2 + 2m + 1$

Ainsi : $m^2 - 6m + 5 = 0 \implies m \in \{1 ; 5\}$

*Conclusion* : L'équation $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ admet deux solutions $x_1$ et $x_2$ telles que $x_2 = 3x_1$ si $\underline{m \in \{1 ; 5\}}$

3) On a : $x_2 = 3x_1 \implies x_1 + x_2 = 4x_1 \implies (x_1 + x_2)^2 = 16x_1^2 = 16x_1 \cdot x_1$ (1)

Comme $x_2 = 3x_1 \implies x_1 = \frac{x_2}{3}$ et (1) devient : $(x_1 + x_2)^2 = 16x_1 \cdot \frac{x_2}{3} = \frac{16}{3}x_1x_3$

Autrement dit : $\underline{3(x_1 + x_2)^2 = 16x_1x_3}$

4) Si $3(x_1 + x_2)^2 = 16x_1x_3$ alors $(x_1 + x_2)^2 = 16x_1^2$ ou encore $x_1 + x_2 = \pm 4x_1$

Si $x_1 + x_2 = +4x_1$ alors $x_2 = 3x_1$ et si $x_1 + x_2 = -4x_1$ alors $x_2 = -5x_1$

*Conclusion* : La réciproque n'est pas vérifiée.

## EXERCICE 7

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

Pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et : $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$. Donc $f$ est paire.

On a : $D_g = \mathbb{R}$

Pour tout $x \in D_g$, $-x \in D_g$ et : $g(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{3x}{x^2+1} = -g(x)$. Donc g est impaire.

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 08

## EXERCICE 1

1) a) $A = 9{,}19631770 \times 10^{8}$ b) $A = 2{,}7 \times 10^{15}$ c) $A = 7{,}277 \times 10^{-6}$
d) $A = 1{,}242 \times 10^{7}$ e) $A = 6{,}6262 \times 10^{-34}$

2) a) $B = 0{,}004168$ b) $B = 0{,}06429793$ c) $B = 205{,}1738$
d) $B = 0{,}00064872$ e) $B = 52\,580$ f) $B = 3{,}700025$

## EXERCICE 2

a) On a : $|x-3| < 2 \Rightarrow -2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow x \in ]1;5[$

On a : $|x-2| \leqslant 2 \Rightarrow -2 \leqslant x-2 \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 4 \Rightarrow x \in [0;4]$

Ainsi : $E \cap F = ]1;5[ \cap [0;4] = ]1;4]$ et $E \cup F = ]1;5[ \cup [0;4] = [0;5[$

*Conclusion* : $\underline{E \cap F = ]1;4]\ ;\ E \cup F = [0;5[}$

b) On a : $|x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5 \Rightarrow -5 < x < 5 \Rightarrow x \in ]-5;5[$

On a : $|x| > 3 \Rightarrow x > 3$ ou $x < -3 \Rightarrow x \in ]-\infty;-3[ \cup ]3;+\infty[$

Ainsi : $E \cap F = ]-5;5[ \cap (]-\infty;-3[ \cup ]3;+\infty[) = ]-5;-3[ \cup ]3;5[$

On a : $E \cup F = ]-5;5[ \cup (]-\infty;-3[ \cup ]3;+\infty[) = \mathbb{R}$

*Conclusion* : $\underline{E \cap F = ]-5;-3[ \cup ]3;5[\ ;\ E \cup F = \mathbb{R}}$.

c) On a : $|x+3| < 2 \Rightarrow -2 < x+3 < 2 \Rightarrow -5 < x < -1 \Rightarrow x \in ]-5;-1[$

On a : $|x-2| \leqslant 3 \Rightarrow -3 \leqslant x-2 \leqslant 3 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 5 \Rightarrow x \in [-1;5]$

Ainsi : $E \cap F = ]-5;-1[ \cap [-1;5] = \emptyset$ et $E \cup F = ]-5;-1[ \cup [-1;5] = ]-5;5]$

*Conclusion* : $\underline{E \cap F = \emptyset\ ;\ E \cup F = ]-5;5]}$

## EXERCICE 3

1) On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos x \geqslant 0$. Ainsi $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

On déduit $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{5\sqrt{2}}{7} = -\frac{1}{7}$

*Conclusion* : $\cos x = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ ; $\tan x = -\frac{1}{7}$

2) On a:

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

*Conclusion* : $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ; $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) a) On a :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \; ; \quad \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Ainsi :

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

*Conclusion* : $S = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 0$

b) On a :

$$S' = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Or $2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc

$$S' = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

*Conclusion* : $S' = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 2$

## EXERCICE 6

1) Si $m = 1$ alors (E) devient : $-2x + 2 = 0 \implies x = 1$

Si $m \neq 1$ alors (E) est un trinôme du second degré. Ainsi : $\Delta' = -4m + 5$

On a : $S = \frac{-2m+4}{m-1}$ ; $P = \frac{m+1}{m-1}$

| $m$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\frac{5}{4}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta'$ | | $+$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $S$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $P$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |

Si $m \in ]-\infty ; -1[$, alors $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ et donc (E) admet deux racines négatives.

Si $m \in ]-1 ; 1[$, alors $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P < 0 \\ S < 0 \end{cases}$ et donc (E) admet deux racines de signe contraire.

Si $m \in \left]1\,;\,\frac{5}{4}\right[$, alors $\begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\\ S > 0\end{cases}$ et donc (E) admet deux racines positives.

Si $m \in \left]\frac{5}{4}\,;\,+\infty\right[$, alors $\Delta' < 0$ et donc (E) n'admet aucune racine.

Si $m = \frac{5}{4}$ alors $\Delta' = 0$ et $x_0 = -\frac{\frac{5}{4}-2}{\frac{5}{4}-1} = 3$

2) On a :

$$S = \frac{-2m+4}{m-1} \implies mS - S = -2m + 4 \implies m = \frac{S+4}{S+2}$$

Ainsi :

$$P = \frac{m+1}{m-1} = \frac{\frac{S+4}{S+2}+1}{\frac{S+4}{S+2}-1} = \frac{2S+6}{2} = S+3$$

Sachant que $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$, on obtient : $x_1x_2 = x_1 + x_2 + 3$

*Conclusion* : $\underline{x_1x_2 = x_1 + x_2 + 3}$

3) Si $m = 0$, alors (E) devient : $(0-1)x^2 + (2\times 0 - 4)x + 0 + 1 = 0$

Ainsi (E) devient alors : $-x^2 - 4x + 1 = 0 \implies x^2 + 4x - 1 = 0$

On a : $x_1 + x_2 = -4$ ; $x_1x_2 = -1$

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

Donc : $(x_1 - x_2)^2 = (-4)^2 - 4\times -1 = 16 + 4 = 20$

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{x_2+1+x_1+1}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1} = \frac{-4+2}{-1-4+1} = \frac{1}{2}$$

*Conclusion* : $\underline{(x_1 - x_2)^2 = 20}$ et $\underline{\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{2}}$

## EXERCICE 7

1) Soient $a$ et $b$ deux réels. On a :

$$T(a,b) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{(2a^2-4a+1)-(2b^2-4b+1)}{a-b} = \frac{2a^2-4a+1-2b^2+4b-1}{a-b}$$
$$= \frac{2(a^2-b^2)-4(a-b)}{a-b} = \frac{2(a-b)(a+b)-4(a-b)}{a-b} = \frac{2(a-b)(a+b-2)}{a-b}$$
$$= 2(a+b-2)$$

*Conclusion* : $\underline{T(a,b) = 2(a+b-2)}$

2) On a : $T(a,b) \geqslant 0 \iff 2(a+b-2) \geqslant 0 \iff a+b-2 \geqslant 0 \iff a+b \geqslant 2$.

Si $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ alors $a+b \geqslant 1+1=2$ et donc $\underline{T(a,b) \geqslant 0 \iff a \geqslant 1, b \geqslant 1}$

On a : $T(a,b) \leqslant 0 \iff 2(a+b-2) \leqslant 0 \iff a+b-2 \leqslant 0 \iff a+b \leqslant 2$.

Si $a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1$ alors $a+b \leqslant 1+1=2$ et donc $\underline{T(a,b) \leqslant 0}$

3) La fonction $f$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;1]$.

## EXERCICE 8

1) $f(A)$ est telle que : $3\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \implies \underline{\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$

$f(B)$ est telle que : $3\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} \implies \underline{\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$

2) Q est invariant par $f$ si $f(Q) = Q$ et $Q = Q'$ (autrement dit $\overrightarrow{QQ'} = \vec{0}$)

Ainsi : $3\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} \implies \underline{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \vec{0}}$ donc Q est isobarycentre du segment $[AB]$.

3) On a : $3\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MQ} + 3\overrightarrow{QM'}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{MQ} + \underbrace{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}}_{\vec{0}}$

Ainsi : $3\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \iff 3\overrightarrow{MQ} + 3\overrightarrow{QM'} = 2\overrightarrow{MQ} \iff \underline{\overrightarrow{QM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QM}}$

La transformation $f$ est l'homothétie de centre Q et de rapport $\frac{1}{3}$

Devoir numéro 9

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 09

## EXERCICE 1

### Première partie

1) On a :

$$m(2,4)=\frac{2+4}{2}=3\ ;\ g(2,4)=\sqrt{2\times 4}=2\sqrt{2}\ ;\ h(2,4)=\frac{2\times 2\times 4}{2+4}=\frac{8}{3}\ ;\ q(2,4)=\sqrt{\frac{2^2+4^2}{2}}=\sqrt{10}$$

*Conclusion* : $\underline{m(2,4)=3\ ;\ g(2,4)=2\sqrt{2}\ ;\ h(2,4)=\frac{8}{3}\ ;\ q(2,4)=\sqrt{10}}$

2) (i) Montrons que $a \leqslant h(a,b)$. En effet,

$$a-h(a,b)=a-\frac{2ab}{a+b}=\frac{a^2+ab-2ab}{a+b}=\frac{a^2-ab}{a+b}=\frac{a(a-b)}{a+b}$$

$a-h(a,b)$ est du signe de $(a-b)$ car $\frac{a}{a+b}\geqslant 0$ ($a$, $b$ sont strictement positifs).

Or $a \leqslant b \implies a-b\leqslant 0$ donc : $a-h(a,b)\leqslant 0$ et par conséquent $\underline{a \leqslant h(a,b)}$

(ii) Montrons que $h(a,b)\leqslant g(a,b)$. En effet,

$$h(a,b)-g(a,b)=\frac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab}=\sqrt{ab}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}-1\right)=\sqrt{ab}\left(\frac{2\sqrt{ab}-(a+b)}{a+b}\right)$$
$$=-\sqrt{ab}\left(\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{a+b}\right)=-\sqrt{ab}\left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a+b}\right)$$

$h(a,b)-g(a,b)$ est du signe de $-\sqrt{ab}$ car $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geqslant 0$.

Or $-\sqrt{ab}\leqslant 0$ donc : $h(a,b)-g(a,b)\leqslant 0$ et par conséquent $\underline{h(a,b)\leqslant g(a,b)}$

(iii) Montrons que $g(a,b)\leqslant m(a,b)$. En effet,



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

$$g(a,b)-m(a,b)=\sqrt{ab}-\frac{a+b}{2}=\frac{2\sqrt{ab}-(a+b)}{2}=-\frac{(a+b)-2\sqrt{ab}}{2}=-\left(\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{2}\right)$$

$$=-\left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\right)\leqslant 0$$

Ainsi $g(a,b)-m(a,b)\leqslant 0$ et par conséquent $\underline{\boldsymbol{g(a,b)\leqslant m(a,b)}}$

(iv) Montrons que $m(a,b)\leqslant q(a,b)$. En effet,

$$m(a,b)-q(a,b)=\frac{a+b}{2}-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\frac{\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{a^2+b^2}{2}}{\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}=\frac{\frac{a^2+b^2+2ab-2(a^2+b^2)}{4}}{\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

$$=-\frac{a^2+b^2-2ab}{4\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)}=-\frac{(a-b)^2}{4\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)}\leqslant 0$$

Ainsi $m(a,b)-q(a,b)\leqslant 0$ et par conséquent $\underline{\boldsymbol{m(a,b)\leqslant q(a,b)}}$

(v) Montrons que $q(a,b)\leqslant b$. En effet,

$$q(a,b)-b=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-b=\frac{\frac{a^2+b^2}{2}-b^2}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+b}=\frac{a^2+b^2-2b^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+b\right)}=\frac{a^2-b^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+b\right)}\leqslant 0$$

Ainsi $q(a,b)-b\leqslant 0$ et par conséquent $\underline{\boldsymbol{q(a,b)\leqslant b}}$

3) On a : $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{bc}\times 2\sqrt{ca}=8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}=8abc$

$$\underline{\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc}}$$

4) En effet, $m(a,b)\leqslant q(a,b)\implies \frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\implies\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ (1)

De même, $m(b,c)\leqslant q(b,c)\implies \frac{b+c}{2}\leqslant\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\implies\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$ (2)

De même, $m(c,a)\leqslant q(c,a)\implies \frac{c+a}{2}\leqslant\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}\implies\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$ (3)

En sommant les relations (1), (2) et (3), on obtient :

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)+\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)+\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+b+c+c+a)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(2a+2b+2c)=\sqrt{2}(a+b+c)$$

*Conclusion* : $\underline{\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)}}$

5) On écrit : $2ab \leqslant a^2 + b^2$ ; $2ca \leqslant c^2 + a^2$ ; $2bc \leqslant b^2 + c^2$.

Ainsi : $2ab + 2bc + 2ca \leqslant (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (b^2 + c^2) = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$

Ou encore : $2(ab + bc + ca) \leqslant 2(a^2 + b^2 + c^2)$

En simplifiant partout par 2, on obtient : $\underline{ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2}$

6) En effet, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca \implies 2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + bc + ca)$

Ajoutons $a^2 + b^2 + c^2$ partout : $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

Or $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$ donc : $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2$

En passant à la racine carrée : $\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \geqslant \sqrt{(a + b + c)^2} = |a + b + c| = a + b + c$

Comme $\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, on obtient : $\underline{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}}$

**Deuxième partie**

1) a) Montrons que $x \geqslant \sqrt{x + y - z} \cdot \sqrt{x - y + z}$

On sait que pour tous réels $y$ et $z$, on a : $-(y - z)^2 \leqslant 0$. En ajoutant partout $x^2$, on obtient $x^2 - (y - z)^2 \leqslant x^2$. Or $x^2 - (y - z)^2 = \big(x - (y - z)\big)\big(x - (y + z)\big) = (x - y + z)(x + y - z)$

Donc $(x - y + z)(x + y - z) \leqslant x^2$ ou encore $\underline{x \geqslant \sqrt{x + y - z} \cdot \sqrt{x - y + z}}$ (4)

b) Montrons que $y \geqslant \sqrt{y + x - z} \cdot \sqrt{y + z - x}$

On sait que pour tous réels $x$ et $z$, on a : $-(x - z)^2 \leqslant 0$. En ajoutant partout $y^2$, on obtient $y^2 - (x - z)^2 \leqslant y^2$. Or $y^2 - (x - z)^2 = \big(y - (x - z)\big)\big(y + (x - z)\big) = (y - x + z)(y + x - z)$

Donc $(y - x + z)(y + x - z) \leqslant y^2$ ou encore $\underline{y \geqslant \sqrt{y + x - z} \cdot \sqrt{y + z - x}}$ (5)

c) Montrons que $z \geqslant \sqrt{y + z - x} \cdot \sqrt{x + z - y}$

On sait que pour tous réels $y$ et $x$, on a : $-(x - y)^2 \leqslant 0$. En ajoutant partout $z^2$, on obtient $z^2 - (x - y)^2 \leqslant z^2$. Or $z^2 - (x - y)^2 = \big(z - (x - y)\big)\big(z + (x - y)\big) = (z - x + y)(z + x - y)$

Donc $(z - x + y)(z + x - y) \leqslant x^2$ ou encore $\underline{z \geqslant \sqrt{y + z - x} \cdot \sqrt{x + z - y}}$ (6)

*Remarque* : $\sqrt{x + y - z}, \sqrt{x - y + z}, \sqrt{y + z - x}$ existent car si $x, y$ et $z$ sont les longueurs d'un triangle, alors : $\begin{cases} x + y > z \\ x + z > y \\ z + y > x \end{cases}$ ou encore $\underline{\begin{cases} x + y - z > 0 \\ x + z - y > 0 \\ z + y - x > 0 \end{cases}}$

2) On fait le produit des relations (4), (5) et (6), on obtient :

$$xyz \geqslant \big[\sqrt{x + y - z} \cdot \sqrt{x - y + z}\big] \cdot \big[\sqrt{y + x - z} \cdot \sqrt{y + z - x}\big] \cdot \big[\sqrt{y + z - x} \cdot \sqrt{x + z - y}\big]$$
$$= \big(\sqrt{x + y - z}\big)^2 \big(\sqrt{x + z - y}\big)^2 \big(\sqrt{y + z - x}\big)^2 = (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x)$$

*Conclusion* : $\underline{xyz \geqslant (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}$

3) En effet,

$$xyz \geqslant (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) \implies 8xyz \geqslant 8(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$$

D'après la question A) 3) on a : $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$ donc :

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz \geqslant 8(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$$

*Conclusion* : $\underline{(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}$

## EXERCICE 3

(i) Soit $x \in I_1 \implies -1 \leqslant x \leqslant 3 \implies -2 \leqslant x-1 \leqslant 2 \implies \underline{|x-1| \leqslant 2}$

(ii) Soit $x \in I_2 \implies x < -1$ ou $x > 3 \implies x-1 < -2$ ou $x-1 > 2 \implies \underline{|x-1| > 2}$

(iii) Soit $x \in I_3 \implies -5 < x < -2 \implies -\frac{3}{2} < x+\frac{7}{2} < \frac{3}{2} \implies \underline{\left|x+\frac{7}{2}\right| < \frac{3}{2}}$

(iv) Soit $x \in I_4 \implies x < -5$ ou $x > -2 \implies x+\frac{7}{2} < -\frac{3}{2}$ ou $x+\frac{7}{2} > \frac{3}{2} \implies \underline{\left|x+\frac{7}{2}\right| > \frac{3}{2}}$

## EXERCICE 4

1) On a : $x_A = -1-2k \implies -3 = -1-2k \implies k = 1$

De même, $y_A = 3+k \implies 4 = 3+k \implies k = 1$.

*Conclusion* : A appartient à la droite $(D_2)$.

2) Déterminons d'abord l'équation de la droite $(D_2)$. On a :

$$x = -1-2k \implies k = -\frac{x+1}{2} \; ; \; y = 3+k = 3-\frac{x+1}{2} = \frac{6-x-1}{2} = -\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$$

*Conclusion* : $\underline{(D_2) : y(x) = -\frac{x}{2}+\frac{5}{2}}$

Soient $a_2$ le coefficient directeur de $(D_2)$ et $a_3$ celui de $(D_3)$. Les droites $(D_2)$ et $(D_3)$ sont perpendiculaires si : $a_2 \times a_3 = -1$ ou encore $a_3 = -\frac{1}{a_2}$ et donc $a_3 = 2$.

Ainsi : $(D_3) : y(x) = 2x+b, \; b \in \mathbb{R}$.

A appartient à $(D_3)$ donc : $y_A = 2x_A + b \implies 4 = -6+b \implies b = 10$

*Conclusion* : $\underline{(D_3) : y(x) = 2x+10}$

3) Il est clair que $(D_1)$ et $(D_2)$ ne sont ni parallèles car elles n'ont pas le même coefficient directeur, ni perpendiculaires car $a_1 \times a_2 = 3 \times -\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \neq -1$. $(D_1)$ et $(D_2)$ sont nécessairement sécantes.

On a : $(D_1) : 3x+2y+15 = 0$ (1) et $(D_2) : y = -\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$ (2).

Remplaçons (2) dans (1), on obtient : $3x+2\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right)+15 = 0$

Ou encore : $x = -10$ et donc (2) donne : $y = -\frac{x}{2}+\frac{5}{2} = \frac{15}{2}$.

*Conclusion* : $(D_1)$ et $(D_2)$ sont sécantes au point $I\begin{pmatrix}-10\\ \frac{15}{2}\end{pmatrix}$.

4) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AI).

Remarquons que le point $I\left(\begin{matrix}-10\\ \frac{15}{2}\end{matrix}\right) \in (D_2)$ car $y_I = -\frac{x_I}{2} + \frac{5}{2}$.

En effet, $-\frac{x_I}{2} + \frac{5}{2} = \frac{10}{2} + \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = y_I$.

On a deux points (A et I) qui appartiennent à la fois aux droites (AI) et $(D_\ell)$. Donc (AI) et $(D_\ell)$ ont même équation de droite.

*Conclusion* : (AI) : $y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

## EXERCICE 6

1) $(E_m)$ est du second degré si et seulement si $m - 1 \neq 0$ donc si $m \neq 1$. $D_1 = \mathbb{R} - \{1\}$.

2) Pour $m = -2$, on a $(E_{-2})$ : $-3x^2 - 4x = -x(3x + 4) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{4}{3}$

*Conclusion* : $S = \left\{0 ; -\frac{4}{3}\right\}$

3) Si $m \neq 1$, alors $(E_m)$ est du second degré. On peut alors calculer le discriminant réduit est strictement positif ; alors : $\Delta' = m^2 - (m-1)(m+2) = -m + 2 > 0 \implies m \in ]-\infty ; 2[ - \{1\}$

4) $(E_m)$ admet-elle deux solutions positives si : $\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

On a : $\Delta' = 2 - m$ ; $P = \frac{m+2}{m-1}$ ; $S = -\frac{2m}{m-1}$

Faisons un tableau pour étudier les signes de $\Delta'$, P et S.

| $m$ | $-\infty$ $+\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta'$ | + | | + | | + | | + | 0 | − |
| P | + | 0 | − | | − | | + | | + |
| S | − | | − | 0 | + | | − | | − |

On voit bien qu'il n'existe pas de valeurs de $m$ pour que $(E_m)$ admette deux solutions positives.

5) On a : $P = \frac{m+2}{m-1} = x_1 x_2 = 2x_2$ et $S = -\frac{2m}{m-1} = x_1 + x_2 = 2 + x_2$

On a : $x_2 = \frac{m+2}{2(m-1)} = -\frac{2m}{m-1} - 2$.

Nous avons alors : $\frac{m+2}{m-1} = -\frac{8m-4}{m-1} \iff m + 2 = -8m + 4 \iff m = \frac{2}{9}$

Pour $m = \frac{2}{9}$, $(E_m)$ admet 2 pour solution. Déterminons l'autre solution.

On tire alors : $x_2 = \frac{\frac{2}{9}+2}{2\left(\frac{2}{9}-1\right)} = -\frac{10}{7}$. Ainsi $x_2 = -\frac{10}{7}$

## EXERCICE 7

1) La fonction $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$ ou encore si $x \neq 1$.

*Domaine de définition* : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2) On a : $f(x) = a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$.

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a = 2 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

*Conclusion* : $(a\,;\, b) = (2\,;\, 1)$

3) Soit X et Y les coordonnées d'un point M de $(C_f)$ dans le repère $(S, i, j)$.

On a : $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$ En remplaçant $x$ et $y$ dans l'équation $y = f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, on obtient :

$Y + 2 = \frac{2(X+1)-1}{(X+1)-1} = \frac{2X+1}{X} \Rightarrow Y = \frac{2X+1}{X} - 2 = \frac{2X+1-2X}{X} = \frac{1}{X}$

*Conclusion* : $C_f$ a pour équation $Y(X) = \frac{1}{X}$ dans le repère $(S, i, j)$

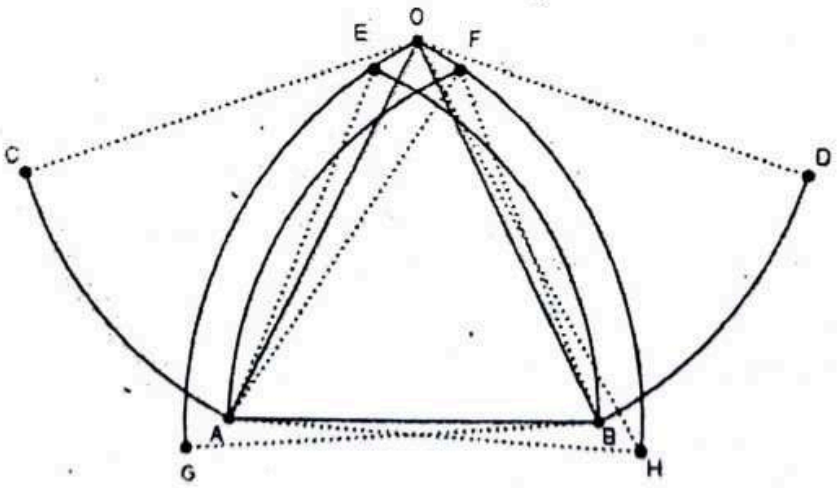
## EXERCICE 8

1) On a : $r_{(O,\frac{\pi}{4})}(A) = B$ et $r_{(O,-\frac{\pi}{4})}(B) = A$.

2) OAB est isocèle en O et mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$, donc : mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}})$ = mes $(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$.

Soit $C = r_{(O,-\frac{\pi}{4})}(A)$, $D = r_{(O,\frac{\pi}{4})}(B)$, $E = r_{(A,\frac{3\pi}{8})}(B)$, $F = r_{(B,-\frac{3\pi}{8})}(A)$, $G = r_{(B,\frac{3\pi}{8})}(O)$ et $H = r_{(A,-\frac{3\pi}{8})}(O)$.

C est le symétrique de B par rapport à (OA) ; D est le symétrique de A par rapport à (OB) ; E est le point de [AO) tel que AE = AB ; F est le point de [BO) tel que BF = BA ; G est le point de [BA) tel que BG = BO ; H est le point de [AB) tel que AH = AO.



Devoir numéro 10

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 10

## EXERCICE 1

Posons $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$. *On tire :* $a=ka'$, $b=kb'$, $c=kc'$. Nous avons :

$$\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{ka'^2}+\sqrt{kb'^2}+\sqrt{kc'^2}=\sqrt{k}(a'+b'+c')$$

et $\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}=\sqrt{k(a'+b'+c')^2}=\sqrt{k}(a'+b'+c')$.

Ce qui nous permet de conclure : $\underline{\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}}$

## EXERCICE 2

1) On a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1\ ;\quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\ ;\quad \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}\ ;\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

2) On a :

$$N=\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}$$

*Conclusion* : $\underline{N=\sqrt{n+1}}$

## EXERCICE 3

a) $I\cap J=[4;5]$ b) $I\cap J=[4;5]$ c) $I\cap J=[4;5[$ d) $I\cap J=\emptyset$

e) $I\cap J=[30;60]$ f) $I\cap J=[-4;2[$ g) $I\cap J=\{5\}$ h) $I\cap J=\emptyset$ i) $I\cap J=\emptyset$

## EXERCICE 4

1) $(D_1)$ ést la droite passant par I le milieu de [AB] et perpendiculaire à (AB).

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{-1-4}{2}=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix}\ ;\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$$

Soit M $(x, y)$ un point de $(D_1)$. Donc $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-\frac{5}{2} \\ y+\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. $M \in (D_1) \iff \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff (-1) \times \left(x-\frac{5}{2}\right) + (-3) \times \left(y+\frac{5}{2}\right) = 0 \iff x+3y+5=0$$

*Conclusion* : $\underline{(D_1) : x+3y+5=0}$

Le point D $(-2 ; -1)$ appartient à $(D_1)$ si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $(D_1)$.

Or $x_D + 3y_D + 5 = -2 + 3(-1) + 5 = 0$ donc D $(-2 ; -1)$ appartient à $(D_1)$

*Remarque* : On peut aussi trouver une équation cartésienne de la médiatrice de [AB] en écrivant que $M \in (D)$ si AM = BM ou bien $AM^2 = BM^2$.

2) $(D_2)$ est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC). On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Soit M $(x, y)$ un point de $(D_2)$. Donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$. $M \in (D_2) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff (-4) \times (x-3) + 5 \times (y+1) = 0 \iff -4x+5y+17=0$$

*Conclusion* : $\underline{(D_2) : -4x+5y+17=0}$

E $(-2 ; -5)$ appartient à $(D_2)$ si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $(D_2)$.

Or $-4x_E + 5y_E + 17 = 8 - 25 + 17 = 0$ donc E $(-2 ; -5)$ appartient à $(D_2)$.

3) $(D_1) : x+3y+5=0 \implies \vec{u}(-3 ; 1)$ est un vecteurs directeur de $(D_1)$ et la droite $(D_2)$ a pour équation $(D_2) : -4x+5y+17=0 \implies \vec{v}(-5 ; -4)$ est un vecteur directeur de $(D_2)$.

$$x_{\vec{u}} y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}} x_{\vec{v}} = (-3) \times (-4) - 1 \times (-5) = 17$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ sont sécantes.

$$\begin{cases} x+3y+5=0 \\ -4x+5y+17=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3y-5 \\ -4(-3y-5)+5y+17=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{26}{17} \\ y=-\frac{37}{17} \end{cases}$$

4) On a : $\vec{u}(-3 ; 1)$ est un vecteurs directeur de $(D_1)$ et $\vec{v}(-5 ; -4)$ celui de la droite $(D_2)$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2} = \sqrt{10} \ ; \ \|\vec{v}\| = \sqrt{x_{\vec{v}}^2 + y_{\vec{v}}^2} = \sqrt{41}$$

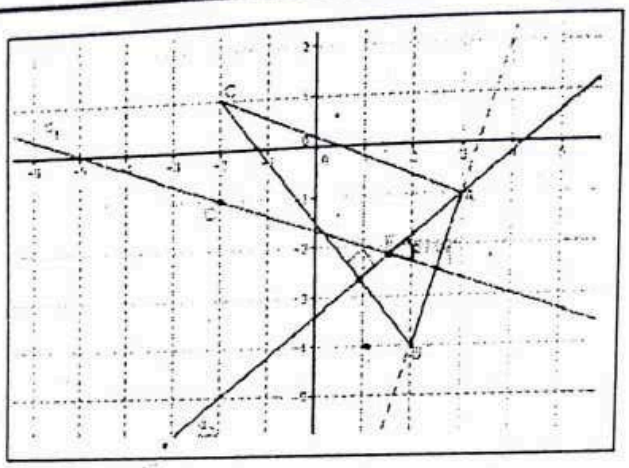
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} y_{\vec{v}} = (-3) \times (-5) + (1) \times (-4) = 15 - 4 = 11$$

Par ailleurs, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}}) \implies \cos(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{41}}$

On tire : $\underline{(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}}) = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{41}}\right) = 57,1^\circ}$

CE $\Sigma\pi\int$

Devoir numéro 10



## EXERCICE 5

1) Montrons que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

On a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} \implies \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}$

(i) Si M = B, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IB}$ et donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{BB} = 0$

(ii) Si M ≠ B, alors

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}) \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}) = IM^2 - IB^2 = R^2 - R^2 = 0$$

Comme B et M appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre I, alors IM = IB = Rayon = R.

Ainsi $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM} = IM^2 - IB^2 = R^2 - R^2 = 0$ et donc $\underline{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM} = 0}$

Montrons que $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IA}) = IM^2 - IA^2$

Comme A et M appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre I, alors IM = IA = Rayon = R.

Ainsi $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = IM^2 - IA^2 = R^2 - R^2 = 0$ et donc $\underline{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0}$

2) On a : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ donc les droites (AD) et (BM) sont perpendiculaires et D appartient alors à la hauteur issue de A du triangle ABM.

De même, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ donc les droites (BD) et (AM) sont perpendiculaires et D appartient alors à la hauteur issue de B du triangle ABM. On déduit alors que D est l'orthocentre du triangle ABM.

3) G l'isobarycentre des points A, B, M : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

Introduisons le point I :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IM}) = 3\overrightarrow{GI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM})$$

Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{ID}$ et donc $\vec{0} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = 3\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{ID}$

Ainsi $3\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \implies \underline{\overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG}}$

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 10

## EXERCICE 6

1) L'équation $\frac{x+4}{2x-3}+\frac{2x-3}{x+4}=2$ existe si et seulement si $2x-3\neq 0$ et $x+4\neq 0$ autrement dit, si et seulement si $x\neq\frac{3}{2}$ et $x\neq -4$. Donc $\underline{D_V=\mathbb{R}-\{0\}}$

On pose $X=\frac{x+4}{2x-3}$ et l'équation devient alors : $X+\frac{1}{X}=2$ ou encore $X^2-2X+1=0$.

Ainsi : $X^2-2X+1=(X-1)^2=0$ si et seulement si $X=1$.

$$X=1 \iff \frac{x+4}{2x-3}=1 \iff x+4=2x-3 \iff x=7$$

Comme 7 est un élément du domaine de validité.

*Conclusion* : $\underline{S=\{7\}}$

2) L'équation existe si et seulement si : $x\neq 0$. Donc $\underline{D_V=\mathbb{R}-\{0\}}$

On pose : $t=x+\frac{1}{x}$. Pour tout $x\in D_V$, on a :

$$-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0 \iff -t^2+3t-2=0 \iff t^2-3t+2=0$$

On calcule le discriminant : $\Delta=9-8=1>0 \implies t_1=1\ ;\ t_2=2$.

Pour $t_1=1$, on a : $x+\frac{1}{x}=1 \implies x^2-x+1=0$

On calcule le discriminant : $\Delta=1-4=-3<0 \implies S_1=\{\emptyset\}$.

Pour $t_2=2$, on a : $x+\frac{1}{x}=2 \implies x^2-2x+1=0$

On calcule le discriminant : $\Delta=4-4=0 \implies t_3=1\in D_V$.

*Conclusion* : $\underline{S=\{1\}}$

3) L'équation existe si et seulement si : $\begin{cases}x-1\neq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$

Donc : $\underline{D_v=\mathbb{R}-\{1\,;2\}}$

Pour tout $x\neq 1$ :

$$\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}=\frac{x}{x-1} \iff \frac{1}{x-1}\left(\frac{3x-4}{x-2}-x\right)=0 \iff \frac{3x-4}{x-2}=x \iff 3x-4=x(x-2)$$

$x=x^2-2x$

On a : $3x-4=x(x-2)=x^2-2x \iff x^2-5x+4=0$ qui est un trinôme du second degré admettant pour racine 4 appartenant au domaine de validité $D_v$.

*Conclusion* : $\boxed{S=\{4\}}$

4) On pose $X = \frac{1}{x^2+1} > 0$.

$$\frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 2X + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow X^2 - X + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Donc : $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

On conclut que : $\mathbf{S = \{1\,;\,-1\}}$

5) L'équation $\frac{2x-2}{2x+1} = 2 - \frac{2x}{2x-1}$ existe si et seulement si : $\begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

*Domaine de définition* : $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right\}$

On a : $2 - \frac{2x}{2x-1} = \frac{2(2x-1)-2x}{2x-1} = \frac{4x-2-2x}{2x-1} = \frac{2x-2}{2x-1}$

Ainsi : $\frac{2x-2}{2x+1} = 2 - \frac{2x}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{2x-2}{2x+1} = \frac{2x-2}{2x-1} \Leftrightarrow (2x-2)(2x-1) = (2x-2)(2x+1)$

En transposant le tout à gauche, on obtient : $(2x-2)(2x-1) - (2x-2)(2x+1) = 0$

Ou encore : $(2x-2)(2x-1-2x-1) = 0 \Leftrightarrow -2(2x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

*Conclusion* : $\boxed{S = \mathbb{R} - \{1\}}$

6) L'équation $\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{6x+1}{3x-2}$ existe si et seulement si : $\begin{cases} 3x+2 \neq 0 \\ 3x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{2}{3} \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$

*Domaine de définition* : $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right\}$

On a :

$$\frac{6x-1}{3x+2} = \frac{6x+1}{3x-2} \Leftrightarrow (6x-1)(3x-2) - (6x+1)(3x+2) = 0 \quad (1)$$

On développe: $(6x-1)(3x-2) = 18x^2 - 12x - 3x + 2 = 18x^2 - 15x + 2$

On développe: $(6x+1)(3x+2) = 18x^2 + 12x + 3x + 2 = 18x^2 + 15x + 2$

Ainsi (1) devient : $(18x^2 - 15x + 2) - (18x^2 + 15x + 2) = 0$

Ou encore $-30x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

*Conclusion* : $\boxed{S = \{0\}}$

7) L'équation existe si et seulement si : $\begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq +\frac{1}{2} \end{cases}$

Domaine de validité de l'équation : $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right\}$.

Pour tout réel $x$ de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\right\}$, on a :

$$\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{8}{4x^2-1} \Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{4x^2-1} = \frac{8}{4x^2-1}$$

Par identification, on a : $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 = 8$

Ou encore : $(4x^2+4x+1) - (4x^2-4x+1) = 8$

Ou encore $8x = 8 \implies x = 1$

*Conclusion* : $\underline{S = \{1\}}$

8) L'équation existe si et seulement si : $\begin{cases} x-6 \neq 0 \\ x-7 \neq 0 \\ x-8 \neq 0 \\ x-9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 6 \\ x \neq 7 \\ x \neq 8 \\ x \neq 9 \end{cases}$ Donc $\underline{D_V = \mathbb{R} - \{6;7;8;9\}}$

On a :

$$\frac{x-7}{x-8} = 1 + \frac{1}{x-8}\ ;\ \frac{x-8}{x-9} = 1 + \frac{1}{x-9}\ ;\ \frac{x-5}{x-6} = 1 + \frac{1}{x-6}\ ;\ \frac{x-6}{x-7} = 1 + \frac{1}{x-7}$$

L'équation initiale devient :

$$\left(1 + \frac{1}{x-8}\right) - \left(1 + \frac{1}{x-9}\right) = \left(1 + \frac{1}{x-6}\right) - \left(1 + \frac{1}{x-7}\right)$$

Ou encore :

$$\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-9} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-7}$$

Ou encore :

$$-\frac{1}{(x-8)(x-9)} = -\frac{1}{(x-6)(x-7)}$$

En passant aux inverses, on obtient : $(x-8)(x-9) = (x-6)(x-7)$

Ainsi l'équation devient : $x^2 - 17x + 72 = x^2 - 13x + 42$

*Conclusion* : $\underline{S = \left\{\frac{15}{2}\right\}}$

9) L'équation existe si et seulement si : $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Domaine de validité de l'équation : $\mathbb{R} - \{-2\,;\,-1\,;\,1\,;2\}$.

Pour tout réel $x$ de $\mathbb{R} - \{-2\,;\,-1\,;\,1\,;2\}$, on a :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-4}=\frac{2x(x^2-4)+2x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{2x^3-8x+2x^3-2x}{(x^2-1)(x^2-4)}$$
$$=\frac{4x^3-10x}{(x^2-1)(x^2-4)}$$

Ainsi : $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=0 \iff 4x^3-10x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-2\,;\,-1\,;\,1\,;2\}$

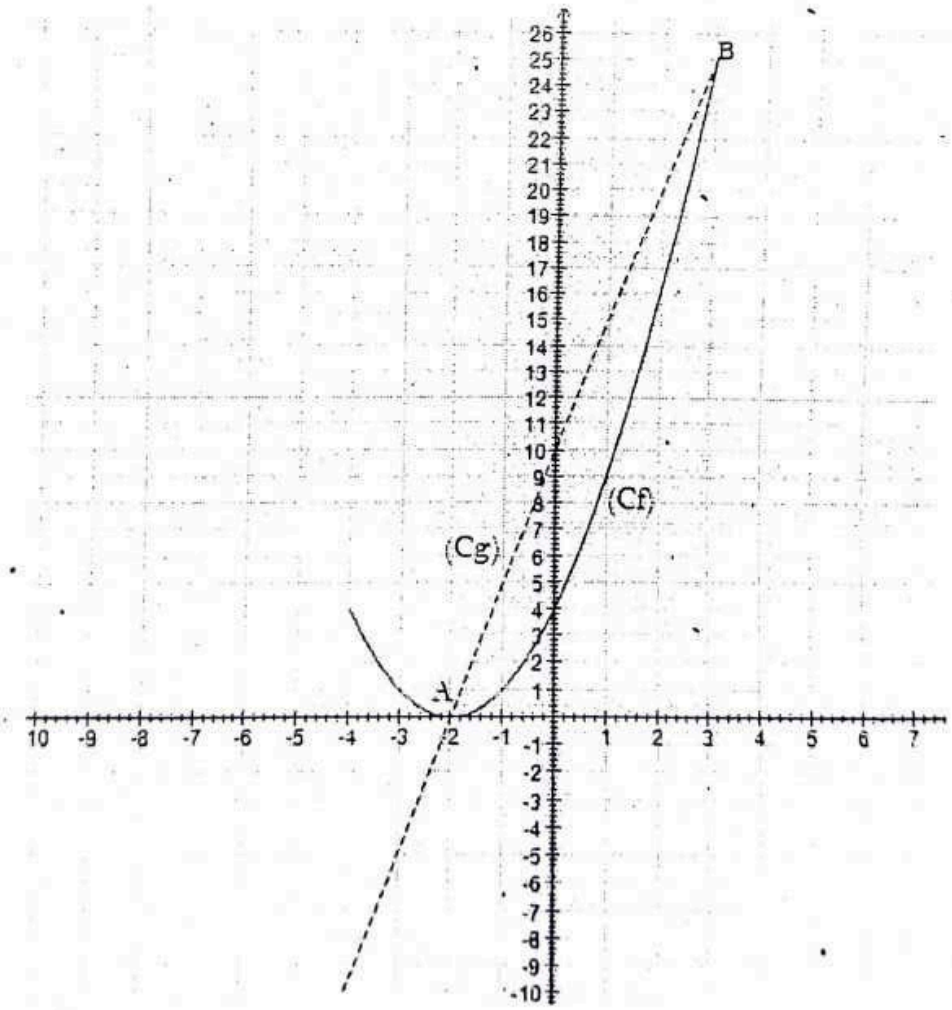
Ou encore $2x(2x^2-5)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-2\,;\,-1\,;\,1\,;2\}$

Ou encore : $x=0$ ou $x=\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

*Conclusion* : $S=\left\{0\,;\,\sqrt{\frac{5}{2}}\,;\,-\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}$

## EXERCICE 7

1) On obtient les courbes suivantes :



2) a) On voit deux points d'intersection en lisant sur la figure : $A\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\25\end{pmatrix}$.

Donc $S = \{-2\,;3\}$

b) Il suffit de trouver l'intervalle dans lequel $(C_f)$ est en dessous de $(C_g)$. On lit directement sur la figure qu'il s'agit de l'intervalle $[-2\,;\,3]$. Donc $S = [-2\,;\,3]$

3) a) On a :

$$(x+2)^2 = 5x+10 \iff (x+2)^2 - 5(x+2) = 0 \iff (x+2)(x-3) = 0$$

Ainsi : $x = -2$ ou $x = 3$ et donc $S = \{-2\,;3\}$

b) On a :

$$(x+2)^2 \leqslant 5x+10 \iff (x+2)(x-3) \leqslant 0 \iff x^2 - x - 6 \leqslant 0$$

On fait le tableau de signe.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

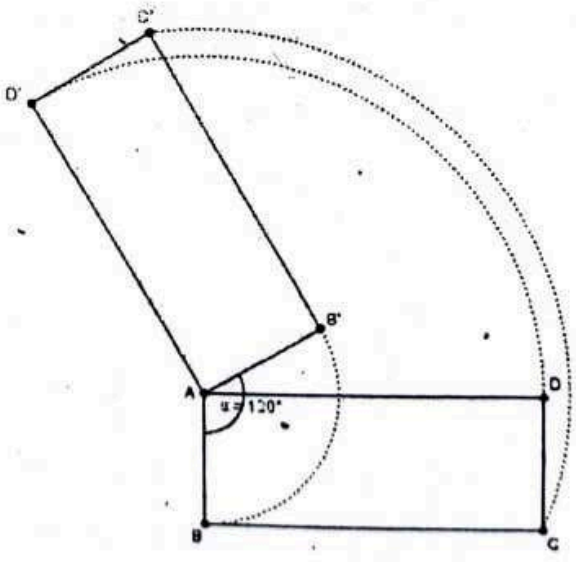
Donc $S = [-2\,;\,3]$

## EXERCICE 8

L'image du rectangle ABCD est le rectangle AB'C'D', de mêmes dimensions et sens (direct) que ABCD ;

(i) Pour placer le point B', on trace un arc de cercle de centre A, de rayon AB et on reporte deux fois, à partir de B, le rayon sur cet axe ;

(ii) Pour placer les points C' et D', on peut procéder de la même façon ou faire une construction, qui tient compte des dimensions et du sens (direct) de AB'C'D'.



Devoir numéro 11

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 11

## EXERCICE 1

1) On pose : $h(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ (1)

En multipliant $h(x)$ par $x$, on obtient : $xh(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ (2)

(2) — (1) donne :

$$xh(x) - h(x) = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) - (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Ou encore : $(x-1)h(x) = x^6 - 1$

En remplaçant $h(x)$ par $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, on obtient :

*Conclusion* : $\underline{x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$ (3)

2) En remplaçant $x$ par $\frac{1}{2}$ dans la relation (3), on obtient :

$$\frac{1}{2^6} - 1 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1\right)$$

Ou encore : $\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{\frac{1}{2^6} - 1}{-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^6}\right)$

*Conclusion* : $\underline{A = 2\left(1 - \frac{1}{2^6}\right)}$

En remplaçant $x$ par $\frac{1}{3}$ dans la relation (3), on obtient :

$$\frac{1}{3^6} - 1 = \left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} + 1\right)$$

Ou encore : $\frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{\frac{1}{3^6} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{3^6}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^6}\right)$

*Conclusion* : $\underline{B = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^6}\right)}$

Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 11

## EXERCICE 2

1) On a : $|(1-2x)^3-(1-6x)| = |1-6x+12x^2-8x^3-1+6x| = |12x^2-8x^3|$

En factorisant par $x^2$, on obtient : $|(1-2x)^3-(1-6x)| = |x^2(12-8x)| = |x^2||12-8x| = x^2|12-8x|$ car $|x^2| = x^2$ pour tout réel $x$.

*Conclusion* : $\boxed{|(1-2x)^3-(1-6x)| = x^2|12-8x|}$

2) a) On a aussi : $-\frac{1}{2} \leqslant -x \leqslant \frac{1}{2}$, d' où en multipliant les 3 membres par 8 : $-4 \leqslant -8x \leqslant 4$, puis, en ajoutant 12 aux 3 membres : $8 \leqslant 12-8x \leqslant 16$. Donc, on a bien : $\boxed{|12-8x| \leqslant 16}$

b) En multipliant les 2 membres de l'inégalité précédente par $x^2$, on obtient : $x^2|12-8x| \leqslant 16x^2$, soit, d'après 1) : $\boxed{|(1-2x)^3-(1-6x)| \leqslant 16x^2}$

c) Posons $x = 10^{-4}$, ce qui est légitime, puisque ce nombre appartient bien à $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right]$. L'inégalité du b) devient : $|(1-0{,}0002)^3-0{,}0004| \leqslant 16\cdot 10^{-8}$, soit $|(0{,}9998)^3-0{,}0004| \leqslant 16\cdot 10^{-8}$. Donc 0,0004 est une valeur approchée de $(0{,}9998)^3$ à $16.10^{-8}$.

## EXERCICE 4

1) L'équation d'un tel cercle s'écrit : $(x-4)^2+(y-4)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$.

*Conclusion* : $\boxed{(\mathcal{C}) : (x-4)^2+(y-4)^2 = 8}$

2) Soit M$(x, y)$ un point de la droite (D).

Ainsi $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-6\\y-2\end{pmatrix}$. Remarquons que le point A (appelé point de tangence) appartient au cercle. (D) est tangente (c'est-à-dire perpendiculaire au rayon ΩA) au cercle $(\mathcal{C})$ si les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux. Autrement dit, si leur produit scalaire est nul.

Ainsi : $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \implies -2(x-6)+2(y-2) = 0 \implies y(x) = x-4.$

*Conclusion* : $\boxed{(D) : y(x) = x-4}$

3) Soit $I\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 6$ (différent de 6 qui est l'abscisse du point A) le point de tangence. On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega I}\begin{pmatrix}\alpha-4\\\beta-4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{\Omega I}$ sont orthogonaux.

Ainsi $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{\Omega I} = 0 \implies -6(\alpha-4)+6(\beta-4) = 0 \implies \alpha = \beta$ (1)

Or I est un point du cercle, donc ses coordonnées vérifient l'équation: $(\alpha-4)^2+(\beta-4)^2 = 8$.

Comme $\alpha = \beta$ (d'après la relation (1)), on a : $2(\alpha-4)^2 = 8 \implies \alpha = 2$

*Conclusion* : $\underline{I\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}$

4) Soit $M(x, y)$ un point de la droite $(D_1)$.

Ainsi $\overrightarrow{C\Omega}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y-5\end{pmatrix}$. $(D_1)$ est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ si les vecteurs $\overrightarrow{C\Omega}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont orthogonaux. Autrement dit, si leur produit scalaire est nul.

Ainsi : $\overrightarrow{C\Omega}\cdot\overrightarrow{CM} = 0 \implies -5(x+1)+(y-5) = 0 \implies y(x) = 5x+10.$

*Conclusion* : $\underline{(D_1) : y(x) = 5x+10}$

5) a) On a : $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}-x\\\frac{1}{2}-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}-4-x\\\frac{1}{2}-y\end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = 12 \implies -x(-4-x)+\left(\frac{1}{2}-y\right)^2 = 12$

Donc $x^2+4x+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 12$. Cherchons la forme canonique de $x^2+4x$.

$x^2+4x = (x+2)^2-4$ donc $x^2+4x+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 12$ implique $(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 16 = 4^2$

*Conclusion* : (G) est donc le cercle de centre $K\begin{pmatrix}-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et de rayon 4

b) Soit K milieu du segment [EF]. Alors on a :

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = \left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KF}\right) = MK^2+\overrightarrow{MK}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KE}\right)}_{\vec{0}}+\overrightarrow{KE}\cdot\overrightarrow{KF}$$

Or $\overrightarrow{KE} = -\frac{\overrightarrow{EF}}{2}$ et $\overrightarrow{KF} = \frac{\overrightarrow{EF}}{2}$ donc : $\underline{\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = MK^2-\frac{EF^2}{2}}$.

Par ailleurs, K milieu de [EF] a pour coordonnées : $x_K = \frac{x_E+x_F}{2} = -2$ et $y_K = \frac{y_E+y_F}{2} = \frac{1}{2}$

Ainsi : $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}x+2\\y-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ et donc $MK^2 = (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$ ; $EF^2 = 4$

On a : $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = 12 \iff MK^2-\frac{EF^2}{2} = 12 \iff (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-4 = 12$

On retrouve ainsi : $(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 16.$

*Conclusion* : (G) est donc le cercle de centre $K\begin{pmatrix}-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et de rayon 4.

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 11

## EXERCICE 5

(a) Poser $t = x^2$. On trouve $\underline{S = \{\sqrt{2}\,;\, -\sqrt{2}\,;\, 3\,;\, -3\}}$ (b) Poser $t = x^2$. On trouve $\underline{S = \left\{\frac{\sqrt{6}}{3}\,;\, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}}$

(c) Poser $t = x^2$. On trouve $\underline{S = \emptyset}$ (d) Poser $t = x^2$. On trouve $\underline{S = \{\sqrt{2}\,;\, -\sqrt{2}\}}$

(e) Poser $t = x^2$. On trouve $\underline{S = \left\{\frac{\sqrt{7}}{7}\,;\, -\frac{\sqrt{7}}{7}\,;\, \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$ (f) Poser $t = x^2$. On trouve $\underline{S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}}$

(g) Poser $t = \frac{2x+1}{x-3}$. On trouve $\underline{S = \{36\}}$ (h) Poser $t = \sqrt{x}$. On trouve $\underline{S = \emptyset}$

(i) Poser $t = x^2$. On trouve $\underline{S = \left\{\sqrt{\sqrt{5}-2}\,;\, -\sqrt{\sqrt{5}-2}\right\}}$ (j) Poser $t = \sqrt{x}$. On trouve $\underline{S = \{1\}}$

## EXERCICE 6

Soit $I = \text{bar}\{(A, m)(B, m^2 + m + 1)\}$. $S_B(I) = A \implies \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BI}$.

Ainsi : $m\overrightarrow{IA} + (m^2 + m + 1)\overrightarrow{IB} = \vec{0} \implies \overrightarrow{BI} = \frac{m}{m^2+m+1}\overrightarrow{IA}$ (1)

- Condition d'existence de I : $(m^2 + m + 1) + m \neq 0 \implies (m+1)^2 \neq 0 \implies m \neq -1$.

Si $m \neq -1$, alors (1) devient :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{m}{m^2+m+1}\overrightarrow{IA} = \frac{m}{m^2+m+1}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) \implies \left(1 + \frac{m}{m^2+m+1}\right)\overrightarrow{BI} = \frac{m}{m^2+m+1}\overrightarrow{BA}$$

Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BI}$ donc : $\left(1 + \frac{m}{m^2+m+1}\right)\overrightarrow{BI} = -\frac{m}{m^2+m+1}\overrightarrow{AB} = -\frac{m}{m^2+m+1}\overrightarrow{BI}$.

Comme $\overrightarrow{BI} \neq \vec{0}$ alors :

$$1 + \frac{m}{m^2+m+1} = -\frac{m}{m^2+m+1} \implies \frac{2m}{m^2+m+1} = -1 \implies m^2 + 3m + 1 = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 9 - 4 = 5 \implies m_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $m_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Donc les valeurs du nombre réel $m$ pour lesquelles le barycentre des points A et B affectés respectivement coefficients de $m$ et $m^2 + m + 1$ est le symétrique de A par rapport à B sont $\underline{m_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}}$ et $\underline{m_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}}$.

## EXERCICE 8

1) (figure 1)

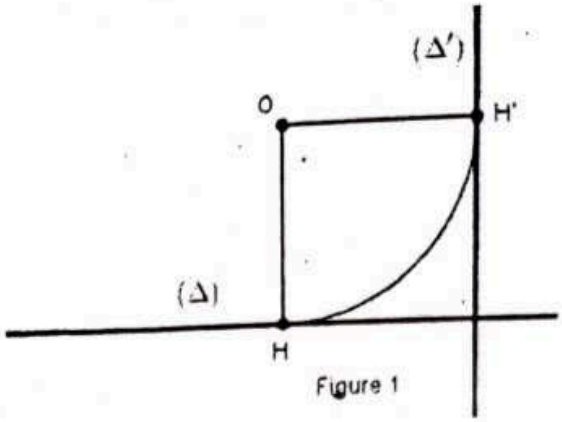



Figure 1

a) Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ) et H' son image par le quart de tour direct de centre O. OHH' est rectangle isocèle en O, de sens direct. (Δ') est la perpendiculaire à (OH') passant par H'.

b) $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux, on a : $\underline{\text{mes}(\overrightarrow{\vec{u},\vec{u}'}) = \pm\frac{\pi}{2}}$.

2) (figure 2)

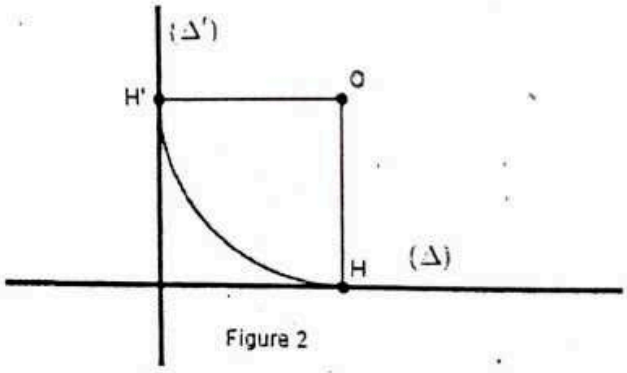



Figure 2

a) S'agissant du quart de tour indirect de centre O, OHH' est cette fois rectangle isocèle en O, de sens indirect.

b) Les résultats restent analogues à ceux obtenus en 1) b).

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 12

## EXERCICE 1

1) On a :

$$A = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n-1}\times\frac{n-1}{n} = 1$$

*Conclusion* : **A = 1**

2) On a :

$$B = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}\times\left\{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right\}\times\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\right\} = 1\times 1\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{4} = \frac{5}{8}$$

*Conclusion* : $B = \frac{5}{8}$

3) On a :

$$x_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\right\}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\left\{\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right\}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}\left\{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right\}\left\{\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\right\}\cdots\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$= \frac{n+1}{2n}$$

*Conclusion* : $x_n = \frac{n+1}{2n}$

## EXERCICE 2

1) Puisque $E(x) \leqslant x$ et $E(y) \leqslant y$, on a : $E(x) + E(y) \leqslant x + y$.

Par définition, $E(x + y)$ est le plus grand entier inférieur à $x + y$, on a donc déjà : $E(x) + E(y) \leqslant E(x + y)$.

D'autre part, $x < E(x) + 1$ et $y < E(y) + 1$, donc : $x + y < E(x) + E(y) + 2$.

En passant aux parties entières, on obtient : $E(x + y) < E(x) + E(y) + 2$.

Puisque cette inégalité concerne des entiers, on peut transformer cette inégalité stricte en l'inégalité large suivante : $E(x + y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$.

*Conclusion* : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ E(x) + E(y) \leqslant E(x + y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$

2) Si $E(x) \leqslant x < E(x) + \frac{1}{2}$ et $E(y) \leqslant y < E(y) + \frac{1}{2}$ alors :

$$E(x + y) = E(x) + E(y), \qquad E(2x) = 2E(x), \qquad E(2y) = 2E(y)$$

Puis la relation voulue.

Si $E(x) + \frac{1}{2} \leqslant x < E(x) + 1$ et $E(y) \leqslant y < E(y) + \frac{1}{2}$ alors :

$$E(x + y) \leqslant E(x) + E(y) + 1, \qquad E(2x) = 2E(x) + 1, \qquad E(2y) = 2E(y)$$

Puis la relation voulue.

Si $E(x) \leqslant x < E(x) + \frac{1}{2}$ et $E(y) + \frac{1}{2} \leqslant y < E(y) + 1$ : idem

Si $E(x) + \frac{1}{2} \leqslant x < E(x) + 1$ et $E(y) + \frac{1}{2} \leqslant y < E(y) + 1$ alors :

$$E(x + y) = E(x) + E(y) + 1, \qquad E(2x) = 2E(x) + 1, \qquad E(2y) = 2E(y) + 1$$

Puis la relation voulue.

*Conclusion* : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ E(x) + E(x + y) + E(y) \leqslant E(2x) + E(2y)$

## EXERCICE 3

(a) On a : $x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x) + 3 = (x + 1)^2 - 1^2 + 3 = (x + 1)^2 + 2$

*Conclusion* : $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$

(b) On a : $x^2 - 4x + 8 = (x^2 - 4x) + 8 = (x - 2)^2 - 2^2 + 8 = (x - 2)^2 + 4$

*Conclusion* : $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$

(c) On a : $x^2 - x - 20 = (x^2 - x) - 20 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 20 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$

*Conclusion* : $x^2 - x - 20 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}$

(d) On a : $2x^2 + 4x - 7 = 2\left(x^2 + 2x - \frac{7}{2}\right) = 2\left[(x + 1)^2 - 1^2 - \frac{7}{2}\right] = 2\left[(x + 1)^2 - \frac{9}{2}\right]$

*Conclusion* : $2x^2 + 4x - 7 = 2\left[(x + 1)^2 - \frac{9}{2}\right]$

(e) On a : $4x^2 + 2x - 3 = 4\left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) = 4\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] = 4\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{16}\right]$

*Conclusion* : $4x^2+2x-3=4\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{13}{16}\right]$

(f) On a : $-x^2-\frac{1}{2}x+3=-\left(x^2+\frac{1}{2}x-3\right)=-\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2-3\right]=-\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]$

*Conclusion* : $-x^2-\frac{1}{2}x+3=-\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]$

(g) On a : $-x^2+4x-8=-(x^2-4x+8)=-[(x-2)^2-2^2+8]=-[(x-2)^2+4]$

*Conclusion* : $-x^2+4x-8=-[(x-2)^2+4]$

(h) On a : $-3x^2-6x+1=-3\left(x^2+2x-\frac{1}{3}\right)=-3\left[(x+1)^2-1^2-\frac{1}{3}\right]=-3\left[(x+1)^2-\frac{4}{3}\right]$

*Conclusion* : $-3x^2-6x+1=-3\left[(x+1)^2-\frac{4}{3}\right]$

(i) On a : $3x^2+12x-7=3\left(x^2+4x-\frac{7}{3}\right)=3\left((x+2)^2-2^2-\frac{7}{3}\right)=3\left((x+2)^2-\frac{19}{3}\right)$

*Conclusion* : $3x^2+12x-7=3\left((x+2)^2-\frac{19}{3}\right)$

(j) On a : $-x^2+x+2=-(x^2-x-2)=-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\right)=-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)$

*Conclusion* : $-x^2+x+2=-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]$

(k) On a : $-2x^2-2x+5=-2\left(x^2+x-\frac{5}{2}\right)=-2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}\right)=-2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{4}\right)$

*Conclusion* : $-2x^2-2x+5=-2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{4}\right]$

(l) On a : $-2x^2-2x+1=-2\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)=-2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)=-2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right)$

*Conclusion* : $-2x^2-2x+1=-2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right]$

## EXERCICE 4

1) a) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(\mathcal{E})$. Alors M vérifie : $2MA^2+OM^2-MB^2=68$.

On a :

$$MA^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-3)^2+(y-6)^2=x^2-6x+y^2-12y+45$$

$$MB^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=x^2+(y-6)^2=x^2+y^2-12y+36$$

$$OM^2=(x-x_O)^2+(y-y_O)^2=x^2+y^2$$

$$2MA^2+OM^2-MB^2=68 \iff 2(x^2-6x+y^2-12y+45)+(x^2+y^2)-(x^2+y^2-12y+36)=68$$

Donc : $2MA^2 + 0M^2 - MB^2 = 68 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 2y^2 - 12y - 14 = 0$

Ou encore : $2(x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = 0$

Donc $(\mathcal{E})$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant $x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = 0$.

b) On a : $x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = (x-3)^2 - 3^2 + (y-3)^2 - 3^2 - 7 = (x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$

Donc $(\mathcal{E})$ est le cercle de centre $E(3;3)$ et rayon $r = 5$.

2) Une équation de $(\mathcal{C})$ est : $\left(x-(-2)\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$. Donc : $\underline{(\mathcal{C}) : (x+2)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}}$

En développant cette dernière expression, on obtient : $\underline{(\mathcal{C}) : x^2 + 4x + 4 + y^2 - y - 2 = 0}$

3) Il faut résoudre le système formé avec les équations des deux cercles sous forme développée :

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$$

En faisant la différence : $L_1 - L_2$, on obtient : $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = 0 \\ -10x - 5y - 5 = 0 \end{cases}$

En divisant les deux membres par 5 : $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = 0 \\ -2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y - 7 = 0 \\ -2x - 1 = y \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} x^2 - 6x + (-2x-1)^2 - 6(-2x-1) - 7 = 0 \\ -2x - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 10x = 0 \\ -2x - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x(x+2) = 0 \\ -2x - 1 = y \end{cases}$

Ou encore : $\begin{cases} 5x = 0 \\ -2x - 1 = y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ -2x - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

Il y a donc deux points d'intersection : $\underline{I\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} ; J\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

4) a) On a : $x_{\overrightarrow{EJ}} = x_J - x_E = -3$ ; $y_{\overrightarrow{EJ}} = y_J - y_E = -4$ donc $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (EJ).

Soit $M(x\,;\,y)$ un point de $T_J$ tangente en J à $(\mathcal{E})$ : $x_{\overrightarrow{JM}} = x_M - x_J = x$ ; $y_{\overrightarrow{JM}} = y_M - y_J = y + 1$ donc $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$. $T_J$ est tangente en J à $(\mathcal{E})$ donc $T_J \perp (EJ)$.

Ainsi : $M \in T_J \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{JE} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{JM}} \cdot x_{\overrightarrow{JE}} + y_{\overrightarrow{JM}} \cdot y_{\overrightarrow{JE}} = 0 \Leftrightarrow x \times (-3) + (y+1) \times (-4) = 0$

Donc : $M \in T_J \Leftrightarrow -3x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 4 = 0$

Ainsi $\underline{(T_J) : 3x + 4y + 4 = 0}$

Déterminons les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ en J

On a : $x_{\overrightarrow{CJ}} = x_J - x_C = 2$ ; $y_{\overrightarrow{CJ}} = y_J - y_C = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ donc $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CJ)

$T'_J$ tangente en J à $(\mathcal{C})$ donc $T'_J \perp (CJ)$ et $J \in T'_J$.

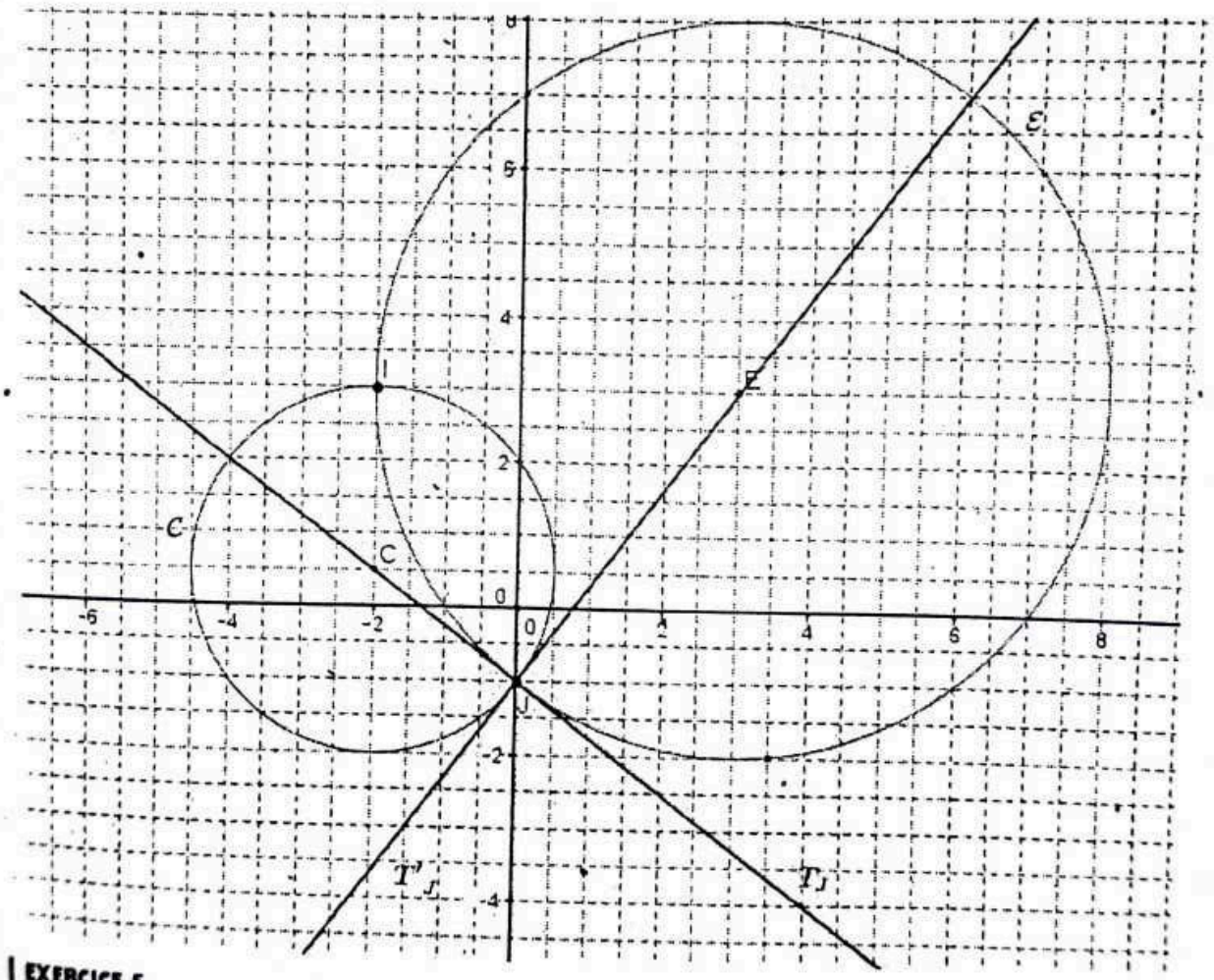
Donc $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à la droite (CJ) est un vecteur directeur de $T_J'$.

$\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $T_J'$.

b) Une équation de $T_J$ est $3x + 4y + 4 = 0$ donc $\vec{z}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $T_J$.

$$\vec{w}\cdot\vec{z} = \frac{3}{2}\times(-4) + 2\times 3 = -6 + 6 = 0 \implies \vec{w}\perp\vec{z}$$

On conclut donc que donc $T_J$ et $T_J'$ sont perpendiculaires.




**EXERCICE 5**

1) G de centre de gravité de ABC $\Longrightarrow \underline{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}}$.

2) a) On a : $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG}$

Donc $\underline{\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MG}}$.

b) Soit $M_1$ et $M_2$ sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{f(M_1)} = \overrightarrow{f(M_2)}$ alors : $3\overrightarrow{M_1G} = 3\overrightarrow{M_2G}$

Ou encore $\overrightarrow{M_1G} = \overrightarrow{M_2G}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{M_1G} - \overrightarrow{M_2G} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0}$ c'est dire que $M_1 = M_2$.

On a : $\overrightarrow{f(G)} = 3\overrightarrow{GG} = \vec{0}$ donc G est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$.

En effet, on vient de voir que s'il existait un autre point G' tel que $\overrightarrow{f(G')} = \overrightarrow{f(G)}$ alors G = G'.

3) a) On a :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$$

Or A' milieu respectif du segment [BC] donc : $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ et donc $\underline{\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A}}$

De même :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C} = 3\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C}$$

Or B' milieu respectif du segment [AC] donc : $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$ et donc $\underline{\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B}}$

De même :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'C} = 3\overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B}$$

Or C' milieu respectif du segment [AB] donc : $\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$ et donc $\underline{\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'C}}$

*Conclusion* : $\underline{\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'C}}$

b) D'après 2) a) $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$ et d'après 3) a) : $\overrightarrow{f(G)} = 3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C}$

On conclut alors que : $\underline{3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}}$

c) On a : $3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GA} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GA} = \vec{0} \Rightarrow G = \text{bar}\{(A', 2)(A, 1)\}$

Donc G appartient à la droite (AA') qui n'est rien d'autre que la médiane issue de A et passant par A' milieu de [BC].

$$3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'G} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow G = \text{bar}\{(B', 2)(B, 1)\}$$

Donc G appartient à la droite (BB') qui n'est rien d'autre que la médiane issue de B et passant par B' milieu de [AC].

$$3\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'G} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow G = \text{bar}\{(C', 2)(C, 1)\}$$

Donc G appartient à la droite (CC') qui n'est rien d'autre que la médiane issue de C et passant par C' milieu de [AB].

*Conclusion* : G appartient aux droites (AA'), (BB') et (CC') donc ces trois droites concourent en G, centre de gravité du triangle ABC.

**EXERCICE 6**

a) $P = -\frac{11}{2} < 0$ et $S = -\frac{7}{2} < 0$ donc les deux racines sont de signe contraire.

b) $P = -\frac{6}{4} < 0$ et $S = -\frac{3}{4} < 0$ donc les deux racines sont de signe contraire.

c) $P = \frac{m-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} P > 0 \text{ si } m > 1 \\ P < 0 \text{ si } m < 1 \end{cases}$ et $S = -\frac{3}{4} < 0$ donc les deux racines sont de signe contraire (racines négatives) si $m < 1$ et sont négatives si $m > 1$.

d) $P = \frac{1}{3} > 0$ et $S = -\frac{8}{3} < 0$ donc les deux racines sont négatives (racines négatives).

e) $P = -\frac{7}{5} < 0$ et $S = \frac{3}{5} > 0$ donc les deux racines sont de signe contraire (racines positives).

f) $P = \frac{7}{2-m} \Rightarrow \begin{cases} P > 0 \text{ si } m < 2 \\ P < 0 \text{ si } m > 2 \end{cases}$ et $S = \frac{4}{2-m} \begin{cases} S > 0 \text{ si } m < 2 \\ S < 0 \text{ si } m > 2 \end{cases}$ donc les deux racines sont positives si $m < 2$ et sont de signe contraire si $m > 2$.

## EXERCICE 7

1) On a :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+5} = \frac{2x+10-7}{x+5} = \frac{2x+10}{x+5} - \frac{7}{x+5} = \frac{2(x+5)}{x+5} - \frac{7}{x+5} = 2 - \frac{7}{x+5}$$

*Conclusion* : $\underline{f(x) = 2 - \frac{7}{x+5}}$

2) Soit $a, b \in [-3 ; +\infty[$. On a :

$$T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{2 - \frac{7}{a+5} - 2 + \frac{7}{b+5}}{a-b} = \frac{\frac{7}{b+5} - \frac{7}{a+5}}{a-b} = \frac{\frac{7a+35-7b-35}{(a+5)(b+5)}}{a-b}$$

$$= \frac{7(a-b)}{(a-b)(a+5)(b+5)} = \frac{7}{(a+5)(b+5)}$$

Or $a \geqslant -3 \Rightarrow a+5 \geqslant 2 > 0$ ; $b \geqslant -3 \Rightarrow b+5 \geqslant 2 > 0$ donc $(a+5)(b+5) > 0$.

Donc $T = \frac{7}{(a+5)(b+5)} > 0$ et donc $f$ est croissante sur $[-3 ; +\infty[$.

3) a) En effet, $f$ est définie et croissante sur $[-3 ; +\infty[$ donc $f$ admet un minimum en $-3$ et $f(-3) = 2 - \frac{7}{5-3} = 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}$.

*Autre méthode* : On a : $\forall x \in [-3 ; +\infty[$, $f(x) = 2 - \frac{7}{x+5} \geqslant 2 - \frac{7}{-3+5} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{f(x) \geqslant -\frac{3}{2}}$

b) On a : $f(x) = 2 - \frac{7}{x+5} \leqslant 2$ car $-\frac{7}{x+5} < 0$, $\forall x \in [-3 ; +\infty[$. Donc $f$ admet un majorant et 2 est un majorant de $f$ sur $[-3 ; +\infty[$.

c) $f$ est majorée par 2 et minoré par $-\frac{3}{2}$ sur $[-3 ; +\infty[$ donc $f$ est bornée sur $[-3 ; +\infty[$.

On a : $\underline{-\frac{3}{2} \leqslant f(x) < 2}$

## EXERCICE 8

1) (figure 1)

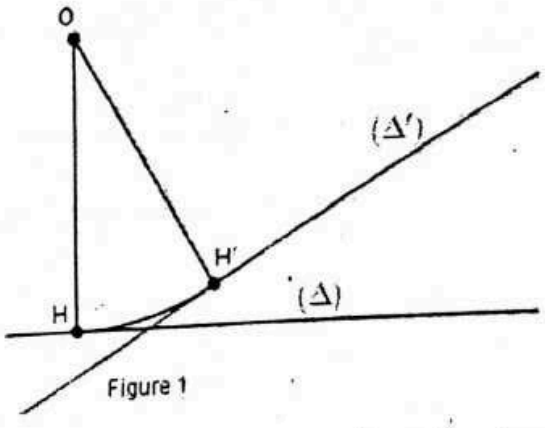



Figure 1

a) Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ), H' son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. OHH' est isocèle en O, de sens direct et mes $\widehat{HOH'} = \frac{\pi}{6}$. (Δ') est la perpendiculaire en H' à (OH').

b) $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont tels que : $\underline{\text{mes}(\vec{u}, \vec{u}') = \pm\frac{\pi}{6}}$.

2) (figure 2)

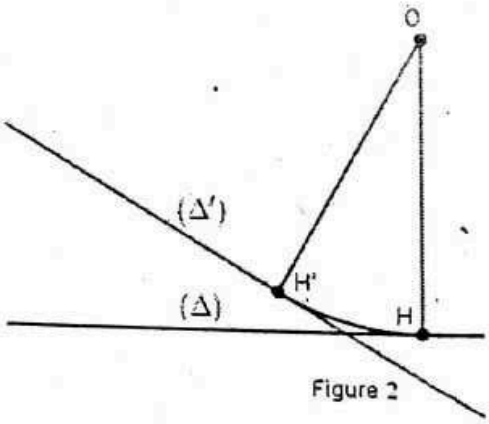



Figure 2

a) S'agissant de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, OHH' est cette fois isocèle en O, de sens indirect et mes $\widehat{HOH'} = \frac{\pi}{4}$.

b) $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont tels que : $\text{mes}(\vec{u}, \vec{u}') = -\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.

Devoir numéro 13

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 13

## EXERCICE 1

1) On a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\left((n+1)\sqrt{n}\right)^2-\left(n\sqrt{n+1}\right)^2} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2-n^2(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n^2+2n+1)-n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n^3+2n^2+n-n^3-n^2} = \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n(n+1)} - \frac{n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

*Conclusion* : $\underline{\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}}$

2) On a :

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{99}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

*Conclusion* : $\underline{S = \frac{9}{10}}$

## EXERCICE 2

1) On a : $E\left(\frac{x}{3}\right) = -2 \iff -2 \leqslant \frac{x}{3} < -1 \iff -6 \leqslant x < -3 \iff x \in [-6; -3[ \iff \underline{S = [-6; -3[}$

2) On a : $E(5x-2) = 3 \iff 3 \leqslant 5x-2 < 4 \iff 5 \leqslant 5x < 6 \iff 1 \leqslant x < \frac{6}{5} \iff \underline{S = \left[1; \frac{6}{5}\right[}$

3) On a :

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = -4 \iff -4 \leqslant \frac{1}{x} < -3 \iff -\frac{1}{3} \leqslant x < -\frac{1}{4} \iff x \in \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right[ \iff \underline{S = \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right[}$$

4) On pose $k = E(x)$. On a $k \leqslant x < k+1$.

- Si $k \leqslant x < k + \frac{1}{2}$ alors $2k \leqslant 2x < 2k + 1$ et donc $E(x) = 2k$.

L'équation $E(2x - 1) = E(x - 4)$ équivaut alors à $2k - 1 = k - 4$, c'est à dire $k = -3$.

On obtient ainsi les solutions $x \in \left[-3 ; -\frac{5}{2}\right[$.

- Si $k + \frac{1}{2} \leqslant x < k + 1$ alors $2k + 1 \leqslant 2x < 2k + 2$ et donc $E(x) = 2k + 1$.

L'équation $E(2x - 1) = E(x - 4)$ équivaut alors à $2k = k - 4$, c'est à dire $k = -4$.

On obtient ainsi les solutions $x \in \left[-\frac{7}{2} ; -3\right[$.

- Finalement, l'ensemble des solutions est l'intervalle $\underline{S = \left[-\frac{7}{2} ; -\frac{5}{2}\right[}$

## EXERCICE 3

1) On a : $(\cos t + \sin t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t$ ;

Or $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donc $\underline{(\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2 \sin t \cos t}$

2) On a : $(\cos t - \sin t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t - 2 \sin t \cos t$ ;

Or $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donc $\underline{(\cos t - \sin t)^2 = 1 - 2 \sin t \cos t}$

3) On a : $(\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2 \sin t \cos t$ ; $(\cos t - \sin t)^2 = 1 - 2 \sin t \cos t$

En passant à la somme on obtient directement : $\underline{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2}$

4) On a : $(\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2 \sin t \cos t$ ; $(\cos t - \sin t)^2 = 1 - 2 \sin t \cos t$

On fait la différence pour obtenir directement : $\underline{(\cos t + \sin t)^2 - (\cos t - \sin t)^2 = 4 \sin t \cos t}$

5) On a : $\sin^4 t - \cos^4 t = (\sin^2 t - \cos^2 t)(\sin^2 t + \cos^2 t)$

Or $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ donc $\underline{\sin^4 t - \cos^4 t = \sin^2 t - \cos^2 t}$

6) On a : $\sin^4 t - \cos^4 t + 2 \cos^2 t = \sin^2 t - \cos^2 t + 2 \cos^2 t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

Donc $\underline{\sin^4 t - \cos^4 t + 2 \cos^2 t = 1}$

## EXERCICE 5

1) a) Pour tout point M du plan,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

Comme G est le centre de gravité de ABC, alors : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG}$$

*Conclusion* : $\underline{\forall M \in \mathcal{P},\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}}$

Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

b) Pour tout point M du plan :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC}$$

O milieu de $[BC] \Longrightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ donc

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OA}$$

*Conclusion* : $\forall M \in \mathcal{P},\ 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OA}$

c) En effet,

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| \quad \Leftrightarrow \quad \left\|2\overrightarrow{OA}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| \quad \Leftrightarrow \quad MG = \frac{2}{3}OA$$

L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$ est donc le cercle de centre G et de rayon $\frac{2OA}{3}$.

2) a) Soit I milieu de $[AB]$.

On applique le théorème de la médiane : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$. Ainsi :

$$MA^2 + MB^2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad MI = \sqrt{\frac{10 - \frac{AB^2}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{20 - AB^2}}{2}$$

L'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 10$ est donc le cercle de centre I (milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{\sqrt{20-AB^2}}{2}$.

b) Il faut voir que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et donc

$$MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB) donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{BA} \times \overline{HI}$ alors

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BA} \times \overline{HI} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{HI} = \frac{4}{\overline{BA}}$$

L'ensemble $(\mathcal{S})$ des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 8$ est une droite perpendiculaire à la droite (AB) et définie par $\overline{HI} = \frac{4}{\overline{BA}}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

## EXERCICE 6

a) $x_1$ et $x_2$ sont solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$

En remplaçant S par 19 et P par 78, on obtient : $X^2 - 19X + 78 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = (-19)^2 - 4 \times 1 \times 78 = 49 = 7^2$

Ainsi : $x_1 = \frac{19-7}{2} = 6$ et $x_2 = \frac{19+7}{2} = 13$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

*Conclusion* : $\underline{x_1 = 6 \ ; \ x_2 = 13}$

b) $x_1$ et $x_2$ sont solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$

En remplaçant S par 21 et P par 104, on obtient : $X^2 - 21X + 104 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = (-21)^2 - 4 \times 1 \times 104 = 25 = 5^2$

Ainsi : $x_1 = \frac{21-5}{2} = 8$ et $x_2 = \frac{21+5}{2} = 13$

*Conclusion* : $\underline{x_1 = 8 \ ; \ x_2 = 13}$

c) $S = 14a$ et $P = 48a$

On trouve : $(x_1 \ ; \ x_2) = \left(7a - \sqrt{49a^2 - 48a} \ ; \ 7a + \sqrt{49a^2 - 48a}\right)$ avec $m \in ]-\infty \ ; 0[ \cup ]\frac{48}{49} \ ; \ +\infty[$

*Conclusion* : $\underline{x_1 = 7a - \sqrt{49a^2 - 48a} \ ; \ x_2 = 7a + \sqrt{49a^2 - 48a}}$

## EXERCICE 7

1) On a :

$$f(x) - \frac{1}{4} = x(1-x) - \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{4} = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc $f(x) - \frac{1}{4} \leqslant 0$ ou encore $\underline{f(x) \leqslant \frac{1}{4}}$.

2) On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et comme $f(x) \leqslant \frac{1}{4}$, on déduit que $f$ admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.

3) On avait vu au 1) que : $f(x) - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ et donc $\underline{f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. On a :

$$T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{a - a^2 - b + b^2}{a - b} = \frac{(a-b) - (a^2 - b^2)}{a - b} = \frac{(a-b)[1 - (a+b)]}{a - b} = 1 - (a + b)$$

(i) On a : $T > 0 \iff a + b < 1$. Si $a < \frac{1}{2}$ et $b < \frac{1}{2}$ alors $a + b < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et donc $f$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty \ ; \frac{1}{2}[$.

(ii) On a : $T < 0 \iff a + b > 1$. Si $a > \frac{1}{2}$ et $b > \frac{1}{2}$ alors $a + b > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et donc $f$ est décroissante sur l'intervalle $]\frac{1}{2} \ ; \ +\infty[$.

## EXERCICE 8

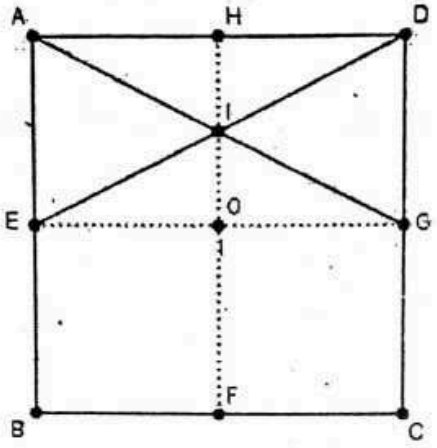
1) Soit $r$ le quart de tour indirect de centre O. Alors $r$ transforme A en D et B en A.

2) Soit $r'$ le quart de tour direct de centre A. Alors $r'$ transforme B en D et A en A.

3) $r$ transforme aussi A en D et G en F.

+) a) ADGE est un rectangle. Soit I son centre et $\alpha$ la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}})$. I est équidistant des points A, D, G, E et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IE}}) = \alpha$. Si $r''$ est la rotation de centre I et d'angle $\alpha$, alors $r''$ transforme A en D et G en E.

b) On a : $-\frac{\alpha}{2} = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IA}})$ ; donc $\tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{AH}{HI}$. $HI = \frac{AE}{2}$ et $AH = AE \Longrightarrow \tan\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = 2$. On en déduit que $\alpha = -2{,}214$ radians.



Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 14

## EXERCICE 1

1) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $|-2x+1|=3$

En effet, $|-2x+1|=3 \Leftrightarrow -2x+1=3$ ou $-2x+1=-3$

Ainsi : $|-2x+1|=3 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=2$

*Conclusion* : $S=\{-1\ ;\ 2\}$

2) Soit à résoudre $|3-2x|+2010=0$.
En effet, $|3-2x|\geq 0$ et $2010>0$ donc $|3-2x|+2010>0$.
*Conclusion* : $S=\emptyset$

3) On a : $2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ; $5-x=0 \Leftrightarrow x=5$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-4$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\lvert 2x-4\rvert$ | $4-2x$ | $0$ | $2x-4$ | | $2x-4$ | |
| $5-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\lvert 5-x\rvert$ | $5-x$ | | $5-x$ | $0$ | $x-5$ | |
| $\lvert 2x-4\rvert+\lvert 5-x\rvert$ | $9-3x$ | | $x+1$ | | $3x-9$ | |

(*i*) Sur $]-\infty\ ;2]$, $|2x-4|+|5-x|=9 \Leftrightarrow 9-3x=9 \Leftrightarrow x=0$. Or $0\in]-\infty\ ;2]$ donc $S_1=\{0\}$

(*ii*) Sur $[2\ ;5]$, $|2x-4|+|5-x|=9 \Leftrightarrow x+1=9 \Leftrightarrow x=8$. Or $8\notin[2\ ;5]$ donc $S_2=\{\emptyset\}$

(*iii*) Sur $[5\ ;+\infty[$, $|2x-4|+|5-x|=9 \Leftrightarrow 3x-9=9 \Leftrightarrow x=6$. Or $6\in[5\ ;+\infty[$ donc $S_3=\{6\}$

*Conclusion* : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{0\ ;6\}$

4) On trouve : $S=\left\{-\frac{1}{5}\ ;\ \frac{41}{5}\right\}$

5) On a :

$$|x-6|=10 \Leftrightarrow x-6=10 \text{ ou } x-6=-10 \Leftrightarrow x=16 \text{ ou } x=-4$$

*Conclusion* : $S=\{-4\ ;\ 16\}$

6) On trouve : $S=\left\{-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right\}$

Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 14

## EXERCICE 2

1) On trouve : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

2) On a : $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \implies \sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ et comme $\sin t > 0$, on obtient :

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

*Conclusion* : $\sin t = \frac{3}{5}$ ; $\tan t = \frac{3}{4}$

3) On a : $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \implies \cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ et comme $\cos t < 0$, on obtient :

$$\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t} = -\sqrt{1-\frac{81}{1681}} = -\sqrt{\frac{1600}{1681}} = -\frac{40}{41} \quad ; \quad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{9}{41}}{-\frac{40}{41}} = -\frac{9}{40}$$

*Conclusion* : $\cos t = -\frac{40}{41}$ ; $\tan t = -\frac{9}{40}$

4) On sait que $\forall\, x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geqslant 0$ et comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$.

Relation fondamentale de la trigonométrie : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies \cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x}$

Ainsi : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

On tire facilement : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$

*Conclusion* : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ; $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

5) Remarquons tout d'abord que $\tan t = \sqrt{3}-\sqrt{2} > 0$ et $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$. Or $\sin t < 0$ donc nécessairement $\cos t < 0$ et donc :

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \implies \cos t = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 t + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\tan^2 t + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}$$

Or $\sin t < 0$ donc :

$$\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sqrt{1-\frac{1}{6-2\sqrt{6}}} = -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{6-2\sqrt{6}}} = -\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{6-2\sqrt{6}}} = -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}$$

*Conclusion* : $\sin t = -\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}$ ; $\cos t = -\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

## EXERCICE 3

a) On a : $S = x' + x'' = 4 + 7 = 11$ ; $P = x'x'' = 4 \times 7 = 28$

$x'$ et $x''$ sont solutions de l'équation : $X^2 - 11X + 28 = 0$

b) On a : $S = x' + x'' = 3 - 7 = -4$ ; $P = x'x'' = 3 \times -7 = -21$

$x'$ et $x''$ sont solutions de l'équation : $X^2 + 4X - 21 = 0$

c) On a : $S = x' + x'' = m + 2m - 1 = 3m - 1$ ; $P = x'x'' = m(2m - 1)$

$x'$ et $x''$ sont solutions de l'équation : $X^2 - (3m - 1)X + m(2m - 1) = 0$

d) On a : $S = x' + x'' = 212 + 16 = 228$ ; $P = x'x'' = 212 \times 16 = 3392$

$x'$ et $x''$ sont solutions de l'équation : $X^2 - 228X + 3392 = 0$

e) On a : $S = x' + x'' = 0 + 1 = 1$ ; $P = x'x'' = 0 \times 1 = 0$

$x'$ et $x''$ sont solutions de l'équation : $X^2 - X = 0$

f) On a : $S = x' + x'' = -1 - 1 = -2$ ; $P = x'x'' = -1 \times -1 = 1$

$x'$ et $x''$ sont solutions de l'équation : $X^2 + 2X + 1 = 0$

## EXERCICE 4

1) On applique la formule : $\ell = \frac{\alpha}{180} \times \pi \times R$ ou encore $\alpha = \frac{180 \times \ell}{\pi \times R}$

| $\ell$ | $\frac{\pi}{3}R$ | $\frac{2\pi}{3}R$ | $\frac{\pi}{4}R$ | $\frac{\pi}{6}R$ | $\frac{2\pi}{5}R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 60 | 120 | 45 | 30 | 72 |

2) On applique la formule : $\ell = R \times \alpha$ ou encore $\alpha = \frac{\ell}{R}$

| $\ell$ | $2\pi R$ | $\pi R$ | $\frac{\pi}{6}R$ | $\frac{2\pi}{3}R$ | $\frac{5\pi}{8}R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $2\pi$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{8}$ |

## EXERCICE 5

Il suffit de montrer que G appartient aux droites $(AG_1)$ ; $(BG_2)$ et $(CG_3)$.

Montrons que G appartient à $(AG_1)$

$$G = \text{bar}\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\} = \text{bar}\{(A,-\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)(A,2\alpha)\} = \text{bar}\{(G_1,-\alpha+\beta+\gamma)(A,2\alpha)\}$$

Donc $G \in (AG_1)$

Montrons que G appartient à $(BG_2)$

$$G = \text{bar}\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\} = \text{bar}\{(A,\alpha)(B,-\beta)(C,\gamma)(B,2\beta)\} = \text{bar}\{(G_2,\alpha-\beta+\gamma)(B,2\beta)\}$$

Donc $G \in (BG_2)$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Montrons que G appartient à $(CG_3)$

$$G = \text{bar}\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\} = \text{bar}\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,-\gamma);(C,2\gamma)\} = \text{bar}\{(G_3,\alpha+\beta-\gamma)(C,2\gamma)\}$$

Donc $G \in (CG_3)$

Ainsi $G \in (AG_1)$ et $G \in (BG_2)$ et $G \in (CG_3)$ donc les droites $(AG_1)$, $(BG_2)$ et $(CG_3)$ sont concourantes en G.

## EXERCICE 7

1) On a : $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{AA} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Ainsi le point A' est tel que : $\underline{\overrightarrow{AA'} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}$

De même, $\overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BB} - \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ donc le point B' est tel que : $\underline{\overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}}$

2) On a : $\overrightarrow{BB'} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AA'} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$ et donc f est la translation du vecteur $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

## EXERCICE 8

1) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$. Donc $\underline{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}}$

2) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{5\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ 35 \end{pmatrix}}$

Devoir numéro 15

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 15

## EXERCICE 1

1) L'équation existe si et seulement si : $4-5x \geqslant 0 \implies x \leqslant \frac{4}{5} \implies D_V = ]-\infty ; \frac{4}{5}]$

Pour tout $x \in D_V$, on a : $|3x-2| = 4-5x \iff 3x-2 = 4-5x$ ou $3x-2 = 5x-4$.

Alors : $x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \in D_V$ ou $x = 1 \notin D_V$.

*Conclusion* : $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

2) L'équation existe si et seulement si : $x+1 \geqslant 0 \implies D_V = [-1 ; +\infty[$

Pour tout $x \in D_V$, on a : $\sqrt{(2x+3)^2} = x+1 \implies |2x+3| = x+1$

Donc : $2x+3 = x+1$ ou $2x+3 = -x-1 \iff x = -2 \notin D_V$ ou $x = -\frac{4}{3} \notin D_V$

*Conclusion* : $S = \{\emptyset\}$

3) Si $2x-7$ est positif, c'est-à-dire si $x \geq \frac{7}{2}$, ou encore si $x \in \left[\frac{7}{2} ; +\infty\right[$, alors l'équation équivaut à : $2x-7 = x+4$, soit à $x = 11$, valeur convenable puisqu'elle appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{7}{2} ; +\infty\right[$.

Si $2x-7$ est négatif, c'est-à-dire si $x \leqslant \frac{7}{2}$, ou encore si $x \in \left]-\infty ; \frac{7}{2}\right]$, alors l'équation équivaut à : $-2x+7 = x+4$, soit à $-3x = -3$, soit encore à $x = 1$, valeur également convenable, puisque $1 \in \left]-\infty ; \frac{7}{2}\right]$.

*Conclusion* : $S = \{1 ; 11\}$

4) L'équation existe si et seulement si : $x+5 \geqslant 0$. Donc $D_V = [-5 ; +\infty[$

Si $x \in D_V$, alors $x+5 \geqslant 0$ et donc $|x+5| = +(x+5) = x+5$ et conséquent $S = D_V = [-5 ; +\infty[$.

5) L'équation existe si et seulement si : $-x+2 \geqslant 0$. Donc $D_V = ]-\infty ; 2]$.

Pour tout $x \in D_V$, on a :

$$|2x+1| = -x+2 \iff 2x+1 = +(-x+2) \quad \text{ou} \quad 2x+1 = -(-x+2)$$

Ainsi : $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -3$. Les deux solutions appartiennent au domaine de definition.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

*Conclusion* : $S = \left\{\frac{1}{3} ; -3\right\}$

6) Inspirez-vous de 5). On trouve $S = \{\emptyset\}$

7) On trouve $S = \{4\}$

8) L'équation existe si et seulement si : $3 - x \geqslant 0$. Donc $D_V = ]-\infty ; 3]$

Si $x \in D_V$, alors $3 - x \geqslant 0$ et donc $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$ et conséquent $S = D_V = ]-\infty ; 3]$

9) On a :

$$|5x + 3| = x + 7 \iff 5x + 3 = x + 7 \quad \text{ou} \quad 5x + 3 = -x - 7 \iff x = 1 \text{ ou } x = -\frac{5}{3}$$

*Conclusion* : $S = \left\{1 ; -\frac{5}{3}\right\}$

## EXERCICE 2

1) On sait que : $\forall t \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[, \cos t > 0 \ ; \ \sin t > 0$ Ainsi,

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \implies \cos t = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 t + 1}} = \sqrt{\frac{1}{2^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

On tire alors : $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

*Conclusion* : $\cos t = \frac{1}{\sqrt{5}} \ ; \ \sin t = \frac{2}{\sqrt{5}}$

2) On sait que : $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[, \cos t > 0 \ ; \ \sin t < 0$ Ainsi,

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \implies \cos t = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 t + 1}} = \sqrt{\frac{1}{3 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

On tire alors : $\sin t = -\sqrt{1 - \cos^2 t} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

*Conclusion* : $\cos t = \frac{1}{2} \ ; \ \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) On sait que : $\forall t \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[, \cos t < 0 \ ; \ \sin t > 0$ Ainsi,

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \implies \cos t = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 t + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{9} + 1}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

On tire alors : $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

*Conclusion* : $\cos t = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ; $\sin t = \frac{1}{\sqrt{10}}$

4) On sait que : $\forall t \in \left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right[, \cos t < 0$ ; $\sin t < 0$ Ainsi,

$$1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \cos t = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 t+1}} = -\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{3}+1}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On tire alors : $\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sqrt{1-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$

*Conclusion* : $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\sin t = -\frac{1}{2}$

## EXERCICE 3

L'équation a des racines si : $\Delta = (2m-1)^2 - 4m(m-3) > 0$ ou $\Delta = 8m+1 > 0$ soit $m > -\frac{1}{8}$

On a : $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''} = \frac{x'+x''}{x'x''}$. Or $x'+x'' = -\frac{2m-1}{m}$ et $x'x'' = \frac{m-3}{m}$

Donc $7 = \frac{1}{x'}+\frac{1}{x''} = \frac{x'+x''}{x'x''} = \frac{2m-1}{3-m}$ soit $m = \frac{22}{9}$.

Cette valeur convient puisqu'elle est supérieure à $-\frac{1}{8}$.

## EXERCICE 4

1) On pose $t = (y-1)^2$ ; donc t est positif.

$$\begin{cases} 7x+8(y-1)^2 = 2 \\ 9x+10(y-1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+8t = 2 \\ 9x+10t = 4 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 70-72 = -2$ $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -12$ $\quad \Delta_t = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 28-18 = 10$

Donc : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-12}{-2}$ et $t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{10}{-2} = -5 \notin 0$

*Conclusion* : $S = \{\emptyset\}$

2) On pose $u = \frac{1}{x-2}$ et $v = \sqrt{y}$ :

$$\begin{cases}\dfrac{8}{x-2}+7\sqrt{y}=2\\ \dfrac{10}{x-2}+9\sqrt{y}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8u+7v=2\\10u+9v=4\end{cases}$$

$\Delta=\begin{vmatrix}8&7\\10&9\end{vmatrix}=72-70=2$ ; $\Delta_u=\begin{vmatrix}2&7\\4&9\end{vmatrix}=-10$ ; $\Delta_v=\begin{vmatrix}8&2\\10&4\end{vmatrix}=32-20=12$

Donc : $u=\dfrac{\Delta_u}{\Delta}=\dfrac{-10}{2}=-5$ et $v=\dfrac{\Delta_v}{\Delta}=\dfrac{12}{2}=6$

Comme : $u=\dfrac{1}{x-2}=-5 \Rightarrow x-2=-\dfrac{1}{5} \Rightarrow x=2-\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{5}$

Comme : $v=\sqrt{y} \Rightarrow v^2=y=6^2=36$ :

*Conclusion* : $S=\left\{x=\frac{9}{5}\,;y=36\right\}$

s) On pose $u=|x^2+2x|\geq 0$

$$\begin{cases}7|x^2+2x|+8y=2\\9|x^2+2x|+10y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7u+8y=2\\9u+10y=4\end{cases}$$

$\Delta=\begin{vmatrix}7&8\\9&10\end{vmatrix}=70-72=-2$ ; $\Delta_u=\begin{vmatrix}2&8\\4&10\end{vmatrix}=-12$ ; $\Delta_y=\begin{vmatrix}7&2\\9&4\end{vmatrix}=10$

Donc : $u=\dfrac{\Delta_u}{\Delta}=6$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=-5$

Comme : $u=|x^2+2x|=6 \Rightarrow x^2+2x=6$ ou $x^2+2x=-6$

$x^2+2x-6=0$ ou $x^2+2x+6=0$ impossible

On a : $x^2+2x-6=0$ qui est un trinôme du second degré admettant comme racines $x_1=-1-\sqrt{7}$, $x_2=-1+\sqrt{7}$

*Conclusion* : $S=\{(-1-\sqrt{7}\,;-6)\,;(-1+\sqrt{7}\,;-6)\}$

## EXERCICE 5

On utilise la relation bien connue : $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

En élevant cette relation au carré scalaire, il vient :

$$OH^2=OA^2+OB^2+OC^2+2(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$$

Or on a : $2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = OB^2 + OC^2 - \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)^2 = OB^2 + OC^2 - BC^2$

Et de même en permutant les lettres, donc :

$$OH^2 = 3R^2 + (2R^2 - a^2) + (2R^2 - b^2) + (2R^2 - c^2) = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

Ainsi $\underline{OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$

## EXERCICE 7

1) On se place dans un repère orthonormée d'origine O(0 ; 0). Posons A, B et C respectivement les points de coordonnées (1 ; −2 ; 3) (2 ; 4 ; 2) et (−1 ; 2 ; 1). On a alors : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ; $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ ; $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$

Dans le triangle AOB, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, si le carré du plus grand côté est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle AOB est rectangle. On a :

On a : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = 38$

On a : $OA^2 + OB^2 = \left(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2\right) + \left(x_B^2 + y_B^2 + z_B^2\right) = 38$

Ainsi : $OA^2 + OB^2 = AB^2$

Le triangle ABO est rectangle en O donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) Dans le triangle AOC, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, si le carré du plus grand côté est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle AOC est rectangle.

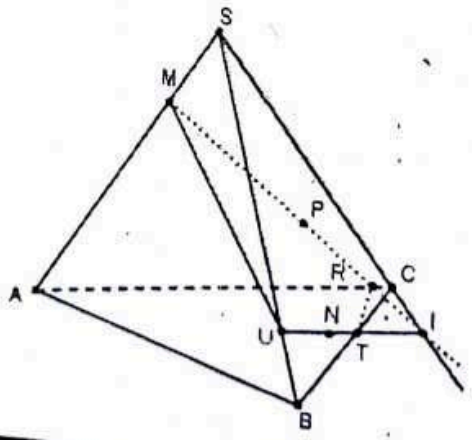
On a : $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = 12$

On a : $OA^2 + OC^2 = \left(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2\right) + \left(x_C^2 + y_C^2 + z_C^2\right) = 20$

Ainsi : $OA^2 + OC^2 \neq AC^2$

Le triangle AOC n'est pas rectangle donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

## EXERCICE 8



$(\mathcal{P}) = (MNP)$.

1) — $(\mathcal{P}) \cap (SAC) = (MP)$, par construction.

— $M \in (\mathcal{P}) \cap (SAB)$ ; $P \in (\mathcal{P})$ et $P \notin (SAB)$ ; donc $(\mathcal{P})$ et (SAB) sont sécants suivant une droite qui passe par M.

— $M \in (\mathcal{P})$ et $M \notin (SBC)$ ; $N \in (\mathcal{P})$ et $N \in (SBC)$ ; donc $(\mathcal{P})$ et (SBC) sont sécants suivant une droite qui passe par N.

— M et I sont deux points de $(\mathcal{P})$, situés de part et d'autre du plan (ABC) ; donc $(\mathcal{P})$ et (ABC) sont sécants suivant une droite.

2) [MR] est l'intersection de $(\mathcal{P})$ avec la face SAC. I et N sont deux points de $(\mathcal{P})$ et de (SBC).

Soit T et U les points d'intersection respectifs de (IN) avec [BC] et [SB]. [TU], [MU] et [TR] sont les intersections respectives de $(\mathcal{P})$ avec les faces SBC, SAB et ABC. La section plane recherchée est la région de $(\mathcal{P})$ délimitée par le quadrilatère MRTU.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465·32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 16

## EXERCICE 1

1) En effet, $|5-x| \geqslant 3 \iff 5-x \geqslant 3$ ou $5-x \leqslant -3 \iff x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 8$

*Conclusion* : $\mathbf{S = ]-\infty\,;\,2] \cup [8\,;+\infty[}$

2) On trouve : $\mathbf{S = ]-5\,;\,1[}$

3) $d(1\,;5x) < 2 \implies |5x-1| < 2 \implies -2 < 5x-1 < 2 \implies -\frac{1}{5} < x < \frac{3}{5}$

*Conclusion* : $\mathbf{S = \left]-\frac{1}{5}\,;\frac{3}{5}\right[}$

4) Soit à résoudre l'inéquation $|2-3x| < 4$. En effet

$$|2-3x| < 4 \iff |3x-2| < 4 \iff -4 < 3x-2 < 4 \iff -\frac{2}{3} < x < 2$$

*Conclusion*: $\mathbf{S = \left]-\frac{2}{3}\,;2\right[}$

5) Soit à résoudre l'inéquation $|2x+3| > 6$. En effet

$|2x+3| > 6 \iff 2x+3 < -6$ ou $2x+3 > 6 \iff x < -\frac{9}{2}$ ou $x > \frac{3}{2}$

*Conclusion*: $\mathbf{S = \left]-\infty\,;-\frac{9}{2}\right[ \cup \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[}$

6) En effet, $|3x+8| \geqslant 2 \iff 3x+8 \geqslant 2$ ou $3x+8 \leqslant -2 \iff x \geqslant -3$ ou $x \leqslant -\frac{10}{3}$

*Conclusion* : $\mathbf{S = \left]-\infty\,;-\frac{10}{3}\right] \cup [-3\,;+\infty[}$

7) En effet, $|2x-1| < 2 \iff -2 < 2x-1 < 2 \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

*Conclusion*: $\mathbf{S = \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right[}$

8) En effet,

$$|2-x| > 3 \iff 2-x \geqslant 3 \text{ ou } 2-x \leqslant -3 \iff x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 5$$

*Conclusion* : $S = ]-\infty ; -1] \cup [5 ; +\infty[$

9) Soit à résoudre : $|x+3| \geqslant 2\sqrt{2} - 3 = -0{,}171572875 < 0$ $(E_9)$

Comme $|x+3| \geqslant 0$. Donc $(E_9)$ est toujours vraie.

*Conclusion* : $S = \mathbb{R}$

## EXERCICE 2

1) On a : $x + y = 1 \implies x = 1 - y$. On remplace $x$ par sa valeur :

$$3x - 5y = -21 \implies 3(1-y) - 5y = -21 \implies 3 - 8y = -21 \implies y = \frac{24}{8} = 3$$

Ainsi : $x = 1 - y = 1 - 3 = -2$

*Conclusion* : $S = \{-2 ; 3\}$

2) On a : $x + 11y = 16 \implies x = 16 - 11y$. On remplace $x$ par sa valeur :

$$7x - 3y = -48 \implies 7(16 - 11y) - 3y = -48 \implies 112 - 80y = -48 \implies y = \frac{160}{80} = 2$$

Ainsi : $x = 16 - 11y = 16 - 22 = -6$

*Conclusion* : $S = \{-6 ; 2\}$

3) On a : $x + 7y = -19 \implies x = -19 - 7y$

$$2x + 5y = -9 \iff 2(-19 - 7y) + 5y = -9 \iff y = -\frac{29}{9}$$

Ainsi $x = -19 - 7y = -19 - 7\left(-\frac{29}{9}\right) = \frac{32}{9}$

*Conclusion* : $S = \left\{\frac{32}{9} ; -\frac{29}{9}\right\}$

4) $\begin{cases} x - y = 10 \\ xy = -16 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y + 10 \\ xy = -16 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y + 10 \\ y(y+10) = -16 \end{cases}$

$$y(y+10) = -16 \implies y_1 = -8,\ y_2 = -2 \implies x_1 = 2,\ x_2 = 8$$

On conclut que : $S = \{(2 ; -8)(8 ; -2)\}$

## EXERCICE 3

a) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

b) $S = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

c) $S = ]-\infty ; -1] \cup \left[\frac{1}{4} ; +\infty\right[$

d) $S = \emptyset$

e) $S = \left[\frac{-1-\sqrt{11}}{5} ; \frac{-1+\sqrt{11}}{5}\right]$

f) $S = \mathbb{R}$

(g) On a :



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

$$(-x^2-7)(x^2-x-2)\geqslant 0 \iff (x^2+7)(x^2-x-2)\leqslant 0$$

Comme $x^2+7>0$ donc $(x^2+7)(x^2-x-2)\leqslant 0 \iff x^2-x-2\leqslant 0$

On a : $x^2-x-2\leqslant 0 \iff x\in[-1;2]$

*Conclusion* : $\underline{S=[-1;2]}$

(h) Soit à résoudre : $x^2-2x-15\leqslant 0\leqslant -x^2+3x+4$. En effet,

$$x^2-2x-15\leqslant 0\leqslant -x^2+3x+4 \iff \begin{cases} x^2-2x-15\leqslant 0 & (1)\\ -x^2+3x+4\geqslant 0 & (2)\end{cases}$$

(1) : $x^2-2x-15\leqslant 0 \iff x\in[-3;5]$

(2) : $-x^2+3x+4\geqslant 0 \iff x\in[-1;4]$

Ainsi : $S=[-3;5]\cap[-1;4]=[-1;4]$

*Conclusion* : $\underline{\mathbf{S=[-1;4]}}$

(i) Soit à résoudre l'inéquation : $-x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{36}>0$.

Pour ce faire, on pose $-x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{36}=0$.

On calcule le discriminant $\Delta=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-4(-1)\left(\frac{1}{36}\right)=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Ainsi $x_1=\frac{2-\sqrt{3}}{6}$ et $x_2=-\frac{2+\sqrt{3}}{6}$

On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2+\sqrt{3}}{6}$ | | $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{36}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

*Conclusion* : $\underline{S=\left]-\frac{2+\sqrt{3}}{6};\frac{2-\sqrt{3}}{6}\right[}$

(j) Soit à résoudre l'équation : $(x-1)^2+(3-x)^2<0$.

En effet, $(x-1)^2\geqslant 0$ et $(3-x)^2\geqslant 0$ donc $(x-1)^2+(3-x)^2\geqslant 0$ et donc : $\underline{S=\emptyset}$

(k) On a : $x^2-4x+4=(x-2)^2$. Ainsi $x^2-4x+4\leqslant 0 \iff (x-2)^2\leqslant 0$.

Or $(x-2)^2\geqslant 0$ (un carré est toujours positif), donc on a : $\begin{cases}(x-2)^2\leqslant 0\\(x-2)^2\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow (x-2)^2=0$.

Ou encore $x-2=0$ et par conséquent $x=2$. *Conclusion* : $\underline{S=\{2\}}$

(1) On pose : $-3x^2+4x-\frac{4}{3}=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

Ainsi $-3x^2+4x-\frac{4}{3}>0 \Leftrightarrow -3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2>0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2<0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

On conclut que : $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

## EXERCICE 4

1) $\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x=\sin x(1-2\sin^2 x)+2\sin x(1-\sin^2 x)$

*Conclusion* : **$\sin 3x=-4\sin^3 x+3\sin x$**

2) $\cos 4x=2(2\cos^2 x-1)^2-1=2(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1)-1=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

$=\cos^4 x+7\cos^4 x-7\cos^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x=\cos^4 x+7\cos^2 x\underbrace{(\cos^2 x-1)}_{-\sin^2 x}+\sin^2 x$

$=\cos^4 x-7\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^2 x=\cos^4 x-6\cos^2 x\cdot\sin^2 x-\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^2 x$

$=\cos^4 x-6\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^2 x\underbrace{(1-\cos^2 x)}_{\sin^2 x}=\cos^4 x-6\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\sin^4 x$

*Conclusion* : **$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$**

3) $\cos 3x=\cos(x+2x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x=\cos x(2\cos^2 x-1)-2\cos x(1-\cos^2 x)$

*Conclusion* : **$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$**

4) On a :

$$\tan 3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{4\cos^3 x-3\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{3-4\sin^2 x}{4\cos^2 x-3}=\tan x\times\frac{3-4\sin^2 x}{4\cos^2 x-3}$$

Or : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$ et $\sin^2 x=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ donc :

$$\tan 3x=\tan x\times\frac{3-4\sin^2 x}{4\cos^2 x-3}=\tan x\times\frac{3-\frac{4\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}{\frac{4}{1+\tan^2 x}-3}=\tan x\times\frac{3+3\tan^2 x-4\tan^2 x}{4-3-3\tan^2 x}=\tan x\times\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$$

*Conclusion* : **$\tan 3x=\tan x\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$**

## EXERCICE 6

Si (AB) et $(\mathcal{D})$ étaient coplanaires, (AB) serait incluse dans $(\mathcal{P})$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse ; « B n'appartient pas à $(\mathcal{P})$ ». Donc (AB) et $(\mathcal{D})$ ne sont pas coplanaires.

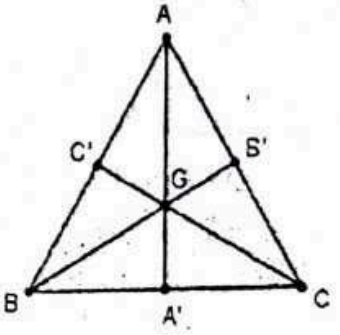
## EXERCICE 7

Deux droites $(\Delta)$ et $(\Delta')$, telles que « $S_{(\Delta)}$ suivie de $S_{(\Delta')}$ » soit la rotation $r_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)}$, doivent être sécantes en G et admettre des vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ tels que : $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{u}'})=\frac{\pi}{3}$.

Ainsi en est-il des trois couples : ((GC) et (GB'), ((GB') et (GA)), ((GB) et (GA')).



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès




## EXERCICE 8

1) Le polynôme $P(x) = x^3 - 14x + 8$ admet trois racines distinctes $a$, $b$ et si et seulement si :

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

Or $P(x) = x^3 - 14x + 8$

Donc par indentification :

$$\begin{cases} -(a+b+c) = 0 \\ (ab+ac+bc) = -14 \\ -abc = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ ab+ac+bc = -14 \\ abc = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ \dfrac{1}{abc}(ab+ac+bc) = -\dfrac{14}{abc} \\ abc = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{7}{4} \\ abc = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)^2 = 0 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{7}{4} \\ abc = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = 0 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{7}{4} \\ abc = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 28 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{7}{4} \\ abc = -8 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$$

2) On a : $P(-4) = -64 + 56 + 8 = 0$. On pose $a = -4$ et le dernier système devient :

$$\begin{cases} bc = 2 \\ b+c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{2}{b} \\ b+\dfrac{2}{b} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{2}{b} \\ b^2-4b+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{2}{b} \\ b = 2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b,c) = \left(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right) \\ ou \\ (b,c) = \left(2+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Le choix de $b$ et $c$ étant arbitraire, donc : $\underline{P(x) = (x+4)(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})}$

Devoir numéro 17

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 17

## EXERCICE 1

1) On trouve $\mathbf{S = ]-\infty ; \frac{3}{4}]}$

2) Soit à résoudre l'inéquation $|1-9x| < 2x+1$. Déterminons d'abord le domaine de validité de l'inéquation. En effet, l'inéquation $|1-9x| < 2x+1$ existe si $2x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$

*Domaine de validité* : $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[, |1-9x| < 2x+1 \iff -2x-1 < 1-9x < 2x+1 \iff \begin{cases} 1-9x > -2x-1 \\ 1-9x < 2x+1 \end{cases}$$

En effet, $1-9x > -2x-1 \iff x < \frac{2}{7} \implies S_1 = ]-\infty ; \frac{2}{7}[ \cap$

De même, $1-9x < 2x+1 \iff x > 0$

Ainsi : $S = ]-\infty ; \frac{2}{7}[ \cap ]0 ; +\infty[ \cap \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[ = ]0 ; \frac{2}{7}[$

*Conclusion*: $\mathbf{S = ]0 ; \frac{2}{7}[}$

3) On a : $d(1 ; 5x) < 2 \implies |5x-1| < 2 \implies -2 < 5x-1 < 2 \implies -\frac{1}{5} < x < \frac{3}{5}$

*Conclusion*: $\mathbf{S = ]-\frac{1}{5} ; \frac{3}{5}[}$

4) Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $|x+2| + |-x+3| \leqslant 5$

(i) Si $x \in ]-\infty ; -2]$, $|x+2| + |-x+3| = (-x-2) + (-x+3) = -2x+1$

On a :

$$|x+2| + |-x+3| \leqslant 5 \iff -2x+1 \leqslant 5 \iff x \geqslant -2 \iff x \in [-2 ; +\infty[$$

Donc : $S_1 = ]-\infty ; -2] \cap [-2 ; +\infty[ = -2$

(ii) Si $x \in [-2 ; 3]$, $|x+2| + |-x+3| = (x+2) + (-x+3) = 5$

On a :

$$|x+2| + |-x+3| \leqslant 5 \iff 5 \leqslant 5 \text{ toujours vrai}$$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Donc : $S_2 = [-2\,;\,3]$

(ii) Si $x \in [3\,;\,+\infty[$, $|x+2| + |-x+3| = (x+2) + (x-3) = 2x-1$

On a :

$$|x+2| + |-x+3| \leqslant 5 \iff 2x-1 \leqslant 5 \iff x \leqslant 3 \iff x \in ]-\infty\,;3]$$

Donc : $S_3 = ]-\infty\,;3] \cap [3\,;\,+\infty[ = 3$

*Conclusion* : $\underline{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-2\,;\,3]}$

5) Dans $\left]-\infty\,;\,-\frac{7}{5}\right]$, l'inéquation devient : $-5x-7-3(3-2x) > x-4 \implies -12 > 0$

Dans $\left]-\frac{7}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right]$, l'équation devient: $5x+7-3(3-2x) > x-4 \implies x > -\frac{1}{5}$

Dans $\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, l'équation devient: $5x+7-3(-3+2x) > x-4 \implies x > 10$

Donc : $S = \left]-\frac{7}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right] \cap \left]-\frac{1}{5}\,;\,+\infty\right[ \cup \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[ \cap ]10\,;\,+\infty[$

*Conclusion* : $\underline{S = \left]-\frac{1}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right] \cup ]10\,;\,+\infty[}$

## EXERCICE 2

a) $\underline{S = \left[\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[}$

b) $\underline{S = ]-2\,;\,\frac{2}{3}[ \cup ]\frac{2}{3}\,;\,\frac{3}{2}[}$

c) $\underline{S = \left[-5\,;\,\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right]}$

d) $\underline{S = \left]-\infty\,;\,\frac{-4-\sqrt{31}}{5}\right[ \cup \left]\frac{-4+\sqrt{31}}{5}\,;\,5-2\sqrt{5}\right[ \cup ]5+2\sqrt{5}\,;\,+\infty[}$

e) $\underline{S = ]-\infty\,;\,-4-2\sqrt{3}[ \cup ]-2\,;\,-4+2\sqrt{3}[ \cup ]0\,;\,+\infty[}$

## EXERCICE 3

1) Soit $A = \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}-\frac{11\pi}{24}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Or : $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \implies \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Donc : $A = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4}$ (1)

Soit $B = \sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{7\pi}{24}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{7\pi}{24}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Or : $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Donc $B = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$ (2)

(1)×(2) donne : $A \times B = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4} = \frac{1}{16} \Rightarrow 16AB = 1$

On en déduit : $16\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right) = 16AB = 1$

*Conclusion* : $\mathbf{16\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right) = 1}$

2) On a :

$$\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 2\left(\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = 2\left(\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$
$$= 2\left(\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{3}{2}$$

*Conclusion* : $\mathbf{\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}}$

## EXERCICE 4

a) L'équation est définie si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq 5$. Après réduction au même dénominateur, elle équivaut à : $\frac{-5x^2+52x-63}{2(x-1)(x-5)} < 0$

Puis on fait un tableau de signes des trinômes du numérateur et du dénominateur pour trouver :

$$\mathbf{S = ]-\infty ; 1[ \cup \left]\frac{7}{5} ; 5\right[ \cup ]9 ; +\infty[}$$

b) L'équation est définie si et seulement si $x^2 - x - 6 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq -2$ et $x \neq 3$.

Après transposition et réduction au même dénominateur, elle équivaut à : $\frac{2(x^2-6)}{(x+2)(x-3)} > 0$.

Puis on fait un tableau de signes des trinômes du numérateur et du dénominateur pour trouver :

$$\mathbf{S = ]-\infty ; -\sqrt{6}[ \cup ]-2 ; \sqrt{6}[ \cup ]3 ; +\infty[}$$

c) L'équation est définie si et seulement si $2x^2 - x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq -\frac{1}{2}$.

Après transposition et réduction au même dénominateur, elle équivaut à : $\frac{-(x^2+4x-6)}{2x^2-x-1} > 0$.

Puis on fait un tableau de signes des trinômes du numérateur et du dénominateur pour trouver :

$$\mathbf{S = \left]-2-\sqrt{10} ; -\frac{1}{2}\right[ \cup ]1 ; -2+\sqrt{10}[}$$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

d) L'équation est définie si et seulement si $x \neq 3$ et $x \neq -2$. Après transposition et réduction au même dénominateur, elle équivaut à : $\frac{5(2-x)(7x+11)}{4(x+2)(x-3)} > 0$.

Puis on fait un tableau de signes des trinômes du numérateur et du dénominateur pour trouver :

$$S = \left]-2\,;\,-\frac{11}{7}\right] \cup [2\,;\,3[$$

e) L'équation est définie si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq 3$. Après transposition et réduction au même dénominateur, elle équivaut à : $\frac{x^2-4x+9}{(x-1)(x-3)} \leqslant 0$.

Puis on fait un tableau de signes des trinômes du numérateur et du dénominateur pour trouver :

$$S = ]1\,;\,3[$$

f) L'équation est définie si et seulement si $x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{2}$ et $x \neq \frac{7}{6}$.

Après transposition et réduction au même dénominateur, elle équivaut à : $\frac{6x^2-15x+10}{(x-1)(2x-3)(6x-7)} \leqslant 0$

Puis on fait un tableau de signes des trinômes du numérateur et du dénominateur pour trouver :

$$S = ]-\infty\,;\,1[ \cup \left]\frac{7}{6}\,;\,\frac{3}{2}\right[$$

g) Le tableau de signes de l'expression $G(x) = \frac{(x-1)(3x^2+x-10)}{1-2x}$ est :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | |
| $3x^2+x-10$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| Numérateur | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $1-2x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | |
| $G$ | $-$ | | $+$ | ‖ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | |

On trouve alors : $S = \left[-2\,;\,\frac{1}{2}\right[ \cup \left[1\,;\,\frac{5}{3}\right]$

(h) Soit à résoudre l'inéquation : $\frac{x^2-x-20}{-x^2-5} \leqslant 0$.

On pose $x^2 - x - 20 = 0 \implies x_1 = -4 \;;\; x_2 = 5$

Remarquons que $-x^2 - 5 < 0$ pour tout réel $x$.

On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-20$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $-x^2-5$ | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | | |
| $\frac{x^2-x-20}{-x^2-5}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |

*Conclusion* : $S = ]-\infty\,;-4] \cup [5\,;\,+\infty[$

(i) $S = ]-\infty\,;\,-2] \cup ]-1\,;2]$

**EXERCICE 5**

CE $\Sigma\pi\int$

Devoir numéro 17

1) Rappelons que, pour toute origine O, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. En particulier, si O est en A : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Alors $\overrightarrow{AG}^2 = GA^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2$

D'autre part, $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Donc $2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - BC^2 = b^2 + c^2 - a^2$. En reportant cette valeur dans l'expression de $GA^2$ on obtient :

$$GA^2 = \frac{1}{9}(c^2 + b^2 + b^2 + c^2 - a^2) = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$$

*Conclusion* : $\underline{GA^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}}$

2) De la même façon qu'à la première question, on établit :

$$GB^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{9} \quad ; \quad GC^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2}{9}$$

En remplaçant $GA^2$, $GB^2$, $GC^2$ par les valeurs trouvées, on vérifie que :

$$\underline{(b^2 - c^2)GA^2 + (c^2 - a^2)GB^2 + (a^2 - b^2)GC^2 = 0}$$

3) Pour tout point on peut écrire :

$$\begin{aligned}(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 &= (b^2 - c^2)(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (c^2 - a^2)(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (a^2 - b^2)(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MG}\cdot\left((b^2 - c^2)\overrightarrow{GA} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{GB} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{GC}\right)\end{aligned}$$

On doit donc chercher pour quels points ce produit scalaire est nul.

Remarquons d'abord que le vecteur $\vec{u} = (b^2 - c^2)\overrightarrow{GA} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{GB} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{GC}$ vaut $(b^2 - c^2)\overrightarrow{GA} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{GB} - (a^2 - b^2)(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = (2b^2 - a^2 - c^2)\overrightarrow{GA} + (-2a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{GB}$.

Montrons que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde, et supposons que $\vec{u} = \vec{0}$.

On aurait alors $(2b^2 - a^2 - c^2)\overrightarrow{GA} = -(-2a^2 + b^2 + c^2)\overrightarrow{GB}$ (1)

La situation est la suivante : soit $\alpha, \beta$ deux réels tels que : $\alpha\overrightarrow{GA} = \beta\overrightarrow{GB}$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ ne sont pas colinéaires. Nous voulons montrer qu'alors $\alpha = \beta = 0$.

Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons que l'un des réels n'est pas nul, $\alpha$ par exemple. L'égalité $\alpha\overrightarrow{GA} = \beta\overrightarrow{GB}$ équivaut alors à $\overrightarrow{GA} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ seraient colinéaires, ce qui est absurde. Le réel $\alpha$ est donc nul. Dans ces conditions, l'égalité $\alpha\overrightarrow{GA} = \beta\overrightarrow{GB}$ devient $\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Comme $\overrightarrow{GB} \neq \vec{0}$ donc $\beta = 0$.

Il est clair, par ailleurs, que $\alpha = \beta = 0$ implique $\alpha\overrightarrow{GA} = \beta\overrightarrow{GB}$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE $\Sigma\pi\int$ Devoir numéro 17

*En résumé* : l'égalité $\alpha\overrightarrow{GA} = \beta\overrightarrow{GB}$ avec la condition $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ non colinéaires équivaut à $\alpha = \beta = 0$.

## EXERCICE 6

1) On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{HD}$ sont coplanaires : ils appartiennent tous au plan (AEF).

3) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BC}$ ne sont pas coplanaires.

## EXERCICE 7

1) On pose $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. $P(0) = d \implies d = 0 \implies P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

On a :

$$P(x+1) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) = a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x+1)$$
$$= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a + 2b + c)x + (a + b + c)$$

Ainsi :

$$P(x+1) - P(x) = ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c) - ax^3 - bx^2 - cx$$
$$= 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c)$$

En effet, $P(x+1) - P(x) = x^2 \iff 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c) = x^2$

Par identification, on obtient : $3a = 1$ ; $3a + 2b = 0$ ; $a + b + c = 0$

Ainsi : $a = \frac{1}{3}$ ; $b = -\frac{3}{2}a = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ ; $c = -(a+b) = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$

On a donc $\underline{P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x}$

2) a) On a :

Pour $x = 1$, on a : $P(2) - P(1) = 1^2$

Pour $x = 2$, on a : $P(3) - P(2) = 2^2$

Pour $x = 3$, on a : $P(4) - P(3) = 3^2$

Pour $x = n - 1$, on a : $P(n) - P(n-1) = (n-1)^2$

Pour $x = n$, on a : $P(n+1) - P(n) = n^2$

Donc :

$$P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + P(4) - P(3) + \cdots + P(n) - P(n-1) + P(n+1) - P(n)$$
$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Or

$$P(2) - P(1) + P(3) - P(2) + P(4) - P(3) + \cdots + P(n) - P(n-1) + P(n+1) - P(n) = P(n+1) - P(1)$$

donc $\underline{\mathbf{P(n+1) - P(1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}}$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

b) En déduire que : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On a : $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$ donc

$$P(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{6}(n+1) \; ; \; P(1) = -\frac{1}{3}$$

Ainsi : $P(n+1) - P(1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{6}(n+1) + \frac{1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Par ailleurs, $P(n+1) - P(1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ donc :

$$\underline{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

c) *Exemple* : On pose $n = 2$.

$$1^2 + 2^2 = 5 \quad ; \quad \frac{2(2+1)(2\times 2+1)}{6} = 5 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2\times 2+1)}{6}$$

## EXERCICE 8

Pour tous réels $x$ et $y$, on a :

$$5x^2 + y^2 + 4 - 4x - 4xy = 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 = (2x-y)^2 + (x-2)^2 \geqslant 0$$

Par suite, on a $5x^2 + y^2 + 4 \geqslant 4x + 4xy$.

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $2x - y = 0$ et $x - 2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 2$ et $y = 4$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 18

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 18

## EXERCICE 1

1) Domaine de définition de l'équation : $\mathbb{R} - \{-3\}$

On a :

$$\frac{1}{1+\dfrac{3}{\dfrac{3}{|x+3|}-1}} = \frac{1}{7} \Rightarrow 1+\frac{3}{\dfrac{3}{|x+3|}-1} = 7 \Rightarrow \frac{3}{\dfrac{3}{|x+3|}-1} = 6 \Rightarrow \frac{1}{\dfrac{3}{|x+3|}-1} = 2$$

En passant aux inverses, on obtient :

$$\frac{3}{|x+3|} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{|x+3|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x+3|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |x+3| = 2$$

On est donc amené à résoudre : $x+3 = 2$ ou $x+3 = -2$ et donc $x = -1$ ou $x = -5$.

*Conclusion* : $\mathbf{S = \{-1\,;\,-5\}}$

2) Domaine de définition de l'équation : $\mathbb{R} - \{-2\}$

On a :

$$\frac{1}{1+\dfrac{3}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{|x+2|}}} \leqslant \frac{1}{7} \Rightarrow 1+\frac{3}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{|x+2|}} \geqslant 7 \Rightarrow \frac{3}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{|x+2|}} \geqslant 6 \Rightarrow \frac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{|x+2|}} \geqslant 2$$

En passant aux inverses, on obtient :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{|x+2|} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x+2|} \leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow |x+2| \geqslant 4$$

On est donc amené à résoudre : $x+2 \geqslant 4$ ou $x+2 \leqslant -4$ et donc $x \geqslant 2$ ou $x \leqslant -6$.

On obtient l'ensemble solution : $S = (\mathbb{R} - \{-2\}) \cap ]-\infty\,;\,-6] \cup [2\,;\,+\infty[ = ]-\infty\,;\,-6] \cup [2\,;\,+\infty[$

*Conclusion* : $\mathbf{S = ]-\infty\,;\,-6] \cup [2\,;\,+\infty[}$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

## EXERCICE 2

En effet,

$$\sin^3 t + \cos^3 t = (\sin t + \cos t)(\sin^2 t - \sin t \cos t + \cos^2 t) = (\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t)$$

Or : $\sin t + \cos t = a \implies (\sin t + \cos t)^2 = a^2 \implies \sin^2 t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t = a^2$

Ou encore : $\sin t \cos t = \frac{1}{2}[a^2 - (\sin^2 t + \cos^2 t)] = \frac{1}{2}(a^2 - 1)$

Ainsi : $\sin^3 t + \cos^3 t = (\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t) = a\left[1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)\right] = \frac{a}{2}(3 - a^2)$

(i) Multiplions $\sin^3 t + \cos^3 t$ par $\sin^2 t + \cos^2 t$. On obtient :

$$\begin{aligned}(\sin^3 t + \cos^3 t)(\sin^2 t + \cos^2 t) &= \sin^5 t + \sin^3 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^3 t + \cos^5 t \\ &= (\sin^5 t + \cos^5 t) + (\sin^3 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^3 t) \\ &= (\sin^5 t + \cos^5 t) + \sin^2 t \cos^2 t (\sin t + \cos t)\end{aligned}$$

(ii) On a : $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ et donc $(\sin^3 t + \cos^3 t)(\sin^2 t + \cos^2 t) = (\sin^3 t + \cos^3 t) \times 1 = \sin^3 t + \cos^3 t$

Revenons à (i) :

$$\begin{aligned}\sin^5 t + \cos^5 t &= (\sin^3 t + \cos^3 t) - \sin^2 t \cos^2 t (\sin t + \cos t) = \frac{a}{2}(3 - a^2) - a\left[\frac{1}{2}(a^2 - 1)\right]^2 \\ &= \frac{a}{4}(6 - 2a^2 - a^4 + 2a^2 - 1) = \frac{a}{4}(5 - a^4)\end{aligned}$$

*Conclusion* : $\sin^5 t + \cos^5 t = \frac{a}{4}(5 - a^4)$

## EXERCICE 3

1) a) On a : $P_1 = 2(DA + AM) = 2(3 + x) = 6 + 2x$.

De même, $P_2 = 2(FE + EC)$. Or $FE = MB = AB - AM = 6 - x$ et $EC = 2$

Donc : $P_2 = 2(6 - x + 2) = 2(8 - x) = 16 - 2x$.

*Conclusion* : $P_1 = 6 + 2x$ ; $P_2 = 16 - 2x$

b) $P_1 = P_2$ implique : $6 + 2x = 16 - 2x$ ou encore $x = \frac{5}{2}$

2) a) On a : $S_1 = DA \times AM = 3x$. De même, $S_2 = FE \times EC = 2(6 - x) = 12 - 2x$.

*Conclusion* : $S_1 = 3x$ ; $S_2 = 12 - 2x$

b) On a : $S_1 < S_2 \implies 3x < 12 - 2x \implies 5x < 12 \implies x < \frac{12}{5}$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

*Conclusion* : $S = ]-\infty ; \frac{12}{5}[$

## EXERCICE 4

1) $S = \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} a+5b-3=0 \\ 2a-b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+5b=3 \\ 2a-b=-5 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-10 = -11$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3+25 = 22 \qquad \Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5-6 = -11$$

Donc : $a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{22}{-11} = -2$ et $b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1$

*Conclusion* : $S = \{a = -2 ; b = 1\}$

3) Soit à résoudre le système suivant par la méthode de Cramer : $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ -2x+4y=-10 \end{cases}$

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 14$ ; $\delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 14$ ; $\delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = -28$

Ainsi : $x = \frac{\delta_x}{\Delta} = 1$ et $y = \frac{\delta_y}{\Delta} = -2$

*Conclusion* : $S = \{x = 1 ; y = -2\}$

## EXERCICE 5

1) a) On a :

$$-\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} = -\overline{MA} + 2(\overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CB}) - (\overline{MA} + \overline{AC}) = \overline{AC} + 2\overline{CB}$$

Ainsi : $-\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} = 1 + 2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -4$.

*Conclusion* : $\forall M \in (\Delta),\ -\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC} = -4$

b) On a : $2\overline{MA} - 3\overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{MA} - 3(\overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CB}) + (\overline{MA} + \overline{AC}) = -2\overline{AC} - 3\overline{CB}$

Ainsi : $2\overline{MA} - 3\overline{MB} + \overline{MC} = -2 \times 1 - 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2}$.

*Conclusion* : $\forall M \in (\Delta),\ 2\overline{MA} - 3\overline{MB} + \overline{MC} = \frac{11}{2}$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

On a :

$$(1+a)\overline{MA}+(a-1)\overline{MB}-2a\overline{MC}=(1+a)\overline{MA}+(a-1)(\overline{MA}+\overline{AC}+\overline{CB})-2a(\overline{MA}+\overline{AC})$$
$$=(1+a+a-1-2a)\overline{MA}+(a-1-2a)\overline{AC}+(a-1)\overline{CB}=(-a-1)\overline{AC}+(a-1)\overline{CB}$$

Ainsi : $(1+a)\overline{MA}+(a-1)\overline{MB}-2a\overline{MC}=-a-1-\frac{5}{2}(a-1)=\frac{-2a-2-5a+5}{2}=\frac{3-7a}{2}$

*Conclusion* : $\forall M \in (\Delta),\quad (1+a)\overline{MA}+(a-1)\overline{MB}-2a\overline{MC}=\frac{3-7a}{2}$

2) a) On a :

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=(\overline{MI}+\overline{IA})^2+(\overline{MI}+\overline{IB})^2=2\overline{MI}^2+\overline{MI}\times(\overline{IA}+\overline{IB})+\overline{IA}^2+\overline{IB}^2$$

Or $\overline{IA}+\overline{IB}=0$ et $\overline{IA}^2=\overline{IB}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4}$ car I milieu de [AB] donc : $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2\overline{MI}^2+\frac{\overline{AB}^2}{2}$

b) On a :

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=(\overline{MI}+\overline{IA})(\overline{MI}+\overline{IB})=\overline{MI}^2+\overline{MI}\times(\overline{IA}+\overline{IB})+\overline{IA}\times\overline{IB}$$

Or $\overline{IA}+\overline{IB}=0$ et $\overline{IA}=-\overline{IB}=\frac{\overline{AB}}{2}$ car I milieu de [AB] donc : $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MI}^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}$

## EXERCICE 6

On décompose le vecteur $\overrightarrow{JI}$ : $\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CI}$.

Or $\overrightarrow{JC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{JI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{FA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.

On conclut donc que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires et $-\frac{1}{2}$ est le coefficient de colinéarité.

## EXERCICE 7

On trouve facilement $P(a)=a^2$ et $P(b)=b^2$ et $P(c)=c^2$

Posons $Q(x)=P(x)-x^2$. Il est évident que Q est de degré inférieur ou égal à 2.

On a : $Q(a)=P(a)-a^2=a^2-a^2=0$.

De même, $Q(b)=P(b)-b^2=b^2-b^2=0$

De même, $Q(c)=P(c)-c^2=c^2-c^2=0$

Ainsi $Q(a)=Q(b)=Q(c)=0$ et donc Q admet trois racines. Ce qui absurde car $\deg Q<2$. Alors Q ne peut être que le polynôme nul. Ainsi $Q(0)=P(0)-0^2=0-0=0$ et par conséquent $Q(x)=0=P(x)-x^2$ et donc $P(x)=x^2$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Club de l'Excellence

Pour la promotion de l'Excellence

www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 19

## EXERCICE 1

1) On trouve $S = ]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$

2) Cette équation équivaut à : $2x - 3 \geqslant x + 2$ ou $2x - 3 \leqslant -x - 2$. Donc : $x \geqslant 5$ ou $x \leqslant \frac{1}{3}$

*Conclusion* : $S = \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right] \cup [5 ; +\infty[$

3) On trouve : $S = ]-\infty ; -2]$

5) On trouve : $S = \left]-\infty ; \frac{4}{5}\right[ \cup ]2 ; +\infty[$

6) On trouve : $S = \left[\frac{1}{4} ; \frac{11}{4}\right]$

## EXERCICE 2

1) On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \ ; \ \cos(2\pi - x) = \cos x \ ; \ \sin(\pi + x) = -\sin x \ ; \ \cos(\pi - x) = -\cos x$$

Ainsi :

$$A(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(2\pi - x) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x) = A(x) = \sin x - \cos x - \sin x - \cos x$$
$$= -2\cos x$$

De même,

$$\cos(-x) = \cos x \ ; \ \cos(\pi - x) = -\cos x \ ; \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos(3\pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x \ ; \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$B(x) = 3\cos x - 5\cos x + 2\sin x - \cos x + \cos x = -2\cos x + 2\sin x$$

*Conclusion* : $A = -2\cos x \ ; B = -2\cos x + 2\sin x$

2) a) On a :

$$\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = 0$$

b) On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right] + \left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right] = 0 + 0 = 0$$

3) a) Déterminons la mesure principale de $\alpha_1 = \frac{31\pi}{3}$

On a : $2\pi = \frac{6\pi}{3}$ ; le multiple de 6 le plus proche de 31 est 30.

Ainsi : $\alpha_1 = \frac{31\pi}{3} = \frac{30\pi+\pi}{3} = 10\pi + \frac{\pi}{3}$ donc la mesure principale de $\frac{31\pi}{3}$ est $\frac{\pi}{3}$

Déterminons la mesure principale de $\alpha_2 = \frac{179\pi}{4}$

On a : $2\pi = \frac{8\pi}{4}$ ; le multiple de 8 le plus proche de 179 est 176.

Ainsi : $\alpha_2 = \frac{179\pi}{4} = \frac{176\pi+3\pi}{4} = 44\pi + \frac{3\pi}{4}$ donc la mesure principale de $\frac{179\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$

Déterminons la mesure principale de $\alpha_3 = \frac{-143\pi}{6}$

On a : $2\pi = \frac{12\pi}{6}$ ; le multiple de 12 le plus proche de -143 est -144.

Ainsi : $\alpha_3 = \frac{-143\pi}{6} = \frac{-144\pi+\pi}{6} = -24\pi + \frac{\pi}{6}$ donc la mesure principale de $\frac{-143\pi}{6}$ est $\frac{\pi}{6}$

## EXERCICE 3

3) $\begin{cases} mx + 3y + 2 = 0 \\ 3x + y - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 3y = -2 \\ 3x + y = m \end{cases}$ (E)

Si $m = 0$, alors : (E) devient : $\begin{cases} 3y = -2 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{y}{3} = \frac{2}{9} \end{cases}$ donc $S(m=0) = \left\{\frac{2}{9}; -\frac{2}{3}\right\}$

Si $m \neq 0$, alors on utilise Cramer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = m - 9 \; ; \; \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3m \; ; \; \Delta_y = \begin{vmatrix} m & -2 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 6$$

Donc : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3m-2}{m-9}$ et $x = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{m^2+6}{m-9}$

*Conclusion* : $S = \left\{x = \frac{-3m-2}{m-9} \; ; \; y = \frac{m^2+6}{m-9}\right\}$

4) Le déterminant D du système est : $D = \begin{vmatrix} m-1 & 3m-2 \\ 2m-1 & -2 \end{vmatrix} = m(5-6m)$

(i) Si $m = \frac{5}{6}$, de $D_x = -3m^2 - 4m \neq 0$ le système n'admet pas de solutions.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

(ii) Si $m = 0$, dans ce cas, $D_x = D_y = 0$. Puisque les coefficients du système ne sont pas tous nuls, il y a indétermination simple. Les solutions sont donc tous les couples $(x\,;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $x + 2y = -2$.

Si $m \neq \left\{0; \frac{5}{6}\right\}$, le système admet une solution unique : $x = \frac{D_x}{D} = \frac{3m+4}{6m-5}$ ; $y = \frac{D_y}{D} = \frac{m-3}{5-6m}$.

*Conclusion* : $\mathbf{S = \left\{x = \frac{3m+4}{6m-5}\,;\, y = \frac{m-3}{5-6m}\right\}}$

5) Soit à résoudre $\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases}$

Avant tout on regarde s'il existe une solution unique, c'est le cas si et seulement si le déterminant est non nul. Pour le premier système le déterminant est $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$ donc il y a une unique solution si et seulement si $a \neq \pm 1$.

Bien sûr toutes les méthodes conduisent au même résultat ! Par exemple par substitution, en écrivant la première ligne $y = 2 - ax$, la deuxième ligne devient $(a^2+1)x + 2a(2 - ax) = 1$ On en déduit que si $a \neq \pm 1$ alors $x = \frac{4a-1}{a^2-1}$ puis $y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}$.

Traitons maintenant les cas particuliers. Si $a = 1$ alors le système devient : $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

Mais on ne peut avoir en même temps $x + y = 2$ et $x + y = \frac{1}{2}$. Donc il n'y a pas de solution.

Si $a = -1$ alors le système devient : $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$ et il n'y a pas de solution.

*Conclusion* : $\mathbf{S = \emptyset}$

6) Soit à résoudre le système suivant : $\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$

Ici le déterminant est $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = 4a$.

(i) Si $a \neq 0$ alors on trouve la solution unique $(x, y)$. Par exemple avec la formule de Cramer :

*Conclusion* : $\mathbf{S = \left\{x = \frac{1}{2a}\,;\, y = \frac{1}{2a}\right\}}$

(ii) Si $a = 0$ il n'y a pas de solution. *Conclusion* : $\mathbf{S = \emptyset}$

## EXERCICE 4

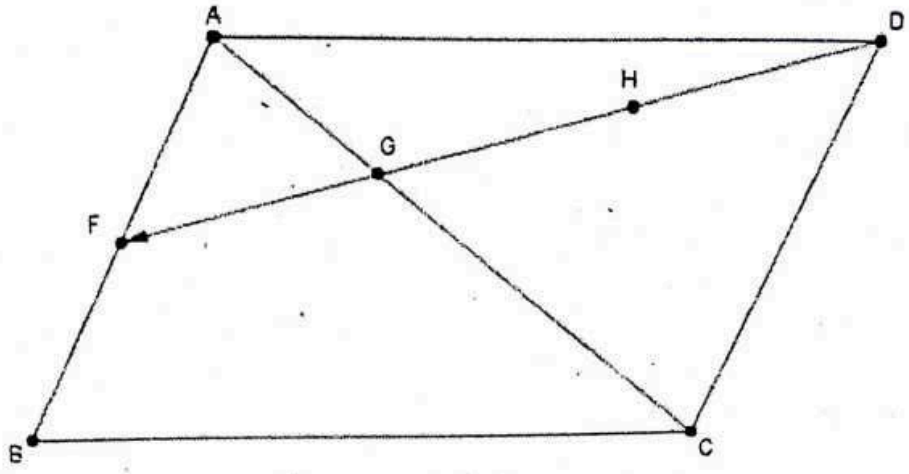
Soit I = (AH)∩(BB'). Montrons que les droites (BH) et (DC) sont perpendiculaires. Pour cela, il suffit de montrer que $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. Rappelons que si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est perpendiculaire à toute droite de ce plan.

Donc $(BB') \perp (DC)$ et $I \in (BB')$ donc $(BI) \perp (DC)$ car $(BB') \perp (ADC)$ et de la même manière $(IH) \perp (DC)$. On a : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DC}$

Or $(BI) \perp (DC) \Rightarrow \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ et $(IH) \perp (DC) \Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$

Donc $\underline{(BH)\perp(DC)}$

## EXERCICE 5




1) Les points A, G et C sont alignés.

2) On a : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$ donc $\underline{\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$ dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$

On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ car ABCD est un parallélogramme.

Or $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$ car F milieu de [AB], donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AF}$ et $\underline{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$ dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$

On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ donc $\underline{\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}}$ dans la base $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$

3) On a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow 3\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$ donc les points A, G et C sont alignés.

## EXERCICE 6

Notons $a$, $b$, $c$ les solutions de $A(x) = 0$.

On sait que $a + b + c = -p$.

Dire que $a = b + c$, c'est écrire que $2a = a + b + c = -p$.

Finalement la condition s'exprime en disant que $-\frac{p}{2}$ est solution de $A(x) = 0$.

Or $A\left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p^3}{8} - \frac{pq}{2} + r$. La condition recherchée est donc : $\underline{p^3 - 4pq + 8r = 0}$

## EXERCICE 7



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

De même, $R(-1) = (-1+1)^{2n} - (1)^{2n} - 2(-1) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$ donc R est divisible par $x+1$.

(i) Pour $n = 2$, on a :

$$R(x) = (x+1)^4 - x^4 - 2x - 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - x^4 - 2x - 1 = 4x^3 + 6x^2 + 2x$$
$$= 2x(2x^2 + 3x + 1) = 4x(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Ainsi : $\frac{R(x)}{x(x+1)} = 4x + 2$ et donc le quotient est $4x + 2$.



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

Devoir numéro 20

Club de l'Excellence
Pour la promotion de l'Excellence
www.clubdelexcellence.com — (+221) 77 465 32 33 — clubexcellence2016@yahoo.com

# CORRECTION DU DEVOIR NUMÉRO 20

## EXERCICE 1

1) Soit à résoudre : $|3x-2+\sqrt{5}| \leqslant 0$ $(E_3)$

Comme toujours on a : $|3x-2+\sqrt{5}| \geqslant 0$ (7)

Et $(E_3)$ impose : $|3x-2+\sqrt{5}| \leqslant 0$ (8)

(7) et (8) donnent : $|3x-2+\sqrt{5}| = 0 \iff 3x-2+\sqrt{5}=0 \iff x=\frac{2-\sqrt{5}}{3}$

*Conclusion* : $S=\frac{2-\sqrt{5}}{3}$

2) En effet

$$|2-4x| \leqslant 3 \iff |4x-2| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant 4x-2 \leqslant 3 \iff -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}$$

*Conclusion*: $S=\left[-\frac{1}{4};\frac{5}{4}\right]$

3) En effet,

$$|4x-5| \geqslant 3 \iff 4x-5 \geqslant 3 \quad \text{ou} \quad 4x-5 \leqslant -3 \iff x \geqslant 2 \quad \text{ou} \quad x \leqslant \frac{1}{2}$$

*Conclusion* : $S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty[$

4) Rappel : Pour $u$ réel et $a$ réel positif, on a : $(|u| \leqslant a) \iff -a \leqslant u \leqslant a$

Donc cette inéquation équivaut à : $-3 \leqslant 5-4x \leqslant 3$

En ajoutant $-5$ à chacun des 3 membres : $-8 \leqslant -4x \leqslant -2$

En multipliant les 3 membres par $-1$ : $-2 \leqslant 4x \leqslant 8$

En multipliant les 3 membres par $\frac{1}{4}$ : $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$

*Conclusion* : $S=\left[\frac{1}{2};2\right]$

5) Rappel : Pour $u$ réel et $a$ réel positif, on a : $(|u| \geqslant a) \Leftrightarrow u \geqslant a$ ou $u \leqslant -a$.

L'inéquation est donc équivalente à : $(7x-9 \geqslant 5$ ou bien $7x-9 \leqslant -5)$

Soit à : $(x \geqslant \frac{16}{7}$ ou bien $x \leqslant \frac{4}{7})$.

*Conclusion* : $S = ]-\infty ; \frac{4}{7}] \cup [\frac{16}{7} ; +\infty[$

6) $|7x-9| > 0$

On a : $|7x-9| > 0 \Leftrightarrow 7x-9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{9}{7}$

*Conclusion*: $S = \mathbb{R} - \{\frac{9}{7}\}$

7) Soit à résoudre dans R, l'équation suivante : $|-x+5| \leqslant 2$

En effet, $|-x+5| \leqslant 2 \Leftrightarrow |x-5| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x-5 \leqslant 2 \Leftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 7$

*Conclusion* : $S = [3 ; 7]$

8) Soit à résoudre dans R, l'équation suivante : $|4x-1| \geqslant 4$

En effet, $|4x-1| \geqslant 4 \Leftrightarrow 4x-1 \geqslant 4$ ou $4x-1 \leqslant 4$

*Conclusion* : $S = ]-\infty ; -\frac{3}{4}] \cup [\frac{5}{4} ; +\infty[$

9) On a : $|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

*Conclusion* : $S = ]-1 ; 5[$

## EXERCICE 1

### Première partie

1) a) Soit à résoudre le système suivant par la méthode de Cramer : $\begin{cases} 4x-5y=3 \\ 3x+y=\frac{7}{20} \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4+15 = 19 \text{ et } \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ \frac{7}{20} & 1 \end{vmatrix} = 3+\frac{35}{20} = \frac{19}{4} \text{ et } \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & \frac{7}{20} \end{vmatrix} = -\frac{38}{5}$$

On en déduit : $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\frac{19}{4}}{19} = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\frac{-38}{5}}{19} = -\frac{2}{5}$

*Conclusion* : $S = \{\frac{1}{4} ; -\frac{2}{5}\}$



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

b) Soit à résoudre le système suivant : $\begin{cases} -x+2y=2 \\ x-2y=-2 \end{cases}$

On résout par la méthode de Cramer.

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2-2=0$ et $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4+4=0$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2-2=0$

*Conclusion* : **S = {infinité de solutions}**

2) a) Soit à résoudre le système suivant : $\begin{cases} \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{5}{y-3} = 3 \\ \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{y-3} = \dfrac{7}{20} \end{cases}$ (E)

On pose : $X = \dfrac{1}{x+1}$ et $Y = \dfrac{1}{y-3}$

(E) devient alors : $\begin{cases} 4X-5Y=3 \\ 3X+Y=\dfrac{7}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{1}{4} \\ Y=-\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{y-3}=-\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

*Conclusion* : $S = \left\{x = 3 ; y = \frac{1}{2}\right\}$

b) Soit à résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x^2-5\lvert y+2\rvert=3 \\ 3x^2+\lvert y+2\rvert=\dfrac{7}{20} \end{cases}$ (E)

On pose : $X = x^2$ et $Y = \lvert y+2\rvert$

(E) devient alors : $\begin{cases} 4X-5Y=3 \\ 3X+Y=\dfrac{7}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{1}{4} \\ Y=-\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{1}{4} \\ \lvert y+2\rvert=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$ impossible

*Conclusion* : **S = {∅}**

c) Soit à résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4(1-x)^2-5y=3 \\ 3(1-x)^2+y=\dfrac{7}{20} \end{cases}$ (E)

On pose : $X = (1-x)^2$ et $Y = y$

CE · ΣπS

Devoir numéro 20

I, J et H appartiennent aux plans (LMN) et (ABC) ; ces plans, qui ne sont pas parallèles, se coupent suivant une droite qui contient les points I, J et H.

## EXERCICE 7

1) On a :

$$\begin{aligned} xP(x) - P(x) &= x(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) - (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) \\ &= x^n + (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x) - (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x) - 1 \\ &= x^n - 1 \end{aligned}$$

*Conclusion* : $\underline{xP(x) - P(x) = x^n - 1}$

2) On a :

$$xP(x) - P(x) = x^n - 1 \implies (x-1)P(x) = x^n - 1 \implies P(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

3) On a :

$$P(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{\frac{a^n - b^n}{b^n}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{a^n - b^n}{a - b} \times \frac{1}{b^{n-1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-3} + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right) + 1$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= b^{n-1}(a-b)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-3} + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right) + 1\right) \\ &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

*Conclusion* : $\underline{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}$

4) C'est un théorème du cours sur les polynômes.

5) On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

On a : $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 2 = 12 - 12 = 0$ donc 2 est une racine de $f$ d'où donc l'équation $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ admet la racine $x = 2$. On utilise la méthode de Horner.

| | 1 | -3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | -2 | -2 |
| | 1 | -1 | -1 | 0 |

On a donc : $f(x) = (x-2)(x^2 - x - 1)$.

On pose $x^2 - x - 1 = 0$. On a : $\Delta = 5 > 0 \implies x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ; $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

*Conclusion* : $\underline{S = \left\{2 ; \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$

## EXERCICE 8

Si $m$ et $n$ sont tous deux pairs, alors : $(-1)^m = (-1)^{m-n} = (-1)^{m+n} = 1$ donc :



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès

CE · ΣπS

Devoir numéro 20

I, J et H appartiennent aux plans (LMN) et (ABC) ; ces plans, qui ne sont pas parallèles, se coupent suivant une droite qui contient les points I, J et H.

## EXERCICE 7

1) On a :

$$\begin{aligned} xP(x) - P(x) &= x(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) - (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1) \\ &= x^n + (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x) - (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x) - 1 \\ &= x^n - 1 \end{aligned}$$

*Conclusion* : $\underline{xP(x) - P(x) = x^n - 1}$

2) On a :

$$xP(x) - P(x) = x^n - 1 \implies (x-1)P(x) = x^n - 1 \implies P(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

3) On a :

$$P(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{\frac{a^n - b^n}{b^n}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{a^n - b^n}{a - b} \times \frac{1}{b^{n-1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-3} + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right) + 1$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= b^{n-1}(a-b)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-3} + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right) + 1\right) \\ &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

*Conclusion* : $\underline{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}$

4) C'est un théorème du cours sur les polynômes.

5) On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

On a : $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 + 2 = 12 - 12 = 0$ donc 2 est une racine de $f$ d'où donc l'équation $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ admet la racine $x = 2$. On utilise la méthode de Horner.

| | 1 | -3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | -2 | -2 |
| | 1 | -1 | -1 | 0 |

On a donc : $f(x) = (x-2)(x^2 - x - 1)$.

On pose $x^2 - x - 1 = 0$. On a : $\Delta = 5 > 0 \implies x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ; $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

*Conclusion* : $\underline{S = \left\{2 ; \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$

## EXERCICE 8

Si $m$ et $n$ sont tous deux pairs, alors : $(-1)^m = (-1)^{m-n} = (-1)^{m+n} = 1$ donc :



Thierno Korka DIALLO ((+221) 77 465 32 33)
Ingénieur électromécanicien, diplômé de l'Ecole Polytechnique de Thiès