MATHÉMATIQUES SECONDE SCIENTIFIQUE

PAPA
OUSMANE
THIAO

MATHS

CAP VERS LA RÉUSSITE

2nde S

Deuxième édition

Sénégal
L'Harmattan

@MOMAR: COLLECTION



XY-MATHS
CAP VERS LA RÉUSSITE

Mathématiques seconde scientifique

PRÉFACE

1. Parcours de l'auteur : Orienté en 2003 en classe de seconde scientifique, il fut un excellent élève et obtient le baccalauréat en 2006. Il fait sa carrière universitaire à l'Université Alioune Diop de Bambey en Maths-Physiques-Chimies-Informatiques où il obtient une licence ; il s'inscrit ensuite en formation professionnelle à l'École Supérieure Polytechnique de Dakar et obtient le Master II en Management de la Qualité de la Santé et Sécurité au travail et de l'Environnement.

Après cet excellent parcours universitaire il s'engage dans l'enseignement en 2012 comme professeur vacataire de mathématiques avec premier poste le lycée de Bambey, sorte de retour au royaume d'enfance avec certainement beaucoup d'ambition.

2. qualité professionnelles et humaines : Sa compétence, sa disponibilité et son sérieux dans le travail lui ont valu la grande estime de son administration et de ses élèves.

3. Sur le plan pédagogique : Par son humilité et son esprit d'ouverture, il a bénéficié de la franche collaboration des collègues de mathématiques au sein de leur cellule ce qui fait que :

- Le contenu est conforme au programme de seconde scientifique en vigueur au Sénégal dont il s'efforce d'atteindre les objectifs fondamentaux tant sur le plan méthodologique que sur le plan des connaissances.

- Les types d'exercices proposés sont intéressants et variés

- Ce document, « XY-MATHS », sera très utile non seulement aux élèves mais également aux professeurs.

4. Perspective : Brillant élève, brillant étudiant, l'honnêteté intellectuelle la curiosité et le goût de la recherche qui l'anime feront de lui un brillant professeur de mathématiques.

Lycée Bambey le 22 /04 /2016
Le proviseur Ndongo SENE



NDONGO SENE

AVANT-PROPOS

On s'accorde désormais sur le fait que l'élève doit être au centre du processus éducatif, mais il ne faut pas croire qu'il suffit de présenter les mathématiques, ou des situations supposées contenir des mathématiques pour susciter l'apprentissage. Une démarche didactique volontariste est nécessaire pour guider le plus grand nombre sur le chemin de la réussite.

Sans rien refuser qui soit de nature à susciter et renforcer l'intérêt de l'élève, nous pensons qu'un apprentissage solide des mathématiques nécessite une construction intérieure des savoirs, qu'on ne peut pas obtenir sans effort, ni patience : *« il faut une longue et calme fréquentation des concepts pour réussir leur appropriation. »* (F. Reynes). Une première étape dans ce processus d'appropriation doit être une étape de construction du sens, qui nécessite d'abord une maitrise du langage et des techniques de base, mais aussi un développement et une canalisation de l'activité mentale de l'élève. Le monde Mathématique de chaque élève s'élabore en grande partie à travers une pratique permanente de calcul, d'argumentations, de petits raisonnements et de démonstrations.

Pleinement conscients de ce que de nombreux élèves parviennent désormais en classe de seconde Scientifique sans être suffisamment armés pour mener à bien ce processus d'apprentissage, nous sommes néanmoins convaincus que la diminution des exigences ne saurait être une solution pour l'avenir.

Pour atteindre ces exigences, nous avons construit chacun des chapitres selon une structure simple.

- **Un cours** clair et détaillé où l'essentiel est donné (définition, remarques, théorèmes, propriétés)
- A la fin de chaque sous-titre du cours ; **des exercices d'applications** résolus pour appliquer le cours.
- **Une série d'exercices** est proposée pour chaque cours pour mettre en application les méthodes étudiées.
- **Exercices corrigés** sur chacune des séries : exercices - types qu'il faut savoir résoudre pour aller plus loin**.**

- **Des Devoirs à la maison :** des exercices classiques et de recherches permettant d'aller à la frontière du programme. Ils mettent les élèves dans une situation de chercheur et de rédacteur de solutions.

Nous espérons que cet ouvrage, aidera de manière efficace les élèves et les professeurs dans leurs tâches quotidiennes. Nous remercions par avance les utilisateurs de nous faire part de leurs remarques, critiques et suggestions dont nous tiendrons le plus grand compte lors de prochaines développements de ce manuel **XY-MATHS.**

REMERCIEMENT

Je remercie chaleureusement tous les collègues de la cellule d'animation pédagogique de mathématiques du lycée de Bambey qui ont relu, posé leurs questions, soulevé des remarques constructives. Ils ont permis l'enrichissement et l'amélioration de ce manuel ; nommément :

M. Issa SECK professeur de mathématiques ; coordonnateur de la cellule d'animation pédagogique de mathématiques du lycée de Bambey

M. Abdou Karime DIENE ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

M. Ibrahima FALL ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

M. Assane NDIAYE ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

M. Ibrahima MBAYE ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

M. Djibril DIAGNE ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

Maimouna KA Mme SY ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey

Mme. Ndella Ndiaye SENGHOR ; professeur de mathématiques au lycée de Bambey,

Un immense merci à **M. Ndongo SENE** proviseur du lycée de Bambey et tous les membres de son équipe administrative de leur soutien indéfectible accordé, à **M. IBRAHIMA SYLLA** professeur de français au lycée de Bambey et à **M. LATYR FAYE** professeur de mathématiques au collège d'enseignement moyen Ousmane Soce DIOP de Dieuppeul pour la relecture pertinente, constructive et du recadrage incontournable apportés à ce présent manuel .

Alphabet grec pour l'écriture scientifique			
lettre grecque majuscule	lettre grecque minuscule		Lettre latine équivalente
Α	α	alpha	a
Β	β	beta	b
Γ	γ	gamma	g
Δ	δ	delta	d
Ε	ε	epsilon	e
Ζ	ζ	zêta	z
Η	η	êta	h
Θ	θ	thêta	q
Ι	ι	iota	i
Κ	κ	kappa	k
Λ	λ	lambda	l
Μ	μ	mu	m
Ν	ν	nu	n
Χ	χ	xi ou ksi	c
Ο	ο	omicron	o
Π	π	pi	p
Ρ	ρ	rhô	r
Σ	σ	sigma	s
Τ	τ	tau	t
Υ	υ	upsilon	u
Φ	φ	phi	f
Ξ	ξ	chi ou khi	x
Ψ	ψ	psi	y
Ω	ω	omega	w

HISTORIQUE DES SYMBOLES MATHÉMATIQUES

- **Plus et moins : (+ ; −) WIDMANN (Allemagne), 1489 dans un** traité d'arithmétique commerciale.
- **Multiplication : (× et .)** William OUGHTRED (1574-1660, Angleterre), en 1631 pour × et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716, Allemagne), en 1698 pour le point (.).
- **Exposants :** Nicolas CHUQUET (15ème siècle), (mais généralisé bien après)
- **Plus-ou-moins (±)** a été employé par William Oughtred (1574-1660) dans Clavis Mathematicae, édité en 1631.
- **Le symbole de produit (∏)** a été introduit par René Descartes, selon Gullberg mais Cajori indique que ce symbole a été présenté par Gauss en 1812.
- **Racine carrée** (√) par Christophe RUDOLFF (Allemagne), en 1525.
- **Addition ∑** Le symbole d'addition (∑) a été employé la première fois par Leonhard Euler (1707-1783) en 1755 :
- **×, Pour le produit de vecteurs** a été employé en 1902 dans Vector Analysis de J.W. GIBBS par E.B. Wilson.
- **(.), Le point pour le produit scalaire** a été employé en 1902 dans Vector Analysis de J.W. GIBBS par E.B. Wilson.
- **utilisation des lettres.** Maurolico, dit Francesco de Messina (début 16e) et François Viète (1540-1603, France) en sont les principaux acteurs.
- Albert GIRARD (1595-1632) utilise les notations **"sin, cos et tan"** en 1626, dans Tables de sinus, tangentes et sécantes. Mais c'est l'Allemand REGIOMONTANUS (15ème siècle), qui est le créateur du mot sinus dans ses travaux sur la trigonométrie (De Triangulis omnimodus en 1464, publié en 1533
- **Les parenthèses (.)** Raphaël BOMBELLI (Bologne, 1522-1572)
- **Égalité (=).** Robert RECORDE (1510-1558, Angleterre), en 1557.

❖ **< , > inférieur stricte, supérieur stricte.** Les symboles < et > apparaissent dans Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas de Thomas Harriot (1560-1621), publié de façon posthume en 1631 :

"Signum majoritatis ut a > b significet a majorem quam b" and "Signum minoritatis ut a < b significet a minorem quam b."

❖ **≤ ≥ , inférieur ou égal, supérieur ou égal.**

≦ ≧ **Pierre BOUGUER** (1698 -1758) utilise ces symboles en 1734.

En 1670, John WALLIS utilise des symboles similaires avec une seule barre horizontale. Le symbole actuel est sans doute le fruit d'une évolution typographique plus moderne.

❖ **≠, différent de.** EULER (1707 - 1783) utilise une graphie proche de celle usuelle (barre verticale pour EULER).

❖ **≈ presque égal.** Ce symbole a été employé en 1875 par Anton Steinhauser dans der Mathematik de Lehrbuch,« Algèbre ». Le même symbole a été employé en 1832 par Wolfgang Bolyai pour signifier l'égalité absolue.

❖ **symboles intersection et union : ∩ et ∪ .** Les symboles ∩ and ∪ sont utilisés pour la première fois par le mathématicien allemand GRASSMANN Hermann (1809-1877) dans Die Ausdehnungslehre von (1844) mais il les utilise comme symbole d'opération, pas nécessairement pour désigner l'union et l'intersection. Puis c'est le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) qui les utilise à cet usage en 1888 dans Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann ([Cajo] page 298).

❖ **symbole "il existe" : ∃ C'est le mathématicien italien PEANO Giuseppe** (1858-1932) qui utilise le symbole ∃ dans Formulaire de mathematiqués, en 1897.

❖ **symbole "appartient à" : ∈. Le mathématicien italien PEANO Giuseppe** (1858-1932) utilise le symbole ε (epsilon) dans ses Arithmetices prinicipia nova methodo exposita, en 1889 et dans Formulaire de mathematiqués, en 1897, pour désigner l'appartenance à un ensemble. Cela viendrait en fait de la première lettre du mot grec qui signifie est. Le symbole ∈ pour désigner l'appartenance apparaitrait dans le traité du mathématicien anglais RUSSELL Bertrand Arthur William (1872-1970), Principles of Mathematics en 1903.

SOMMAIRE

PRÉFACE 7

AVANT-PROPOS 9

REMERCIEMENT 11

HISTORIQUE DES SYMBOLES MATHÉMATIQUES 13

SOMMAIRE 17

CALCUL DANS IR 19

CALCUL VECTORIEL 43

INTERVALLE ET CALCUL APPROCHÉ 73

CALCUL VECTORIEL 93

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ 119

ANGLES ORIENTÉS - TRIGONOMÉTRIE 161

POLYNÔMES – FRACTIONS RATIONNELLES 179

PRODUIT SCALAIRE 207

FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE 233

REPÈRAGE CARTÉSIEN 267

CALCUL DANS IR

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Connaître la définition de valeur absolue.
- Savoir interpréter les solutions des équations et inéquations
- Savoir utiliser les radicaux dans des situations diverses

PLAN DU COURS

1. PUISSANCE DANS IR 21
1.1. ACTIVITÉ 21
1.2. Définition et propriétés 21
1.2.1. Définition 21
1.2.2. Propriétés 21
1.3. NOTATION SCIENTIFIQUE 23
1.4. RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES IDENTITÉS REMARQUABLES 23
1.4.1. RAPPELS 23
1.4.2. COMPLÉMENTS 23
2. Ordre et opérations dans IR 24
3. CALCUL AVEC LES RADICAUX 26
3.1. DÉFINITION 26
3.2. PROPRIÉTÉS 27
4. VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL 27
4.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS 27
4.1.1. Définition 27
4.1.2. Propriétés 29
4.2. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATION COMPORTANT UNE VALEUR ABSOLUE 31

5. DISTANCE SUR IR 32
5.1. DROITE RÉELLE (droite Numérique) 32
5.2. DISTANCE 33
5.2.1. Définition 33
6. PARTIE ENTIÈRE 33
6.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ 33
6.1.1. Définition 33
6.1.2. PROPRIÉTÉS 33

1. PUISSANCE DANS IR

1.1. ACTIVITÉ

1) avec une calculatrice calculer et compléter le tableau suivant

n	a	$\underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a}_{n\ fois}$	a^n
2	3	$3 \times 3 = \cdots$	$3^2 = \cdots$
5	4	$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = \cdots$	$4^5 = \cdots$
3	2.5	$2.5 \times 2.5 \times 2.5 = \cdots$	$2.5^3 = \cdots$
4	-5	$(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = \cdots$	$(-5)^4 = \cdots$

2) comparer les résultats trouvés de la colonne trois et de la colonne quatre puis conclure.

1.2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1.2.1. Définition

Soit a un nombre réel ($a \in IR$) et n un entier naturel non nul ($n \in IN^*$)

On appelle a exposant n noté a^n le réel défini par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a}_{n\ facteurs}$$

Exemples

$4{,}5^3 = 4{,}5 \times 4{,}5 \times 4{,}5$

$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

1.2.2. Propriétés

Pour tous nombres réels a et b non nuls ($a \in IR^*$ et $b \in IR^*$) et pour tous nombres entiers relatifs m et p ($m, p \in Z$) on a les propriétés suivantes :

- $a^m \times a^p = a^{m+p}$
- $(a^m)^p = a^{m \times p}$
- $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$; $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$

N.B : conventionnellement on a pour tout réel a :

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ avec $a \neq 0$

Remarque :

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n \text{ si n est pair} \\ -a^n \text{ si n est impair} \end{cases}$$

Exemples

$(-2)^4 = 2^4$

$(-5)^3 = -5^3$

Exercice d'application

Simplifier les expressions A et B suivantes

$A = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4}$ et $B = \frac{(-3)^4 \times (-27)^2}{(-8)^3 \times (2^4)^{-2}}$

Solution Succincte

$\mathbf{A = \frac{3^{20}}{2^{17}}}$; $\mathbf{B = -\frac{3^{10}}{2}}$

1.3. NOTATION SCIENTIFIQUE

DÉFINITION

La notation scientifique c'est l'écriture sous la forme du produit d'un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et d'une puissance de 10 d'exposant un entier relatif.

Exemples :

$41000 = 4{,}110^4$

$325{,}75\ 10^{-5} = 3{,}2575\ 10^{-2}$

$0.00537 = 5.37\ 10^{-3}$

1.4. RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES IDENTITÉS REMARQUABLES

1.4.1. RAPPELS

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.4.2. COMPLÉMENTS

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Exercice d'application

1) Développer et simplifier les expressions A et B suivantes

$A = (x+1)^3 - x(x-2)^2$ $B = (3x+1)^3 - (2x-1)^3$

2) Factoriser les expressions C et D suivantes :

$C = x^3 - 27 + 2(x-3)(x+1)$ $D = (x-2)^3 - 8(x+1)^3$

Solution Succincte

1) Développons et simplifions les expressions A et B

$A = 7x^2 - x + 1$ $B = 19x^2 + 39x^2 + 3x + 2$

2) Factorisons les expressions C et D

$C = (x-3)(x^2 + 5x + 11)$ $D = (-x-4)(7x^2 + 4)$

2. ORDRE ET OPÉRATIONS DANS IR

PROPRIÉTÉS

Soient a et b deux réels $(a ; b \in IR)$ on a les propriétés suivantes :

- **Si $a \leq b$ pour tout réel c ; $a + c \leq b + c$**

Ajouter (ou soustraire) un nombre ne change pas l'ordre.

- **Si $a \leq b$ pour tout réel $c > 0$; $a \times c \leq b \times c$**

Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif ne change pas l'ordre

- **Si $a \leq b$ pour tout réel $c < 0$; $a \times c \geq b \times c$**

Multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif change l'ordre.

- **Pour tous a , b , c et d des réels positifs**

Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$

- **Pour tous réels a et b positifs on a :**
- **$a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$**

Le passage au carré conserve l'ordre pour des nombres positifs

- **$a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$**

Le passage à la racine carré conserve l'ordre.

- **Pour tous réels a et b négatifs on a : $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$**

Le passage au carré inverse l'ordre pour des nombres négatifs.

- **soient a et b deux réels non nul de même signe**

$a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Le passage à l'inverse change l'ordre pour des nombres strictement positifs ou négatifs

N.B : Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.

Si $a - b < 0$ alors $a < b$

Si $a - b = 0$ alors $a = b$

Si $a - b > 0$ alors $a > b$

Exercice d'application

1. Soit a, b et c trois réels ; Justifier que :

Si $a < b$ et si $b < c$ alors $a < c$

2. Soit a et b deux réels positifs Prouver que Si $a < b$ alors :

i. $a^2 < b^2$

ii. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

3. Soit a un réel positif démonter que :

Si $a > 1$ alors $a < a^2 < a^3$

Si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a$

Solution intégrale

1. Soit a, b et c trois réels ; Justifions que si $a < b$ et si $b < c$ alors $a < c$

On a $a < b$ alors $a - b < 0$ et

$b < c$ alors $b - c < 0$ ainsi $(a - b) + (b - c) < 0 \Leftrightarrow$

$a - c < 0$ d'où $a < c$

2. Soit a et b deux réels positifs Prouvons que :

❖ Si $a < b$ alors $a^2 < b^2$

On a $a < b$ alors $a - b < 0$

et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ or a et b deux réels positifs ainsi

$\begin{cases} a - b < 0 \\ a + b > 0 \end{cases}$ donc

$(a - b)(a + b) < 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 0$ d'où $a^2 < b^2$

❖ Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

On a $a < b$ alors $a - b < 0$

et $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ or a et b deux réels positifs

$\begin{cases} a - b < 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0 \end{cases}$ donc $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ d'où $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

❖ Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

On a $a < b$ alors $b - a > 0$

et $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$ or a et b deux réels positifs

$\begin{cases} b - a > 0 \\ ab > 0 \end{cases}$ donc $\frac{b - a}{ab} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$ d'où $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

3. Soit a un réel positif démontrons que :

❖ Si $a > 1$ alors $a < a^2 < a^3$

On a $a > 1$ alors $1 - a < 0$ et $a - a^2 = a(1 - a)$ or

$\begin{cases} a > 0 \\ 1 - a < 0 \end{cases}$ donc $a(1 - a) < 0 \Leftrightarrow a - a^2 < 0$ d'où $a < a^2$ **1**

$a^2 - a^3 = a^2(1 - a)$ or

$\begin{cases} a^2 > 0 \\ 1 - a < 0 \end{cases}$ donc $a^2(1 - a) < 0 \Leftrightarrow a^2 - a^3 < 0$ d'où $a^2 < a^3$ **2**

De **1** et **2** on a : $a < a^2 < a^3$

❖ Si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a$

On a $a < 1$ alors $a - 1 < 0$ et $a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$ or

$\begin{cases} a^2 > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$ donc $a^2(a - 1) < 0 \Leftrightarrow a^3 - a^2 < 0$ d'où $a^3 < a^2$ **1**

et $a^2 - a = a(a - 1)$ or $\begin{cases} a > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases}$

donc $a(a - 1) < 0 \Leftrightarrow a^2 - a < 0$ d'où $a^2 < a$ **2**

De **1** et **2** on a : $a^3 < a^2 < a$

3. CALCUL AVEC LES RADICAUX

3.1. DÉFINITION

Soit a un nombre réel positif ou nul ($a \in IR_+$), on appelle racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, le réel positif ou nul dont le carré est égal à a.

On a : $(\sqrt{a})^2 = a$

3.2. PROPRIÉTÉS

- **soient a et b deux réels positifs**

On a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ **et** $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ **avec b un réel non nul**

- **soient a un nombre réel positif et n un entier naturel**

On a : $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$

- **soient a un nombre réel et b un réel positif.**

On a : $\sqrt{a^2} = |a|$; $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$

- **Pour tout nombre réel positif a et toute variable x on a :**

$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ **ou** $x = -\sqrt{a}$

Exercice d'application

On donne $A = \sqrt{\frac{3^5 \times 0{,}00001}{2 \times 15^3}}$ $B = \sqrt{\frac{10^2 \times 3^2}{16 \times 5^2}} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}$

Ecrire A et B sans symbole du radical

Solution Succincte

Ecrivons A et B sans symbole du radical

$A = \frac{3}{2^3 \times 5^4}$ $B = \frac{3}{2} \div 2^2 \times 3^4$

4. VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

4.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

4.1.1. Définition

Soit un nombre réel x ; on appelle valeur absolue de x le nombre réel positif noté | x | qui est égal au plus grand nombre entre x et − x

On a ainsi :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exemples

$|-3| = -(-3) = 3$; $|7| = 7$

Exercice d'application

Ecrire sans le symbole de la valeur absolue les réels et expressions suivants :

$|-5|\ ;\ |2|\ ;\ |1-\sqrt{2}|\ ;\ |3-\sqrt{8}|\ ;\ |2x-1|\ ;\ |-3x-5|$

Solution Succincte

Ecrivons sans le symbole de la valeur absolue les réels et expressions

- $\mathbf{|-5| = 5}$
- $|2| = 2$
- $|1-\sqrt{2}|$

Etudions d'abord le signe de la quantité $1-\sqrt{2}$

On a $\begin{cases} 1^2 = 1 \\ (\sqrt{2})^2 = 2 \end{cases}$; $1 < 2 \Leftrightarrow 1^2 < (\sqrt{2})^2$ d'où $1^2 - (\sqrt{2})^2 < 0$

Alors $1-\sqrt{2} < 0$ donc

$|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$

- $|3-\sqrt{8}|$

Etudions d'abord le signe de la quantité $3-\sqrt{8}$

On a $\begin{cases} 3^2 = 9 \\ (\sqrt{8})^2 = 8 \end{cases}$; $9 > 8$

$\Leftrightarrow 3^2 > (\sqrt{8})^2$ d'où $3^2 - (\sqrt{8})^2 > 0$ alors $3-\sqrt{8} > 0$ donc

$\mathbf{|3-\sqrt{8}| = 3-\sqrt{8}}$

- $|2x-1|$

Elaborons le tableau de signe de l'expression $2x-1$

Posons $2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

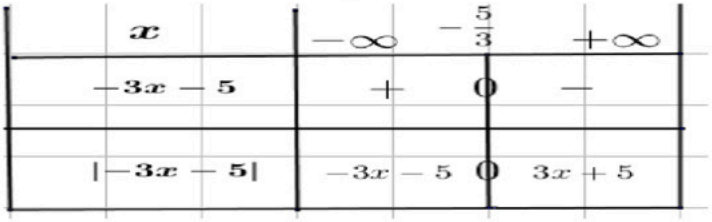
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$\|2x-1\|$	$-2x+1$		0		$2x-1$

Ainsi ; $|2x-1| = \begin{cases} -2x+1 \text{ si } x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\\ 0 \text{ si } x = \frac{1}{2} \\ 2x-1 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[\end{cases}$

- $|-3x-5|$

Élaborons le tableau de signe de l'expression $-3x-5$

Posons $-3x-5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$



Ainsi ; $|-3x-5| = \begin{cases} -3x-5 \text{ si } x \in \left]-\infty ; -\frac{5}{3}\right[\\ 0 \quad \text{si} \quad x = -\frac{5}{3} \\ 3x+5 \text{ si } x \in \left]-\frac{5}{3} ; +\infty\right[\end{cases}$

4.1.2. Propriétés

Pour tous réels a , b et n un entier naturel on a les propriétés suivantes :

- $|a| \geq 0$ **(La valeur absolue d'un réel est toujours positive ou nulle)**
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a| = |-a|$
- $|a^2| = |a|^2 = a^2$
- $|a^n| = |a|^n$ **, avec a et n non simultanément nuls**
- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ **ou** $a = -b$
- $|ab| = |a||b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ **(avec** $b \neq 0$**)**
- $|a-b| = |b-a|$
- **Pour tout réel a positif et x une variable on a :**

- $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a$ et $x \geq -a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

Inégalités triangulaire

i. $|x+y| \leq |x| + |y|$

ii. $|x-y| \leq |x| + |y|$

iii. $|(|x|-|y|)| \leq |x-y|$

Preuves Inégalités triangulaire

Prouvons les inégalités triangulaires

- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Méthode 1

$\forall$ x et y $\in$ IR on a :

$x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$

$y \leq |y|$ et $-y \leq |y|$; effectuons somme membre en membre

$x+y \leq |x| + |y|$ et $-x-y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow -(x+y) \leq |x| + |y|$

Ainsi $x+y \leq |x| + |y|$ et $-(x+y) \leq |x| + |y|$

alors $|x + y| \leq |x| + |y|$

Méthode 2

Elevons au carré les expressions $|x + y|$ et $|x| + |y|$

$(|x + y|)^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = x^2 + 2|xy| + y^2$

Or $\forall (x;y) \in IR^2$ $xy \leq |xy|$

$\Leftrightarrow 2xy \leq 2|xy|$ $x^2 + 2xy + y^2$

$\leq x^2 + 2|xy| + y^2 \Leftrightarrow (|x + y|)^2 \leq (|x| + |y|)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{|x + y|^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$ d'où $|x + y| \leq |x| + |y|$;

- $|x - y| \leq |x| + |y|$

$\forall (x;y) \in IR^2$ on a : $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$

$-y \leq |y|$ et $y \leq |y|$; effectuons la somme membre en membre

$x - y \leq |x| + |y|$ et $-x + y \leq |x| + |y| \Leftrightarrow -(x-y) \leq |x| + |y|$

Ainsi $x - y \leq |x| + |y|$ et $-(x-y) \leq |x| + |y|$

Alors $|x - y| \leq |x| + |y|$

- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

$\forall (x;y) \in IR^2$ on a :

$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Leftrightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$

$|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| \Leftrightarrow |y| - |x| \leq |y-x|$

$\Leftrightarrow -(|x| - |y|) \leq |y-x|$ Or $|y-x| = |x-y|$ ainsi

$-(|x| - |y|) \leq |x-y|$

on a ainsi $||x| - |y|| \leq |x-y|$

4.2. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATION COMPORTANT UNE VALEUR ABSOLUE

Exercice 1

Résoudre dans IR les équations suivantes

a) $|x| = 2$ b) $|-2x+5| = 5$

c) $|x-3| = 2x-4$ d) $|2x+1| = -1$

e) $|3x-2| - 2|x-2| = 0$ f) $|3x-1| = -2x+1$

Solution Succincte

a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$; $\mathbf{s_{IR} = \{-2\,;2\}}$

b) $|-2x+5| = 5$; $s_{IR} = \{0\,;5\}$

c) $|x-3| = 2x-4$

L'équation admet de solution si et seulement $2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Pour tout $x \in [2;+\infty[$

$|x-3| = 2x-4 \Leftrightarrow$

$x-3 = 2x-4$ ou $x-3 = -2x+4 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{7}{3}$

1 n'appartient pas à $[2\,;+\infty[$; $\mathbf{s_{IR} = \left\{\frac{7}{3}\right\}}$

d) $|2x+1| = -1$ impossible $\mathbf{s_{IR} = \emptyset}$

e) $|3x-2| - 2|x-2| = 0 \Leftrightarrow |3x-2| = 2|x-2|$

$\Leftrightarrow 3x-2 = 2(x-2)$ ou $3x-2 = -2(x-2)$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{6}{5}$ $\mathbf{s_{IR} = \left\{-2\,;\frac{6}{5}\right\}}$

f) $|3x-4| = -2x+1$

L'équation admet de solution si et seulement $-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$

$|3x-1| = -2x+1 \Leftrightarrow$

$3x-1 = -2x+1$ ou $3x-1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ ou $x = 0$

$\frac{2}{5}$ appartient à $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$

0 appartient à $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ $\mathbf{s_{IR} = \left\{0\,;\frac{2}{5}\right\}}$

Exercice 2

Résoudre dans IR les inéquations suivantes

a) $|x| \leq 3$ b) $|6x-1| > 2$

c) $|x-3| < -5$

Solution Succincte

a) $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ $\mathbf{S_{IR} = [-3\,;3]}$

b) $|6x-1| > 2 \Leftrightarrow 6x-1 > 2$ ou $6x-1 < -2$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ ou $x < \frac{-1}{6}$ $\mathbf{S_{IR} = \left]-\infty\,;\frac{-1}{6}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[}$

c) $|x-3| < -5$ impossible $\mathbf{S_{IR} = \emptyset}$

IMPORTANT :

Pour résoudre une inéquation du type $|ax+b| < c$ on procède comme suite

- **Si $c \leq 0$, l'inéquation n'admet pas solution ; $S_{IR} = \emptyset$**
- **Si $c > 0$, on résout $-c < ax+b < c$**

Pour résoudre une inéquation du type $|ax+b| > c$ on procède comme suite

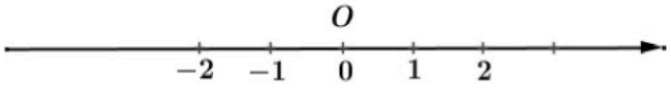
- **Si $c < 0$, l'inéquation est vérifiée pour tout x de IR ; $S_{IR} = IR$**
- **Si $c = 0$, l'inéquation est vérifiée pour tout x de IR sauf pour $x = \frac{-b}{a}$; $S_{IR} = IR / \left\{\frac{-b}{a}\right\}$**
- **Si $c > 0$, on résout les inéquations $ax+b < -c$ ou $ax+b > c$**

5. DISTANCE SUR IR

5.1. DROITE RÉELLE (DROITE NUMÉRIQUE)

Une droite réelle est une droite caractérisée par :

- **Une origine O d'abscisse 0**
- **Un sens positif indiqué par une flèche**
- **Une unité de mesure**



5.2. DISTANCE

5.2.1. Définition

Soit x et y deux réels quelconque, on appelle distance de x à y notée $d(x;y)$ le réel positif ou nul définie par : $d(x;y) = |x - y|$

PROPRIÉTÉS

Soit x ; y et z trois réels quelconques on a les propriétés suivantes :

- $d(x;y) \geq 0$
- $d(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x;y) = d(y;x)$
- $d(x;y) \leq d(x;z) + d(z;y)$

6. PARTIE ENTIÈRE

6.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

6.1.1. Définition

La partie entière d'un réel, notée $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x autrement c'est l'entier relatif noté $E(x)$ vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$

N.B : $x \in Z \Leftrightarrow E(x) = x$

Exemple

$E(3,2) = 3$ $\quad$ $E(-4,1) = -5$

$E\left(\frac{5}{3}\right) = 1$ $\quad$ $E(\pi) = 3$

6.1.2. PROPRIÉTÉS

- **n est la partie entière de x signifie que : n est un entier et $n \leq x < n + 1$ on note $E(x) = n$**
- **$E(x + 1) = E(x) + 1$**
- **$x - 1 \leq E(x) < x$**

SÉRIE D'EXERCICES

THÈMES : CALCUL DANS IR

EXERCICE 1

1) Écrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers :

$A = \frac{(0,6)^2\times12^5\times54^3}{9^2 5^3 (0,8)^3 (0,4)^4}$; $B = \frac{10^2\times3^2}{8\times5^2} \div \sqrt{\frac{2^5\times3^9}{6}}$; $c = \frac{(0,009)^{-3}\times(0.016)^2\times250}{(0,00075)^{-1}\times(810)^3\times30}$

2) soit a, b et c trois nombres réels non nuls, Écrire les nombres suivants sous la forme $a^m b^n c^p$ ou m, n et p sont des entiers relatifs

$D = \left(\frac{b}{ac}\right)^{-1} \times \left(\frac{c}{ab}\right)^{-2} \times \left(\frac{a}{bc}\right)^{-3}$ $E = \left(\frac{b}{ac}\right)^{-1} \times \left(\frac{c^2}{a^3 b}\right)^{2} \times \left(\frac{a^4}{bc^2}\right)^{-3}$

$F = \frac{(a^2c)^{-4} \times (-b^2c)^5 \times (a^3bc^{-1})^{-2}}{(-a^2b^{-3}c)^3(-b^4)(a^{-5}c)^2}$

3) soit $n \in N$; simplifier l'expression $\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n+1})^3}$ à l'aide de puissance de 2 et de 3

EXERCICE 2

1) Factoriser les expressions suivantes

a) $a^2 b^2 - 1 + a^2 - b^2$

b) $y^2 - x^2 + 2x - 1$

c) $a^2xy + aby^2 + b^2xy + abx^2$

d) $a^3 + 8 - 2a^2 + 4a$

e) $(x+y)^3 - x^3 - y^3$

f) $3a^2 + 3b^2 - 12a^2 - 6ab$

2) Démontrer les égalités suivantes

$(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$(ax+by)^2 - (ay+bx)^2 = (a^2-b^2)(x^2-y^2)$

$(a+b+c)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$

EXERCICE 3

Soient x et y deux nombres entiers réels strictement positifs ; On donne : $a = x + \frac{1}{x}$; $b = y + \frac{1}{y}$ et $c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

1) Calculer a^2 puis en déduire que: $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

2) Calculer b^2 , c^2 et abc Déduisez que : $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$

3) Montrer que : $a \geq 2$; $b \geq 2$; $c \geq 2$

4) Déduire que $a + b + c \geq 6$ et $abc \geq 8$

5) Est-il vrai que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$?

EXERCICE 4

Soient a , b , c et d quatre réels appartenant à l'intervalle] 0 ; 1]

1. Démontrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$ En déduire que :

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \geq 4$

2. Démontrer que : $(ab - 1)(ac - 1)(bc - 1) \leq 0$

En déduire que : $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$

EXERCICE 5 Soient a , b et c

1) Développer $(a + b + c)^2$

2) Prouver que si $a + b + c = 0$ alors

$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$

3) On suppose que a , b et c sont non nuls ;

Montrer que si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ alors $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

4) Pour $ab + bc + ca = 0$ calculer la quantité S telle que :

$S = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

EXERCICE 6

1. Etudier le signe, puis calculer les carrés des réels suivants :

$X = \sqrt{5} - \sqrt{6}$; $Y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $Z = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

En déduire une écriture s'simplifiée des nombres :

$A = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$; $B = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ et $C = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$

2. Ecrire le plus simplement possible les nombres suivants :

$G = \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ et $H = \frac{\sqrt{72} - \sqrt{18} + \sqrt{27} - \sqrt{75}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

EXERCICE 7 (corrigé)

soit a et b deux réels strictement positifs ; on considère A et B définis par :

$A = a^2\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{8} + a^2\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{8}$

$B = \frac{1}{b^2}\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} + \frac{1}{b^2}\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$

1. Montrer que $A = 2a^2$ et $B = \frac{2\sqrt{3}}{b^2}$

2. Montrer que $A \times B = 4\sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2$ et $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{3}}{3}(ab)^2$

EXERCICE 8

1. a) Montrer que : $5 - 2\sqrt{5} = \sqrt{45 - 20\sqrt{5}}$

b) Déterminer le nombre positif X tel que

$X^2 = (5 - 2\sqrt{5})(85 - 38\sqrt{5})$

2. Mettre les nombres suivants sous la forme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ou $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ avec x et y $\in$ IR_+; $\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$; $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ et $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$

3. En déduire la valeur de : $Y = \frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{30}}} - \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} - \frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$

EXERCICE 9

1. Soit $A = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

Calculer A^2 en déduire la valeur de A

2. Le nombre noté $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or.

i) Vérifier les égalités suivantes :

$\emptyset^2 = \emptyset + 1$; $\frac{1}{\emptyset} = \emptyset - 1$; $\emptyset^3 = 2\emptyset + 1$

ii) Montrer ainsi que $\frac{\sqrt{\emptyset}}{\sqrt{\emptyset-1}} + \frac{\sqrt{\emptyset-1}}{\sqrt{\emptyset}} = \sqrt{5}$

EXERCICE 10 On donne les quatre expressions suivantes :

$A = \sqrt{a + \sqrt{b}}$; $B = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

$C = \sqrt{a - \sqrt{b}}$; $D = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

1) Vérifier que $A = B$ et $C = D$

2) On suppose que a et b sont deux rationnels et que $a^2 - b = c^2$ ou c^2 est un rationnel positif

Montrer que les expressions A et C peuvent s'écrire sous la forme :

$A = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$ et $B = \sqrt{X} - \sqrt{Y}$

3) en déduire un s'simplification $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

EXERCICE 11 (corrigé)

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs tels que $x < y$

On pose $a = \frac{x+y}{2}$; $g = \sqrt{xy}$ et $h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

1) Démontrer que : $x < h$ et $a < y$

2) Démontrer que : $g < a$

3) prouver que : $g^2 = ah$ puis déduire : $h < g$

EXERCICE 12 (corrigé)

Soient 4 entiers naturels consécutifs $n, n+1, n+2, n+3$ (avec $n > 0$)

1) Démontrer que $(n+1)(n+2) = n(n+3) + 2$

2) On pose $(n+1)(n+2) = a$

Exprimer en fonction de a le produit $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$

3) En déduire que $p + 1$ est le carré d'un entier.

EXERCICE 13

1) On donne les expressions A ; B et C suivantes :

$A = \frac{1}{1+\frac{a}{b+c}}$; $B = \frac{1}{1+\frac{b}{c+a}}$ et $C = \frac{1}{1+\frac{c}{a+b}}$

Calculer la somme $X = A + B + C$

2) On donne les expressions suivantes : $A = \frac{x}{t+z}$; $B = \frac{t}{z+x}$ et $C = \frac{z}{x+t}$

Calculer les expressions : $I = \frac{x^2}{A(1-BC)}$; $Y = \frac{t^2}{B(1-CA)}$ et $K = \frac{z^2}{C(1-AB)}$

EXERCICE 14

1. Soit n un entier naturel ; rendre rationnel le dénominateur des expressions suivantes : $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $B = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ et $C = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

2. En utilisant la question 1, simplifier le nombre :

$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

3. Déduire la valeur de la somme suivante $\sum_{n=0}^{99}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

4. Soit x un nombre réel

a) Prouver l'égalité : $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

b) En déduire la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ $B=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$

EXERCICE 15

1. Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

a. $|2x+7|=4$ b. $|x+3|-|1-x|=0$ c. $|x+1|=2x-1$ d. $|2x-1|\leq 2$

2. Résoudre dans IR les équations suivantes

$|x+1|+|3-x|=4$ $E(|x-3|)=4$

$\sqrt{x^2+2x+1}=2x+3$ $|-3x+3|<4$

3. Soit l'expression ; $f(x)=|x-2|+|-3x+9|$

a) Écrire f(x) sans les valeurs absolues

b) En déduire la résolution de $f(x)=2$

EXERCICE 16

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

1°) $|x-1|=|x-3|$ 2°) $|3x+1|>-4$. 3°) $|-4x-2|\leq 3$

4°) $|5x-3|\leq -2$

5°) $|2x-3|=5$ 6°) $|-3x+2|=5x-2$ 7°) $|-x+6|+|3x-2|\leq 3$

8°) $|5x+7|-|4x-1|=x+5$ 9°) $|14x-18|-|-7x+9|=-4$.

10°) $|2x-1|+|3x-1|<4$.

EXERCICE 17

Soit $0\leq 0{,}1<1$; $-2\leq -1<0$;

$0\leq 0{,}1<1$; $-4\leq -3.4<-3$; $1\leq\sqrt{2}<2$

1. Déterminer $E(0{,}1)$; $E(-1)$; $E(-3{,}4)$; $E(\sqrt{2})$

2. Démontrer que : $E(x+1)=E(x)+1$

3. Construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) $f(x)=E(x)$ $x\in[-3\,;\,3]$

b) $g(x)=E\left(\frac{1}{2}x\right)$ $x\in[-8\,;\,8]$

EXERCICE 18 Soit l'expression définie par $f(x) = x - E(x)$

1) Calculer les images par f des nombres réels suivants : $2{,}7\ ;\ 4\ ;\ -3\ ;\ -7{,}8$.

2) a) Montrer que $E(x+2) = E(x) + 2$.

b) En déduire $f(x+2)$ en fonction de $f(x)$.

3) Représenter f dans un repère orthonormé pour x élément de

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

Thème : Calcul dans R

EXERCICE 17

$$A = a^2\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{8} + a^2\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{8}$$

$$B = \frac{1}{b^2}\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} + \frac{1}{b^2}\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$$

1) Montrons que $A = 2a^2$ et $B = \frac{2\sqrt{3}}{b^2}$

$$A = a^2\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{8} + a^2\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{8}$$

$$A = \frac{a^2}{8}\left((\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2\right)$$

$$A = \frac{a^2}{8}(5+2\sqrt{15}+3+5-2\sqrt{15}+3)$$

$$A = \frac{a^2}{8}(16) = 2a^2 \qquad \mathbf{A = 2a^2}$$

$$B = \frac{1}{b^2}\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} + \frac{1}{b^2}\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$$

$$B = \frac{1}{b^2}\left(\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}\right)$$

$$B = \frac{1}{b^2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$B = \frac{1}{b^2}(2\sqrt{3}) \qquad \mathbf{B = \frac{2\sqrt{3}}{b^2}}$$

2) Montrons que $A \times B = 4\sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2$

On a : $A = 2a^2$ et $B = \frac{2\sqrt{3}}{b^2}$

$$A \times B = 2a^2 \times \frac{2\sqrt{3}}{b^2} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{b^2} = 4\sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad A \times B = 4\sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

3) Montrons que $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{3}}{3}(ab)^2$

$\frac{A}{B} = \frac{2a^2}{\frac{2\sqrt{3}}{b^2}} = \frac{2a^2 \times b^2}{2\sqrt{3}} = \frac{(ab)^2}{\sqrt{3}} = \frac{(ab)^2\sqrt{3}}{3}$ $\frac{A}{B} = \frac{(ab)^2\sqrt{3}}{3}$

EXERCICE 11

On pose $a = \frac{x+y}{2}$; $g = \sqrt{xy}$ et $h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

1) Démontrons que :

$x < h$ et $a < y$

❖ $x < h$

On $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\frac{1}{x} + \frac{1}{x} > \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{x} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\frac{2}{x}} < \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} < \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \Leftrightarrow x < \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ d'où $\mathbf{x < h}$

❖ $a < y$

$x < y \Leftrightarrow x + y < y + y \Leftrightarrow x + y < 2y \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} < \frac{2y}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} < y$ or $\frac{x+y}{2} = a$ d'où $\mathbf{a < y}$

2) Démontrer que : $g < a$

Comparons les valeurs g et a

$a = \frac{x+y}{2}$ et $g = \sqrt{xy}$

$g - a = \sqrt{xy} - \frac{x+y}{2} = \frac{2\sqrt{xy} - x - y}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - 2\sqrt{xy} + y\right)$

$g - a = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 < 0$ ainsi $g - a < 0$

D'où $g < a$

3) prouver que : $g^2 = ah$ puis déduire : $h < g$

Prouvons que $g^2 = ah$; calculons g^2et ah

$g^2 = \left(\sqrt{xy}\right)^2 = xy$

$g^2 = xy$

$ah = \frac{x+y}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{x+y}{2} \times \frac{2}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{x+y}{2} \times \frac{2xy}{x+y}$ $ah = xy$ Donc $\mathbf{g^2 = ah}$

Déduisons que : $h < g$

On a $g < a \Leftrightarrow g^2 < a \times g$ or $g^2 = ah$

Ainsi $ah < a \times g$ d'où $h < g$

EXERCICE 12

Soient 4 entiers naturels consécutifs n, $n+1, n+2, n+3$
(avec $n > 0$)

1) Démontrons que : $(n+1)(n+2) = n(n+3) + 2$

$(n+1)(n+2) = n^2 + 2n + n + 2 = n^2 + 3n + 2$

Ainsi $(n+1)(n+2) = n(n+3) + 2$

2) On pose $(n+1)(n+2) = a$

Exprimer en fonction de a le produit $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$

On a $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$ or

$(n+1)(n+2) = n(n+3) + 2 = a$ alors $n(n+3 = a - 2$ d'où

$p = n(n+1)(n+2)(n+3) = a(a-2)$ $\mathbf{p = a^2 - 2a}$

3) Déduire que $p+1$ est le carré d'un entier

On a $p = a^2 - a \Leftrightarrow$

$p + 1 = a^2 - 2a + 1$ $(a-1)^2$ or $(n+1)(n+2) = a$

d'où $p + 1$ est le carré d'un entier

CALCUL VECTORIEL

PARTIE I : VECTEURS

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Utiliser les propriétés des vecteurs et relations vectorielles dans de figures géométriques.
- Décomposer un vecteur à l'aide de la relation de Chasles.
- Utiliser les relations vectorielles pour démontrer des propriétés géométriques (distance, alignement, milieu, parallélisme).

PLAN DU COURS

PARTIE I : VECTEURS 43
1. DÉFINITIONS 45
1.1. VECTEUR 45
1.2. RELATION DE CHASLES 46
2. EGALITE DE DEUX VECTEURS 46
2.1. DÉFINITION : 46
2.2. VECTEUR ET MILIEU D'UN SEGMENT 47
2.2.1. Propriétés 47
2.2.2 THÉORÈME 48
2.2.3. VECTEUR ET PARALLÉLOGRAMME 48
3. SOMME DE DEUX VECTEURS 49
3.1. RELATION DE CHASLES 50
3.2. RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME 50
3.3. PROPRIÉTÉS 50

4. MULTIPLICATION D'UN VECTEUR
PAR UN NOMBRE RÉEL 51
4.1. DÉFINITION 51
4.2. PROPRIÉTÉS 51
5. COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS 52
5.1. DÉFINITION 52
5.2. THÉORÈME 52

APERÇU HISTORIQUE

Il est très vraisemblable que la notion de vecteur soit issue de la mécanique avec **GALILEE**, ou pet être déjà avec les **Grecs**. Mais elle ne fut explicitée qu'a la fin du **XIX^{e}** siècle. La « composition des forces et des vitesses » par la règle du parallélogramme semble connue depuis longtemps : **ROBERVAL** l'utilisait déjà vers la fin du **XVII^{e}** siècle, et on en trouve l'énoncé correct dans un ouvrage de **BEZOUT (1770)** . C'est à **GAUSS (1777 − 1855)** que l'on doit l'addition des vecteurs. En 1832 Giusto **BELLAVITIS (1803-1880)** développe la «théorie des équipollences ».

Au **XIX^{e}** siècle se développent les méthodes vectorielles, avec **HAMILTON, MOBIUS** et **GRISMANN**, en particulier. Vers 1920 la notation $\overrightarrow{AB}$ apparait, et, en **1925**, le mot « **vecteur** » figure dans les programmes de l'enseignement du secondaire

Source : collection perspectives 2^{e}

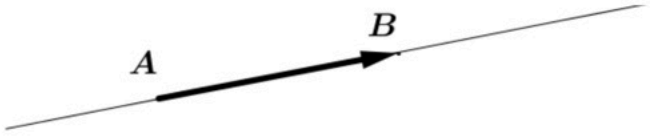
1. DÉFINITIONS

1.1. VECTEUR

Soient A et B deux points du plan, on note $\overrightarrow{AB}$ se lit « vecteur A B » caractérisé par :

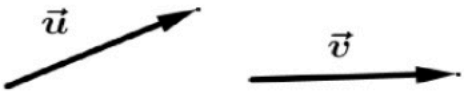
- **Sa direction : celle de la droite (AB)**
- **Son sens : celui de A vers B**
- **Sa longueur ou sa Norme : notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ est la longueur du segment [AB]**

Représentation



Remarque : on peut aussi noter un vecteur avec une lettre de l'alphabet : $\vec{u}$; $\vec{v}$ …

Dans ce cas il n'est plus désigné par son **origine** et son **extrémité**



NB :

✓ **le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$ est appelé vecteur nul**

✓ **le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi l'opposé du vecteur $\overrightarrow{BA}$ on le note :**

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

1.2. RELATION DE CHASLES

Pour tous points A , B et C du plan on a ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

En remplaçant $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AC}$; on effectue **une simplification** de la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ par le vecteur $\overrightarrow{AC}$

Exemple : simplifier l'expression $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

❖ En remplaçant $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ on effectue **une décomposition** du vecteur $\overrightarrow{AC}$ en faisant apparaitre le point B.

Exemple : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

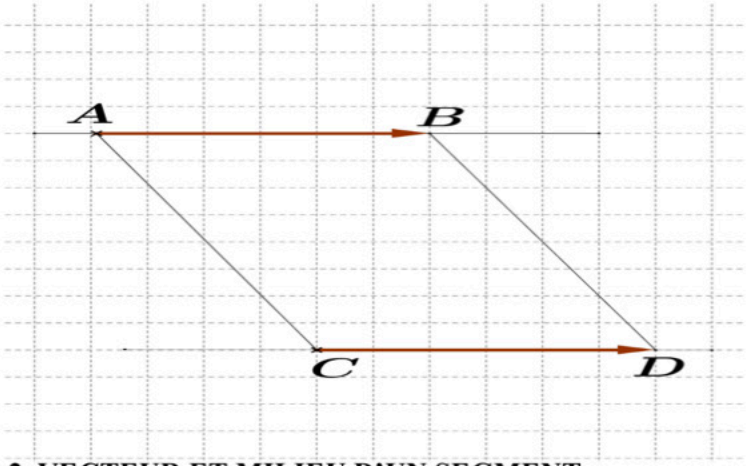
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

2. EGALITE DE DEUX VECTEURS

2.1. DÉFINITION :

Soient A ; B ; C et D quatre points du plan ; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont :

- **Même direction : (AB)// (CD)**
- **Même sens : sens de A vers B est celui de C vers D**
- **Même Norme : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$**

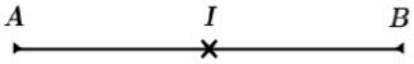


2.2. VECTEUR ET MILIEU D'UN SEGMENT

2.2.1. Propriétés

Soient trois points A ; I et B du plan ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- **I milieu du segment [AB] ⇔**
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ⇔
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ ⇔
- $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Exercice d'application

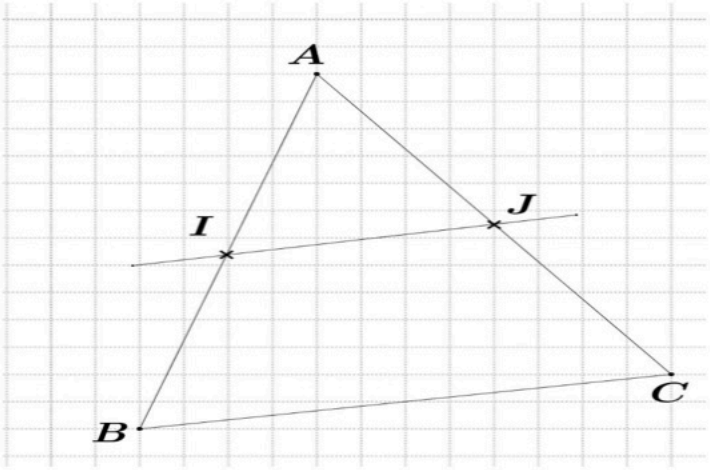
Soit le triangle ABC tel que I milieu de [AB] et J milieu de [AC]

a) Faire la figure

b) Prouver que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Résolution intégrale

a) Faisons la figure



b) Prouvons que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On a I milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et J milieu de [AC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; effectuons la somme membre en membre ; on a ainsi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ CQFD

2.2.2 THÉORÈME

Soit ABC un triangle quelconque ; s'il existe deux points I et J tel que I milieu de [AB] et J milieu de [AC]; alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2.2.3. VECTEUR ET PARALLÉLOGRAMME

Propriété

Soient A ; B ; C et D quatre points du plan ; les propositions suivantes sont équivalentes :

- **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$**
- **ABCD est un parallélogramme**

Remarque : on doit bien tenir compte du sens des vecteurs ; pour le parallélogramme ABCD l'égalité de vecteur est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Exercice d'application :

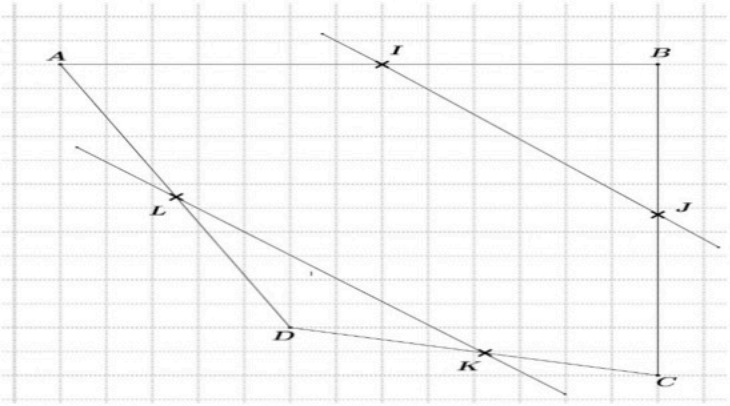
Soit ABCD un quadrilatère et I ; J ; K et L les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA]

a) Faire la figure

b) Démontrer que IJKL est un parallélogramme

Résolution intégrale

a) Faisons la figure



b) Démontrons que IJKL est un parallélogramme

Considérons le triangle ABC ; I milieu de [AB] et J milieu de [BC] alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Considérons le triangle ADC ; L milieu de [AD] et K milieu de [DC] alors $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

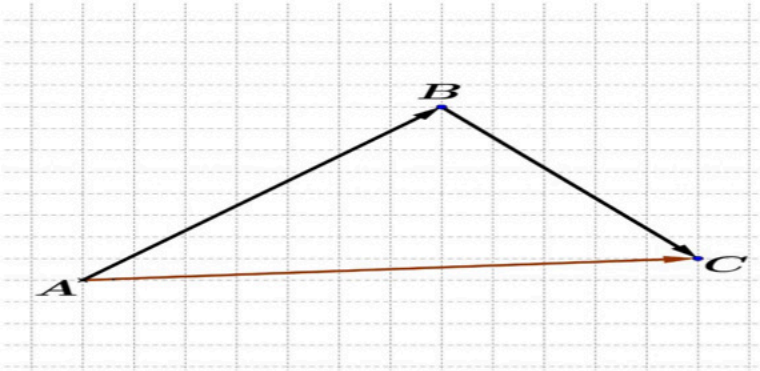
On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ par conséquent IJKL est un parallélogramme

3. SOMME DE DEUX VECTEURS

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ; on peut alors définir le vecteur $\vec{w}$ somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de deux manières différentes :

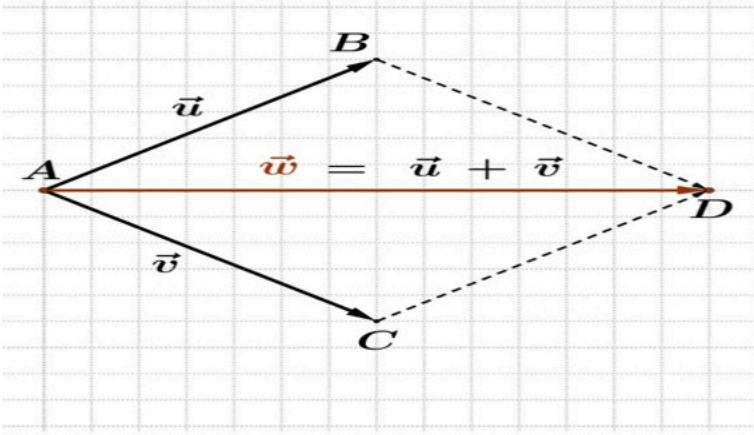
3.1. RELATION DE CHASLES

si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



3.2. RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ ou ABCD est un parallélogramme



3.3. PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$; on a les quatre propriétés suivantes en additionnant des vecteurs

P_1 : L'addition de vecteurs est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

P_2 : L'addition de vecteur est associative :
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

P_3 : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition)

P_4 : Tout vecteur $\vec{u}$ du plan admet un vecteur opposé $(-\vec{u})$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

N.B : le vecteur $(-\vec{u})$ à même direction et même Norme mais de sens contraire que le vecteur $\vec{u}$

4. MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL

4.1. DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $k\vec{u}$ tel que : les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même direction et :

- **Si $k > 0$ alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même sens et la longueur (norme) de $k\vec{u}$ est celle de $\vec{u}$ multiplié par $|k|$**
- **Si $k < 0$ alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont du sens opposé et la longueur (norme) de $k\vec{u}$ est celle de $\vec{u}$ multiplié par $|k|$**

4.2. PROPRIÉTÉS

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi que deux nombres α et β ; on a les égalités suivantes :

- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = (\alpha + \beta)\vec{u}$
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
- $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$
- $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$

5. COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS

5.1. DÉFINITION

Deux vecteurs non nul du plan, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = k'\vec{v}$)

Exercice d'application :

Soient $\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tel que : $\begin{cases} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - 4\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \end{cases}$

Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$

Résolution intégrale

Démontrons que :

- Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$

On a $\begin{cases} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - 4\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + 4\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \\ -2\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{u} = \frac{5}{2}\overrightarrow{w}$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires

- Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$

On a $\overrightarrow{u} = \frac{5}{2}\overrightarrow{w}$ alors $\frac{5}{2}\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} - 4\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \frac{3}{2}\overrightarrow{w}$

$\overrightarrow{v} = \frac{3}{2}\overrightarrow{w}$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires

REMARQUE :

- **Le vecteur nul $(\overrightarrow{0})$ est colinéaire à tous les vecteurs**
- **Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ on a $\overrightarrow{0} = 0\,\overrightarrow{u}$**

5.2. THÉORÈME

- **Prouver que des points A ; B ; et C sont alignés revient à déterminer un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$**
- **Prouver que des droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à trouver un réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{BA}$**

Exercices d'applications

- **Exercice 1 :**

Soit ABC un triangle quelconque ; on considère les points I ; J et K tel que

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

a) Faire la figure

b) Démontrer que les points I ; J et K sont alignés

- **Exercice 2 :**

ABC un triangle ; les points I et J sont tel que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$

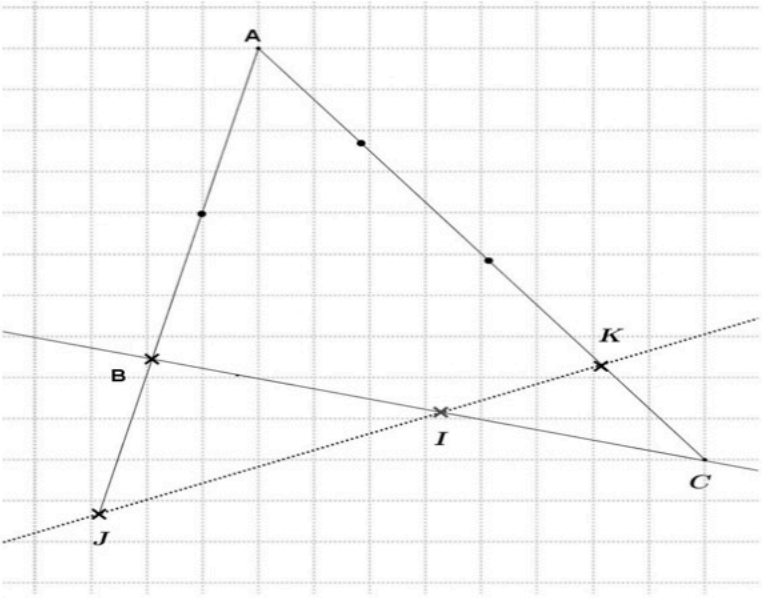
a) Faire la figure

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires ; en déduire que les droites (BJ) et (IC) sont parallèles

Résolution intégrale

- **Exercice 1 :**

a) Faisons la figure



b) Démontrer que les points I ; J et K sont alignés

Choisissons les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$

N.B : le choix des vecteurs est libre sauf que s'il est imposé par l'énoncé

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction des points de la figure de base A ; B ; et C

On a : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{Jk} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ainsi $\overrightarrow{Jk} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{JI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$

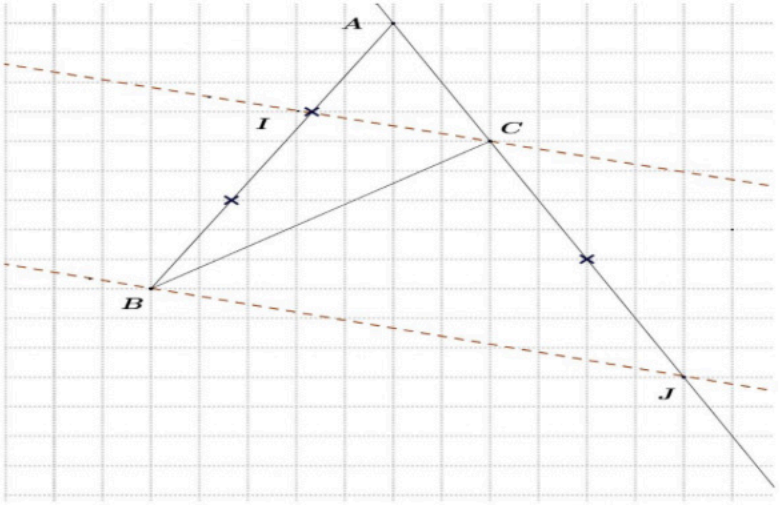
On a : $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ainsi $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{Jk} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{JI}$ d'où $\overrightarrow{Jk} = \frac{3}{2}\overrightarrow{JI}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{Jk}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires par conséquent les points I; J ; et K sont alignés.

Exercice 2 :

a) Faisons la figure



b) Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires ; en déduire que les droites (BJ) et (IC) sont parallèles

On a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$

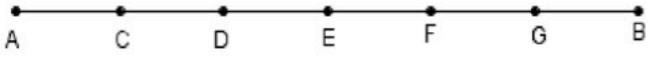
$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AC} = 3\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires par conséquent les droites (BJ) et (IC) sont parallèles.

SÉRIE D'EXERCICES

THÈME : VECTEURS

EXERCICE 1 le segment suivant est partagé en 6 parties de même longueur.



Compléter les résultats suivants :

a) $\overrightarrow{E\ldots} = -2\overrightarrow{EF}$;

b) $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\ldots.}$;

c) $\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots G} = \vec{0}$;

d) $\overrightarrow{CE} = \ldots\overrightarrow{AB}$;

e) $\overrightarrow{AD} = \ldots\overrightarrow{BF}$;

f) $\overrightarrow{DE} = \ldots\overrightarrow{BF}$

EXERCICE 2 Les questions sont indépendantes

1) Simplifier

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

$\vec{w} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ED}$

2) ABCD est un quadrilatère quelconque avec I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD]

Démontrer que : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$

3) ABC est un triangle quelconque avec I milieu de [BC]. Prouver que pour tout point M du plan on a : $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$

EXERCICE 3 Soit A ; B et C trois points.

Placer les points D et E tels que :

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = 0.5\overrightarrow{AD} - 0.8\overrightarrow{BC}$

1) Soit ABC un triangle quelconque donné ; placer les points E ; F ; G ; et H tels que :

a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AH} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

▸ **EXERCICE 4** Soit ABC un triangle quelconque ; exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis construire le point M dans chacun des cas suivant :

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$

b) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

▸ **EXERCICE 5** ABC un triangle, I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] .

a) Construire les points K et L tels que : $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

b) Démontrer que les points A, K et L sont alignés

▸ **EXERCICE 6** ABC est un triangle ; I est le milieu de [AB]

1 − a) construire le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$

c) déduisez – en que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

2 - on note K le point tel que $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ puis construire le point K

b) Déduisez-en que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c) Montrer que les points I , Jet K sont alignés

▸ **EXERCICE 7** (corrigé)

On donne le triangle ABC ; soient I le milieu de [BC] , P et Q deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$

1) Démontrer que I est le milieu de [PQ] .

2) Quelle est la nature du quadrilatère BPCQ .

▸ **EXERCICE 8** Soit ABC un triangle et I milieu du segment [BC] .

Placer les points D et E définie par $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BA}$

Démontrer que I est le milieu de [DE]

EXERCICE 9 Soit ABC un triangle

1 – On considère les points K et L définie par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

a) Faire une figure

b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

2 – Démontrer que si K et L sont définis par $\overrightarrow{AK} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL} = \alpha\,\overrightarrow{AC}$ avec $\alpha \in IR$ alors les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

EXERCICE 10 Soit ABC un triangle quelconque. On considère les points M et N tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Démontrer que les droites (CM) et (BN) sont parallèles.

EXERCICE 11 (corrigé)

Soit ABC un triangle ; P et Q les points du plan tels que :

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

1. Construire les points P et Q .
2. Montrer que $5\,\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC}$.
3. Placer les points R et S tels que :

$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

4. Montrer que les droites (PR) et (BS) sont parallèles.
5. Montrer que les points A, R et S sont aligné.

EXERCICE 12 Soient A, B et C trois points non alignés.

1) Construire les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) En déduire que les points M, N et P sont alignés et que N est milieux de [MP].

4) Construire les points Q et R tels que : $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Démontrer que (MN) et (QR) sont parallèles

EXERCICE 13 On donne quatre points O, A, B et C et on définit les trois points D, E et F par : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et ; $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

2. Démontrer que A est le milieu de [DE].

3. Démontrer que B est le milieu de [DF] et C celui de [EF].

▸ **EXERCICE 14** (corrigé)

ABCD est un parallélogramme ; I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]

1) a) Montrer que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JB}$.

b) en déduire la nature du quadrilatère DIBJ

2) a)Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IA}$

c) En déduire que les points I, M et D sont alignés

d) Montrer que les points J, N et B sont également alignés

3) Soit E le point défini par : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

a) Construire E

b) Prouver que E est un point de la droite (AB).

▸ **EXERCICE 15** Soit ABC un triangle et x un nombre réel. On considère les points I et J tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure pour $x = \frac{1}{2}$

2) $\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{BC}$; déterminer pour quelles valeurs de x a-t- on :

a) I et J confondus

b) BCJI parallélogramme

▸ **EXERCICE 16**

1. Dans chaque cas , dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$

b) $\vec{u}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{3}\right)$

c) $\vec{u}\left(\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$ et $\vec{v}\left(-2; \sqrt{6}\right)$

2. Dans chacun des cas ci-après, déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. si cela est possible, exprimer l'un des l'un des vecteurs en fonction de l'autre.

a) $\vec{u}(2; 6)$ et $\vec{v}(m; 3)$

b) $\vec{u}(-m;\ 4m-3)$ et $\vec{v}(1;\ -3)$

c) $\vec{u}(27;\ 2m)$ et $\vec{v}(2m;\ 3)$

EXERCICE 18

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3cm$; $AC = 4cm$ et $BC = 2cm$.

M , N et P les points définies vectoriellement par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB}$

1) Faire une figure et exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que les points M , N et P sont alignés.

3) Soit I le milieu de [AC] et le symétrique de C par rapport à B.

Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires. Quelle est position des droites (IJ) et (MN)

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

THÈME : VECTEURS

EXERCICE 6

1) Démontrons que I est le milieu de [PQ]

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IQ}$

$2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ}$

$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ}$

I Milieu de [BC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ alors $\vec{0} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = \vec{0}$ ainsi I est le milieu de [PQ]

2) Précisons la nature du quadrilatère BPCQ

On a $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = \vec{0}$

$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CQ} = \vec{0} \Leftrightarrow$

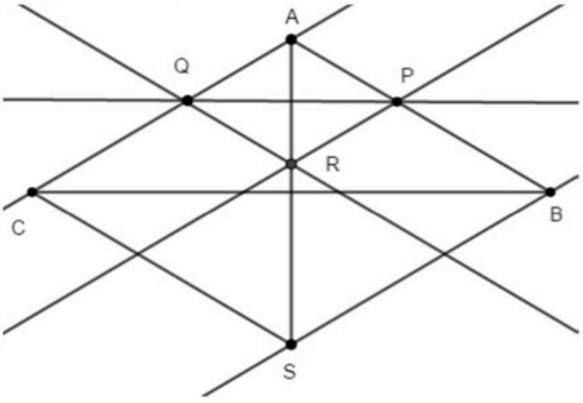
$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CQ} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CQ} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QC}$ donc quadrilatère BPCQ est un parallélogramme

EXERCICE 11

1. Construire les points P et Q



2. Montrons que $5\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC}$

On a $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{QA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{QP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{BC}$

3. Plaçons les points R et S tels que :

$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (.voir figure)

4. Montrer que les droites (PR) et (BS) sont parallèles.

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR}$ or $\overrightarrow{PA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ ainsi

$\overrightarrow{PR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ Car $\frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$

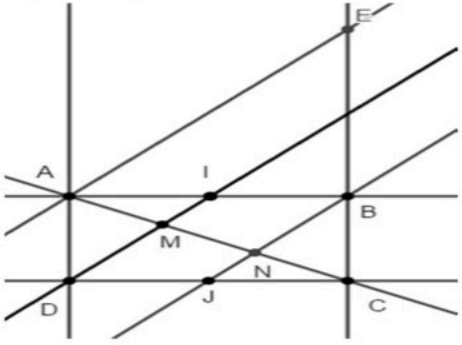
$\Leftrightarrow \frac{2}{5}\overrightarrow{BS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ On conclut que $\overrightarrow{PR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BS}$; les vecteur $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{BS}$ sont colinéaires par conséquent les droites (PR) et (BS) sont parallèles.

5. Montrer que les points A, R et S sont alignés.

$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS}$ d'où $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AS}$; les vecteur $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires par conséquent les points A, R et S sont alignés.

EXERCICE 14

1) a) Montrons que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JB}$



On a I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD] alors

Alors $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BJ} = \vec{0}$ d'où $\boldsymbol{\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JB}}$

b) déduisons la nature du quadrilatère DIBJ

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JB}$ alors le quadrilatère DIBJ est un parallélogramme

a) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IA}$

- Exprimer $\overrightarrow{IM}$ en fonction de $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}}$

- Exprimer $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IA}$

On a $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JB} \Leftrightarrow \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}$ Or $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$ ainsi $\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CI} \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}}$

c) déduisons que les points I, M et D sont alignés

On a : $\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{ID} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IM}$ d'où $\overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IM}$

Les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires par conséquent les points I, M et D sont alignés

d) Montrer que les points J, N et B sont également alignés.

On a $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JB}$

$\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$

Or $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ Or $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{NA}$

$\overrightarrow{JB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{NA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{JB} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}\right)$ $\mathbf{\overrightarrow{JB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{NB}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{NB}$ sont colinéaires par conséquent les points J, N et B sont alignés.

d) Soit E le point défini par :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

a) Construisons E (voir figure)

b) Prouvons que E est un point de la droite (AB)

on a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD}$ or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ d'où $\mathbf{\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BC}}$

Ainsi B milieu du segment [EC] donc E est un point de la droite (BC)

DEVOIR À LA MAISON N°I

✍ EXERCICE 1

On considère quatre réels strictement positifs a; b; c et d tels que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

1) Démontrer que $bc - ad > 0$.

2) Démontrer que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

3) En déduire la fraction comprise entre $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.

✍ EXERCICE 1

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$

1. Calculer $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$ puis montrer que $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
2. En déduire que $\frac{2}{\sqrt{ab}} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
3. Etablir que $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geq 4\sqrt{ab}$ et en déduire que $\frac{8}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} < \frac{2}{\sqrt{ab}}$
4. De la question 1) et 2) déduire un encadrement de la quantité $\frac{2}{\sqrt{ab}}$ en fonction de a et b

✍ EXERCICE 1

Le plan est reporté à un repère orthonormé o; $\vec{i}$; $\vec{j}$ on considère les vecteurs :

$\vec{u}(-1;3)$; $\vec{v}(3;1+\sqrt{2})$; $\vec{w}(3+3\sqrt{2};3+2\sqrt{2})$ et $\vec{s}(11\sqrt{2};36)$

1) Etudier la colinéarité des vecteurs :

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$

b) $\vec{v}$ et $\vec{w}$

c) $\vec{v}$ et $\vec{s}$

2) Montrer que l'on peut exprimer $\vec{s}$ sous la forme $\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v}$ avec a et b $\in IR$

✍ EXERCICE 1

Soit ABC un triangle quelconque. Les points I ; J et K sont les milieux respectifs des segments [BC] ; [AC] et [AB] . L le point du plan tel que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BJ}$

a) Faire une figure.

b) Démontrer que les droites (CL) et (AI) sont parallèles

DEVOIR A LA MAISON N°II

✍ Vérification de connaissances

Répondez aux questions suivantes, indiqué sur votre copie le numéro de la question suivi de la lettre en minuscule juste parmi les propositions proposées. (0,75pts × 6)

1. Une expression plus simple de la somme $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$ est : a : $\overrightarrow{CD}$ b : $\overrightarrow{BD}$ c : $\vec{0}$ d : autre réponse

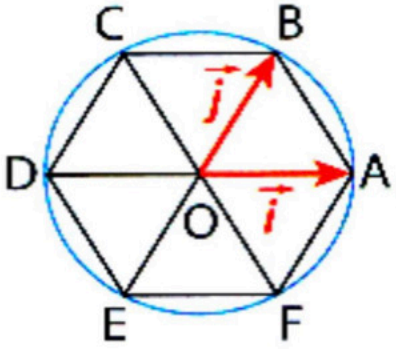
2. Dans un parallélogramme ABCD on a toujours

a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ b: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ c : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ d : $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

3. Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si :

a : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$ b: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$ c : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ d : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

4. Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O.



a : $\overrightarrow{EB} = \vec{j} - \vec{i}$

b: $\overrightarrow{DB} = -\vec{i} + \vec{j}$

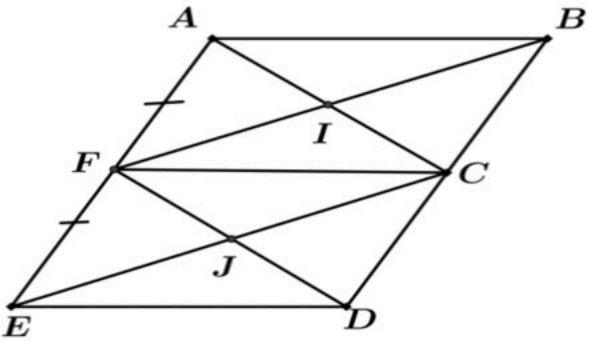
c : $\overrightarrow{FD} = -2\vec{i} + \vec{j}$

5. Soit ABC un triangle, soient R et S deux points tels que $(AR)\|(CS)$

Si $\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CS} = k\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}$ alors :

a : $k = \frac{15}{2}$ b : $k = -3{,}33$ c : $k = \frac{10}{3}$ d : $-7{,}5$

6. Soient ABCF et FCDE deux parallélogramme représentés ci-dessous



a : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{JE} = \overrightarrow{AE}$

b : $\overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DF}$

c: $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{JI} = \vec{0}$

✍ EXERCICE 1

Partie A

Résoudre les équations et inéquations suivantes ;

$|2x + 5| - |3x - 1| = 0$; $|2x - 1| = 0$

$|x + 1| > 2$; $|x + 1| \leq 0$

Partie B

Démontrer les inégalités suivantes

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

Déduire que $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

✍ EXERCICE 2

Le nombre noté $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or (dit $\emptyset$ (phi)) en hommage à Phidias ; sculpteur grec du V^e siècle avant notre ère qui s'en servit dans les proportions du Parthénon à Athènes.

Ce nombre est le seul nombre qui justifie les égalités suivantes. Vérifier que.

1) $\emptyset^2 = \emptyset + 1$
2) $\frac{1}{\emptyset} = \emptyset - 1$
3) $\emptyset^3 = 2\emptyset + 1$
4) Montrer que $\frac{\sqrt{\emptyset}}{\sqrt{\emptyset-1}} + \frac{\sqrt{\emptyset-1}}{\sqrt{\emptyset}} = \sqrt{5}$

✍ **EXERCICE 3**

Soit ABC un triangle quelconque On considère les points M et N tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; Démontrer que les droites (CM) et (BN) sont parallèles.

DEVOIR A LA MAISON N°III

✍ EXERCICE 1

Soit a , b et c trois réels et x , y et z des réels quelconques

1) Démontrer que $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

2) En déduire que :

$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$

3) Application : calculer $(\sqrt{2} - 1)^3 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 + (1 - \sqrt{3})^3$

✍ EXERCICE 2

Soit $E(x) = |2x - 4| + |5 - x|$

1. Écrire $E(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
2. Résoudre dans IR les équations et inéquations :

a) $E(x) = 9$

b) $E(x) = x + 5$

c) $E(x) \leq -3$

✍ EXERCICE 3

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan d'unité 1cm. On considère les points $A(-1; 5)$; $B(3 ; 7)$; $C(7 ; 5)$ et $D(-3 ; 0)$

1) justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires. On déterminera le réel k tel que : $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}$; En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

2) On considère le point $M(1; a)$ où a est un nombre réel. Déterminer a tel que les points C, D et M soient alignés. Quelle est alors la nature du quadrilatère ABMD ? (Justifier)

3) On considère le point F défini par l'égalité : $3\overrightarrow{FA} - 5\overrightarrow{FB} = \vec{0}$

L'objectif est de construire le point F par deux méthodes différentes.

a) **Première méthode** : à l'aide du calcul vectoriel.

En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AF}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et placer le point F.

b) **Deuxième méthode** : à l'aide des coordonnées.

À partir de l'égalité vectorielle $3\overrightarrow{FA} - 5\overrightarrow{FB} = \vec{0}$, déterminer les coordonnées $(x_F ; y_F)$ du point F.

DEVOIR A LA MAISON N°IV

✍ EXERCICE 1

1. Soit $X = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

a) Etudier le signe de X puis calculer X^2 .

b) En déduire la valeur de X.

2. Soient a et b deux nombres tels que $0 < a < b$:

Montrer que : $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

3. a) Rendre rationnel le dénominateur de l'expression $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $n \in IN^*$

b) En déduire une écriture simplifier de

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

✍ EXERCICE 2

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes

1) $|3x+1| - |4x-1| = 0$
2) $|x-1| = x-3$
3) $|7x+1| \leq 0$
4) $|-x+3| > 2$
5) $|-2x+4| \leq 1$

✍ EXERCICE 3

Soit le parallélogramme ABDC

1) Placer les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$
2) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
3) Exprimer $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
4) Montrer que les points I , J , et C sont alignés.

DEVOIR A LA MAISON N°V

✍ EXERCICE 1

1) Soit a , b , x et y quatre réels ; montrer l'égalité :

$(ax + by)^2 - (bx + ay)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$

2) En utilisant l'égalité précédente calculé :

$\left(2\sqrt{3} + 5\sqrt{7}\right)^2 - \left(2\sqrt{7} + 5\sqrt{3}\right)^2$

3) Soit n un entier naturel non nul ; montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

4) En déduire le plus petit entier naturel n vérifiant :

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$

5) Soit a et b deux nombres réels distincts et strictement positifs

Développer et réduire l'expression $\left(a\sqrt{b} - b\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$

6) En déduire une simplification de de : $\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ Puis celle de $\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

✍ EXERCICE 2

1) Calculer et donner sous la forme la plus simple possible les réels X et Y

$X = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(2\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)^2}$;

$Y = \left(\sqrt{\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{10} + 1\right)^2$

2) Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes :

a) $1 \leq |x - \sqrt{2}| \leq 2$; b) $|x + 3| \geq 2\sqrt{2} - 3$

c) $|3x - 2 + \sqrt{5}| \leq 0$; d) $|x| + |x - 1| = 5$

✍ EXERCICE 3

Soit ABC un triangle, K milieu de [BC] , L et M les points définie par : $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$.

1. Faire une figure puis exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$ et que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AK}$
3. En déduire $\overrightarrow{CL}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$.
4. Justifier que M est milieu de [LC].

DEVOIR A LA MAISON N°VI

✍ EXERCICE 1

1) Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes.

a) $|3-3x|=5$; b) $|2x+1|=x$;

c) $|2-4x|\leq 3$; d) $|4x-5|>3$;

2) Soit l'expression $f(x)=|2x-4|+|5-x|$.

a) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

b) En déduire la résolution dans IR de $f(x)=9$.

✍ EXERCICE 2

1) Montrer que : $a^2+b^2\geq 2ab$; quels que soient les réels a et b.

2) Démontrer que pour a, b, c ; trois réels strictement positifs
$(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(a^2+c^2)b\geq 6abc$.

3) a) Développer $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ avec x et y deux réels positifs.

b) Déduire l'inégalité $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$

c) En utilisant l'inégalité précédente, démontrer que :
$(x+y)(x+z)(y+z)\geq 8xyz$

4) On désigne par Φ le nombre d'or : $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vérifier les égalités suivantes :

a) $\Phi^2=\Phi+1$ b) $\frac{1}{\Phi}=\Phi-1$ c) $\Phi^3=2\Phi+1$.

5) Calculer $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$; En déduire $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

✍ EXERCICE 3

Soit ABCD un rectangle tel que, l'unité étant le centimètre, $AB=5$ et $BC=3$

1. Placer les points I, J, K et L tels que :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$,et $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis démontrer que
$\overrightarrow{IJ}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

3. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? justifier

4. Démontrer que le centre du rectangle ABCD est le milieu du segment [IK].

INTERVALLE ET CALCUL APPROCHÉ

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Utiliser une calculatrice.
- Connaître pour un intervalle borné : le centre et le rayon, l'inéquation associée.
- Trouver l'encadrement d'une somme, d'une différence et d'un produit.
- Déterminer pour un réel : une valeur approchée, un arrondi, une approximation décimale.

PLAN DU COURS

1. INTERVALLE DANS IR 74
1.1. VOCABULAIRE ET NOTATION 74
1.1.1. Vocabulaire 74
1.1.2. Notation 74
1.2. INTERSECTION ET RÉUNION DE DEUX INTERVALLES. 75
1.2.1. Intersection de deux intervalles 75
1.2.2. Réunion de deux intervalles 75
1.3. CENTRE ET RAYON D'UN INTERVALLE FERME BORNE 75
2. ENCADREMENT ET OPERATIONS 77
2.1. DÉFINITION 77
2.2. PROPRIÉTÉS 78
3. APPROXIMATION DÉCIMALES D'ORDRE **n** PAR DÉFAUT PAR EXCÈS 81
4. Arrondi d'ordre **n** 82
5. VALEUR APPROCHE 82
5.1. DÉFINITION 82

1. INTERVALLE DANS IR

1.1. VOCABULAIRE ET NOTATION

1.1.1. Vocabulaire

Soit a et b deux nombres réels tel que $a \leq b$

- **On appelle intervalle borné tout intervalle du type**

$[a ; b], [a ; b[,]a ; b],]a ; b[$

- **On appelle intervalle non borné tout intervalle du type**

$]-\infty ; a],]-\infty ; a[, [a ; +\infty[,]a ; +\infty[$

N.B : IR et $\emptyset$ (l'ensemble vide) sont aussi des intervalles en effet $IR =]-\infty ; +\infty[$ **et** $\emptyset =]a ; a[$

1.1.2. Notation

Soit a et b deux réels tel que $a \leq b$ on a soit un intervalle borné soit non borné

Intervalles bornés

Intervalle	Inégalité	Appellation
$x \in [a;b]$	$a \leq x \leq b$	Intervalle borné et fermé
$x \in [a;b[$	$a \leq x < b$	Intervalle borné semi-fermé à gauche
$x \in]a;b]$	$a < x \leq b$	Intervalle borné semi-fermé à droite
$x \in]a;b[$	$a < x < b$	Intervalle borné et ouvert

Intervalles non bornés

Intervalle	Inégalité	Appellation
$x \in]-\infty ; a]$	$x \leq a$	Intervalle non borné et fermé à droite
$x \in]-\infty ; a[$	$x < a$	Intervalle non borné ouvert à droite
$x \in [a ; +\infty[$	$x \geq a$	Intervalle non borné fermé à gauche
$x \in]a ; +\infty[$	$x > a$	Intervalle non borné ouvert à gauche

1.2. INTERSECTION ET RÉUNION DE DEUX INTERVALLES

1.2.1. Intersection de deux intervalles

L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble des réels appartenant à l'intervalle I et en même temps à l'intervalle J ; on la note $I \cap J$

Exemples :

- ✓ $]-\infty ; 10] \cap [-4 ; +\infty[= [-4 ; 10]$
- ✓ $[-5 ; 0[\cap]2 ; +\infty[= \emptyset$
- ✓ $]-\infty ; 1] \cap [1 ; +\infty[= 1$
- ✓ $]-\infty ; 50] \cap [-10 ; 20[= [-10 ; 20[$

1.2.2. Réunion de deux intervalles

La réunion ou Union de deux intervalles I et J est l'ensemble des réels appartenant à l'intervalle I ou à l'intervalle J ; on la note $I \cup J$

Exemples :

- ✓ $]-\infty ; 2] \cup [-4 ; +\infty[=]-\infty ; +\infty[$
- ✓ $[-7 ; 0[\cup]-2 ; 10[= [-7 ; 10[$
- ✓ $]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[=]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$
- ✓ $]-\infty ; 50] \cup [10; 20[=]-\infty ; 50]$

1.3. CENTRE ET RAYON D'UN INTERVALLE FERME BORNE

⇧ On appelle Centre C de l'intervalle fermé $[a ; b]$ ou de l'intervalle ouvert $]a ; b[$ le réel $c = \frac{a+b}{2}$

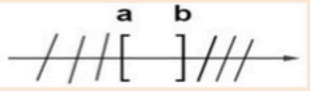
⇧ On appelle rayon r de l'intervalle $[a ; b]$ le réel positif $r = \frac{b-a}{2}$

NB :

- ❖ **L'intervalle fermé de centre C et de rayon r est noté par $\bar{I}(C ; r)$**
- ❖ **L'Amplitude A de l'intervalle fermé $[a ; b]$ est le réel positif $A = b - a$**

Propriété

Soit a et b deux réels tel que $a < b$ et x une variable ; les écritures suivante sont équivalentes :

Nomination	Forme d'écriture
En termes d'intervalle	$x \in [a ; b]$
En termes d'encadrement ou d'inégalité	$a \leq x \leq b$
En termes de valeurs absolue	$\lvert x - c \rvert \leq r$
En termes de distance	$d(x ; c) \leq r$
En termes de représentation graphique sur une droite graduée	

Exemples:

1) Déterminer le centre et le rayon de chacun des intervalles suivants

$\left[-2; \frac{15}{2}\right]$; $[0; 20]$; $[-7; -1]$; $[-8; 8]$

2) Pour chacune des conditions suivantes écrire sous forme de valeur absolue et de distance

$I_1 = [-1 ; 5]$; $I_2 =]-3 ; 7[$; $I_3 =]-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$;

$I_4 =]-\infty ; -3[\cup]7 ; +\infty[$

Solution intégrale

1) Déterminons le centre et le rayon de chacun des intervalles.

- $\left[-2; \frac{15}{2}\right]$; $\mathbf{C = \frac{11}{4}}$ **et** $\mathbf{r = \frac{19}{4}}$
- $[0; 20]$; $\mathbf{C = 10}$ **et** $\mathbf{r = 10}$
- $[-7; -1]$; $\mathbf{C = -4}$ **et** $\mathbf{r = 3}$
- $[-8; 8]$; $\mathbf{C = 0}$ **et** $\mathbf{r = 8}$

2) Ecrire chacune des conditions suivantes sous forme de valeur absolue et de distance

- $I_1 = [-1 ; 5]$

Déterminons le centre C et le rayon r; $C = 2$ et $r = 3$

$\mathbf{x \in [-1 ; 5] \Leftrightarrow \lvert x - 2 \rvert \leq 3}$ en terme de valeur absolue

$\mathbf{x \in [-1 ; 5] \Leftrightarrow d(x; 2) \leq 3}$ en terme de distance

- $I_2 =]-3 ; 7[$

Considérons l'intervalle fermé $[-3\,;\,7]$ calculons le centre C et le rayon r $C = 2$ et $r = 5$

$\mathbf{x \in\,]-3\,;\,7[\Leftrightarrow |\, x - 2\,| < 5}$ en terme de valeur absolue

$\mathbf{x \in\, [-3\,;\,7] \Leftrightarrow d(x;\,2) < 5}$ en terme de distance

❖ $I_3 = \,]-\infty\,;\,-1] \cup [3\,;\,+\infty[$

Considérons l'intervalle fermé $[-1\,;\,3]$ calculons le centre C et le rayon r $C = 1$ et $r = 2$

$\mathbf{x \in\,]-\infty\,;\,-1] \cup [3;\,+\infty[\Leftrightarrow |\, x - 1\,| \geq 2;}$

en terme de valeur absolue

$\mathbf{x \in\,]-\infty\,;\,-1] \cup [3\,;\,+\infty[\Leftrightarrow d(x;\,1) \geq 2;}$ en terme de distance

❖ $I_4 = \,]-\infty\,;\,-3[\cup \,]7\,;\,+\infty[$

Considérons l'intervalle fermé $[-3\,;7]$ calculons le centre C et le rayon r

C= 2 et r = 5

$\mathbf{x \in\,]-\infty\,;\,-3[\cup \,]7\,;\,+\infty[\Leftrightarrow |\, x - 2\,| > 5\,;}$

en terme de valeur absolue

$\mathbf{x \in\,]-\infty\,;\,-3[\cup \,]7\,;\,+\infty[\Leftrightarrow d(x;\,2) > 5\,;}$

en terme de distance

2. ENCADREMENT ET OPERATIONS

2.1. DÉFINITION

Encadrer un réel x c'est trouver deux réel a et b tel que $a \leq x \leq b$

Les réels a et b sont appelés bornes de l'encadrement ;

- **a : est la borne inférieure**
- **b : est la borne supérieure**

N.B : l'encadrement est réalisée à α prés dit Amplitude de l'encadrement donné par $\alpha = b - a$

Exemple :

Le nombre $\sqrt{5}$ est encadré par 2,236 et 2,237

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$; L'amplitude de l'encadrement est égale à $2{,}237 - 2{,}236 = 0\,,001$ soit 10^{-3}

2.2. PROPRIÉTÉS

♦ **Encadrement d'une somme : $x + y$**

Soit les réels x et y tels que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors

$a + c \leq x + y \leq b + d$

♦ **Encadrement d'une différence : $x - y$**

Soit les réels x et y tel que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$

Règle : **Pour encadrer $x - y$, on encadre tout d'abord la quantité $-y$ puis $x + (-y)$**

$c \leq y \leq d \Leftrightarrow -d \leq -y \leq -c$

$a \leq x \leq b$ et $-d \leq -y \leq -c$ alors

$a - d \leq x - y \leq b - c$

♦ **Encadrement d'un produit : xy**

Règle : **on multiplie membre en membre des inégalités de même sens que lorsque tous les membres de ces inégalités sont de même signe positif.**

- **Cas ou toutes les bornes sont de signe même positif**

Soit les réels x et y tel que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors

$ac \leq xy \leq bd$

- **Cas ou toutes les bornes de l'une au moins de l'encadrement sont de même signe négatif**

Soit les réels x et y tel que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ (avec a et b des réels négatifs)

On encadre d'abord $-x$ puis $-xy$ et ensuite xy

Exemple :

On donne $3 \leq x \leq 7$ et $-4 \leq y \leq -2$; encadrer xy

Solution intégrale

Encadrons xy

Encadrons d'abord $-y$

$-4 \leq y \leq -2 \Leftrightarrow 2 \leq -y \leq 4$

$3 \leq x \leq 7$ et $2 \leq -y \leq 4$ alors $6 \leq -xy \leq 28 \Leftrightarrow -28 \leq xy \leq -6$

- **Cas ou les bornes de l'une des encadrements au moins sont de signes contraires**

Règle : on scinde l'encadrement dont les bornes sont de signes contraires afin d'avoir deux encadrement ou les bornes sont de même signe

Exemple :

On donne $-3 \leq x \leq 2$ et $2 \leq y \leq 6$ encadrer xy

Solution intégrale

Encadrons xy

$-3 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0$ et $0 \leq x \leq 2$

Cas 1 : $-3 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -x \leq 3$

$0 \leq -x \leq 3$ et $2 \leq y \leq 6$ alors $0 \leq -xy \leq 18 \Leftrightarrow -18 \leq xy \leq 0$

Cas 2 : $0 \leq x \leq 2$ et $2 \leq y \leq 6$ alors $0 \leq xy \leq 12$

Ainsi $-18 \leq xy \leq 0$ ou $0 \leq xy \leq 12 \Leftrightarrow -18 \leq xy \leq 12$

♦ **Encadrement d'un quotient :** $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$

soit les réels x et y tel que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ si les bornes des encadrements sont de même signe positif ; pour encadrer $\frac{x}{y}$, on encadre d'abord $\frac{1}{y}$ puis $x \times \frac{1}{y}$

$c \leq y \leq d \Leftrightarrow \frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}$

$a \leq x \leq b$ et $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}$ alors $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

Exemple :

On donne $3 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$ encadrer $\frac{x}{y}$

Solution intégrale

$-3 \leq y \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq -y \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq 1$

$3 \leq x \leq 5$ et $\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq 1$ alors $1 \leq -\frac{x}{y} \leq 5$ d'où $-5 \leq \frac{x}{y} \leq -1$

♦ **Encadrement d'un nombre défini par une expression algébrique**

Pour effectuer un encadrement d'un nombre défini par une expression algébrique ; on effectue une suite d'opérations dont chacune est l'une des opérations élémentaires étudiée ci-dessus.

Exercices d'applications

Exercice 1 :

1. Sachant que $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$; encadrer $2 + \frac{3}{x}$
2. Comparer A , A^2 et A^3 avec $A = 5 - 2x$ et $2 \leq x \leq 2.5$

Exercice 2 :

Soit les réels x et y tel que $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$

On donne $X = \frac{x-y}{x+y}$

1) Encadrer x^2 ; $\frac{x}{y}$; $\frac{x}{x+y}$ et $\frac{y}{x+y}$

2) Déduire un encadrement de X

Solution intégrale

Exercice 1

1. Sachant que $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$; encadrons $2 + \frac{3}{x}$

$2 + \frac{3}{x} = 2 + 3 \times \frac{1}{x}$; encadrons d'abord $\frac{1}{x}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{3}{x} \leq 6 \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{4} \leq 2 + \frac{3}{x} \leq 2 + 6$

D'où $\mathbf{\frac{11}{4} \leq 2 + \frac{3}{x} \leq 8}$

2. Comparer A , A^2 et A^3 avec $A = 5 - 2x$ et $2 \leq x \leq 2.5$

Encadrons A

$2 \leq x \leq 2.5 \Leftrightarrow -5 \leq -2x \leq -4 \Leftrightarrow 0 \leq 5 - 2x \leq 1$

d'où $\mathbf{0 \leq A \leq 1}$

On a $0 \leq A \leq 1 \Leftrightarrow 0 \times A \leq A \times A \leq 1 \times A$ d'où $0 \leq A^2 \leq A$

$0 \leq A^2 \leq A \Leftrightarrow 0 \times A \leq A \times A^2 \leq A \times A$ d'où $0 \leq A^3 \leq A^2$

Alors $\mathbf{A^3 \leq A^2 \leq A}$

Exercice 2 :

1. Encadrons x^2 ; $\frac{x}{y}$; $\frac{x}{x+y}$ et $\frac{y}{x+y}$

❖ x^2

On a $2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow \mathbf{4 \leq x^2 \leq 25}$

❖ $\frac{x}{y}$

Encadrons $\frac{1}{y}$

$1 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq 1$

$2 \leq x \leq 5$ et $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq 1$ alors $\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq 5$

❖ $\frac{x}{x+y}$

Encadrons $x + y$

$2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$ alors $3 \leq x + y \leq 8$

$3 \leq x + y \leq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{3}$

$2 \leq x \leq 5$ et $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{3}$ alors $\frac{1}{4} \leq \frac{x}{x+y} \leq \frac{5}{3}$

❖ $\frac{y}{x+y}$

On a $1 \leq y \leq 3$ et

$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{3}$ alors $\frac{1}{8} \leq \frac{y}{x+y} \leq 1$

❖ Déduisons un encadrement de X

$X = \frac{x-y}{x+y} = \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x+y}$

Encadrons $-\frac{y}{x+y}$

On a $\frac{1}{8} \leq \frac{y}{x+y} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{y}{x+y} \leq -\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+y} \leq \frac{5}{3}$ et $-1 \leq -\frac{y}{x+y} \leq -\frac{1}{8}$ alors $-\frac{3}{4} \leq \frac{x-y}{x+y} \leq \frac{37}{24}$

3. APPROXIMATION DÉCIMALES D'ORDRE n PAR DÉFAUT PAR EXCÈS

Soit le nombre réel $x = 1{,}2473$

- Un encadrement d'Amplitude 0,1 ou 10^{-1} ou $\frac{1}{10}$ de x est

$1{,}2 \leq x \leq 1{,}3$

❖ 1,2 est l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut de x

❖ 1,3 est l'approximation décimale d'ordre 1 par excès de x

- Un encadrement d'Amplitude 0,01 ou 10^{-2} ou $\frac{1}{100}$ de x est

$1{,}24 \leq x \leq 1{,}35$

❖ 1,24 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de x

❖ 1,35 est l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de x

Exercice d'application :

1) Déterminer une approximation décimale à 10^{-6} prés par excès de $\sqrt{5}$

2) Déterminer une approximation décimale $\sqrt{6}$ par défaut à 10^{-3} prés

Solution intégrale

1) Déterminons une approximation décimale à 10^{-6} prés par excès de $\sqrt{5}$

On a $\sqrt{5} = \mathbf{2,236067}97749979$

2,236068 est l'approximation décimale à 10^{-6} prés par excès de $\sqrt{5}$

2) Déterminer une approximation décimale de $\sqrt{6}$ par défaut à 10^{-3} prés

On a $\sqrt{6} = \mathbf{2,449}489742783178$

2,449 est l'approximation décimale de $\sqrt{6}$ par défaut à 10^{-3} prés

4. ARRONDI D'ORDRE n

Pour arrondir à l'ordre n un nombre dont on connait le début de l'écriture décimale, on procède comme suite :

Si le $(n+1)^{iéme}$ chiffre après la virgule est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4 on arrondit ainsi par défaut

Exemple :

Les nombres 1,73230 ; 1,73205 ; 1,73249 donnent 1,732 en arrondi d'ordre 3

Si le $(n+1)^{iéme}$ chiffre après la virgule est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ou 9 on arrondit ainsi par excès en majorant d'une unité le $n^{iéme}$ chiffre concerné

Exemple :

Les nombres 1,73158 ; 1,73162 ; 1,73199 donnent 1.732 en arrondi d'ordre 3

5. VALEUR APPROCHE

5.1. DÉFINITION

Soit x un nombre réel et r un réel strictement positif. On dit que le réel C est une valeur approchée de x à r prés, lorsque :

$x \in [C-r\,;\,C+r]$ **ou** $|x-C| \leq r$ **ou** $d(x\,;\,C) \leq r$

Exercice d'application :

Soit 4,5 une valeur approchée du nombre réel x à 3.10^{-1} prés et 7,51 une valeur approchée du nombre réel y à 2.10^{-2} prés.

Déterminer une valeur approchée du produit xy et préciser l'incertitude associée

Solution intégrale

Déterminons une valeur approchée du produit xy et précisons l'incertitude associée

On a 4,5 une valeur approchée du nombre réel x à 3.10^{-1} prés alors

$x \in [4,5 - 0,3 ; 4,5 + 0,3] \Leftrightarrow x \in [4,2 ; 4,8] \Leftrightarrow$
$4,2 \leq x \leq 4,8$

et 7,51 une valeur approchée du nombre réel y à 2.10^{-2} prés alors

$y \in [7,51 - 0,02 ; 7,51 + 0,02] \Leftrightarrow y \in [7,49 ; 7,53]$
$\Leftrightarrow 7,49 \leq y \leq 7,53$

$4,2 \leq x \leq 4,8$ et $7,49 \leq y \leq 7,53$ alors
$31,458 \leq xy \leq 36,144 \Leftrightarrow xy \in [31,458 ; 36,144]$

Calculons le centre C et le rayon r

$C = \frac{31,458 + 36,144}{2} = 33,861$ et $r = \frac{36,144 - 31,458}{2} = 2,343$

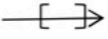
Ainsi $\mathbf{33,861}$ est la valeur approchée de xy et $\mathbf{2,343}$ est l'incertitude associée

SÉRIE D'EXERCICES

Thème : intervalle et calcul approché

EXERCICE 1

Voici 5 façons de décrire une propriété

- $x \in [-1\,;5]$: en terme d'intervalle
- $-1 \leq x \leq 5$: en terme d'encadrement
- $|x-2| \leq 3$:en terme de valeur absolue
- $d(x,2) \leq 3$: en terme de distance
-  : par une représentation graphique

Traduire pour chaque façon les propriétés suivantes :

a) $x \in [0;4]$; b) $-8 \leq x \leq -2$

c) $|x-2| < 2$; d) $|3-x| < 4$

e) $-5 < 2x < 5$; f) $d(x,4) \leq 0.5$

g) $x \in [-7;1]$; h) $d(x,-1) \leq 2$

EXERCICE 2 (corrigé)

1) Soient les réels x et y tels que $d(x;2) < 1, d(y;3) < 2$. Donner un encadrement de : $x+y$; $x-y$; xy; x^2-y^2; $\frac{x}{y}$

2) $3 < x < 5$; $-2 < y < -1$. Encadrer $x+y, x-y, xy, x^2-y^2$

3) $1 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq 4$. Encadrer $x+y, x-y, xy, x^2-y^2$

EXERCICE 3

1. Reproduisez le tableau Suivant en complétant les cases vides.

I	J	I ∩ J	I ∪ J
$[5;19]$	$]-\infty;0[$		
$]-\infty;-2]$	$]-2;3]$		

Pour les propositions suivantes, écrire chacune à l'aide de valeur absolue, d'encadrement et de distance

a) $x \in [-4;6]$

b) $x \in]-1;5[$

c) $x \in]-\infty;-5] \cup [-1;+\infty[$

d) $x \in]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$

EXERCICE 4

A l'aide des encadrements de x et de y suivants :$1{,}2 \leq x \leq 2$, et $1 \leq y \leq 4{,}5$

Donner un encadrement de $x - y$; xy et $\frac{x-y}{x+y}$

1. Montrer que les valeurs $3 + \frac{10}{70}$ et $3 + \frac{10}{71}$ réalisent un encadrement du nombre π dont on précisera l'amplitude de l'encadrement.

Donner sous forme décimale et de puissance de 10 l'amplitude de cet encadrement

N.B :$\pi \approx 3{,}141592$

EXERCICE 5 On donne $\left|a + \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ et $\left|b - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Encadrer $a, b, 2a - 4b$ et a^2b.

Donner une valeur approchée de a^2b en donnant la précision

On considère les réels x et y tels que : $0{,}3 \leq x \leq 0{,}4$ et $-5{,}2 \leq y \leq -5{,}1$

Donner un encadrement de $x + y$; $x - y$; xy et $-2x + y^2$.

EXERCICE 6 Donner un encadrement du nombre

$x^2 + y^2 + 4x - 2y$ Sachant que l'on a : $3 < x < 4$ et $-5 < y < 2$.

1. Donner un encadrement de chacun des nombres xy et x^2y sachant que l'on a : $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$.
2. On donne $a = 2$; $b = 4$ et un nombre x tel que : $d(x, 3) = |x - 3| = 1{,}2$.

x Est-il dans l'intervalle] a, b[?

EXERCICE 7 (corrigé)

Soient x et y deux nombres réels tels que $\left|2x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ et $\left|y - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$.

1) Prouver que x et y appartiennent à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

2) Vérifier que : $xy - 3x - 2y - 1 = (x - 2)(y - 3) - 7$.

3) En déduire que : $-5 < xy - 3x - 2y - 1 < -\frac{13}{4}$

EXERCICE 8 On considère trois réels x ; y ; z tels que 2,7 soit une valeur approchée de x à 0,1 près 3,51 une valeur approchée par excès de y à 0,05 près et 4,593 une valeur approchée par défaut de z à 0,002 près.

1) Encadrer x , y , z

2) En déduire un encadrement des réels suivants : $x + y$; $x - z$; $\frac{x}{z}$; $x^2 - 3y$; xyz .

EXERCICE 9 On donne $a = 2$; $b = 4$, et un nombre x tel que $d(x, 3) = |x - 3| = 1{,}2$.

x est-il dans l'intervalle $]a, b[$?

1) Dans chacun des cas suivants, encadrer avec le plus de précision l'aire A et le volume V du solide donnés.

a) Pavé droit de coté a, b, c. On rappelle que :

$A = 2(ab + ac + bc)$ et $V = abc$

Données :

3,15 est une valeur approchée de a à 5×10^{-2} prés

2,35 est une valeur approchée de b à 5×10^{-2} prés

4,25 est une valeur approchée de C à

5×10^{-2}prés

b) Cylindre de rayon R et de hauteur h.

On rappelle que $A = 2\pi R(R + h)$ et $V = \pi R^2 h$

Données : $R \approx 4$ à 2×10^{-2}près.

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

THÈME : INTERVALLE ET CALCUL APPROCHÉ

EXERCICE 2

Soient les réels x et y tels que

$d(x;2) < 1, d(y;3) < 2.$

Écrivons sous forme d'encadrement les expressions $d(x;2) < 1$ et $d(y;3) < 2$

$d(x;2) < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

$d(y;3) < 2 \Leftrightarrow |y-3| < 1 \Leftrightarrow 1 < y < 5$

❖ Encadrons $x + y$

$1 < x < 3$ et $1 < y < 5$ alors $2 < x+y < 8$

❖ Encadrons $x - y$

Encadrons d'abord $-y$

$1 < y < 5 \Leftrightarrow -5 < -y < -1$

$1 < x < 3$ et $-5 < -y < -1$ alors $-4 < x-y < 2$

❖ Encadrons xy

$1 < x < 3$ et $1 < y < 5$ alors $1 < xy < 15$

❖ Encadrons $x^2 - y^2$

$1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 9$; $1 < y < 5 \Leftrightarrow 1 < y^2 < 25$

$1 < y^2 < 25 \Leftrightarrow -25 < -y^2 < -1$

$1 < x^2 < 9$ et $-25 < -y^2 < -1$ Alors $-25 < x^2 - y^2 < -9$

❖ Encadrons $\frac{x}{y}$

Encadrons d'abord $\frac{1}{y}$

$1 < y < 5$ alors $\frac{1}{5} < \frac{1}{y} < 1$

$1 < x < 3$ et $\frac{1}{5} < \frac{1}{y} < 1$ alors $\frac{1}{5} < \frac{x}{y} < 3$

1)$3 < x < 5$; $-2 < y < -1$.

❖ Encadrer $x + y$,

$3 < x < 5$ et $-2 < y < -1$ alors $1 < x+y < 4$

❖ Encadrons $x - y$,

Encadrons $-y$

$-2 < y < -1 \Leftrightarrow 1 < -y < 2$

$3 < x < 5$ et $1 < -y < 2$ alors $4 < x - y < 7$

❖ Encadrons xy

$-2 < y < -1 \Leftrightarrow 1 < -y < 2$; $3 < x < 5$ et $1 < -y < 2$ alors

$3 < -xy < 10$ d'où $-10 < xy < -3$

❖ Encadrons $x^2 - y^2$

$3 < x < 5 \Leftrightarrow 9 < x^2 < 25$; $1 < -y < 2 \Leftrightarrow 1 < y^2 < 4$

$1 < y^2 < 4 \Leftrightarrow -4 < -y^2 < -1$

$9 < x^2 < 25$ et $-4 < -y^2 < -1$ alors $6 < x^2 - y^2 < 24$

2) $1 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq 4$.

❖ Encadrons $x + y$

$1 \leq x \leq 2$ et $-3 \leq y \leq 4$ alors $-2 \leq x + y \leq 6$

❖ Encadrons $x - y$

$-3 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq -y \leq 3$

$1 \leq x \leq 2$ et $-4 \leq -y \leq 3$ alors $-3 \leq x - y \leq 5$

❖ Encadrons xy

$-3 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0$ ou $0 \leq y \leq 4$

Cas 1

$-3 \leq y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -y \leq 3$

$1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq -y \leq 3$ alors $0 \leq -xy \leq 6$ d' où $-6 \leq xy \leq 0$

Cas 2

$1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 4$ alors $0 \leq xy \leq 8$

on obtient $-6 \leq xy \leq 8$

EXERCICE 7

Soient x et y deux nombres réels tels que : $\left|2x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$ et $\left|y - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$.

1) Prouvons que x et y appartiennent à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

- x appartiennent à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

$\left|2x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 2x - \frac{3}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} < 2x < \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} < x < 1$; ainsi x appartiennent à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

- y appartiennent à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$

$\left|y-\frac{3}{4}\right|<\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<y-\frac{3}{4}<\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}+\frac{3}{4}<y<\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}<y<1$; d'où y appartiennent à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$

2) Vérifions que : $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

Développons : $(x-2)(y-3)-7$

$(x-2)(y-3)-7=xy-3x-2y+6-7$

$(x-2)(y-3)-7=xy-3x-2y-1$; ainsi

$xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

3) Déduisons que :

$-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}$

On a : $Xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$

Encadrons $x-2$

$\frac{1}{2}<x<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-2<x-2<1-2$

$\frac{1}{2}-2<x-2<1-2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x-2<-1$

Encadrons $y-3$

On a : $\frac{1}{2}<y<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-3<y-3<1-3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<y-3<-2$

Encadrons $(x-2)(y-3)$

$-\frac{3}{2}<x-2<-1 \Leftrightarrow 1<-(x-2)<\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<y-3<-2 \Leftrightarrow$

$2<-(y-3)<\frac{5}{2}$

$1<-(x-2)<\frac{3}{2}$ et $2<-(y-3)<\frac{5}{2}$

alors $2<(x-2)(y-3)<\frac{15}{4}$

Encadrons $(x-2)(y-3)-7$

$2-7<(x-2)(y-3)-7<\frac{15}{4}-7 \Leftrightarrow$

$-5<(x-2)(y-3)-7<\frac{-13}{4}$

Or $xy-3x-2y-1=(x-2)(y-3)-7$ alors

$\mathbf{-5<xy-3x-2y-1<-\frac{13}{4}}$

DEVOIR A LA MAISON N°I

✍ EXERCICE 1

1) a) Comparer $-12\sqrt{2}$ et -17

b) Montrer que : si $a < b$, alors $\frac{a+b}{2} < b$

Soient x et y deux réels tels que : $x + y = 1$

c) Exprimer y en fonction de x En utilisant a) ; montrer que $4xy \leq 1$

2) a et b sont deux réels tels que 1,3 soit une valeur approchée de a à 10^{-1} près et 2 soit une valeur approchée de b par excès à 5.10^{-1} près encadrer $a + b$; $a - b$.

✍ EXERCICE 2

Voici 4 façons d'écrire une même propriété :

• $x \in [1,3]$: en terme d'intervalle • $1 \leq x \leq 3$: en terme d'encadrement

• $|x - 2| \leq 1$: en terme de valeur absolue • $d(x, 2 \leq)1$: en terme de distance

Traduire pour chaque façon les propriétés suivantes :

a) $x \in [3 ; 7]$; b) $-6 \leq x \leq -2$;

c) $|x + 2| < 5$; d) $d(x, 2) < 3$

f) $x \in]-\infty; -4] \cup [-2; +\infty[$

✍ EXERCICE 3

Soient A, B et C trois points non alignés.

1) Construire les points M, N et P tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) En déduire que les points M, N et P sont alignés et que N est milieux de [MP].

4) Construire les points Q et R tels que : $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Démontrer que (MN) et (QR) sont parallèles

DEVOIR A LA MAISON N°II

✍ EXERCICE 1

1. Reproduisez le tableau Suivant sur votre copie en complétant les cases vides.

I	J	I ∩ J	I ∪ J
$[5;19]$	$]-\infty;0[$		
$]-\infty;-2]$	$]-2;3]$		

2. Pour les propositions suivantes, écrire chacune à l'aide de valeur absolue et de distance

a) $x \in [-4;6]$ b) $x \in]-1;5[$

c) $x \in]-\infty;-5] \cup [-1;+\infty[$ d) $x \in]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$

✍ EXERCICE 2

1. A l'aide des encadrements de x et de y suivants

$1{,}2 \leq x \leq 2{,}1$ et $1 \leq y \leq 4{,}5$

Donner un encadrement de $x - y$; xy et $\frac{x-y}{x+y}$

2. Montrer que les valeurs $3 + \frac{10}{70}$ et $3 + \frac{10}{71}$ réalisent un encadrement du nombre π

Donner sous forme décimale et de puissance de 10 l'amplitude de cet encadrement

N.B : $\pi \approx 3{,}141592$

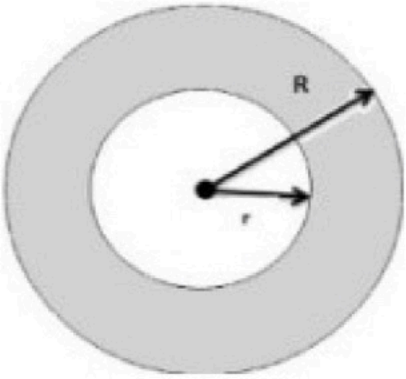
✍ EXERCICE 3

Partie A (3 pts)

Encadrer l'aire d'une couronne délimitée par deux cercles concentriques de rayons respectifs R er r par deux réels sachant que $17{,}5 \leq R \leq 17{,}6$ et $9{,}5 \leq r \leq 9{,}6$

On vérifiera que $A = \pi(R^2 - r^2)$

Vous prendrez pour le calcul $\pi = 3,14$



Partie B (3 pts)

Soit 5,4 une valeur approchée du nombre réel x à 2.10^{-2} prés et 8,3 une valeur approchée du nombre réel y à 3.10^{-1} prés.

Déterminer une valeur approchée du produit xy et préciser l'incertitude associé.

PARTIE II : BARYCENTRE

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Avoir une bonne connaissance de la notion de Barycentre
- Connaître le barycentre de 2 ou 3 points et savoir utiliser les propriétés pour résoudre des problèmes.
- Construire le barycentre de 2 points ou 3 points

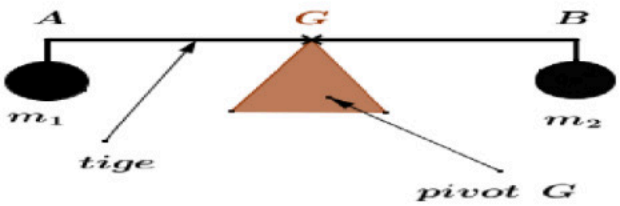
PLAN DU COURS

CALCUL VECTORIEL 93
Partie II : Barycentre 93
1. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES 95
1.1. ACTIVITÉ 95
1.2. DÉFINITION DU BARYCENTRE 97
1.3. PROPRIÉTÉ 97
1.4. RÉDUCTION DE LA SOMME DE VECTEURS $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB}$ LORSQUE $\alpha + \beta \neq 0$ 97
1.5. DROITE ET BARYCENTRE 100
2. PROPRIÉTÉS DU BARYCENTRE 100
2.1. HOMOGÉNÉITÉ DU BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES 100
2.2. ISOBARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES 101
3. EXTENSION AU SYSTÈME DE BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES 101
3.1. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES 101
3.1.1. Théorème 101
3.1.2. Position du point G sur le plan 101

3.2. RÉDUCTION DE LA SOMME DE TROIS VECTEURS $\alpha\mathbf{MA} + \beta\mathbf{MB} + \gamma\mathbf{MC}$ lorsque $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ 102
3.2.1 Théorème : 102
3.3. ISOBARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES 103
3.4. BARYCENTRE PARTIEL OU ASSOCIATIF 104

APERÇU HISTORIQUE

La notion de barycentre qui vient du Grec **barus** qui signifie lourd, massif a été introduite par Archimède au III^{iéme} siècle avant **J.C** alors qu'il s'intéressait à l'équilibre des leviers. Il apporte ainsi une solution au problème proposé ci-dessous



Sur cette tige de masse négligeable, on suspend deux masses m_1 et m_2 aux points A et B. Comment positionner le pivot G pour que l'ensemble soit en équilibre ?

⇨ En physique : l'équilibre est obtenu avec la loi d'Archimède $m_1 GA = m_2 GB$

⇨ En Mathématique : les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens opposé ; l'équilibre est obtenu si les vecteurs $m_1 \overrightarrow{GA} = -m_2 \overrightarrow{GB}$ équivaut à $m_1 \overrightarrow{GA} + m_2 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Le point G sur la tige vérifiant l'équilibre est dit Barycentre des points A et B affectés des masses respectives m_1 et m_2

1. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES

Préliminaire : point pondéré

Soit le point A et α un réel non nul ; On appelle point pondéré tout couple (A ; α) formé d'un point A et d'un réel α ; on dit que A est affecté d'un coefficient α

1.1. ACTIVITÉ

Soit A et B deux points du plan

a) Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ puis placer le point G sur la figure.

b) On considère deux réels α et β ; existe-t-il un unique point G tel que

$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$?

c) Soit M un point du plan, écrire en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$ la somme de vecteurs $2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}$

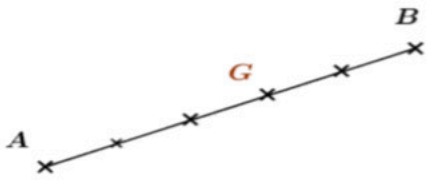
Solution intégrale

a) Montrons qu'il existe un et un seul point G tel que $2\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ puis plaçons le point G sur la figure.

$$2\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$2\,\overrightarrow{GA} + 3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$$
$$5\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AB}$; Les points A et B étant fixes il existe donc un et un seul point G vérifiant $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AB}$

Plaçons le point G sur la droite (AB)



b) On considère deux réels α et β ; montrons s'il existe un unique point G tel que $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

On a $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$(\alpha + \beta)\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

❖ **Si $\alpha + \beta = 0$ alors $(\alpha + \beta)\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{AB} = \beta\,\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$**

$\beta = 0$ Ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

L'égalité $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ne dépend pas du point G , il n'existe pas donc un unique point G tel que $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

❖ **Si $\alpha + \beta \neq 0$** alors on a $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$ donc il existe un et un seul point G vérifiant l'égalité $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

c) Soit M un point du plan, écrire en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$ la somme de vecteurs $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

Pour tout point M du plan ;

$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GB}$

$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}$ or $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ alors

$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

1.2. DÉFINITION DU BARYCENTRE

Soient A et B deux points α et β deux réels tel que la somme $\alpha + \beta \neq 0$, il existe alors un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Le point G est dit Barycentre des points pondérés $(A ; \alpha)$ et $(B ; \beta)$, on dit aussi que G est barycentre de A et B affecté respectivement des coefficients α et β ou encore G est barycentre du système $\{(A ; \alpha); (B ; \beta)\}$

On le note $G = \text{bar}\{(A ; \alpha); (B ; \beta)\}$ ou encore $G = \text{bar}$

A	B
α	β

1.3. PROPRIÉTÉ

G est barycentre des points pondérés $(A ; \alpha)$ et $(B ; \beta)$ équivaut à :

- **$\alpha + \beta \neq 0$**
- **$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$**
- **$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$**
- **Le point G est sur la droite (AB)**

REMARQUE :

❖ **Si $G = \text{bar}\{(A ; \alpha); (B ; \beta)\}$, le point le plus près du point G est celui dont le coefficient est plus grand en valeur absolue.**

❖ **Le point G appartient au segment [AB] si et seulement les coefficients α et β sont de même signe.**

1.4. RÉDUCTION DE LA SOMME DE VECTEURS $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ LORSQUE $\alpha + \beta \neq 0$

THÉORÈME :

Soit G barycentre de deux points pondérés $(A\,;\,\alpha)$ et $(B\,;\,\beta)$ on a pour tout point M du plan : $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Preuve :

$G = \text{bar}\{(A\,;\,\alpha);\ (B\,;\,\beta)\}$ alors $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Pour tout M du plan,

$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \alpha\,\overrightarrow{GM} + \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{GM} + \beta\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$= \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \alpha\,\overrightarrow{GM} + \beta\,\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ d'où

$\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}}$

REMARQUE :

Le point M peut être n'importe quel point du plan, en particulier le point Aou le point B

Si $A = M$ alors on a $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow$

$\alpha\,\overrightarrow{AA} + \beta\,\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow$

$\beta\,\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG}$ Ainsi on retrouve $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$

Exercice d'application

Soit deux points du plan A et B

1) Construire le point $C = \text{bar}\{(A\,;2);\ (B\,;\,3)\}$ et

$D = \text{bar}\{(A\,;3);\ (B\,;\,2)\}$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$\|2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}\| = 10$

3) Déterminer l'ensemble des points N du plan tel que :

$\|2\,\overrightarrow{NA} + 3\,\overrightarrow{NB}\| = \|3\,\overrightarrow{NA} + 2\,\overrightarrow{NB}\|$

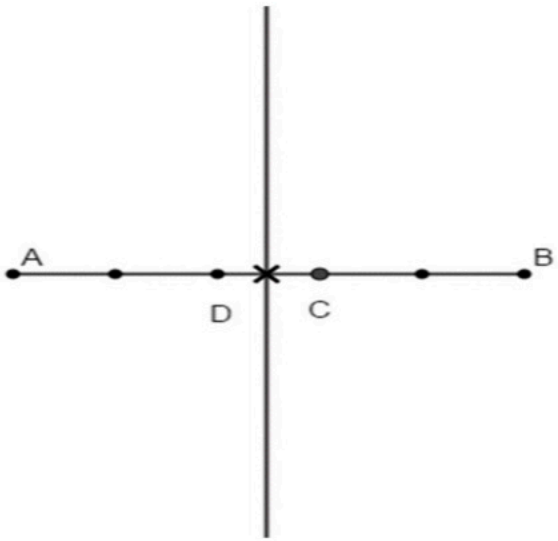
Solution intégrale

1) Construisons les points $C = \text{bar}\{(A\,;2);\ (B\,;\,3)\}$ et

$D = \text{bar}\{(A\,;2);\ (B\,;\,2)\}$

$C = \text{bar}\{(A\,;2);\ (B\,;\,3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$D = \text{bar}\{(A\,;3);\ (B\,;\,2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$\left\| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = 10$

On a C = bar {(A ; 2); (B ; 3) } alors pour tout point M du plan

$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MC}$

$\left\| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| 5\overrightarrow{MC} \right\| = 5MC$ et $\left\| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = 10$ d'où $5MC = 10 \Leftrightarrow MC = 2$

Le point C étant fixe, l'ensemble des points M cherché est le cercle de centre C et de rayon 2.

3) Déterminer l'ensemble des points N du plan tel que :

$\left\| 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} \right\| = \left\| 3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} \right\|$

C = bar {(A ; 2); (B ; 3) } Alors pour tout point N du plan

$2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = 5\overrightarrow{NC}$

$\left\| 2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} \right\| = \left\| 5\overrightarrow{NC} \right\| = 5NC$

D = bar {(A ; 3); (B ; 2) } Alors pour tout point N du plan

$\left\| 3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} \right\| = \left\| 5\overrightarrow{ND} \right\| = 5ND$

D'où $5NC = 5ND \Leftrightarrow NC = ND$

Les points C et D étant fixes ; l'ensemble des points N cherchés est la médiatrice du segment [CD].

1.5. DROITE ET BARYCENTRE

Activité :

Soit M un point de la droite (AB),

a) Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

b) Déduire que M est barycentre de A et B affectés des coefficients que l'on déterminera.

Solution

a) Justifions qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

Soit M un point de la droite (AB) alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires par conséquent il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

b) Déduisons que M est barycentre de A et B affectés des coefficients que l'on détermine.

On a $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$

$k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$

$k\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$-k\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$(1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

La somme des coefficients $1 - k + k = 1 \neq 0$ alors le point M est barycentre des points A et B affectes respectivement des coefficients $1 - k$ et k

THÉORÈME :

Soient A et B deux points d'un plan, la droite (AB) est l'ensemble des points M barycentre de $(A ; 1-k)$ et $(B ; k)$ lorsque k décrit un réel

2. PROPRIÉTÉS DU BARYCENTRE

2.1. HOMOGÉNÉITÉ DU BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES

Le barycentre de deux points reste inchangeable lorsqu'on remplace les deux coefficients par des coefficients proportionnels non nuls

$G = bar\{(A ; \alpha); (B ; \beta)\}$ alors pour tout réel k non nul
$G = bar\{(A ; k\alpha); (B ; k\beta)\}$

Preuve :

Soit $G = \text{bar}\{(A ; \alpha); (B ; \beta)\}$

Alors $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $k \in IR^*$ alors

$k\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right) = k\vec{0}$

$k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$k\alpha + k\beta = k(\alpha + \beta) \neq 0$ Car $k \neq 0$ $\alpha + \beta \neq 0$ alors

$G = \text{bar}\{(A ; k\alpha); (B ; k\beta)\}$

2.2. ISOBARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES

Le barycentre de deux points pondérés A et B affectés du même coefficient α non nul ($\alpha \in IR^*$) est le milieu du segment [AB], on l'appelle isobarycentre des points A et B

Preuve :

Soit $G = \text{bar}\{(A ; \alpha); (B ; \alpha)\}$ alors

$\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\alpha\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$ Or $\alpha \neq 0$ donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où G est le milieu du segment [AB]

3. EXTENSION AU SYSTÈME DE BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES

Les propriétés et théorèmes précédents pour le barycentre de deux points pondérés se généralisent dans le cas de barycentre de trois points pondérés

3.1. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES

3.1.1. Théorème

Soit les trois points pondérés $(A ; \alpha)$, $(B ; \beta)$et $(C ; \gamma)$ du plan. Lorsque $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Alors il existe un point G unique tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$; le point G est dit barycentre de $(A ; \alpha)$, $(B ; \beta)$et $(C ; \gamma)$; noté souvent $G = \text{bar}\{(A ; \alpha), (B ; \beta), (C ; \gamma)\}$

3.1.2. Position du point G sur le plan

$$G = \text{bar}\{(A ; \alpha), (B ; \beta), (C ; \gamma)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$

3.2. RÉDUCTION DE LA SOMME DE TROIS VECTEURS $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ lorsque $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

3.2.1 Théorème :

Soit $G = \text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$ alors pour tout point M du plan ; $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$

Exercice d'application : Soit ABC un triangle équilatérale de coté 5 cm

1) Construire G le barycentre de $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;1)$ puis prouver que ABCG est un parallélogramme.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

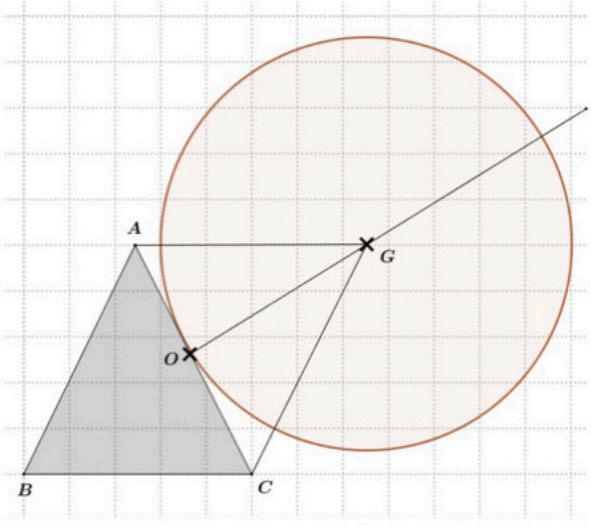
3) Vérifier que le milieu du segment [AC] appartient à cet ensemble de points puis le tracer

Solution intégrale

1) Construisons G le barycentre de $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;1)$ puis prouvons que ABCG est un parallélogramme

❖ Construisons G le barycentre de $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;1)$

$G = \text{bar}\{(A;1),(B;-1),(C;1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



❖ Prouvons que ABCG est un parallélogramme

On a $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$

Ainsi $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$ d'où ABCG est un parallélogramme

2) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$G = \text{bar}\{(A\,;\,1),(B\,;\,-1),(C\,;\,1)\}$, pour tout point M du plan on a :

$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = MG = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$MG = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; le point G étant fixe, l'ensemble des points M cherchés sont les points qui forment le cercle de centre G et de rayon $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

3) Vérifions que le milieu du segment [AC] appartient à cet ensemble de points puis le traçons.

❖ Vérifions que le milieu du segment [AC] appartient à cet ensemble de points

Posons O le milieu du segment [AC]

Considérons le triangle GOC rectangle en O

D'après le théorème de Pythagore $CG^2 = OC^2 + OG^2 \Leftrightarrow$

$OG^2 = CG^2 - OC^2 \Leftrightarrow OG^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$

$OG^2 = \frac{75}{4} \Leftrightarrow OG = \sqrt{\frac{75}{4}}$ d'où $OG = \frac{5\sqrt{3}}{2} = MG$

Donc O milieu du segment [AC] appartient à cet ensemble de points.

❖ Traçons l'ensemble de ces points (voir figure si dessus)

3.3. ISOBARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES

Si $G = \text{bar}\{(A\,;\,\alpha),(B\,;\,\beta),(C\,;\,\gamma)\}$ alors G est appelé isobarycentre des points A, B et C ou centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$

3.4. BARYCENTRE PARTIEL OU ASSOCIATIF

Théorème

Si $G = \text{bar}\{(A\,;\,\alpha),(B\,;\,\beta),(C\,;\,\gamma)\}$ et si la somme $\alpha+\beta \neq 0$ alors on peut définir un point G_0 barycentre partiel des points $(A\,;\,\alpha)$ et $(B\,;\,\beta)$ tel que : $G = \text{bar}\{(G_0\,;\,\alpha+\beta),(C\,;\,\gamma)\}$

N.B : le Théorème de l'associativité du barycentre est réversible

Si $G = \text{bar}\{(G_0\,;\,\alpha+\beta),(C\,;\,\gamma)\}$ et $G_0 = \text{bar}\{(A\,;\,\alpha),(B\,;\,\beta)\}$ alors

$G = \text{bar}\{(A\,;\,\alpha),(B\,;\,\beta),(C\,;\,\gamma)\}$

Preuve : $G = \text{bar}\{(A\,;\,\alpha),(B\,;\,\beta),(C\,;\,\gamma)\} \Leftrightarrow$

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Si $\alpha+\beta \neq 0$ soit $G_0 = \text{bar}\{(A\,;\,\alpha),(B\,;\,\beta)\} \Leftrightarrow$

$\alpha\overrightarrow{G_0A} + \beta\overrightarrow{G_0A} = \vec{0}$

$\alpha\overrightarrow{G_0G} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{G_0G} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{GG_0}$; remplaçons $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$ par $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GG_0}$

$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GG_0} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$; or $(\alpha+\beta)+\gamma \neq 0$ donc

$G = \text{bar}\{(G_0\,;\,\alpha+\beta),(C\,;\,\gamma)\}$

Exercices d'applications :

Exercices 1 :

soit ABC un triangle ; on donne

I le barycentre de $(A\,;2)$ et $(C\,;1)$; J le barycentre de $(A\,;1)$ et $(B\,;2)$ et K le barycentre de $(C\,;1)$ et $(B\,;-4)$

1) Montrer que B est le barycentre de $(K\,;3)$ et $(C\,;1)$

2) En déduire le barycentre des points $(A\,;2)$, $(k\,;3)$ et $(c\,;1)$.

3) Montrer que J est le milieu de [IK].

Exercices 2 :

ABC un triangle et I milieu de [BC].

Soit $G = \text{bar}\{(A\,;\,-1),(B\,;\,2),(C\,;\,2)\}$

1. Monter que G appartient à la droite (AI) .
2. Soit H le symétrique de A par rapport à B, monter que les points C , G et H sont alignés.

Solution intégrale

Exercice 1

1. Montrer que B est le barycentre $K\,;3)$ et $(C\,;1)$

On a K de $(C\,;1)$ et $(B\,;-4)$ alors $\overrightarrow{KC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0}$

$-3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} = \vec{0};\ 3 + 1 \neq 0$

alors B est le barycentre $(K\,;3)$ et $(C\,;1)$

2. Déduisons le barycentre des points (A ; 2), (K ; 3) et (C ; 1).

Posons $G = \text{bar}\{(A\,;\,2),(K\,;\,3),(C\,;\,1)\}$

On a $B = \text{bar}\{(K\,;\,3),(C\,;\,1)\}$ d' après le théorème de l'associativité du barycentre $G = \text{bar}\{(A\,;\,2),(B\,;\,4)\}$;

$J = \text{bar}\{(A\,;\,1),(B\,;\,2)\}$ d'après l'homogénéité du barycentre

$J = \text{bar}\{(A\,;\,2),(B\,;\,4)\}$ d'où $J = G$ ainsi

$J = \text{bar}\{(A\,;\,2),(K\,;\,3),(C\,;\,1)\}$.

3. Montrons que F est le milieu du segment [IK]

On a $J = \text{bar}\{(A\,;\,2),(K\,;\,3),(C\,;\,1)\}$ et $I = \text{bar}\{(A\,;\,2),(C\,;\,1)\}$ d'après l'associativité du barycentre $F = \text{bar}\{(I\,;\,3),(K\,;\,3)\}$ d'où F l'isobarycentre de I et K par conséquent F milieu du segment [IK].

Exercice 2

1) Montrons que G appartient à la droite (AI)

$G = \text{bar}\{(A\,;\,-1),(B\,;\,2),(C\,;\,2)\}$; I Milieu de [BC] $\Leftrightarrow$

$I = \text{bar}\{(B\,;2),(C\,;\,2)\}$

D'après le théorème de l'associativité du barycentre

$G = \text{bar}\{(A\,;\,-1),(I\,;\,4)\}$ donc G appartient à la droite (AI) .

2) Montrons que les points C, G et H sont alignés.

H le symétrique de A par rapport à B équivaut B milieu [AH].

$G = \text{bar}\{(A\,;\,-1),(B\,;\,2),(C\,;\,2)\} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{HG} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$;

B Milieu [AH] $\Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{GH} - 2\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GC}$ ainsi $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GC}$ colinéaires d'où les points C, G et H sont alignés.

SÉRIE D'EXERCICES

THÈME : BARYCENTRE

EXERCICE 1 Dans chacun des cas suivants, donner les coefficients α et β tels que M soit barycentre de $(A\,;\,\alpha)$ et $(B\,;\,\beta)$.

1. $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
4. $-3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$

EXERCICE 2 (corrigé)

Soit ABC un triangle et I le milieu de[BC]. Soit G le barycentre de $(A;\,-1)$ $(B;\,2)$ et $(C;\,2)$.

1) Montrer que G appartient à la droite (AI)

2) Soit H le symétrique de A par rapport à B. Montrer que C, G et H sont alignés.

EXERCICE 3 Soit A et B deux points du plan

On note I le milieu du segment [AB]

1) Soit G le barycentre de $(A;\,-1)$ et $(B;\,3)$. Construire G

2) a) construire le point J symétrique de G par rapport à I.

b) Montrer que $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

c) En déduire deux réels α et β tels que J soit le barycentre de $(A;\,\alpha)$ et $(B;\,\beta)$

EXERCICE 4 Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm$

On considère le barycentre G du système $\{(A;1)\,,(B;3)\}$ et le barycentre K du système $\{(A;1)\,,(B;3)\}$

1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

2) Placer les points A , B, G et K

3) Montrer que les segments [AB] et [GK] ont même milieu.

EXERCICE 5 Dans le plan P muni d'un repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(-1;3)$ et $B(2\,;-1)$ et $C(3;4)$.

1) placer les points A, B et C dans le repère.

2) Déterminer les coordonnées des points G isobarycentre des points A, B , C puis placer G dans le plan.

3) Construire les points I, J et K définis par :

$I = \text{bar}\{(A;1)(B;2)\}$ $J = \text{bar}\{(A;2)(C;1)\}$ et $K = \text{bar}\{(C;1)(B;-4)\}$

4) Démontrer que B est le barycentre de $(K;3)$ et $(C;1)$.

5) Démontrer que I est barycentre de $(A;2)$, $(K;3)$ et $(C;1)$.

6) En déduire que I, J et K sont alignés et que I est le milieu de [JK].

▸ **EXERCICE 6** Soit ABC un triangle, I et J les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB}$

On note G la symétrique de B par rapport à I

1) Faire une figure et placer les points I et J.

2) Exprimer $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) En déduire que G est le barycentre de $(A,2)$, $(B,-3)$ et $(C,4)$.

4) Montrer que les points G , C et J sont alignés.

▸ **EXERCICE 7 (corrigé)**

Soit ABC un triangle, I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB}$

On note G le symétrique de B par rapport à I.

1) Faire une figure et placer les points I et J.

2) a) Exprimer $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que G est le barycentre de $(A,2)$ $(B,-3)$ et $(C,4)$

Montrer que les points G, C et J sont alignés. Aide : Exprimer J comme barycentre de A et B.

▸ **EXERCICE 9 (corrigé)**

1) Déterminer l'ensemble D_G des valeurs du réel k pour que le barycentre G_k de $\{(A\ ;\ 2k^2-3),(B\ ;k)\ ,(C\ ;\ -k)\}$ existe

2) Montrer que, pour tout réel k de D_G on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{2k^2-3}\overrightarrow{BC}$$

3) Représenter sur une figure les points A , B et C ainsi que I milieu de [BC].

4) En utilisant la question 2) placer les points G_1 et G_{-1} .

5) Prouver que A est le milieu de $[G_1G_{-1}]$.

6) Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

EXERCICE 10

Soit A , B et C trois points non alignés du plan et α un réel .

1) Construire le point I barycentre du système $\{(A;-1),(B;3)\}$.

2) Pour quelle valeur de α le système $\{(A;-1),(B;3),(C,\alpha)\}$ n'admet pas de barycentre

3) On pose $\alpha = 4$ construire G_1 barycentre du système $\{(A;-1),(B;3),(C,\alpha)\}$

4) On pose $\alpha = -1$ construire G_2 barycentre du système $\{(A;-1),(B;3),(C,\alpha)\}$

5) Démontrer que G_1 ; G_2et I sont alignés.

6) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\|-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\| = 12$

b) $\|-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MG_1}\|$

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

THÈME : BARYCENTRE

EXERCICE 2

1) Montrons que G appartient à la droite (AI)

I le milieu de [BC] ⇔ I isobarycentre des point B et C par conséquent

$I = \text{bar}\{(B;2);\ (C;2)\}$ or

$G = \text{bar}\{(A;-1);\ (B;2);\ (C;2)\}$ d'après l'associativité du barycentre

$G = \text{bar}\{(A;-1);\ (I;4)\}$ ainsi les points G ; A et I sont alignés donc G appartient à la droite (AI)

2) Montrer que C, G et H sont alignés.

$G = \text{bar}\{(A;-1);\ (B;2);\ (C;2)\} \Leftrightarrow$

$-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$-\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

H Symétrique de A par rapport à B ⇔ $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HB}$ ainsi

$-\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GC}$

Donc les points C, G et H sont alignés

EXERCICE 7

1) Déterminons l'ensemble D_G des valeurs du réel k pour que le barycentre G_k de $\{(A\ ;\ 2k^2-3), (B\ ;k)\ , (C\ ;\ -k)\}$ existe .

G_k existe si et seulement si

$2k^2 - 3 + k - k \neq 0 \Leftrightarrow$

$2k^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $k \neq -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$D_G = IR' \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$$

2) Montrons que, pour tout réel k de D_G on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{2k^2-3}\overrightarrow{BC}$$

$G_k = \{(A\ ;\ 2k^2 - 3), (B\ ;k)\ , (C\ ;\ -k)\} \Leftrightarrow$

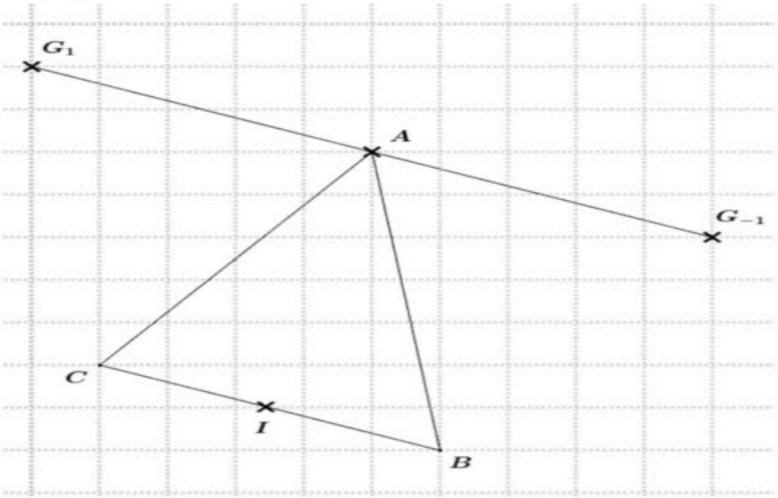
$(2k^2 - 3)\overrightarrow{G_kA} + K\overrightarrow{G_kB} - k\ \overrightarrow{G_kC} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$(2k^2 - 3)\overrightarrow{G_kA} + K\overrightarrow{G_kC} + K\overrightarrow{CB} - k\ \overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$

$(2k^2 - 3)\overrightarrow{G_kA} + K\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ d'où

$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{2k^2-3}\overrightarrow{BC}$

3) Représentons sur une figure les points A , B et C ainsi que I milieu de [BC].



4) En utilisant la question 2) placer les points G_1 et G_2 .

On a $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{2k^2-3}\overrightarrow{BC}$

❖ $k = 1$

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{-1}{2(1)^2 - 3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{BC}$

• $k = -1$

$\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2(-1)^2 - 3}\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AG_{-1}} = -\overrightarrow{BC}$

5) Prouvons que A est le milieu de $[G_1G_2]$.

On a $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG_{-1}} = -\overrightarrow{BC}$

Ainsi $\overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{AG_{-1}}$ d'où

$\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{AG_{-1}} = \vec{0}$ donc A est le milieu de $[G_1G_{-1}]$.

6) Déterminons l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

On a pour $k = 1$

$G_1 = \{(A\,;\,-1), (B\,;1)\,, (C\,;\,-1)\}$

Pour tout point M du plan

$-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG_1} \Leftrightarrow \|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MG_1}\|$

Pour $k = -1$

$G_{-1} = \{(A\,;\,-1), (B\,;-1)\,, (C\,;\,1)\}$

Pour tout point M du plan

$-\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG_{-1}} \Leftrightarrow \|-\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MG_{-1}}\|$ or

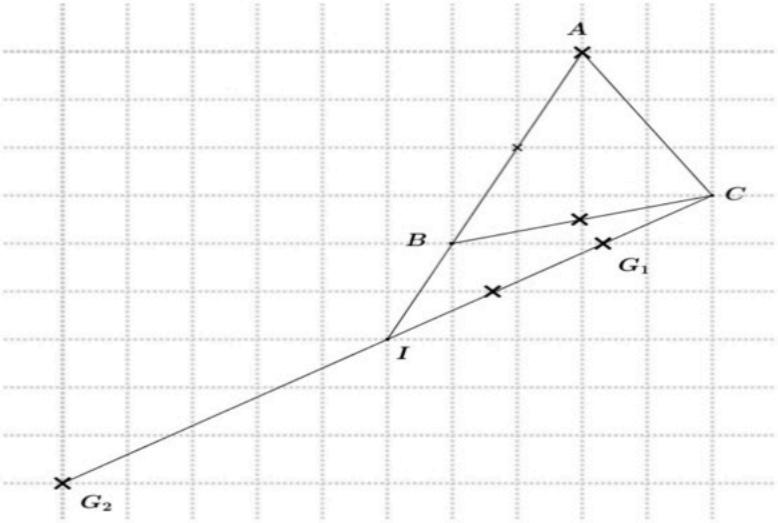
$\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$ ainsi

$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_{-1}}\| \Leftrightarrow MG_1 = MG_{-1}$; les points G_1 et G_{-1} étant fixes ; l'ensemble (E) des points M de l'espace cherchés est la médiatrice du segment $[G_1G_{-1}]$.

EXERCICE 8

1) Construisons le point I barycentre du système $\{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3)\}$.

$I = \{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{AB}$



2) Les valeurs de α pour les quels le système $\{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3),(C,\alpha)\}$ n'admet pas de barycentre.

Le système $\{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3),(C,\alpha)\}$ n'admet pas de barycentre si et seulement si $-1 + 3 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$

3) On pose $\alpha = 4$ construire G_1 barycentre du système $\{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3),(C,\alpha)\}$

$G_1 = \{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3),(C,4)\}$ et

$I = \{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3)\}$ D'après le barycentre partiel.

$G_1 = \{(I;\ 2)\ ,(C,4)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG_1} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{IC}$

4) On pose $\alpha = -1$ construire G_2 barycentre du système $\{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3),(C,\alpha)\}$

$G_2 = \{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3),(C,-1)\}$

$I = \{(A;\ -1)\ ,(B;\ 3)\}$ d'après le barycentre partiel.

$G_2 = \{(I;\ 2)\ ,(C,-1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG_2} = -\overrightarrow{IC}$

5) Démontrons que G_1 ; G_2et I sont alignés.

On a $\overrightarrow{IG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IG_1}$ et

$\overrightarrow{IG_2} = -\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = -IG_2$

Alors $\frac{3}{2}\overrightarrow{IG_1} = -\overrightarrow{IG_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG_2} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IG_1}$ les vecteurs $\overrightarrow{IG_2}$ et $\overrightarrow{IG_1}$ sont colinéaires par conséquent les points G_1 ; G_2 et I sont alignés.

6) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\left\|-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = 12$

$G_1 = \{(A; -1), (B; 3), (C, 4)\}$; pour tout point M du plan

$-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG_1}$

$\left\|-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|6\overrightarrow{MG_1}\right\| = 12$

$MG_1 = 2$; le point G_1 étant fixe, les points M cherchés est l'ensemble des points du cercle de centre G_1 et de rayon

b) $\left\|-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \|MG_1\|$

$G_2 = \{(A; -1), (B; 3), (C, -1)\}$; pour tout point M du plan

$-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG_2} \Leftrightarrow$

$\left\|-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG_1}\right\|$

$MG_2 = MG_1$; les points G_1 et G_2 étant fixes ; l'ensemble des points M de l'espace cherchés est la médiatrice du segment $[G_1G_2]$

DEVOIR A LA MAISON N°I

✍ EXERCICE 1

Soit le système de points pondérés $\{(A; 1);\ (B; -2)$ et $(C; 5)\}$.

1. Justifier que le système admet un barycentre appelé G

2. Soit I le barycentre de $\{(A; 1);\ (B; -2)\}$. J celui de $\{(B; -2)\ ;\ (C; 5)\}$ et K celui de $\{(A; 1);\ (C; 5)\}$. En utilisant l'associativité du barycentre, démontrer que

a) $G \in (IC)$

b) $G \in (JA)$

c) $G \in (KB)$

3. Déduire que les droites (IC), (JA) et (KB) sont concourantes

✍ EXERCICE 2

ABC est un triangle de centre de gravité G (isobarycentre de A, B, C). On appelle I le milieu de [BC]. La parallèle à (BC) passant par G coupe (AC) en E.

1. Faire la figure et construire le point D défini par $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$

2. On donne $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; trouver les coefficients α et β tels que E soit barycentre de $(A; \alpha)$ et $(C; \beta)$.

3. Montrer que B est barycentre de $(A; 1)$ et $(D; 1)$.

4. Montrer que I est barycentre de $(A; 1);\ (D; 1)$ et $(C; 2)$.

5. Déduire que les points I, D et E sonts alignés puis préciser la position de I sur le segment [DE]

✍ EXERCICE 3

Partie A

Soit ABC un triangle, on donne I le barycentre de $(A; 2)$ et $(C; 1)$;

F le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; 2)$ et K le barycentre de $(C; 1)$ et $(B; -4)$;

1) Montrer que B est le barycentre de $(K; 3)$ et $(C; 1)$

2) En déduire le barycentre de $(A; 2)$, $(K; 3)$ et $(C; 1)$

3) Montrer que F est le milieu de [I K]

Partie B Soit ABCD rectangle tels que $AB = 3$ et $BC = 4$

1. Déterminer les coefficients $\alpha, \beta, \aleph$ tels que D soit barycentre du système $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$ et $(C; \aleph)$

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5$

DEVOIR A LA MAISON N°II

✍ **EXERCICE 1 Q.C.M** (Question à Choix Multiples)

Si m désigne un réel, le barycentre de $(A, 3m)$ $(B, 5m-2)$ n'existe que si	a $m \neq 1$	b $m \neq 0$	c $m \neq ¼$
Le barycentre de (A, 2) (B, 3) est le point G tel que	a $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$	b $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GB}$	c $5\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$
Le barycentre de (B, 1) et (C, −2) est	a le symétrique de C par rapport à B	b le symétrique de B par rapport à C	c sur le segment [BC]
Le barycentre de (A,0) (B,3) est le point	a A	b B	c n'existe pas

✍ **EXERCICE 2**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB=4cm et AC=6cm

1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Calculer la distance AG.

2. Exprimer G comme barycentre des ponts A, B et C affectes des coefficients que l'on déterminera.

Déterminer l'ensemble des points M tels que

$\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 10$

✍ **EXERCICE 3**

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ On considère les points A $(-1\ ;\ 1)$ B $(2\ ;-1)$ C $(3\ ;\ 2)$

1) Calculer les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

2) Soit G $(-3\ ;-5)$ le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, -2)\}$ Déterminer les réels α et β

3) Soit G_m le barycentre de $\{(A, 1), (B, 2), (C, m)\}$ $m \in$ IR

a) Pour quelles valeurs de m $G_m$existe-t-il

b) Déterminer les coordonnées de $(x_m\ ;\ y_m)$ de G_m en fonction de m

c) Prouver à partir de b) que $m = \frac{3x_m - 3}{3 - x_m}$ et $m = \frac{3y_m + 1}{2 - y_m}$

d) Trouver une relation indépendante de m liant les coordonnées de G

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Résoudre une équation du second degré par la méthode du discriminant
- Résoudre des équations se ramenant au second degré.
- Résoudre une inéquation du second degré
- Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
- Trouver le signe d'un trinôme du second degré.

PLAN DU COURS

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ 119
1. FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ 121
1.1. DÉFINITION 121
1.1.1. Monôme 121
1.1.2. Trinôme du second degré 121
1.1.3. Racine ou zéro d'un trinôme 121
1.2. FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME 122
1.2.1. Rappels 122
1.2.2 Étapes d'élaboration de la forme canonique 122
2. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ 123
2.1. DÉFINITION ET EXEMPLES 123
2.2. RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ $ax^2 + bx + c = 0$ 123
2.3. ÉQUATIONS SE RAMENANT A UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ 127
2.3.1. Cas des équations bicarrées 127
2.3.2. Autres cas 128

3. FACTORISATION D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ.. 129
4. SOMME ET PRODUIT DES RACINES D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ 131
5. TROUVER DEUX NOMBRES CONNAISSANT LEUR SOMME ET LEUR PRODUIT..... 133
6. INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ..... 136
6.1. DÉFINITION 136
6.2. RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ 136
6.2.1. Étude de signe d'un trinôme du second degré..... 137
6.2.2. Application à la résolution d'inéquation 140
7. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES..... 143
7.1. DÉFINITION 143
7.2. ÉTUDE DE L'EXISTENCE ET DU SIGNE DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION PARAMÉTRIQUE ... 146

1. FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

1.1. DÉFINITION

1.1.1. Monôme

Soit a un réel et n un entier naturel ($n \in IN$) ; on appelle monôme toute expression de la forme ax^n, il est caractérisé par :

- **son coefficient a ($a \in IR$) ;**
- **sa variable x (qui peut être toute lettre de l'alphabet) ;**
- **sa puissance ou degré n .**

Exemples : $7x^2$; πx^3 ; $\sqrt{5}\,y^2$

1.1.2. Trinôme du second degré

On appelle trinôme du second degré toute relation de la forme $ax^2 + bx + c$ ou a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$

- **Les réels a, b et c sont les coefficients du trinôme ; x représente sa variable**
- **Le réel c est dit valeur indépendant.**
- **Si le coefficient b et ou c est nul le trinôme est dit trinôme incomplet**

Exemples :

- ✓ $-2x^2 + 3x - 5$; $a = -2$, $b = 3$, $c = -5$
- ✓ $\pi x^2 - 2$; $a = \pi$, $b = 0$, $c = -2$
- ✓ $x^2 + (1 - \sqrt{3})x$ $a = 1$, $b = (1 - \sqrt{3})$, $c = 0$

N.B : si le coefficient $a = 0$ alors on a plus un trinôme du second degré.

1.1.3. Racine ou zéro d'un trinôme

On appelle racine ou zéro d'un trinôme toute valeur de la variable x qui annule le trinôme

Exemples :

1 est racine du trinôme $x^2 - 3x + 2$

-2 est racine du trinôme $x^2 - 4$

1.2. FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME

1.2.1. Rappels

On a $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow (a + b)^2 - b^2 = a^2 + 2ab$

$a^2 + 2ab$ est le début du développement ou début du carré de $(a + b)^2$

De même $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 - b^2 = a^2 - 2ab$

$a^2 - 2ab$ est aussi le début du développement ou début du carré de $(a - b)^2$

1.2.2 Étapes d'élaboration de la forme canonique

Soit le trinôme $T(x) = 2x^2 - 3x + 1$; élaborons la forme canonique de $T(x)$.

Mettons 2 en facteur $T(x) = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$ (1)

Considérons $x^2 - \frac{3}{2}x$ qui est le début du développement de $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$

$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = x^2 - \frac{3}{2}x$

Remplaçons $x^2 - \frac{3}{2}x$ dans l'expression (1) par $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$

$T(x) = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow T(x) = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right]$

ainsi $\mathbf{T(x) = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right]}$ est la forme canonique de $T(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Cas Général

Soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, élaborons la forme canonique de $T(x)$

Mettons le coefficient **a** en facteur

$T(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ (1)

Considérons $x^2 + \frac{b}{a}x$ qui est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x$

Remplaçons $x^2 + \frac{b}{a}x$ dans l'expression (1) par $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

$T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow T(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Pour simplifier cette écriture on pose Δ (delta) $= b^2 - 4ac$

La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée **discriminant** (Qui permet d'établir une distinction) du trinôme $ax^2 + bx + c$;

$\mathbf{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$ est la forme canonique de $ax^2 + bx + c$

Exercice d'application :

1) Élaborons la forme canonique des trinômes suivants :

a) $x^2 - 4x - 45$

b) $\sqrt{2}x^2 - 2x + \sqrt{2}$

2) Déterminer les réel α et β tel que $x^2 - 5x - 6 = (x - \alpha)^2 + \beta$ en déduire une écriture factoriser de $x^2 - 5x - 6$

2. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

2.1. DÉFINITION ET EXEMPLES

Définition

Soit les réels a, b et c (avec $a \neq 0$) ; toute relation du type $ax^2 + bx + c = 0$ est dite équation du second degré.

Exemples

- ✓ $-7x^2 - x - 4 = 0$
- ✓ $x^2 - \pi = 0$
- ✓ $3x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - 5 = 0$

2.2. RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ $ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$; Ainsi résoudre l'équation $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ revient à résoudre l'équation de la forme canonique $\mathbf{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0}$

$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ Car $a \neq 0$; les solutions de l'équation sont déterminées en fonction de **la valeur algébrique** du discriminant Δ du trinôme ; on a les solutions selon les conditions suivantes :

Si $\Delta < 0$; l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle $S_{IR} = \emptyset$

Preuve :

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

Or $\Delta < 0$ alors la quantité $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ ainsi

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$; Impossible car le carré d'un nombre n'est jamais négatif donc l'équation n'admet pas de solution réelle ainsi $S_{IR} = \emptyset$.

Exemple : résolvons dans IR l'équation : $-x^2 + 2x - 5 = 0$

Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-5) = -16$

$\Delta = -16$; L'équation $-x^2 + 2x - 5 = 0$ n'admet pas de solution réelle $S_{IR} = \emptyset$

Si $\Delta = 0$; l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution double $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Preuve :

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

Or $\Delta = 0$ alors la quantité $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ ainsi

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x + \frac{b}{2a} = 0$ ou $x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow$

$x = -\frac{b}{2a}$ ou $x = -\frac{b}{2a}$; l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution double $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Exemple : résolvons dans IR l'équation : $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(4)(1) = 0$

$\Delta = 0$; l'équation $4x^2 + 4x + 1 = 0$ admet une solution double

$x_0 = \frac{-4}{2(4)} = \frac{-1}{2}$ $S_{IR} = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$

Si $\Delta > 0$; l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Preuve :

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$; $\Delta > 0$ l'équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ d'où

$x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple : résolvons dans IR l'équation : $-x^2 + 2x + 3 = 0$

Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(3) = 16$

$\Delta = 16$; l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2(-1)} = -1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2(-1)} = 3$

$\mathbf{S_{IR} = \{-1\,;\,3\}}$

REMARQUE :

- **Si les coefficients a et c du trinôme $ax^2 + bx + c$ associé d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont de signes contraires alors l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.**
- **pour résoudre une équation du second degré dont le coefficient b et ou c du trinôme associé est nul (trinôme incomplet) le calcul du discriminant Δ n'est pas nécessaire.**

Exercice d'application :

Résoudre dans IR les équations suivantes

a) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$

b) $-x^2 + 4x - 7 = 0$

c) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

d) $x^2 - 7 = 0$

e) $-3x^2 + x = 0$

DISCRIMINENT RÉDUIT :

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$, si le coefficient b est un nombre paire alors pour résoudre l'équation associée $ax^2 + bx + c = 0$ on peut utiliser le discriminant réduit donné par $\Delta'(\text{delta prime}) = (b')^2 - ac$ (avec $b' = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2b'$)

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (2b')^2 - 4ac = 4(b')^2 - 4ac$

$\Delta = 4((b')^2 - ac)$ **Ainsi** $\Delta = 4\Delta'$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow \Delta' < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle $S_{IR} = \emptyset$

Exemple : résolvons dans IR l'équation : $2x^2 + 6x + 5 = 0$

Calculons Δ'

$\Delta' = (b')^2 - ac = (3)^2 - 2(5) = -1$

$\Delta' = -1$

$S_{IR} = \emptyset$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta' = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution double $x_0 = \frac{-b'}{a}$

Exemple : résolvons dans IR l'équation : $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Calculons Δ'

$\Delta' = (b')^2 - ac = (6)^2 - 4(9) = 0$, l'équation admet une solution double x_0

$x_0 = \frac{-b'}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $S_{IR} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

Exemple : résolvons dans IR l'équation : $-x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

$\Delta' = (b')^2 - ac = \left(\sqrt{3}\right)^2 - (-1)(1) = 4, \Delta' = 4$ l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\sqrt{3} + 2}{-1} = \sqrt{3} - 2$$

$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{3} - 2}{-1} = -\sqrt{3} + 2$

$\mathbf{S_{IR} = \{-\sqrt{3} + 2 ; -\sqrt{3} - 2\}}$

2.3. ÉQUATIONS SE RAMENANT A UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

La résolution de certaines équations passe nécessaire par un changement de variable aboutissant à une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

2.3.1. CAS DES ÉQUATIONS BICARRÉES

Toute équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ est dite équation bicarrée. Pour résoudre ce type d'équation, on effectue un changement de variable en posant $X = x^2$. les solutions de l'équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$ sont déduites de celles du second degré.

Exercice d'application :

Résoudre dans IR les équations suivantes

1) $x^4 - x^2 - 6 = 0$
2) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$
3) $-x^4 + x^2 - 2 = 0$
4) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Solutions succinctes

Résolvons dans IR les équations

$x^4 - x^2 - 6 = 0$

Effectuons un changement de variable

Posons $X = X^2$ l'équation devient :

$X^2 - X - 6 = 0$

$X_1 = 3$ et $X_2 = -2$

$X = X^2 = 3 \Leftrightarrow X^2 = 3$ alors $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$X = X^2 = -2 \Leftrightarrow X^2 = -2$ Impossible

$\mathbf{S_{IR} = \{\sqrt{3} ; -\sqrt{3}\}}$

1) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$

Effectuons un changement de variable

Posons $X = X^2$ l'équation devient :

$X^2 + 6X + 5 = 0$

$X_1 = -1$ et $X_2 = -5$

$X = X^2 = -1 \Leftrightarrow X^2 = -1$ Impossible

$X = X^2 = -5 \Leftrightarrow X^2 = -5$ Impossible

$\mathbf{S_{IR}} = \emptyset$

3) $-x^4 + x^2 - 2 = 0$

Effectuons un changement de variable

Posons $X = X^2$ l'équation devient : $-X^2 + X - 2 = 0$

$\Delta = -7$

L'équation $-X^2 + X - 2 = 0$ n'admet pas de solution, par conséquent l'équation $-x^4 + x^2 - 2 = 0$ n'admet pas de solution.

$\mathbf{S_{IR}} = \emptyset$

4) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Effectuons un changement de variable

Posons $\mathbf{X} = X^2$ l'équation devient :

$X^2 - 6X + 8 = 0$

$\mathbf{X_1} = 2$ et $X_2 = 4$

$\mathbf{X} = X^2 = 2 \Leftrightarrow X^2 = 2$ alors $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$X = X^2 = 4 \Leftrightarrow X^2 = 4$ alors $x = 2$ ou $x = -2$

$\mathbf{S_{IR}} = \{-\sqrt{2}\ ; -2\ ; \sqrt{2}\ ; 2\}$

2.3.2. AUTRES CAS

A l'instar des équations bicarrées, ils existent d'autres équations qui nécessitent un changement de variable.

Exercice d'application :

Résoudre dans IR les équations suivantes

1. $x^2 - 4|x| - 9 = 0$
2. $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$
3. $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 6 = 0$

Solutions intégrale

Résolvons dans IR les équations

1. $x^2 - 4|x| - 9 = 0$

Effectuons un changement de variable

Posons $X = |x|$ l'équation devient : $X^2 - 4X + 8 = 0$

$X_1 = 2 - \sqrt{13}$ et $X_2 = 2 + \sqrt{13}$

$X = |x| = 2 - \sqrt{13} \Leftrightarrow |x| = 2 - \sqrt{13}$ impossible

$X = |x| = 2 + \sqrt{13} \Leftrightarrow |x| = 2 + \sqrt{13}$ alors $x = 2 + \sqrt{13}$ ou

$x = -2 - \sqrt{13}$

$\mathbf{S_{IR} = \{2 + \sqrt{13}\,;\, -2 - \sqrt{13}\}}$

2. $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

Effectuons un changement de variable

Posons $X = \sqrt{x}$ l'équation devient : $X^2 + 2X - 3 = 0$

$X_1 = -3$ et $X_2 = 1$

$X = \sqrt{x} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -3$ impossible

$X = \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1$ alors $x = 1$

$\mathbf{S_{IR} = \{1\}}$

3. $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 6 = 0$

Effectuons un changement de variable

Posons $X = \frac{x+1}{x-2}$ l'équation devient : $X^2 - 5X + 6 = 0$

$X_1 = 2$ et $X_2 = 3$

$X = \frac{x+1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} = 2$ alors $x = 5$

$X = \frac{x+1}{x-2} = 3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} = 3$ alors $x = \frac{7}{2}$

$\mathbf{S_{IR} = \left\{5\,;\, \frac{7}{2}\right\}}$

3. FACTORISATION D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Pour trouver la forme factorisée d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et si les coefficients **b et c** sont non nuls il sera nécessaire de calculer le discriminant Δ de l'équation associée $ax^2 + bx + c = 0$ et on a :

Si $\Delta < 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable

Preuve :

On a $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, factoriser $ax^2 + bx + c$ équivaut à factoriser $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

On a $\Delta < 0$; alors la quantité $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ d'où a $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ n'est pas factorisable donc le trinôme ax^2+bx+c n'est pas factorisable.

Exemple : factorisons le trinôme $-3x^2+3\sqrt{2}x-4$

Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 4(-3)(-4) = -30$

$\Delta = -30$ alors le trinôme $-3x^2+3\sqrt{2}x-4$ n'est pas factorisable

Si $\Delta = 0$ alors le trinôme ax^2+bx+c est factorisable et sa forme factorisée est : $a(x-x_0)^2$

Preuve :

On a $ax^2+bx+c = a\left[\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$, factoriser ax^2+bx+c équivaut à factoriser $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Ici $\Delta = 0$ alors la quantité $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ ainsi

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ Or $-\frac{b}{2a} = x_0$

D'ou $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x-x_0)^2$ ainsi le trinôme ax^2+bx+c est factorisable et sa forme factorisée est : $\mathbf{a(x-x_0)^2}$.

Exemple : factorisons le trinôme $-x^2-\sqrt{3}x-\frac{3}{4}$

Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4(-1)\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$

Calculons x_0

$x_0 = \frac{-b}{2a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$-x^2-\sqrt{3}x-\frac{3}{4} = -\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Si $\Delta > 0$ alors le trinôme ax^2+bx+c est factorisable et a pour forme factorisée : $a(x-x_1)(x-x_2)$

Preuve :

On a $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$, factoriser ax^2+bx+c équivaut à factoriser a $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$\Delta > 0$ alors la quantité $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$

ainsi $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x-x_1)(x-x_2)$$

D'où le trinôme ax^2+bx+c est factorisable et a pour forme factorisée $\mathbf{a(x-x_1)(x-x_2)}$

Exemple : factorisons le trinôme $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

Calculons Δ

$\Delta = b^2-4ac = \left(\frac{1}{2}\right)^2-4(1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$

Calculons x_1 et x_2

$x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} = (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

4. SOMME ET PRODUIT DES RACINES D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Soit $ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ un trinôme du second degré ; s'il admet deux racines **distinctes** ou **confondues** alors celles-ci sont liées par des relations : **somme** S et **produit** P avec les coefficients du trinôme

$$\mathbf{S = x_1+x_2 = \frac{-b}{a} \quad et \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}$$

Preuve :

❖ $S = x_1+x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$

d'où $\mathbf{S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$

❖ $x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$

$x_1 \times x_2 = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

d'où $\mathbf{P = x_1 \times x_2 = \frac{C}{a}}$

Exercices d'applications

Exercice 1

Soit l'équation E(x): $x^2 + (2+\pi)x + 2\pi = 0$

1) Vérifier que -2 est solution de l'équation $E(x) = 0$.

2) Sans calculer Δ , déterminer l'autre solution de l'équation $E(x) = 0$

3) En déduire la forme factorisée du trinôme $x^2 + (2+\pi)x + 2\pi$

Exercice 2

Soit l'équation $3x^2 + 7x - 2 = 0$

1) Sans calculer Δ , justifier brièvement que l'équation admet deux solutions distinctes.

2) Sans déterminer les solutions x_1 et x_2, calculer la quantité des expressions suivantes $A = {x_1}^2 + {x_2}^2$; $B = {x_1}^3 + {x_2}^3$ et $C = (2x_1 - 5x_2)(2x_2 - 5x_1)$

Solutions intégrale

Exercice 1

1) Vérifions que -2 est solution de l'équation $E(x) = 0$

Calculons $E(-2)$

$E(-2) = (-2)^2 + (2+\pi)(-2) + 2\pi = 4 - 4 - 2\pi + 2\pi = 0$

Donc -2 est solution de l'équation $E(x) = 0$

2) Déterminons l'autre solution de l'équation $E(x) = 0$

$P = x_1 \times x_2 = \frac{C}{a} \Leftrightarrow -2x_2 = 2\pi \Leftrightarrow \mathbf{x_2 = -\pi}$

3) Déduisons la forme factorisée du trinôme $x^2 + (2+\pi)x + 2\pi$

$\mathbf{x^2 + (2+\pi)x + 2\pi = (x+2)(x+\pi)}$

Exercice 2

1) Justifions brièvement que l'équation admet deux solutions distinctes.

L'équation $3x^2 + 7x - 2 = 0$ admet deux solutions distinctes car les coefficients a et c sont de signes contraires.

2) Calculons la quantité des expressions suivantes

❖ $A = {x_1}^2 + {x_2}^2$

$A = {x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (S)^2 - 2P$

Avec $S = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{3}$ et $P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3}$

$A = (S)^2 - 2P = \left(\frac{-7}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{49}{9} + \frac{4}{3} = \frac{61}{9}$ $\mathbf{A = \frac{61}{9}}$

❖ $B = {x_1}^3 + {x_2}^3$

$B = {x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)({x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2)$

$B = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2)$

$B = (S)((S)^2 - 3P) = S^3 - 3SP = \left(\frac{-7}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{-7}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)$

$\mathbf{B = -\frac{-469}{27}}$

❖ $C = (2x_1 - 5x_2)(2x_2 - 5x_1)$

$C = (2x_1 - 5x_2)(2x_2 - 5x_1) = 4x_1x_2 - 10{x_1}^2 - 10{x_2}^2 + 25x_1x_2$

$C = 4x_1x_2 - 10({x_1}^2 + {x_2}^2) + 25x_1x_2 = 29x_1x_2 - 10((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)$

$C = 29P - 10((S)^2 - 2P) = 29P - 10(S)^2 + 20P = 49P - 10S^2$

$C = 49P - 10S^2 = 49\left(\frac{-2}{3}\right) - 10\left(\frac{-7}{3}\right)^2 = \frac{-784}{9}$ $\mathbf{C = \frac{-784}{9}}$

5. TROUVER DEUX NOMBRES CONNAISSANT LEUR SOMME ET LEUR PRODUIT

Trouver la valeur de deux nombres x et y connaissant leur somme $\mathbf{S = x + y}$ et leur produit $\mathbf{P = xy}$ formant le système $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, équivaut à résoudre l'équation du second degré $\mathbf{X^2 - SX + P = 0}$

On calculera tout d'abord la quantité $\mathbf{S^2 - 4P}$ et si :

$S^2 - 4P < 0$ alors l'équation $X^2 - SX + P = 0$ n'admet pas de solution par conséquent le système $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ n'admet pas de solution ainsi les réels x et y de somme S et de produit P n'existent pas d'où $S_{IR^2} = \emptyset$

Exemple : déterminer si possible la valeur des réels x et y dans les cas suivants :

a) $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=4 \end{cases}$

Résolution

Déterminons la valeur des réels x et y

a) $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=9 \end{cases}$

Calculons S^2-4P

$S^2-4P=(-4)^2-4(9)=-20$

$S^2-4P=-20$

$\mathbf{S_{IR^2}=\emptyset}$

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=4 \end{cases}$

Calculons S^2-4P

$S^2-4P=(2)^2-4(4)=-12$

$S^2-4P=-12$

$\mathbf{S_{IR^2}=\emptyset}$

$S^2-4P=0$ alors l'équation $X^2-SX+P=0$ admet une solution double X_0 par conséquent le système $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ admet un couple de solution $S_{IR^2}=\{(x_0\,;x_0)\}$

Exemple : résoudre dans IR^2 les systèmes suivants si possibles.

a) $\begin{cases} x+y=\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ xy=\frac{2}{9} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=\sqrt{3} \\ xy=\frac{3}{4} \end{cases}$

Résolution intégrale

Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants si possibles.

a) $\begin{cases} x+y=\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ xy=\frac{2}{9} \end{cases}$

Calculons S^2-4P

$S^2-4P=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2-4\left(\frac{2}{9}\right)=0$

$S^2-4P=0$

Les réels x et y de somme $S=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ et produit $P=\frac{2}{9}$ sont aussi solution de l'équation du second degré $X^2-\frac{2\sqrt{2}}{3}X+\frac{2}{9}=0$

$\Delta=0\,;X_0=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$S_{IR^2}=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\,;\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} x+y=\sqrt{3} \\ xy=\frac{3}{4} \end{cases}$

Calculons S^2-4P

$S^2-4P=\left(\sqrt{3}\right)^2-4\left(\frac{3}{4}\right)=0$

$S^2-4P=0$

Les réels x et y de somme $S=\sqrt{3}$ et produit $P=\frac{3}{4}$ sont aussi solution de l'équation du second degré $X^2-\sqrt{3}X+\frac{3}{4}=0$

$\Delta=0\,;X_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{IR^2}=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

$S^2-4P>0$ alors l'équation $X^2-SX+P=0$ admet deux solutions distinctes X_1 et X_2 par conséquent le système $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ admet deux couples de solution $S_{IR^2}=\{(X_1\,;X_2),(X_2\,;X_1)\}$

Exemple :

Résoudre dans IR^2 le système suivant si possible $\begin{cases} x+y=-\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases}$

Résolution

Résolvons dans IR^2 le système

$\begin{cases} x+y=-\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases}$; Calculons S^2-4P

$S^2-4P=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{49}{4}$

$S^2-4P=\frac{49}{4}$

Les réels x et y de somme $S=-\frac{5}{2}$ et produit $P=-\frac{3}{2}$ sont aussi solution de l'équation du second degré $X^2+\frac{5}{2}X-\frac{3}{2}=0$

$\Delta=\frac{49}{4}$; $X_1=\frac{1}{2}$ et $X_2=-3$ $S_{IR}=\left\{\left(\frac{1}{2};-3\right)\left(-3;\frac{1}{2}\right)\right\}$

6. INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

6.1. DÉFINITION

Une inéquation du second degré est une expression de l'une des quatre formes suivantes.

Inégalités strictes

- $ax^2+bx+c>0$
- $ax^2+bx+c<0$

Exemples : $2x^2+\pi x>0$; $-2x^2+x+5<0$

Inégalités larges

- $ax^2+bx+c\geq 0$
- $ax^2+bx+c\leq 0$

Exemples : $-3x^2-\sqrt{2}x+1\geq 0$; $x^2+2x+1\leq 0$

6.2. RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

La solution d'une inéquation est déduit du tableau de signe du trinôme associé

6.2.1. Étude de signe d'un trinôme du second degré

CAS GENERAL Soit le trinôme du second degré suivant $t(x) = ax^2 + bx + c$; étudions le signe de $t(x)$

On a : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Si $\Delta < 0$; la quantité $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ainsi $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ alors le signe du trinôme $t(x)$ est le signe du coefficient a sur l'intervalle IR

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe du coéfficient a*

- **Exercice d'application** : étudier le signe des trinômes suivant

a) $2x^2 - x + 3$

b) $-x^2 + 2x - 5$

Solution intégrale

Etudions le signe des trinômes

a) $2x^2 - x + 3$

Calculons Δ

$\Delta = -23$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$2x^2 - x + 3$	$+$

Pour tout $x \in]-\infty ; +\infty[$;

$2x^2 - x + 3 > 0$

b) $-x^2 + 2x - 5$

Calculons Δ

$\Delta = -16$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$-x^2 + 2x - 5$	$-$

Pour tout $x \in]-\infty ; +\infty[$; $-x^2 + 2x - 5 < 0$

Si $\Delta = 0$; la quantité $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$; Ainsi le signe du trinôme t(x) est le signe du coefficient a sur l'intervalle IR sauf en x_0 ou il est nul

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe du coefficient a*	0	*signe du coéfficient a*

Exercice d'application : étudier le signe des trinômes suivant

a) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2$

b) $-x^2 + 2\pi x - \pi^2$

Solution intégrale

a) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2$

Calculons Δ

$\Delta = 0$

Calculons x_0

$x_0 = \sqrt{2}$

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$	$+$	0	$+$

Pour tout $x \in]-\infty ; \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2} ; +\infty[$;

$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 > 0$

Pour $x = \sqrt{2}$; $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 = 0$

b) $-x^2 + 2\pi x - \pi^2$

Calculons Δ

$\Delta = 0$

Calculons x_0

$x_0 = \pi$

x	$-\infty$	π	$+\infty$
$-x^2 + 2\pi x - \pi^2$	$-$	0	$-$

Pour tout $x \in]-\infty ; \pi[\cup]\pi ; +\infty[$;

$-x^2 + 2\pi x - \pi^2 < 0$

Pour $x = \pi ; -x^2 + 2\pi x - \pi^2 = 0$

Si $\Delta > 0$; $ax^2 + bx + c = a\left[\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$;
Ainsi le signe du trinôme t(x) est le signe du coefficient a à l'extérieur des racines ; du signe opposé du coefficient a à l'intérieur des racines et nul en x_1 et x_2

supposons $x_1 \angle x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe du coéfficent a*	0 *signe opposé du coéfficient a*	0	*signe du coéfficient a*

- **Exercice d'application :** étudier le signe des trinômes suivant

a) $x^2 + (1 - \pi)x - \pi$

b) $-x^2 - (2 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$

Solution intégrale

Etudions le signe des trinômes

a) $x^2 + (1 - \pi)x - \pi$

Calculons Δ

$\Delta = (\pi + 1)^2$

Calculons x_1 et x_2

$x_1 = \pi$ et $x_2 = -1$

x	$-\infty$	-1	π	$+\infty$
$x^2 + (1 - \pi)x - \pi$	$+$	0 $-$	0	$+$

Pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup]\pi ; +\infty[$;

$x^2 + (1 - \pi)x - \pi > 0$

Pour tout $x \in]-1 ; \pi[$;

$x^2 + (1 - \pi)x - \pi < 0$

Pour tout $x = -1$ ou $x = \pi$; $x^2 + (1 - \pi)x - \pi = 0$

b) $-x^2 - (2 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$

Calculons Δ

$\Delta = (2 + \sqrt{3})^2$

Calculons x_1 et x_2

$x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$-x^2-(2-\sqrt{3})x+2\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	0	$-$

Pour tout x $\in$ $]-\infty;-2[\cup]\sqrt{3};+\infty[$; $-x^2-(2-\sqrt{3})x+2\sqrt{3}<0$

Pour tout x $\in$ $]-2;\sqrt{3}[$; $-x^2-(2-\sqrt{3})x+2\sqrt{3}>0$

Pour tout x $=-2$ ou x $=\sqrt{3}$; $-x^2-(2-\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$

6.2.2. Application à la résolution d'inéquation

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $-x^2+6x-5\geq 0$

b) $2x^2+8x+8<0$

c) $2x^2-3x+1\leq 0$

Solution intégrale

Résolvons dans IR les inéquations

a) $-x^2+6x-5\geq 0$

Posons $-x^2+6x-5=0$

Calculons Δ ; $\Delta=16$

Calculons x_1 et x_2

$x_1=5$ et $x_2=1$

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$-x^2+6x-5$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\mathbf{S_{IR}=[1;5]}$

b) $2x^2+8x+8<0$

Posons $2x^2+8x+8=0$

Calculons Δ ; $\Delta=0$

Calculons x_0

$x_0=-2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x^2+8x+8$	$+$	0	$+$

$\mathbf{S_{IR}=\emptyset}$

c) $2x^2-3x+1\leq 0$

Posons $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Calculons Δ ; $\Delta = 1$

Calculons x_1 et x_2

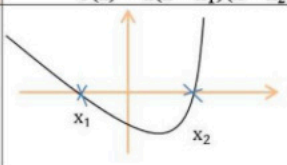
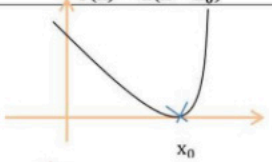
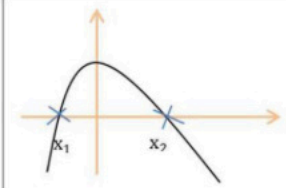
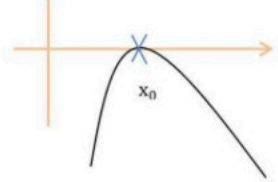
$x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$	$+$	0		$-$	0	$+$

$\mathbf{S_{IR} = \left[\frac{1}{2} ; 1\right]}$

SYNTHESE

nôme du second degré $T(x) = ax^2 + bx + c$ avec a , b et c trois réels tel que $a \neq 0$ on :
la suite on suppose que $x_1 < x_2$

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta <$
olutions de $T(x) = 0$ ou racine inôme $T(x)$	Deux (2) solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	Une solution unique (double) $x_0 = \frac{-b}{2a}$	l'équation $T(x)$ pas de s (le trinôme $T($ racir
torisée de $T(x)$	$T(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	$T(x) = a(x-x_0)$	$T(x)$ n'est pas
tive s un	Cas ou le coefficient $a > 0$ 		
né	Cas ou le coefficient $a < 0$ 		
trinôme $T(x)$	x | $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $T(x)$ | signe de **a** 0 signe de $-$ **a** 0 signe de **a**	x | $-\infty$ x_0 $+\infty$ $T(x)$ | signe de **a** 0 signe de **a**	x | $-\infty$ $T(x)$ |

ÉQUATIONS – INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

7. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES

7.1. DÉFINITION

Une équation paramétrique est une équation dans laquelle l'un au moins des coefficients du trinôme associé dépend d'un paramètre noté souvent m

Exemple :

$E_1: (m-1)x^2 + x - m + 3 = 0$

$E_2: kx^2 + (k+1)x - 5 = 0$

EXERCICE D'APPLICATION

Résoudre dans IR les équations suivantes

1) $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 5 = 0$
2) $mx^2 - (2m+1)x + m = 0$
3) $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

Solution intégrale

1) $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 5 = 0$

Calculons Δ

$\Delta = 12m - 11$

Étudions le signe de Δ

Posons $12m - 11 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{12}$

m	$-\infty$	$\frac{11}{12}$	$+\infty$
$12m-11$	$-$	0	$+$

Si $m \in \left]-\infty; \frac{11}{12}\right[$ alors $\Delta < 0$

$\mathbf{S_{IR}} = \emptyset$

Si $m = \frac{11}{12}$ alors $\Delta = 0$

Calculons x_0

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2m+3}{2} = \frac{29}{12}$

$\mathbf{S_{IR}} = \left\{\frac{29}{12}\right\}$

Si $m \in \left]\frac{11}{12}; +\infty\right[$ alors $\Delta > 0$

Calculons x_1 et x_2

$x_1 = \frac{2m+3-\sqrt{12m-1}}{2}$ et $x_2 = \frac{2m+3+\sqrt{12m-11}}{2}$

$$\mathbf{S_{IR}} = \left\{\frac{\mathbf{2m+3-\sqrt{12m-11}}}{\mathbf{2}} ; \frac{\mathbf{2m+3+\sqrt{12m-11}}}{\mathbf{2}}\right\}$$

2) $mx^2 - (2m+1)x + m = 0$

Pour $\mathbf{m = 0}$; l'équation n'est pas du second degré, elle devient :

$(0)x^2 + (2(0)+1)x + (0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$S_{IR} = \{0\}$

Pour $\mathbf{m \neq 0}$ l'équation est du second degré

Calculons Δ

$\Delta = 4m + 1$

Etudions le signe de Δ

m	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$
$4m+1$	$-$	0	$+$	$+$

Si $m \in \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ alors $\Delta < 0$

$\mathbf{S_{IR}} = \emptyset$

Si $m = -\frac{1}{4}$ alors $\Delta = 0$

Calculons x_0

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{(2m+1)}{2m} = -1$

$S_{IR} = \{-1\}$

Si $m \in \left]-\frac{1}{4}; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$; $\Delta > 0$

Calculons x_1 et x_2

$x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{4m+1}}{2m}$ et $x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{4m+1}}{2m}$

$$\mathbf{S_{IR}} = \left\{\frac{\mathbf{2m+1-\sqrt{4m+1}}}{\mathbf{2m}} ; \frac{\mathbf{2m+1+\sqrt{4m+1}}}{\mathbf{2m}}\right\}$$

2) $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

Pour $\mathbf{m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1}$; l'équation n'est pas du second degré , elle devient

$(1-1)x^2 - 2(1)x + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\mathbf{S_{IR}} = \{\mathbf{2}\}$

Pour m $\neq 1$; l'équation est du second degré

Calculons Δ

$\Delta = -8m + 12$

Etudions le signe de Δ

Posons $-8m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

m	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-8m+12$	$+$		$+$	0	$-$	

Si $m \in \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ alors $\Delta < 0$;

$\mathbf{S_{IR}} = \emptyset$

Si $m = \frac{3}{2}$ alors $\Delta = 0$

Calculons x_0

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2m}{2(m-1)} = 3$

$\mathbf{S_{IR}} = \{3\}$

Si $m \in]-\infty ; 1[\cup \left]1 ; \frac{3}{2}\right[; \Delta > 0$

Calculons x_1 et x_2

$x_1 = \frac{2m - \sqrt{-8m+12}}{2(m-1)} = \frac{m - \sqrt{-2m+3}}{m-1}$ et

$x_2 = \frac{2m + \sqrt{-8m+12}}{2(m-1)} = \frac{m + \sqrt{-2m+3}}{m-1}$

$\mathbf{S_{IR}} = \left\{\frac{m - \sqrt{-2m+3}}{m-1} ; \frac{m + \sqrt{-2m+3}}{m-1}\right\}$

3) $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

Pour m $-1 = 0 \Leftrightarrow$ m $= 1$; l'équation n'est pas du second degré, elle devient

$(1-1)x^2 - 2(1)x + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\mathbf{S_{IR}} = \{2\}$

Pour m $\neq 1$; l'équation est du second degré

Calculons Δ

$\Delta = -8m + 12$

Étudions le signe de Δ

Posons $-8m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Si $m \in \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ alors $\Delta < 0$;

$\mathbf{S_{IR} = \emptyset}$

Si $m = \frac{3}{2}$ alors $\Delta = 0$

Calculons x_0

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2m}{2(m-1)} = 3$

$\mathbf{S_{IR} = \{3\}}$

Si $m \in]-\infty ; 1[\cup \left]1 ; \frac{3}{2}\right[; \Delta > 0$

Calculons x_1 et x_2

$x_1 = \frac{2m - \sqrt{-8m+12}}{2(m-1)} = \frac{m - \sqrt{-2m+3}}{m-1}$ et

$x_2 = \frac{2m + \sqrt{-8m+12}}{2(m-1)} = \frac{m + \sqrt{-2m+3}}{m-1}$

$\mathbf{S_{IR} = \left\{\frac{m - \sqrt{-2m+3}}{m-1} ; \frac{m + \sqrt{-2m+3}}{m-1}\right\}}$

7.2. ÉTUDE DE L'EXISTENCE ET DU SIGNE DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION PARAMÉTRIQUE

Pour discuter sur l'existence et les signes des solutions d'une équation paramétrique, on élabore sur un tableau : le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, du produit $P = \frac{c}{a}$ et de la somme $S = \frac{-b}{a}$

⇧ L'existence des solutions est déterminée par le signe du discriminant Δ ; on a :

- **si $\Delta < 0$; l'équation n'admet pas de solutions**
- **Si $\Delta \geq 0$; l'équation admet deux solutions**

⇧ Dans l'intervalle ou $\Delta \geq 0$; les signes des solutions x_1 et x_2 sont déterminées en étudiant les signes du produit P et de la somme S

- **Si $P < 0$ dans l'intervalle ou $\Delta > 0$; alors x_1 et x_2 sont de signe contraire.**
- **Si $P > 0$ dans l'intervalle ou $\Delta > 0$; alors x_1 et x_2 sont de même signe.**

⇧ dans l'intervalle ou $\Delta > 0$; $P > 0$ et

- **Si $S < 0$ alors x_1 et x_2 sont de même signe négatif.**
- **Si $S > 0$ alors x_1 et x_2 sont de même signe positif.**

Exercice d'application

Soit l'équation $(E_m) = (m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$

1) Résoudre dans IR l'équation (E_m) suivant les valeurs de m

2) Déterminer si possible l'ensemble des réels m pour que l'équation(E_m) ait :

a) Deux solutions de signe positif.

b) Deux solutions de signe contraire.

Solution intégrale

1) Résolvons dans IR l'équation (E_m)

Pour $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$; l'équation n'est pas du second degré, elle devient

$(-1+1)x^2 - (-1+3)x + 3 - (-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\mathbf{S_{IR}} = \{2\}$

Pour $m \neq -1$; l'équation est du second degré

Calculons Δ ;

$\Delta = 5m^2 - 2m - 3$

Etudions le signe de Δ

Posons $5m^2 - 2m - 3 = 0$

Calculons Δ_m

$\Delta_m = 64$

Calculons m_1 et m_2

$m_1 = \frac{-3}{5}$ et $m_2 = 1$

m	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$5m^2-2m-3$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$		

Si $m \in \left]\frac{-3}{5} ; 1\right[$ alors $\Delta < 0$;

$\mathbf{S_{IR}} = \emptyset$

Si $m = \frac{-3}{5}$ ou $m = 1$ alors $\Delta = 0$

Calculons x_0 pour $m = \frac{-3}{5}$ et $m = 1$

❖ Pour $m = 1$;

$x_0 = \frac{m+3}{2(m+1)} = \frac{4}{4} = 1$

❖ Pour $m = \frac{-3}{5}$;

$x_0 = \frac{m+3}{2(m+1)} = 3$

$\mathbf{S_{IR} = \{1\ ;\ 3\}}$

Si $m \in]-\infty\ ;-1[\ \cup\ ]-1;\ \frac{-3}{5}[\ \cup\ ]\ 1;+\infty[\ \Delta > 0$

Calculons x_1 et x_2

$x_1 = \frac{m+3-\sqrt{5m^2-2m-3}}{2(m-1)}$ et $x_2 = \frac{m+3+\sqrt{5m^2-2m-3}}{2(m-1)}$

$\mathbf{S_{IR}} = \{x_1\ ;\ x_2\}$

3) Déterminer si possible l'ensemble des réels m pour que l'équation(E_m) ait :

a) Deux solutions de signe positif

b) Deux solutions de signe contraire.

Étudions les signes du produit P et de la somme S dans l'intervalle $]-\infty\ ;-1[\ \cup\ ]-1;\ \frac{-3}{5}[\ \cup\ ]\ 1;+\infty[$

$\mathbf{P = \frac{3-m}{m+1}}$ **et** $\mathbf{S = \frac{m+3}{m+1}}$

m	$-\infty$	-3		-1		$-\frac{3}{5}$		1		3		$+\infty$
$3-m$	$+$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$m+1$	$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$		$+$	
P	$-$	‖	$-$	‖	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$-$	‖
$m+3$	‖	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$		$+$	‖	‖	‖
$m+1$	‖	‖	‖	0	$+$	‖	$+$		$+$	‖	‖	‖
S	‖	‖	‖	‖	$+$	‖	$+$		$+$	‖	‖	‖

L'équation admet deux solutions de signe positif si :

$m \in\ ]-1\ ;\ \frac{-3}{5}[\ \cup\ ]1\ ;3[$

L'équation admet deux solutions de signe contraire si :

$m \in\ ]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]3\ ;+\infty[$

SÉRIE D'EXERCICES

THÈME : ÉQUATION – INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

EXERCICE 1 Élaborer la forme canonique des trinômes suivants.

a) $x^2 + 4x - 45$

b) $\sqrt{2}x^2 - 2x + \sqrt{2}$

3. Déterminer les réels α et β tel que $x^2 - 5x - 6 = (x - \alpha)^2 + \beta$; en déduire une écriture factoriser de $x^2 - 5x - 6$.

EXERCICE 2 Résoudre dans IR les équations suivants.

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$

b) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 3 = 0$

c) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 4x + 3) = 0$

d) $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{x+5}{x+3}$

EXERCICE 3 Déterminer une équation du second degré de solution x_1 et x_2 dans chacun des cas suivants.

$x_1 = -15$ et $x_2 = 14$; $x_1 = a - b$ et $x_2 = a + b$

$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 4 Factoriser les trinômes suivants si possibles

a. $-\frac{1}{5}x^2 + x - 3$

b. $x^2 + 2x - 5$

c. $7x^2 - 3x$

d. $3x^2 - 12x + 12$

EXERCICE 5 En effectuant un changement de variable ; résoudre dans IR les équations suivants.

a) $x^2 - 4|x| - 9 = 0$

b) $X + \sqrt{x} - 3 = 0$

c) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 5\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 6 = 0$

d) $X^4 - 13X^2 + 36 = 0$

e) $4X^4 - 3 = 0$

EXERCICE 6 Soit l'équation : $3x^2 + 7x - 2 = 0$

1. Sans calculer le discriminant du trinôme associé, justifier que l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2

2. Sans déterminer les solutions x_1 et x_2, calculer les expressions suivantes

$X = x_1^2 + x_2^2$; $Y = x_1^3 + x_2^3$; $T = \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2}$;

$Z = (2x_1 - 5x_2)(2x_2 - 5x_1)$

EXERCICE 7

1. Calculer deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P

$S = 28$ et $P = 195$; $S = 2\sqrt{5}$ et $P = 3$

2. Trouver la somme S et le produit P des solutions des équations suivantes sans les résoudre.

a. $3x^2 + x\sqrt{2} - 4 = 0$

b. $2mx^2 - (m + 3)x - m = 0 ; m \neq 0$

3. Résoudre dans IR^2 les systèmes suivants :

$\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -15 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = -15 \end{cases}$; $\begin{cases} xy^2 + x^2y = -30 \\ xy + x + y = -13 \end{cases}$

EXERCICE 8 Résoudre dans IR les inéquations suivantes

a. $2x^2 - 3x + 1 < 0$

b. $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$

c. $(4x^2 - 4x + 1)(-5x^2 + 3x - 2) \leq 0$

d. $\frac{2x^2 + 9x - 5}{-15x^2 - x + 6} > 0$

EXERCICE 9 Soient les équations de paramètre réel m suivantes ; étudier l'existence et le signe des solutions de chacune

1. $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 5 = 0$
2. $mx^2 - (2m + 1)x + m = 0$
3. $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

EXERCICE 10 On considère le trinôme du second degré

$E(x) = (m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 4$; m Étant un paramètre réel.

1- Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines x_1 et x_2.

2- Pour quelles valeurs de m, l'équation admet deux racines de signe contraire

3- Pour quelles valeurs de m, l'équation admet deux racines positives.

4- Déterminer m pour que 2 soit une solution de l'équation de E(x)

Trouver l'autre racine.

EXERCICE 11 (corrigé)

Soit l'équation (E_m): $(m+3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0$

1. Discuter suivant les valeur du paramètres réel m les solutions de l'équation (E):

2. Déterminer m pour que les racines x_1 et x_2 de (E_m) vérifient l'égalité : $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 6$

3. Déterminer une relation entre x_1 et x_2 indépendante de m.

4. Déterminer m pour que l'équation (E_m) admette :

a) Deux solutions de signes positifs.

b) Deux solutions de signes contraires.

EXERCICE 12

1. Calculer $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$, si x_1 est une racine de l'équation

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$$

2. Soit l'équation paramétrique $kx^2 - (k-1)x + k - 2 = 0$ telle que ses racines x_1 et x_2 vérifient la relation $\frac{2}{x_1+3} + \frac{2}{x_2+3} = \frac{3}{2}$; trouver le paramètre réel k

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

THÈME : ÉQUATION – INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

EXERCICE 11

Soit l'équation (E_m): $(m+3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0$

1. Discutons suivant les valeur du paramètres réel m les solutions de l'équation (E):

♦ Pour $m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

(E_m) est une équation de degré $1 - 6x - 8 = 0$ $x = \frac{4}{3}$

$$S_{IR} = \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

♦ Pour $m \neq -3$

(E_m) est une équation de degré 2

(E_m): $(m+3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0$

Calculons Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (2m)^2 - 4(m+3)(m-5) = 8m + 60 = 4(2m + 15)$

Etudions le signe Δ

m	$-\infty$	$-\frac{15}{2}$		-3	$+\infty$
$2m + 15$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$

♦ Si m ∈ à l'intervalle $]-\infty; \frac{-15}{2}[$; alors $\Delta < 0$ ainsi l'équation n'admet pas solution $S_{IR} = \emptyset$

♦ Si $m = \frac{-15}{2}$ alors $\Delta = 0$ ainsi l'équation admet une solution double x_0

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2m}{2(m+3)} = \frac{-2\left(\frac{-15}{2}\right)}{2\left(\frac{-15}{2} + 3\right)} = \frac{-5}{3} \quad S_{IR} = \left\{\frac{-5}{3}\right\}$$

♦ Si m ∈ a l'intervalle $\left]\frac{-15}{2}; -3\right[\cup]-3; +\infty[$

Alors $\Delta > 0$ ainsi l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2m + \sqrt{4(2m + 15)}}{2(m+3)} = \dfrac{-m + \sqrt{2m + 15}}{m+3}$

$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{4(2m+1)}}{2(m+3)} = \dfrac{-m - \sqrt{2m+15}}{m+3}$

$$\boldsymbol{S_{IR} = \left\{\dfrac{-m + \sqrt{2m + 15}}{m+3}; \dfrac{-m - \sqrt{2m + 15}}{m+3}\right\}}$$

2. Déterminons m pour que les racines x_1 et x_2 de (E_m) vérifient l'égalité :

3. $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 6$

Développons $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$

$(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 6$

$4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 5 = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{m-5}{m+3}\right) - 2\left(\frac{-2}{m+3}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$4m - 20 + 4m - 5m - 15 = 0 \Leftrightarrow 3m - 35 = 0$

$$m = \frac{35}{3}$$

4. Déterminons une relation entre x_1 et x_2 indépendante de m .

On a $P = \frac{m-5}{m+3}$ et $S = \frac{-2m}{m+3}$

Exprimons m en fonction de P et de S

- $P = \frac{m-5}{m+3} \Leftrightarrow Pm + 3P = m - 5$ d'où $m = \frac{-5-3P}{P-1}$
- $S = \frac{-2m}{m+3} \Leftrightarrow Sm + 3S = -2m$ d'où $m = \frac{-3S}{S+2}$:

$\frac{-5-3P}{P-1} = \frac{-3}{S+2} \Leftrightarrow (-5 - 3P)(S + 2) - 3S(P - 1) \Leftrightarrow$

$3P + 4S + 5 = 0$

$$\boldsymbol{3x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 5 = 0}$$

5. Déterminons m pour que l'équation (E_m) admette :

c) Deux solutions de signes positifs.

d) Deux solutions de signes contraires.

Étudions les signes du produit P et de la somme S dans l'intervalle $\left]\frac{-15}{2}; -3\right[\cup]-3; +\infty[$

$P = \frac{m-5}{m+3}$ et $S = \frac{-2m}{m+3}$

m	$-\frac{15}{2}$	-3	0	5	$+\infty$
$m-5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m+3$	$-$	$+$	$+$		$+$
P	$+$	$-$	$-$	0	$+$
$-2m$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$m+3$	$-$	$+$	$+$		$+$
S	$-$	$+$	0	$-$	$-$

- $\forall$ m $\in$ à l'intervalle $\left]\frac{-15}{2}; -3\right[\cup \left]-3; +\infty\right[$ l'équation n'admet pas deux solutions de signes positifs
- Si m $\in$ à l'intervalle $]-3; 5[$ alors l'équation admet Deux solutions de signes contraires.

DEVOIR A LA MAISON N°I

✍ EXERCICE 1

On donne les trinômes suivants

$A(x) = 27x^2 + 24x - \frac{5}{4}$

$B(x) = 7x^2 - 3x + 1$

$C(x) = -16x^2 + 24x - 9$

a) Elaborer la forme canonique des trinômes suivants
b) En déduire la résolution dans IR des équations

$A(x) = 0$; $B(x) = 0$; $C(x) = 0$

✍ EXERCICE 2

1) Résoudre dans IR $x^2 - 4x + 3 = 0$

2) En déduire la résolution de $\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^2} + 3 = 0$

3) On donne l'équation $3x^2 + 5x - 1 = 0$.

Sans calculer les racines x_1 et x_2 calculer les quantités des expressions suivantes : $X = (4x_1 - 1)(4x_2 - 1)$; $Y = \frac{x_1 - 5}{x_2} + \frac{x_2 - 5}{x_1}$; $Z = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

✍ EXERCICE 3

Résoudre dans IR^2

a) $\begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ xy = \frac{\sqrt{2} - 3}{3} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases}$

DEVOIR A LA MAISON N°II

✍ EXERCICE 1

1) Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$

b) $-x^2 + (1+\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$; on remarquera $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$

c) $-x^2 + 4\sqrt{3}x - 12 = 0$

2) En déduire :

a) de la question 1.a) la résolution de l'équation $x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0$;

b) de la question 1.b) la résolution de l'équation
$-x + (1+\sqrt{3})\sqrt{x} - \sqrt{3} = 0$

3) On donne le trinôme $T(x) = -2x^2 + 3x + 4$.

a) Étudier les signes de $T(x)$.

b) En déduire les solutions des inéquations : $T(x) < 0$ puis $T(x) \geq 0$.

✍ EXERCICE 2

1) Résoudre dans IR^2 les systèmes d'équations suivantes :

a) : $\begin{cases} x_1 \times x_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{11}{3} \end{cases}$ b): $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 = -26 \end{cases}$

2) Soit l'équation du second dégrée suivant : $-3x^2 + x + 1 = 0$

a) Sans calculer son discriminant Δ, justifier brièvement que l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

b) Sans déterminer x_1 et x_2 calculer la quantité des expressions suivantes :

$A = (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$; $B = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

✍ **EXERCICE 3** Soit ABC un triangle, I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB}$. On donne AB = 4 cm, AC = 5 cm et BC = 7 cm

On note G le symétrique de B par rapport à I.

1) Faire une figure et placer les points I et J.

2) a) Exprimer $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que G est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, -3)$ et $(C, 4)$

3) a) Exprimer J comme barycentre de A et B.

b) En déduire que les points G , C et J sont alignés.

DEVOIR A LA MAISON N°III

✍ **EXERCICE 1** Résoudre dans R les équations suivantes :

a) $10x^2 - 3x - 7 = 0$

b) $\frac{1}{4}x^2 + \sqrt{11}x + 11 = 0$

c) $5x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$

✍ **EXERCICE 2**

Soit (E_m): $(m+1)x^2 + 2(m-2)x + m - 1 = 0$

1) Résoudre dans IR suivant les valeurs de m ; l'équation $(E_m) = 0$

2) Déterminer une relation indépendante de m liant les racines x_1 et x_2 de (E_m) au cas où elles existent.

3) Pour la suite on suppose $m = 0$. Sans chercher les racines x_1 et x_2 de l'équation obtenue ; calculer les expressions suivantes :

$X = (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2$; $Y = \frac{1}{{x_1}^2} + \frac{1}{{x_2}^2}$ et $Z = (x_1 - x_2)^2$

✍ **EXERCICE 3**

Soit ABC un triangle quelconque

1) Construire les points suivants :

$G = \text{bar}\{(A,3);(B,3)\}$; $E = \text{bar}\{(B,3);(C,1)\}$;

$F = \text{bar}\{(A,3);(C,1)\}$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\|3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 9$

b) $\|3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$

3) Soit le point $I = \text{bar}\{(A,3);(B,3);(C,1)\}$

a) Construire le point I

b) Montrer que les droites (AE), (BF), et (CG) sont concourants en I

DEVOIR A LA MAISON N°IV

✍ EXERCICE 1

1. Soit le trinôme du second degré P défini par :
$P(x) = 2x^2 + 5x - 3$
   a) Elaborer la forme canonique de $P(x)$.
   b) En déduire une écriture factorisée de $P(x)$.
   c) Trouver les racines de $P(x)$.
2. On donne le trinôme $T(x) = x^2 - 3x - 4$
   a) Résoudre dans IR l'équation $T(x) = 0$
   b) En déduire la résolution des équations
$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

✍ EXERCICE 2

1. Résoudre dans IR^2
   a) $\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 - xy + y^2 = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \times y = -12 \\ x^3 + y^3 = 13 \end{cases}$
2. Soit l'équation (E_m): $(m-1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$
   a) Discuter suivant les valeur du paramètres réel m les solutions de l'équation (E_m)
   b) Déterminer m pour que 2 soit solution de $((E_m))$.
   c) En déduire l'autre solution sans calculer le discriminant.

✍ EXERCICE 3

Soit le système de points pondérés $\{(A; 1); (B; -2) \text{ et } (C; 5)\}$.

1. Justifier que le système admet un barycentre appelé G
2. Soit I le barycentre de $\{(A; 1); (B; -2)\}$; J celui de $\{(B; -2); (C; 5)\}$ et K celui de $\{(A; 1); (C; 5)\}$.

En utilisant l'associativité du barycentre, démontrer que

a) $G \in (IC)$
b) $G \in (JA)$
c) $G \in (KB)$

Déduire que les droites (IC), (JA) et (KB) sont concourantes.

ANGLES ORIENTÉS - TRIGONOMÉTRIE

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Convertir les degrés en radians et inversement
- Déterminer la mesure principale d'un angle orienté
- Connaître la définition du cercle trigonométrique.
- Déterminer cosx , sinx, tanx (x étant la mesure principale d'un angle orienté). En utilisant les angles remarquables, les angles associés, la calculatrice.
- Connaître et utiliser la relation fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

PLAN DU COURS

1. RAPPELLE ET COMPLÉMENTS SUR LES ANGLES GÉOMÉTRIQUE 163
1.1. RADIAN 163
1.1.1. DÉFINITION 163
1.1.2. CONVERSION DES DEGRÉS EN RADIANS ET DES RADIANS EN DEGRÉ 163
1.2. ORIENTATION DU PLAN 164
1.2.1 SENS DIRECT ET SENS INDIRECT 164
1.2.2. ANGLES ORIENTES DE DEMIES DROITES 164
1.2.3. ANGLE ORIENTE DE DEUX VECTEURS 165
2. MESURE PRINCIPALE D'UN ANGLE ORIENTE 166
2.1. DÉFINITION 166
2.2. PROPRIÉTÉ 167
2.3. MÉTHODE DE DÉTERMINATION DE L'ANGLE PRINCIPAL 167

3. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES 168
3.1. DÉFINITION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIE 168
3.2. DÉFINITIONS DU SINUS, DU COSINUS ET DE LA TANGENTE D'UN ANGLE ORIENTE 169
3.2.1. DÉFINITION 169
3.2.2. PROPRIÉTÉS 170
3.2.3. SIGNE DU COSINUS ET DU SINUS 170
3.3. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUE DES ANGLES REMARQUABLES 170
3.4. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUE DES ANGLES ASSOCIÉS 171

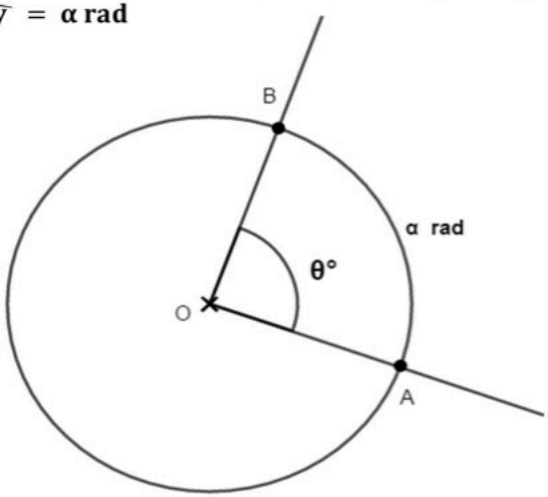
1. RAPPELLE ET COMPLÉMENTS SUR LES ANGLES GÉOMÉTRIQUE

1.1. RADIAN

1.1.1. DÉFINITION

On appelle mesure en radian d'un angle $\widehat{xoy}$ la longueur de l'arc interceptée par cet angle sur le cercle de centre *o* et de rayon 1

N.B : si la mesure en radian de l'angle $\widehat{xoy}$ est α ; on note $\widehat{xoy}$ = α rad



1.1.2. CONVERSION DES DEGRÉS EN RADIANS ET DES RADIANS EN DEGRÉ

Les mesures d'un angle plat dans les deux systèmes d'unités sont 180° et π rad (avec π ≈3,14159 …). Plus généralement la correspondance entre mesure en degrés θ et mesure en radiant α est obtenu à l'aide de la proportionnalité suivante : $\frac{\theta}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow$

$\alpha = \frac{\theta \times \pi}{180}$ rad **Conversion des degrés en radians et**

$\theta = \frac{\alpha \times 180°}{\pi}$ **Conversion des radians en degré**

Exemple :

❖ La mesure en degré de l'angle $\theta = 81{,}34° \Leftrightarrow \alpha = 1{,}42$ rad en radian

❖ La mesure en radian de l'angle $\alpha = 2{,}347\text{rad} \Leftrightarrow \theta = 134{,}47°$ en degré

❖ La mesure en degré de l'angle $\theta = 90° \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ rad en radian

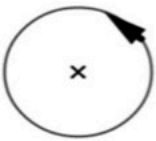
1.2. ORIENTATION DU PLAN

1.2.1 SENS DIRECT ET SENS INDIRECT

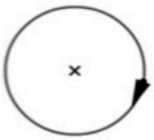
Orienter le cercle (C) c'est choisir un des sens de parcours sur (C)

❖ **Le sens direct**, **positif** ou **trigonométrique** est le sens contraire des aiguilles d'une montre

❖ **Le sens indirect** ou **rétrograde** est le sens des aiguilles d'une montre.



sens direct(+)

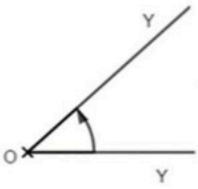


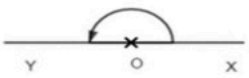
sens indirect(−)

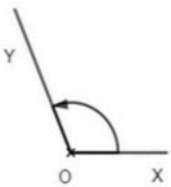
1.2.2. ANGLES ORIENTES DE DEMIES DROITES

Soit Ox et Oy deux demi droites de même origine. Le couple (Ox, Oy) détermine l'angle orienté de demies droites Ox et Oy noté $(\widehat{Ox, Oy})$.

Les demies droites Ox et Oy sont respectivement le coté Origine et le coté extrémité ; une flèche sur l'arc indique le coté extrémité.

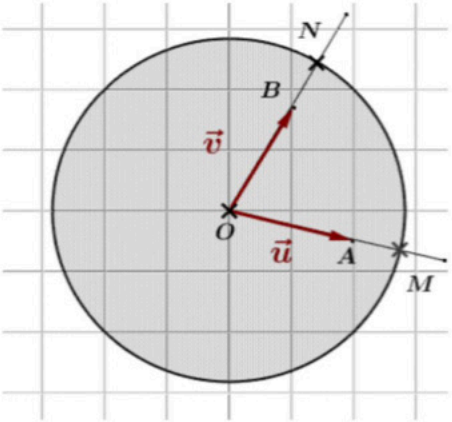






1.2.3. ANGLE ORIENTE DE DEUX VECTEURS

Soit un couple de vecteur non nul $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ et A ; B deux points du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ avec M un point d'intersection du cercle de centre O avec la demie droite [OA) et N un point d'intersection du cercle avec la demie droite [OB)



L'ensemble des couples de vecteurs $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ pour les quelle l'arc $\overset{\frown}{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé Angle orienté noté $(\overrightarrow{\vec{u}\,,\vec{v}})$.

REMARQUE :

- **L'ensemble des couples $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ pour les quels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens est égale à l'angle orienté nul**



- **L'ensemble des couples $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ pour les quels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposé est égale à l'angle orienté plat**



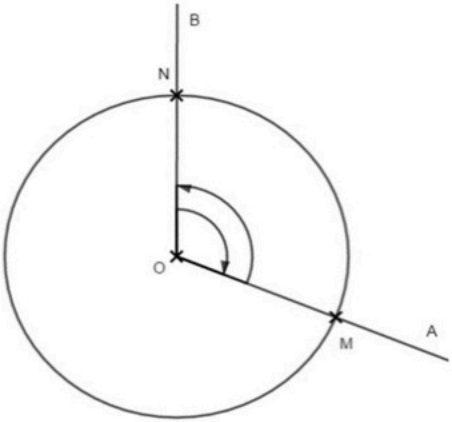
N.B : les angles orientés $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ et $(\vec{v}\,;\,\vec{u})$ sont deux angle opposés

$$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = -(\vec{v}\,;\,\vec{u})$$

2. MESURE PRINCIPALE D'UN ANGLE ORIENTE

2.1. DÉFINITION

Soit $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ un angle orienté ; M et N les points d'intersections respectifs des demies - droites [OA) et [OB) avec un cercle de centre O



La mesure principale en radian de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ notée mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ est définie par mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ = mes $\widehat{AOB}$

❖ Lorsque le sens de déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens direct ; cette mesure égale à mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ et est égale à $-$ mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA}}\right)$

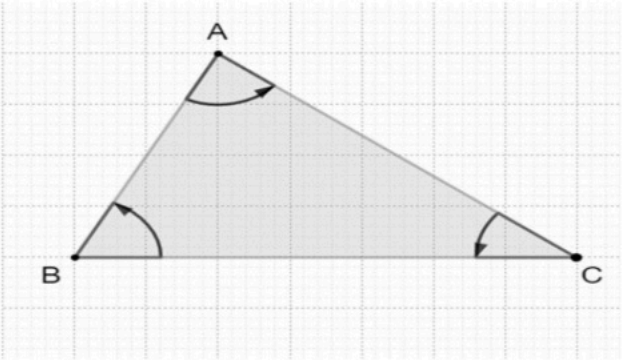
❖ Lorsque le sens de déplacement de N vers M sur l'arc $\widehat{NM}$ est le sens indirect ; cette mesure égale à $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA}}\right)$.

REMARQUE :

❖ **Si l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ est l'angle nul alors la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ est égale 0 rad**

❖ **Si l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ est l'angle plat alors la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}}\right)$ est égale π rad**

Important :
Un triangle ABC est dit <u>direct</u> si à partir de du point A on rencontre d'abord le point B puis le point C



$$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}}\right) = \pi + 2k\pi$$

2.2. PROPRIÉTÉ

Un angle orienté $\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right)$ a une infinité de mesures en radians ; parmi ces mesure celle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$ est dite mesure principale de $\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right)$; les autres mesures sont des nombres de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in Z$

2.3. MÉTHODE DE DÉTERMINATION DE L'ANGLE PRINCIPAL

Activité :

Calculer la mesure principale d'un angle orienté $\left(\widehat{Ox\,;\,Oy}\right)$ dont une mesure est égale à $\frac{17\pi}{3}$ rad

Résolution

Calculons la mesure principale d'un angle orienté $(\widehat{Ox\,;\,Oy})$ dont une mesure est égale à $\frac{17\pi}{3}$ rad

Posons α la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox\,;\,Oy})$; il existe un entier relatif k tel que $\frac{17\pi}{3} = \alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{17\pi}{3} - 2k\pi \Leftrightarrow$

Or $-\pi < \alpha \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{17\pi}{3} - 2k\pi \leq \pi$

$\Leftrightarrow \frac{14}{6} < k \leq \frac{20}{6} \Leftrightarrow 2{,}33 < k \leq 3{,}33$ d'où $k = 3$ ainsi $\boldsymbol{\alpha = \frac{-\pi}{3}}$

REMARQUE

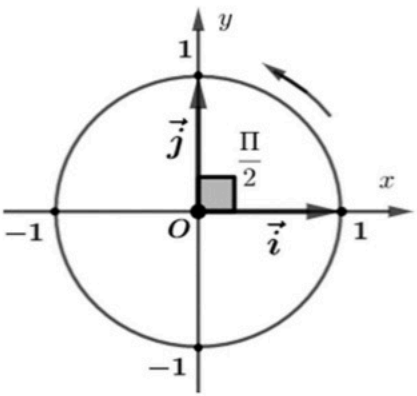
- **La <u>mesure principale</u> en degré d'un angle est exprimée par un réel de l'intervalle $]-180\,;\,180]$; une <u>mesure quelconque</u> en degré d'un angle $\theta°$ est : $\theta + 360k$ avec $k \in Z$**
- **Deux angles orientés sont dit égaux s'ils ont la même mesure principale**

3. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

3.1. DÉFINITION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIE

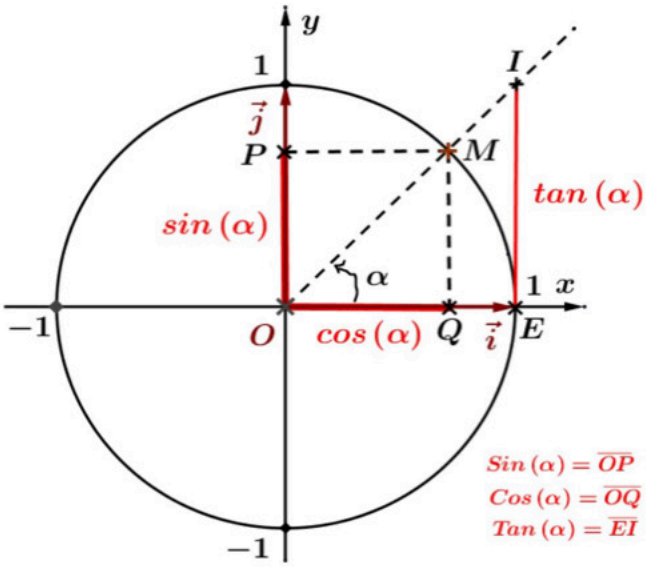
Dans le plan orienté, on dit qu'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est direct si $(\widehat{ox\,;\,oy}) = \frac{\pi}{2}$

Le cercle C de centre O et de rayon 1 est le cercle trigonométrie associé à ce repère



3.2. DÉFINITIONS DU SINUS, DU COSINUS ET DE LA TANGENTE D'UN ANGLE ORIENTE

Soit C un cercle trigonométrique et l'angle orienté α donné par $(\overrightarrow{OE}\,;\,\overrightarrow{OM})$



3.2.1. DÉFINITION

On appelle cosinus et sinus de l'angle α noté cos α et sin α les coordonnés d'un point sur le cercle trigonométrique dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$; on a ainsi M(cos α ; sin α)

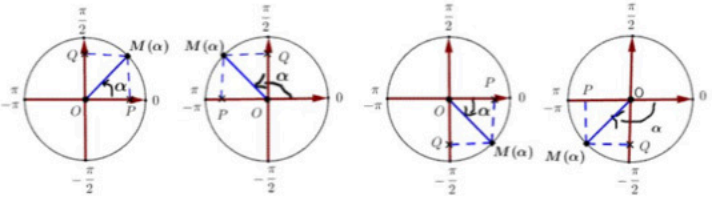
N.B : la tangente de l'angle α notée tan α est l'intersection de la droite (OM) avec la droite tangente du cercle au point I, elle est définie par $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3.2.2. PROPRIÉTÉS

Pour tout angle α de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ et pour tout nombre entier relatif k ($k \in Z$) on a les propriétés suivantes:

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et $\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos\alpha^2}$ $\left(\text{avec } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha \neq \frac{-\pi}{2}\right)$
- $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$ et $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ $\left(\text{avec } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha \neq \frac{-\pi}{2}\right)$

3.2.3. SIGNE DU COSINUS ET DU SINUS



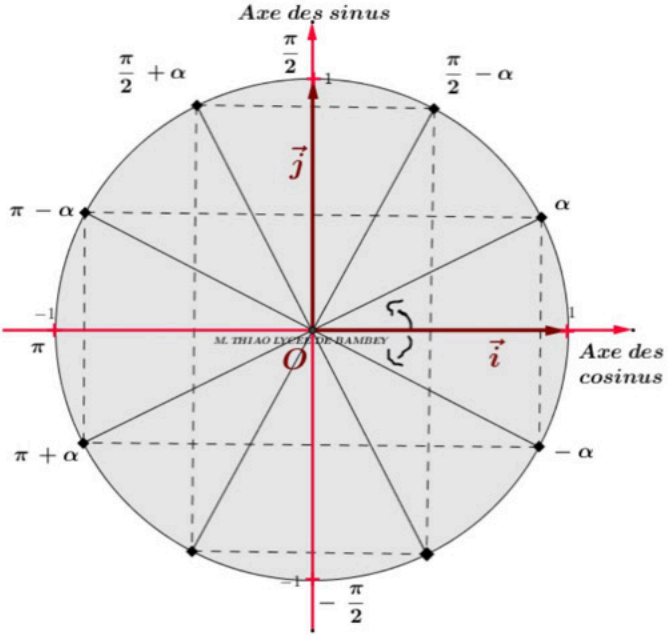
$\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$	$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$	$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$	$\alpha \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$
$\cos(\alpha) > 0$	$\cos(\alpha) < 0$	$\cos(\alpha) > 0$	$\cos(\alpha) < 0$
$\sin(\alpha) > 0$	$\sin(\alpha) > 0$	$\sin(\alpha) < 0$	$\sin(\alpha) < 0$

3.3. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUE DES ANGLES REMARQUABLES

Mesure principal de l'angle α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

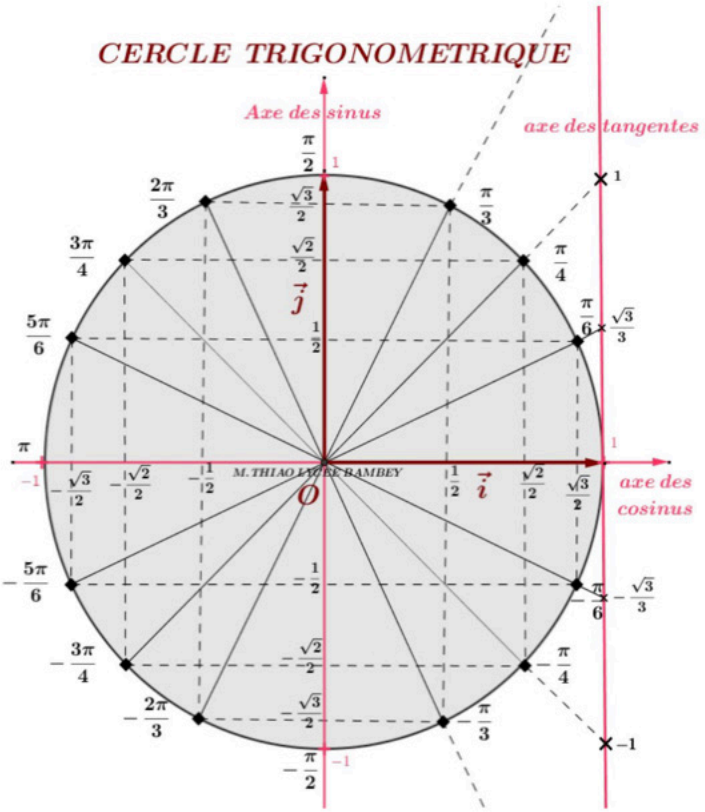
3.4. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUE DES ANGLES ASSOCIÉS

Soit α la mesure principale d'un angle dans le cercle trigonométrique ; les angles suivants $-\alpha$; $\pi - \alpha$; $\pi + \alpha$; $\frac{\pi}{2} - \alpha$; $\frac{\pi}{2} + \alpha$ sont dits angles associés à l'angle α.



Pour les angles associés on a les égalités suivantes :

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$


CERCLE TRIGONOMETRIQUE
Axe des sinus
axe des tangentes
axe des cosinus
M.THIAO LYCEE BAMBEY
O
$\vec{i}$
$\vec{j}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
π
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1
-1

SÉRIE D'EXERCICES

THÈME : ANGLE ORIENTÉ - TRIGONOMÉTRIE

EXERCICE 1 Soit (C) un cercle 0 et de rayon 4 cm. Soient A et B deux points du cercle (C) tels que mes$(\widehat{AOB}) = 60°$

1) Construire les points A et B

2) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en radians.

3) Calculer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$.

EXERCICE 2

1) Convertir en radian les angles suivants $345°$; $72°$; $21°$; $1575°$

N.B : le nombre trouvé sera donné sous la forme $\frac{a}{b}\pi$ avec a et b des nombres entiers.

2) Convertir en degrés $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{24}$; $\frac{5\pi}{24}$

EXERCICE 3

1) L'une des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ en radian est α .

Déterminer sa mesure principale α_0 dans chaque cas suivant :

a) $\alpha = \frac{25\pi}{4}$ b) $\alpha = -\frac{19\pi}{3}$

c) $\alpha = \frac{37\pi}{3}$ d) $\alpha = \frac{47\pi}{6}$

2) L'une des mesures de l'angle orienté$(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ en degré est θ .

Déterminer sa mesure principale θ dans chaque cas suivant :

a) $\theta = 405°$ b) $\theta = -6150°$ c) $\theta = 3167°$

3) les nombres réels suivants sont – ils des mesures du même angle orienté ?

a) $\frac{15\pi}{7}$ et $\frac{57\pi}{7}$

b) $\frac{41\pi}{6}$ et $-\frac{19\pi}{6}$

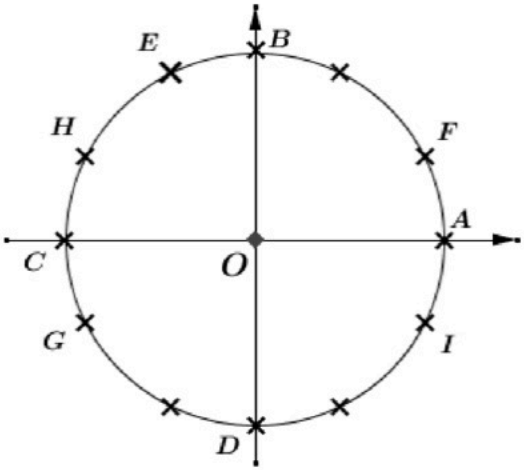
EXERCICE 4

L'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ a pour mesures $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in Z$)

En faisant un figure ; donner les mesures des angles orientés suivants.

$(-\vec{u}\,;\vec{v})$; $(\vec{u}\,;-\vec{v})$ et $(-\vec{u}\,;-\vec{v})$

EXERCICE 5 On donne la figure suivante



1) Parmi les réels suivants quels sont ceux qui repèrent le point E à partir de A ? $\frac{4\pi}{12}$; $\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$

2) Quels points sur le cercle trigonométrique sont repérés par les nombres suivants . $\frac{3\pi}{2}$; π ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$

EXERCICE 6 (corrigé)

1) Vérifier que : $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) On donne : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a) Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

EXERCICE 7

1. Soit x un nombre réel, en utilisant les relations trigonométriques exprimer les relations suivantes en fonction de cos x et sin x

a) $2\sin(4\pi - x) - \cos(x+\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2}-x) + \cos(\frac{\pi}{2}-x)$

b) $\cos(5\pi+x) + \sin(5\pi-x) - \cos(7\pi-x) + \sin(7\pi+x)$

2. Prouver que pour tout nombre réel x :
$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

3. Sachant que : $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$

En déduire la valeur de sinx et cosx

- **EXERCICE 8** On donne $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

a) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

b) En utilisant les relations trigonométriques, donner les valeurs exactes de : $\sin\frac{4\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5}$; $\sin\frac{6\pi}{5}$; $\cos\frac{6\pi}{5}$; $\sin\frac{7\pi}{10}$; $\cos\frac{7\pi}{10}$

- **EXERCICE 9** (corrigé)

Soit :

$$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Montrer que E est un entier

On remarquera que : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ et $\frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

THÈME : ANGLE ORIENTÉ - TRIGONOMÉTRIE

EXERCICE 6

1) Vérifions que $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

On a $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$

$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ ainsi $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$

d'où $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) On donne $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a) Démontrons que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

❖ Démontrons que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

On a $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ d'ou $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

❖ Démontrons que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4}$

Ainsi $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

b) Déduisons les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

On a $\frac{11\pi}{12} = \frac{12\pi-\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi-\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$

❖ Déduisons la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

❖ Déduisons la valeur exacte de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

❖ Déduisons la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

❖ Déduisons la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

EXERCICE 9 Soit :

$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Montrons que E est un entier

On a $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ et $\frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$

$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et

$\cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$E = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) +$

$\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$E = 1 + 1 + 1 = 3$ $E = 3$

POLYNÔMES – FRACTIONS RATIONNELLES

COMPÉTENCES EXIGIBLES

- Connaître le vocabulaire : polynôme, coefficient, degré.
- Vérifier qu'un nombre réel est zéro d'un polynôme.
- factoriser un polynôme par la méthode d'identification des coefficients, par la méthode de Horner ou par division euclidienne.
- Établir la condition d'existence d'une fraction rationnelle

PLAN DU COURS

1. GÉNÉRALITÉS 181
1.1. DÉFINITIONS 181
1.1.1. Monôme 181
1.1.2. Polynôme 181
1.2. DEGRÉ D'UN POLYNÔME NON NUL 182
2. CALCUL SUR LES POLYNÔMES 183
2.1. EGALITE DE DEUX POLYNÔMES 183
2.2. SOMME ET PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES 183
2.2.1. Somme de deux polynômes 183
2.2.2. PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES 184
2.3. FACTORISATION D'UN POLYNÔME 184
2.3.1. Zéro ou racine d'un polynôme 184
2.3.2. Détermination du quotient **Qx** de **Px** Par $\mathbf{x - \alpha}$ 184
3. POLYNÔME SYMÉTRIQUE OU RÉCIPROQUE 189
3.1. DÉFINITION 189
4. FRACTION RATIONNELLE 191
4.1. DÉFINITION 191

4.2. CONDITION D'EXISTENCE D'UNE FRACTION RATIONNELLE..... 191
4.3. SIMPLIFICATION D'UNE Fraction RATIONNELLE..... 192
4.4. ÉTUDE DU SIGNE D'UNE FONCTION RATIONNELLE... 193
4.5. DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE ... 195

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. DÉFINITIONS

1.1.1. Monôme

Soit a un nombre réel non nul et n un entier naturel

Toute expression littérale de la forme $a\,x^n$ est appelé monôme

Elle est caractérisée par :

- **Son Coefficient a ;**
- **Sa variable x ;**
- **Sa puissance (ou degré) n**

Exemples :

$5x^3$; a $=$ 5 et n $=$ 3

$-x$; a $=-1$ et n $=$ 1

1.1.2. Polynôme

Soient les réels a_0 ; a_1 ; a_2 ;... ; a_n ; on appelle polynôme de degré n ; toute expression de la forme :

$P(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ avec $a_n \neq 0$

Les réels a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ; ..... a_1; a_0 sont les coefficients du polynôme.

Exemple : $-2x^4 + 7x^3 - 5x + 2$ est un polynôme de variable x .

Les coefficients du polynôme sont : $-2\,,7\,,-5\,,2$

On désigne souvent un polynôme par une lettre majuscule en indiquant sa variable en lettre minuscule entre parenthèse.

Exemples :

$P(x) = -x^3 + 2x^2 + x + 3$, désigne un polynôme de variable x .

$Q(y) = -3y^4 + 7y^2 - y + 1$, désigne un polynôme de variable y .

N.B :

− Un monôme est un polynôme

− Le réel zéro (0) est un polynôme appelé polynôme nul.

− Les expressions suivantes ne sont pas des polynômes

$A(x) = |x|$; $B(x) = \sqrt{x}$; $C(x) = \frac{x}{x-1}$

1.2. DEGRÉ D'UN POLYNÔME NON NUL

Le degré d'un polynôme est égal au degré du monôme le plus élevé.

Exemple : $P(x) = -x^4 + x^2 - 4x + 3$ est un polynôme de degré 4 .

On note $d^0P(x) = 4$

Cas Général : si P (x) est un polynôme de degré n on note degré P (x) = n ou d°P(x) = n

REMARQUE :

♦ **Un polynôme P(x) donné est ordonné suivant les puissances décroissantes ou croissantes de sa variable x ou désordonné.**

✓ Polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de x

Exemple : $P(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$

✓ Polynôme ordonné suivant les puissances croissantes de x

Exemple : $P(x) = 7 + x + 2x^2 - x^4$

✓ Désordonné si les puissances de x ne sont pas ordonnés

Exemple : $P(x) = 5 + 7x^3 + x + x^2$

♦ **Un polynôme P(x) donné est soit complet ou incomplet**

✓ Polynôme complet

Exemple : $P(x) = -x^3 + 5x^2 - x + 2$

✓ Polynôme incomplet

Exemple : $P(x) = 4x^3 - x + 3$

▸ **Exercice d'application :**

Soit l'expression K définie par $K(x) = (2x^3 - 5x)(-x^3 - 3x^2 + 4)$

Prouver que K est un polynôme dont on précisera le degré

Solution succincte

Prouvons que K est un polynôme dont on précisera son degré

Développons l'expression K(x)

$K(x) = -2x^5 - 6x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 20x$

D'où K(x) est polynôme de degré 5.

2. CALCUL SUR LES POLYNÔMES

2.1. EGALITE DE DEUX POLYNÔMES

Propriété

Deux polynômes P(x) et Q(x) sont égaux si et seulement si :

- **Ils ont le même degré ;**
- **Les coefficients des monômes de même degré sont égaux.**

Exercice d'application :

Soit P et Q deux expressions données par : $P(x) = x^2 + 3x - 5$ et $Q(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$

Comment choisir les valeurs de α et β pour que P et Q soit égaux ?

Solution intégrale

Les valeurs de α et β pour que P et Q soit égaux.

$P(x) = x^2 + 3x - 5$ et $Q(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$

Développons l'expression Q(x)

$Q(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$

$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha = 3 \\ \alpha^2 + \beta = -5 \end{cases}$

$\alpha = \frac{-3}{2} ; \beta = \frac{-29}{4}$

2.2. SOMME ET PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES

2.2.1. Somme de deux polynômes

Activité

soit les polynômes $p(x) = -5x^3 + x^2 - 2x + 6$ et $q(x) = x^2 - x + 2$

calculer $p(x) + q(x)$

$p(x) + q(x)$ est un polynôme appelé somme des polynômes $p(x)$ et $q(x)$: on le note $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$

la somme deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme noté $(P + Q)(x)$.

le degré du polynôme $(P + Q)(x)$ est inférieur ou égal à celui du polynôme qui a le plus grand degré.

2.2.2. PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES

Activité

Soit les polynômes $P(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$ et $Q(x) = x^4 - 7x + 3$

Calculer $P(x) \times Q(x)$

$P(x) \times Q(x)$ est le polynôme produit des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$: on le note $(P \times Q)(x)$

Le Produit deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme noté $(P \times Q)(x)$.

Le degré du polynôme $(P \times Q)(x)$ est égal à la somme des degrés des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.

2.3. FACTORISATION D'UN POLYNÔME

2.3.1. Zéro ou racine d'un polynôme

Activité Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Calculer $P(-2)$; $P(-1)$ et $P(1)$

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n ($n \leq 4$) et α un réel non nul ($\alpha \in IR^*$)

α est dit racine ou zéro de $P(x)$ si et seulement $P(\alpha) = 0$. Ainsi le polynôme $P(x)$ est factorisable (divisible) par $(x - \alpha)$ et peut s'écrire sous la forme factorisée : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ avec $Q(x)$ le quotient de $P(x)$ et de degré $d^\circ P(x) - 1$.

2.3.2. Détermination du quotient $Q(x)$ de $P(x)$ Par $(x - \alpha)$

Il existe trois méthodes pour déterminer le quotient $Q(x)$ de $P(x)$ par $(x - \alpha)$

- ✓ **Méthode de la détermination des coefficients indéterminés**
- ✓ **Méthode par la division Euclidienne**
- ✓ **Méthode de Horner**

MÉTHODE PAR LA DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS

▸ **Exercice :** On donne le polynôme $H(x) = -x^3 - 2x - 12$

a) Calculer $H(-2)$ puis conclure.

b) Factoriser par la méthode de la détermination des coefficients indéterminés le polynôme $H(x)$.

Solution intégrale

a) Calculons $H(-2)$ puis conclusions.

$H(x) = -x^3 - 2x - 12$

$H(-2) = -(-2)^3 - 2(-2) - 12 = 8 + 4 - 12 = 12 - 12 = 0$

$H(-2) = 0$ alors -2 est racine de $H(x)$

b) Factorisons par la méthode de la détermination des coefficients indéterminés le polynôme $H(x)$.

On a -2 racine de $H(x)$ alors $H(x)$ est factorisable par $(x+2)$ et peut s'écrire sous la forme $H(x) = (x+2)Q(x)$ avec $d^\circ Q(x) = 2$

Posons $Q(x) = ax^2 + bx + c$

$H(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$

$H(x) = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c$

$H(x) = -x^3 + 0x^2 - 2x - 12$

Par identification des coefficients

$$\begin{cases} a = -1 \\ b + 2a = 0 \\ c + 2b = -2 \\ 2c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -6 \end{cases}$$ Ainsi $Q(x) = -x^2 + 2x - 6$

D'où $\mathbf{H(x) = (x+2)(-x^2 + 2x - 6)}$

MÉTHODE PAR LA DIVISION EUCLIDIENNE

Exercice :

On considère le polynôme P définie par

$P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$

a) Vérifier que -2 est racine de $P(x)$.

b) Factoriser $P(x)$ par la Méthode de la division Euclidienne

Solution intégrale

a) Vérifions que -2 est racine de $P(x)$.

Calculons $P(-2)$

$P(-2) = -2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 12(-2) + 20 = 16 - 12 - 24 + 20$

$P(-2) = -36 + 36 = 0$

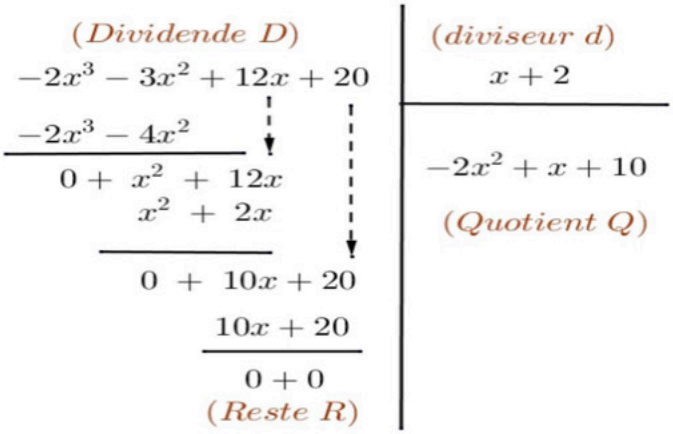
$P(-2) = 0$ alors -2 est racine de $P(x)$.

b) Factorisons $P(x)$ par la Méthode de la division Euclidienne

-2 est racine de $P(x)$ alors $P(x)$ est divisible par $(x+2)$ et peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x+2)Q(x)$ avec $d^\circ Q(x) = 2$

Règle :

- **ordonner le dividende et le diviseur suivant les puissances décroissantes en complétant si nécessaire**
- **procéder à la division**
- **écrire le résultat sous la forme : D = d . Q + R**



Ainsi $Q(x) = -2x^2 + x + 10$

$P(x) = (x + 2)(-2x^2 + x + 10)$

REMARQUE :

Le degré du quotient est égal à la différence des degrés du dividende et du diviseur

METHODE DE HORNER (William George Horner)

Exercice : Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 + 2x - 5$.

a) Vérifier que 1 est racine de $P(x)$.

b) Factoriser par la méthode de Horner le polynôme $P(x)$.

Solution intégrale

a) Vérifions que 1 est racine de $P(x)$.

Calculons $P(1)$

$P(1) = 3(1)^3 + 2(1) - 5 = 3 + 2 - 5 = 5 - 5 = 0$

$P(1) = 0$ donc 1 est racine de $P(x)$.

b) Factorisons par la méthode de Horner le polynôme $P(x)$.

1 est racine de $P(x)$ donc le polynôme $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x-1)Q(x)$ avec $d°Q(x) = 2$

$P(x) = 3x^3 + 0x^2 + 2x - 5$

coéf $P(x)$	3	0	2	-5
1		3	3	5
coéf $Q(x)$	3	3	5	0

$Q(x) = 3x^2 + 3x + 5$

$\mathbf{P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 5)}$

Exercice d'entrainement

1) On donne le trinôme $x^2 - x - 2$

a) Factoriser $x^2 - x - 2$

b) Déterminer les réels a et b pour que le polynôme

$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + ax + b$ soit divisible par $x^2 - x - 2$

2) Soit le polynôme $H(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

On note α ; β et γ ses racines

a) Ecrire en fonction de α ; β et γ la forme factorisée de $H(x)$.

b) Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = 5$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3$ et $\alpha\beta\gamma = -1$

c) Calculer les valeurs des expressions suivantes :

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

d) Sachant que $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ et $\beta = -1$; calculer la valeur de γ puis donner la forme factorisée de $H(x)$.

Solution intégrale

a) Factorisons $x^2 - x - 2$

Calculons Δ

$\Delta = 9$

$x_1 = -1$ et $x_2 = 2$

$\mathbf{x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)}$

b) Déterminons les réels a et b pour que le polynôme

$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + ax + b$ soit divisible par $x^2 - x - 2$

$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + ax + b$ divisible par $x^2 - x - 2$ alors les racines -1 et 2 de $x^2 - x - 2$ sont aussi racines de $P(x)$ donc on a $P(-1) = 0$ et $P(2) = 0$.

$P(-1) = 3(-1)^4 - 2(-1)^3 - 6(-1)^2 + a(-1) + b = 0 \Leftrightarrow$
$-1 - a + b = 0 \Leftrightarrow -a + b = 1$
$P(2) = 3(2)^4 - 2(2)^3 - 6(2)^2 + a(2) + b = 0 \Leftrightarrow$
$8 + 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -8$
on a le système suivant : $\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} -2a + 2b = 2 \\ 2a + b = -8 \end{cases}$

$3b = -6 \Leftrightarrow b = -2$
Remplaçons b par sa valeur dans l'équation 1
$-a + b = 1 \Leftrightarrow -a - 2 = 1 \Leftrightarrow a = -3$
$a = -3$ et $b = -2$
3) Soit le polynôme $H(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$
On note α ; β et γ ses racines
a) Ecrivons en fonction de α ; β et γ la forme factorisée de $H(x)$.
α ; β et γ étant des racines de $H(x)$ alors $H(x)$ peut s'écrire sous la forme factorisée : $\mathbf{H(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)}$
b) Montrons que $\alpha + \beta + \gamma = 5$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3$ et $\alpha\beta\gamma = -1$
On a $H(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$
Développons $H(x)$
$H(x) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)x - \alpha\beta\gamma$ et
$H(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$
Par identification des coefficients on a :
$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$
c) Calculons les valeurs des expressions suivantes :
❖ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
On a $\alpha + \beta + \gamma = 5 \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 = 25$
$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)$
$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) = 25$
$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3$ ainsi
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(3) = 25 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 25 - 6 = 19$

D'où $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 19}$

❖ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$; réduisons l'expression au même dénominateur

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha}{\alpha\beta\gamma}$ or

$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 3$ et $\alpha\beta\gamma = -1$ ainsi $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{3}{-1} = -3$

$$\boldsymbol{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -3}$$

d) Sachant que $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ et $\beta = -1$; calculons la valeur de γ puis donnons la forme factorisée de $H(x)$.

On a $\alpha + \beta + \gamma = 5$ alors $2 - \sqrt{5} - 1 + \gamma = 5$

d'où $\boldsymbol{\gamma = 4 + \sqrt{5}}$

$H(x)$ devient : $\boldsymbol{H(x) = (x - 2 + \sqrt{5})(x + 1)(x - 4 - \sqrt{5})}$

3. POLYNÔME SYMÉTRIQUE OU RÉCIPROQUE

3.1. DÉFINITION

Soit polynôme P donné par :

$\boldsymbol{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}$

de degré n, P est dit <u>symétrique</u> ou <u>réciproque</u> lorsque les égalité sont vérifiées :

$\boldsymbol{a_n = a_0 ; a_{n-1} = a_1 ; \ldots ; a_{n-k} = a_k}$ **pour tout** $\boldsymbol{k \in [0 ; n]}$

Exemple

✓ $x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 1$ est un polynôme symétrique de degré 4

✓ $3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ est un polynôme symétrique de degré 3

REMARQUE :

✓ **Un polynôme symétrique n'admet pas de racine nulle.**

✓ **Si son degré est impair alors il admet -1 comme racine.**

Exercice d'application :

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

1) Montrer que 0 n'est pas racine de $P(x)$.

2) Prouver que $P(x) = 0$ si et seulement si

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

3) En posant $X = x + \frac{1}{x}$ déduire de la question 2°) que $P(x) = 0$ est équivalente à l'équation : $X^2 - 2X = 0$

4) Résoudre l'équation$X^2 - 2X = 0$ puis déduire en les racines de $P(x)$.

Solution intégrale

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

1) Montrons que 0 n'est pas racine de $P(x)$.

Calculons $P(0)$

$P(0) = (0)^4 - 2(0)^3 + 2(0)^2 - 2(0) + 1 = 1$

$P(0) = 1$ donc 0 n'est racine de $P(x)$.

2) Prouvons que $P(x) = 0$ si et seulement si

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

On a $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$; mettons x^2 en facteur

$P(x) = x^2\left(x^2 - 2x + 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

$P(x) = x^2\left(\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2\right)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2\right) = 0$ or

$x^2 \neq 0$ Car 0 n'est racine de $P(x)$

d 'ou $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

3) En posant $X = x + \frac{1}{x}$ déduisons de la question 2°) que $P(x) = 0$ est équivalente à l'équation : $X^2 - 2X = 0$

On a $P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

En posant $X = x + \frac{1}{x}$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$; remplaçons $x^2 + \frac{1}{x^2}$ par $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$.

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

avec $X = x + \frac{1}{x}$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X = 0$

4) Résolvons l'équation $X^2 - 2X = 0$ en déduisant les racines de $P(x)$

- Résolvons l'équation $X^2 - 2X = 0$

$X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X(X - 2) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ou $X = 2$

$\boldsymbol{S_{IR} = \{0\,;\,2\}}$

- Déduisons les racines de $P(x)$

On a $X = x + \frac{1}{x}$

$X = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = -1$ Impossible

$X = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 1) = 0$ ou $(x - 1) = 0$

$x = 1$

La racine de $P(x)$ est 1

4. FRACTION RATIONNELLE

4.1. DÉFINITION

On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes $N(x)$ par $D(x)$; ou $D(x)$ un polynôme non nul.

Exemples

$Z(x) = \frac{x+1}{x}$; $A(x) = \frac{x+1}{2x+3}$; $Q(x) = \frac{2x^3+4x+1}{x^2+2x+3}$

4.2. CONDITION D'EXISTENCE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Soit la fraction rationnelle $Q(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$; $Q(x)$ existe si et seulement le dénominateur $D(x) \neq 0$.

L'ensemble des réels pour les quelles $Q(x)$ existe est appelé Domaine ou Ensemble de définition noté D_f .

Exercice d'application

Soit $A(x) = \frac{x^2+1}{3x}$ et $k(x) = \frac{7x^2+2x-5}{x^2-2x-3}$ déterminer le domaine de définition de $A(x)$ et $k(x)$

Solution intégrale

Déterminons le domaine de définition.

❖ $A(x) = \frac{x^2+1}{3x}$

$A(x)$ existe si et seulement si $3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$\mathbf{D_A = IR'\{0\}}$

❖ $k(x) = \frac{7x^2+2x-5}{x^2-2x-3}$

$k(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 2x - 3 \neq 0$

Posons $x^2 - 2x - 3 = 0$

Calculons Δ

$\Delta = 16$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

$\mathbf{D_K = IR'\{1; 3\}}$

4.3. SIMPLIFICATION D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Simplifier une fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ c'est l'écrire pour tout x appartenant à D_f sous la forme $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ ou $n(x)$ et $d(x)$ sont des facteurs respectifs de $N(x)$ et $D(x)$

N.B : une fonction rationnelle n'est simplifiable que si le numérateur et le dénominateur ont au moins un facteur en commun.

▸ **Exercice d'application**

Simplifier les fonctions rationnelles suivantes

$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ $h(x) = \frac{x^2+(3-\pi)x-3\pi}{x+3}$

Solution intégrale

Simplifions les fonctions rationnelles

❖ $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

Factorisons $x^2 + 2x - 3$ et $x^2 - 1$

Posons $x^2 + 2x - 3 = 0$

Calculons Δ

$\Delta = 16$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x-3)$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$

$\mathbf{f(x) = \frac{x-3}{x+1}}$

❖ $h(x) = \frac{x^2+(3-\pi)x-3\pi}{x+3}$

Factorisons $x^2 + (3-\pi)x - 3\pi$

Posons $x^2 + (3-\pi)x - 3\pi = 0$

Calculons Δ

$\Delta = (\pi+3)^2$

$x_1 = -3$ et $x_2 = \pi$

$x^2 + (3-\pi)x - 3\pi = (x-\pi)(x+3)$

$h(x) = \frac{(x-\pi)(x+3)}{x+3} = x - \pi$

$\mathbf{h(x) = x - \pi}$

4.4. ÉTUDE DU SIGNE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

Pour étudier le signe d'une fonction rationnelle $(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, on étudie dans un même tableau les signes du numérateur $N(x)$ et du dénominateur $D(x)$ puis le signe de $f(x)$.

Exercice d'application

Etudier le signe des fonctions rationnelles suivantes

$h(x) = \frac{x-2}{-x+1}$; $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x+1}$ et $k(x) = \frac{-x^2+2x-1}{2x^2-x+3}$

Solution intégrale

Etudions le signe des fonctions rationnelles

❖ $h(x) = \frac{x-2}{-x+1}$

Posons : $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$	$+$	0	$-$		$-$	
$h(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Sur l'intervalle $]-\infty ; 1[\cup]2; +\infty [$; $h(x) < 0$

Sur l'intervalle $]-1; 2[$ $h(x) > 0$

Si $x = 2$; $h(x) = 0$

❖ $f(x) = \frac{x^2 - 5x+6}{x + 1}$

Posons : $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 1$

$x_1 = 2$ et $x_2 = 3$

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		2		3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur l'intervalle $]-\infty ; -1[\cup]2; 3 [$; $f(x) > 0$

Sur l'intervalle $]-1 ; 2[\cup]2; +\infty [$; $f(x) < 0$

Si $x = 2$ ou $x = 3$; $f(x) = 0$

❖ $k(x) = \frac{-x^2 + 2x-1}{2x^2 - x + 3}$

Posons : $-x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 0$

$x_0 = 1$

$2x^2 - x + 3 = 0$

$\Delta = -23$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x^2 + 2x - 1$	$-$	0	$-$
$2x^2 - x + 3$	$+$		$+$
$k(x)$	$-$	0	$-$

Sur l'intervalle $]-\infty ; 1[\cup]1; +\infty [$; $k(x) > 0$

Si $x = 1$; $k(x) = 0$

4.5. DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Décomposer une fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$; c'est la réécrire sous la forme $f(x) = A(x) + \frac{n(x)}{d(x)}$ avec $A(x)$; $n(x)$ et $d(x)$ des polynômes tels que $d°n(x) < d°d(x)$

Exercice d'application

Décomposer les fonctions rationnelles suivantes :

$f(x) = \frac{-x^2+2x-3}{x+2}$; $Q(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-1}$

Solution intégrale

Décomposons les fonctions rationnelles

❖ $f(x) = \frac{-x^2+2x-3}{x+2}$; effectuons la division euclidienne de $f(x) = 1$

$$\begin{array}{l|l} -x^2+2x-3 & x+2 \\ \hline -x^2-2x & -x+4 \\ \hline 0\ \ 4x-3 & \\ \quad 4x+8 & \\ \hline \quad 0\ \ -13 & \end{array}$$

$$\mathbf{f(x) = -x+4-\frac{13}{x+2}}$$

❖ $Q(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-1}$

Complétons le polynôme du numérateur et du dénominateur puis effectuons la division euclidienne de $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-1} = \frac{2x^3+0x^2+0x+1}{x^2+0x-1}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+0x^2+0x+1 & x^2+0x-1 \\ \hline 2x^3+0x^2-2x & 2x \\ \hline 0+0x^2+2x+1 & \end{array}$$

$$\mathbf{Q(x) = 2x+\frac{2x+1}{x^2-1}}$$

SÉRIE D'EXERCICES

THÈME : POLYNÔMES – FRACTION RATIONNELLES

- **EXERCICE 1** Soit P(x) le polynôme défini par

$P(x) = -3x^2 - x^2 + 8x - 4$

a) vérifier que – 2 est une racine du polynôme P.

b) En déduire une factorisation complète de P(x).

c) Résoudre dans R; $P(x) = 0$ puis $P(x) \leq 0$

- **EXERCICE 2** Soit le polynôme p défini par $P(x) = 6x^3 - 17x^2 - x - 6$

1. calculer P(3) . En déduire une factorisation de P(x)
2. Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$ puis $P(x) \leq 0$

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{x^2-5x+6}$; Déterminer le domaine de définition de f puis simplifier f(x).

- **EXERCICE 3** Soit P le polynôme définie par

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2$

1) Calculer P (1) ; P (2) et P (-2) puis conclure.

2) En déduire une factorisation de P(x)

3) Résoudre dans IR :

a) L'équation $P(x) = 0$

b) L'équation $P(-2x + 3) = 0$

c) L'inéquation $P(x) \leq 0$

- **EXERCICE 4** On donne les polynômes $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 2x - 3$ et $Q(x) = -x^2 + 4x^2 - 3$

1. Déterminer les réel a et b tels que pour tout réel x , $P(x) = (ax + b)Q(x)$ en utilisant :

a) La méthode par identification des coefficients indéterminés.

b) La méthode par la division euclidienne.

c) La méthode Horner

2. Étudier suivant les valeurs de x le signe de P(x).
3. Résoudre dans IR :

- ✓ L'inéquation $P(x) < 0$
- ✓ L'inéquation $P(x) \geq 0$

EXERCICE 5 Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

1) Calculer $P(-1)$ et $P(2)$ puis conclure.
2) Factoriser au complet $P(x)$.
3) Résoudre dans IR : $P(x) = 0$; $P(x) < 0$
4) En déduire de la question 2.) la résolution de l'équation $P(\frac{1}{x}) = 0$

Pour la suite on considère le polynôme $Q(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$.

5) Déterminer a et b pour que -1 et -2 soient des racines de $Q(x)$
6) On donne $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
   6 . a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   6 . b) Simplifier ; $f(x)$ puis résoudre dans IR $f(x) \geq 0$

EXERCICE 6 On considère le polynôme

$P(x) = -3x^3 + 4x^2 + ax + b$ ou a et b deux nombres réels.

1) a) déterminer les valeurs a et b pour que 1 et -2 soient des racines de $P(x)$.

b) factoriser alors $P(x)$ puis résoudre l'équation $P(x) = 0$.

2) On pose $a = 13$ et $b = -14$ et on donne $Q(x) = \frac{P(x)}{2x^2+5x+2}$

   a) Déterminer l'ensemble des réels x pour les quelles $Q(x)$ existe.
   b) Simplifier $Q(x)$.
   c) Résoudre dans IR les équations:
   d) $Q(x) = 0$ $Q(x) = -5x + 5$
   e) Résoudre dans IR l'inéquation $Q(x) \geq 0$.

EXERCICE 7 (corrigé) Soit le polynôme P définie par

$P(x) = x^4 + ax^2 - x + b$

1) Déterminer les réels a et b pour que $\forall x \in IR$ on a :

$P(x) = (x + 1)(x + 2)Q(x)$

2) Déterminer le polynôme $Q(x)$
3) Factoriser au complet le polynôme $P(x)$.
4) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$.
5) En déduire les solutions de l'équation $P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

6) Résoudre dans IR les inéquations

a) $P(x) \leq 0$

b) $P(x) > 0$

▸ **EXERCICE 8** (corrigé)

Soit $K(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$

1. Déterminer un polynôme $Q(x)$ et un polynôme $R(x)$ du premier degré tels que :

$K(x) = (x^2 - 2x - 1)\,Q(x) + R(x)$

2. En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de $K(x)$ par $\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)$.

3. Calculer la valeur exacte de $K\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

▸ **EXERCICE 9** Soit $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

1) Sachant que $P(x)$ admet 4 racines a , b, c et d que l'on ne calculera pas ; calculer

$X = a + b + c + d$, $Y = ab + ac + ad + bc + bd + cd$, $Z = abcd$

2) Sachant que $c = 1$ et $d = 2$, en utilisant la première question déterminer a et b

3) On suppose $a = -1$, $b = -2$ résoudre $P(x) \leq 0$, $P(|x - 3|) = 0$

4) Soit $q(x) = \frac{xP(x)}{3x^2 - 9x + 6}$

Déterminer D_q puis simplifier $q(x)$

5) Soit $f(x)$ l'expression simplifiée de $q(x)$.

a) Vérifier que $f(x + 1) - f(x) = x^2 + 3x + 2$.

b) En déduire que

$$2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \cdots + (n + 1)(n + 2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} - 2$$

▸ **EXERCICE 10**

1. a) déterminer un polynôme $P(x)$ de degré 2 tel que $P(0) = 0$ et pour tout réel x ; $P(x + 1) - P(x) = x$ ⟨1⟩

b) dans la relation ⟨1⟩ en remplaçant x successivement par les entiers naturels $1 ; 2 ; 3 ; \ldots . n$ et en additionnant membre à membre les égalités obtenues ; montrer que pour tout entier naturel n on a :

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. a) déterminer un polynôme $Q(x)$ de degré 3 tel que $Q(0) = 0$ et pour tout réel x ; $Q(x+1) - Q(x) = x^2$ ⟨2⟩.

b) dans la relation ⟨2⟩ , montrer que pour tout entier naturel n on a :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. a) déterminer un polynôme $h(x)$ de degré 4 tel que $h(0) = 0$ et pour tout réel x ; $h(x+1) - h(x) = x^3$ ⟨3⟩

b) dans la relation ⟨3⟩ , montrer que pour tout entier naturel n on a :

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EXERCICE 11 Soit la fonction rationnelle : $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ pour tout $x \neq 0$ et $x \neq -1$.

b) Vérifier que : $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$

c) En déduire que : $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

EXERCICE 12

Soient $P(x) = \frac{3x^2+9x+5}{x^2+3x+2}$ et $q(x) = 3 + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$

1) Montrer que :

a) $P(x)$ et $q(x)$ ont le même ensemble de définition.

b) Pour tout réel x différent de -2 et de -1 ; $P(x) = q(x)$.

2) Démontrer que :

a) $P(0) + P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = 3(n+1) + \frac{1}{n+2} - 1$.

b) En déduire la valeur exacte de :

$P(0) + P(1) + P(2) + \cdots + P(1000)$

EXERCICE 13 (corrigé)

Soit le polynôme K défini par $K(x) = x^4 + px^2 + q$

1. Déterminer les réels p et q pour que le polynôme $K(x)$ soit divisible par $x^2 - 6x + 5$

2. En déduire une factorisation complète de $K(x)$.

3. Résoudre dans IR les équations et inéquation suivantes

a) $K(x) \leq 0$

b) $K(|-3x+2|) = 0$

EXERCICE 14

1. On donne $Z(x) = 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$
   a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Z.
   b) Montrer que si α est racine de $Z(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi racine.
   c) Calculer $Z(2)$ puis résoudre dans IR l'équation $Z(x) = 0$
2. Soit le polynôme

$$P(x) = x^4 - 13x^3 + 48x^2 - 52x + 16$$

a) Justifier que 0 n'est pas racine $P(x)$

b) Montrer que $P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{4}{x} + x \\ \\ Q(X) = 0 \end{cases}$ ou $Q(X) = X^2 - 13X + 40$

   c) Résoudre dans IR l'équation $Q(X) = 0$
   d) En déduire les solutions de $P(x) = 0$

EXERCICE 15 On donne le polynôme P définie par :

$P(x) = x^3 - (3 + 3\sqrt{3})x^2 + (8 + 6\sqrt{3})x - 6 - 2\sqrt{3}$

1) On pose $x = X + \sqrt{3}$

Préciser le polynôme en X tel que $H(X) = P(X + \sqrt{3})$

2) Calculer $H(1)$ et $H(-1)$

3) En déduire une factorisation de $H(X)$.

4) Montrer que pour tout x réel , $P(x)$ peut s'écrire sous la forme factorisée de produit de trois polynôme de premier degré en x

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

THÈME : POLYNÔMES – FRACTIONS RATIONNELLES

EXERCICE 8 Soit $K(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$

1. Déterminons un polynôme $Q(x)$ et un polynôme $R(x)$ du premier degré tels que : $K(x) = (x^2 - 2x - 1)\,Q(x) + R(x)$

Effectuons la division euclidienne de $K(x)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 0x + 3 & x^2 - 2x - 2 \\ \cline{2-2} 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 & \\ \cline{1-1} 0 + 3x^3 - 8x^2 + 0x & -2x^2 + 3x - 2 \\ 3x^3 - 6x^2 - 3x & \\ \cline{1-1} 0 - 2x^2 + 3x + 3 & \\ -2x^2 + 4x + 2 & \\ \cline{1-1} 0 - x + 1 & \end{array}$$

$K(x) = (x^2 - 2x - 1)\,(2x^2 + 3x - 2) + (-x + 1)$

Ainsi $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$ et $R(x) = -x + 1$

2. Déduisons le quotient et le reste de la division euclidienne de $K(x)$ par

$(x - 1 - \sqrt{2})$

On a : $K(x) = (x^2 - 2x - 1)\,(2x^2 + 3x - 2) + (-x + 1)$

Factorisons $x^2 - 2x - 1$

Posons $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 8\ \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = 1 - \sqrt{2}\,; x_2 = 1 + \sqrt{2}$

$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$

$K(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})\,(2x^2 + 3x - 2) + (-x + 1)$

Ainsi le quotient est :

$(x-1-\sqrt{2})(2x^2+3x-2) = 2x^3+(1+2\sqrt{2})x^2+(3\sqrt{2}-5)x+2-2\sqrt{2}$

Le reste est : $-x+1$

3. Calculons la valeur exacte de $K(1-\sqrt{2})$

$K(1-\sqrt{2}) = R(1-\sqrt{2}) = -(1-\sqrt{2})+1 = -1+\sqrt{2}+1 = \sqrt{2}$

$K(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

EXERCICE 13

1. Déterminons les réels p et q pour que le polynôme $K(x)$ soit divisible par x^2-6x+5

$K(x)$ divisible par x^2-6x+5 alors les racines de $K(x)$ sont aussi celles de

x^2-6x+5

Posons $x^2-6x+5=0$

$\Delta = 0$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 5$

1 et 5 racine de $K(x)$ alors $K(1)=0$ et $K(5)=0$

$K(1)=0 \Leftrightarrow (1)^4+p(1)^2+q=0$

$\Leftrightarrow p+q=-1$

$K(5)=0 \Leftrightarrow (5)^4+p(5)^2+q=0$

$\Leftrightarrow 25p+q=-625$

on a le système suivant $\begin{cases} p+q=-1 \\ 25p+q=-625 \end{cases}$

Ainsi $p=-26$ et $q=25$

D'où $K(x) = x^4-26x^2+25$

2. Déduisons une factorisation complète de $K(x)$.

1 et 5 sont des racines de $K(x)$ alors $K(x)$ peut s'écrire sous la forme factorisée :

$K(x) = (x-1)(x-5)Q(x)$ avec $Q(x) = ax^2+bx+c$

$K(x) = x^4+0x^3-26x^2+0x+25$

$coéf\,K(x)$	1	0	-26	0	25
1		1	1	-25	-25
	1	1	-25	-25	0
5		5	30	25	
$coéf\,Q(x)$	1	6	5	0	

$a = 1$; $b = 6$ et $c = 5$

$Q(x) = x^2 + 6x + 5$

$K(x) = (x-1)(x-5)(x^2+6x+5)$

Factorisons $x^2 + 6x + 5$

$x^2 + 6x + 5 = (x+5)(x-1)$

$K(x) = (x-1)(x-5)(x+5)(x-1)$

3. Résolvons dans IR les équations et inéquation suivantes

a) $K(x) \leq 0$

$K(x) = (x^2-1)(x^2-25)$

x	$-\infty$	-5		-1		1		5	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	
x^2-25	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	
$K(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S_{IR} = [-5; -1] \cup [1; 5]$

b) $K(|-3x+2|) = 0$

$K(|-3x+2|) = (|-3x+2|-1)(|-3x+2|-5)(x+5)(|-3x+2|-1) = 0$

$\Leftrightarrow |-3x+2| = 5$ ou $|-3x+2| = 1$ ou $|-3x+2| = -5$ impossible ou

$|-3x+2| = -1$ Impossible

$|-3x+2| = 5 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{7}{3}$

$|-3x+2| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{1}{3}$

$S_{IR} = \left\{-1; 1; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right\}$

DEVOIR A LA MAISON N°I

✍ **EXERCICE 1** Soit f(x) et g(x) les polynômes définies par
$f(x) = -2x^3 + 7x^2 + 5x - 4$ et $g(x) = 2x^3 + x - 1$

1. Factoriser f(x) sachant qu'il a une racine avec g(x).
2. On pose $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$
   a) Pour quelles valeurs de x ; h(x) existe - t –il ?
   b) Simplifier h(x) .
   c) Résoudre dans IR ; $h(x) \geq 0$.

✍ **EXERCICE 2** On considère la fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f(x) .
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x de D_f : $\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$.
3. En utilisant les deux expressions de f(x) montrer que :
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}$
4. En déduire la valeur exacte de : $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{110}$

✍ **EXERCICE 3**

Partie A

On donne dans le plan orienté $\wp$, un demi-droite Ox

1. Construire les demi- droites Oy , Oz et Ot telles que :
$(\widehat{Ox;Oy}) = \frac{2\pi}{3}$; $(\widehat{Ox;Oz}) = \frac{-5\pi}{6}$; $(\widehat{Ox;Ot}) = \frac{\pi}{4}$
2. Déterminer la mesure principale en radians des angles orientés
$(\widehat{Oy;Oz})$; $(\widehat{Oz;Ot})$ et $(\widehat{Ot;Oy})$

Partie B les questions sont indépendantes.

1. Démontrer que pour tout réel t
   a) $(\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2\cos t \sin t$
   b) $(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2$
2. Soit $t \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin t = \frac{4}{5}$ calculer cos t et tan t
3. Sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; Déterminer $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)$

DEVOIR A LA MAISON N°II

✍ EXERCICE 1

On considère le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + ax + b - 4$

1) Déterminer les réels a et b pour que $P(x)$ soit divisible par

$$Q(x) = x^2 - 3x + 2$$

2) Déduis-en les racines de $P(x)$ puis résoudre dans IR l'inéquation $P(x) \leq 0$

3) On pose $k(x) = P(x^2 + x + 1)$

a) Quel est le degré de $k(x)$?

b) Déterminer les racines de $k(x)$.

c) Déduire de la question 2) l'ensemble des solutions dans IR l'inéquation $k(x) \leq 0$

✍ EXERCICE 2

Soit l'expression $K(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + x + 7}{x^2 - x - 2}$.

1) Déterminer le domaine de définition D_K de K.

2) Déterminer les réels a ; b ; c et d telque pour tout réel x appartenant à D_K ; $K(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x+1}$

✍ EXERCICE 3

1) L'une des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ en radian est α.

Déterminer sa mesure principale α_0 dans chaque cas suivant :

a) $\alpha = \frac{25\pi}{4}$ b) $\alpha = -\frac{19\pi}{3}$

c) $\alpha = \frac{37\pi}{3}$ d) $\alpha = \frac{47}{6}$

2) L'une des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ en degré est θ. Déterminer sa mesure principale θ dans chaque cas suivant :

a) $\theta = 405°$ b) $\theta = -6150°$ c) $\theta = 3167°$

3) les nombres réels suivants sont – ils des mesures du même angle orienté ?

a) $\frac{15\pi}{7}$ et $\frac{57\pi}{7}$

b) $\frac{41\pi}{6}$ et $-\frac{19\pi}{6}$

PRODUIT SCALAIRE

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Connaître les définitions du produit scalaire, de la norme et de l'orthogonalité de vecteurs.
- Utiliser le produit scalaire de vecteurs pour :
- calculer des distances et des normes ;
- développer des expressions vectorielles ;
- déterminer des mesures d'angle géométrique ;
- démontrer des propriétés géométriques (alignement, parallélisme, orthogonalité) ;
- Déterminer une équation de droite connaissant un point de cette droite et un vecteur normal à cette droite.
- Déterminer une équation de cercle.

PLAN DU COURS

1. DIFFÉRENTES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE.. 209
1.1. EXPRESSION ALGÉBRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE... 210
1.2. EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE..... 213
1.2.1. Norme..... 213
1.3. EXPRESSION MÉTRIQUES DU PRODUIT SCALAIRE 215
1.3.1. Relation D'AL KASHI (théorème de Pythagore généralisé). 215
1.3.2. PROPRIÉTÉ..... 216
1.4. EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ 217
2. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE..... 218
2.1. OPERATIONS VECTORIELLES..... 218
2.2. PROPRIÉTÉS 219
2.3. PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ (perpendicularité)..... 219

3. APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE 220
3.1. ÉQUATION DE DROITE 220
3.2. ÉQUATION DE CERCLE..... 222
3.2.1. PROPRIÉTÉS 222
3.2.3. THÉORÈME 222

APERÇU HISTORIQUE

Le produit scalaire, introduit au dix-neuvième siècle par **Grassmann** et **Bellavitis**, possède de très nombreuses applications en mécanique et en électromagnétisme En mathématiques, il permet de caractériser l'orthogonalité et d'établir aisément des relations entre les angles ou les longueurs des côtés d'un triangle. Ces relations connues depuis l'Antiquité au moins, permirent aux astronomes **Delambre** et **Méchain** de calculer, à la Révolution française, la mesure d'un arc de méridienne donnant ainsi naissance à une nouvelle unité : **le mètre**.

1. DIFFÉRENTES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Prérequis :

➲ **Projection orthogonale d'un point**

Soit (d) une droite donnée du plan et A un point du plan n'appartenant pas à (d). On appelle projeté orthogonal de A sur la droite (d) l'unique point H de (d) tel que (AH) soit perpendiculaire à (d).

Si A appartient à la droite d, il est son propre projeté orthogonal sur (d)

➲ **Projection orthogonale d'un vecteur**

On considère une droite (d) donnée. Si un vecteur $\vec{v}$ est défini à l'aide de deux points A et B tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, on peut projeter les points A et B orthogonalement sur la droite (d). On obtient les points A' et B'. On dit que le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite (d)

1.1. EXPRESSION ALGÉBRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

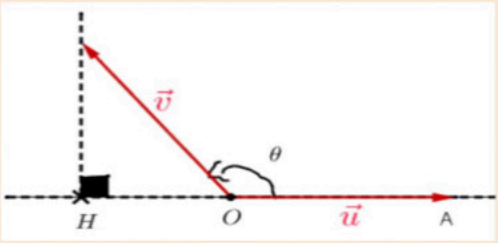
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On considère trois points O ; A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

On appelle produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ lit $\vec{u}$ « scalaire » $\vec{v}$ tel que :

- ✓ **Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$**
- ✓ **Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$**

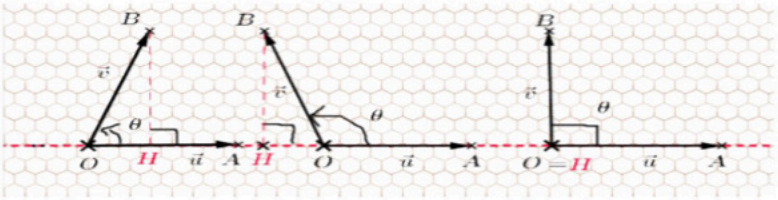
Soit le point H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA)



- ♦ **Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens alors $\vec{u}.\vec{v} = OA \times OH$**
- ♦ **Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont sens contraire alors $\vec{u}.\vec{v} = -OA \times OH$**

REMARQUE :

Soit ϑ l'angle $\widehat{AOB}$ autrement l'angle formant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lors qu'ils sont non nul alors on a les cas de suivants :

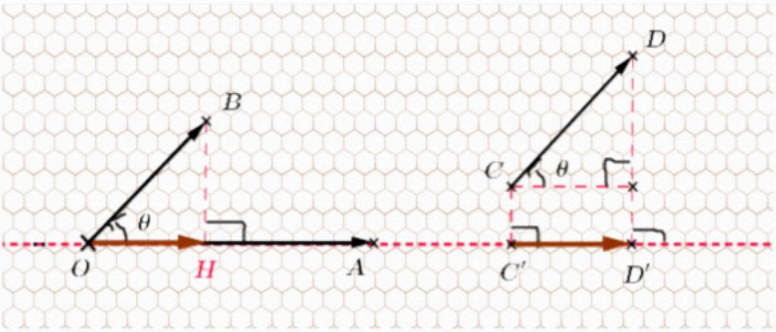


Si ϑ est angle aigu le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est positif

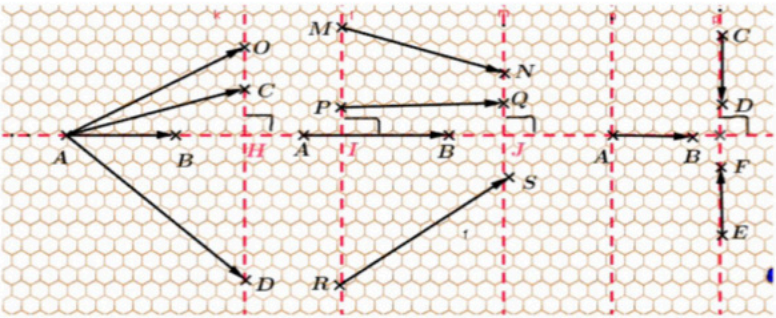
Si ϑ est angle obtus le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est négatif

Si ϑ est angle droit le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul

Soient C et D deux points du plan tels que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OB}$, et si C′ et D′ sont les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (OA) , alors $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{OH}$; on dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur (OA).



CONFIGURATIONS FONDAMENTALES



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = AB \times IJ$

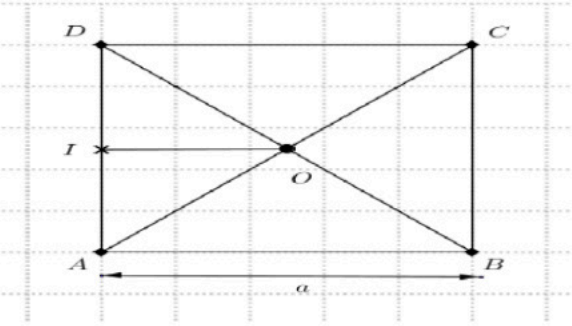
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = 0$

Exercice d'application

Soit ABCD un carré de centre O tel que AB = a

Déterminer en fonction de a les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$

Solution intégrale



Déterminons en fonction de a les produits scalaires :

❖ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B ainsi
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB = AB^2 = a^2$

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2}$

❖ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; L'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est un angle donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0}$

❖ $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$; Les diagonales d'un carré étant perpendiculaire, l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ est un angle droit donc $\boldsymbol{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = 0}$

❖ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$; Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO} = AC \times AO$ Or $AC = a\sqrt{2}$ et $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO} = a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2$ $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO} = a^2}$

❖ $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$; Les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et de sens contraire donc $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = -OC \times OA$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}a^2$ $\boldsymbol{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}a^2}$

❖ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$ Le point O a pour projeté orthogonal sur la droite (AD) le milieu I de [AD].Le point B a pour projeté orthogonal sur la droite (AD) le point A.

Ainsi $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IA} = -AD \times IA = -a \times \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}a^2$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}a^2}$

1.2. EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

(produit scalaire, normes de vecteurs et angles orienté)

1.2.1. Norme

La norme d'un vecteur $\vec{u} = \overline{AB}$ est le nombre réel positif noté : $\|\vec{u}\| = AB$

N.B :

- **Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées : $\vec{u}(a\,;b)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$**
- **On appelle vecteur unitaire tout vecteur de Norme égale à 1**
- **Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel $\vec{u}.\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$**

Si $\vec{u} = \overline{AB}$, alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = \overline{AB}^2 = AB^2$

PROPRIETE : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$; l'expression trigonométrique du produit scalaire est : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

REMARQUE : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ car le cosinus d'un angle orienté ne change pas si l'angle change de sens ($\cos(x) = \cos(-x)$)

Exercice d'application

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts non nuls.. on note α la mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Pour chacun des cas suivants calculer $\vec{u}.\vec{v}$

1) $\|\vec{u}\| = 5\,;\|\vec{v}\| = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$

2) $\|\vec{u}\| = 3\,;\|\vec{v}\| = \frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

3) $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}\,;\|\vec{v}\| = \frac{5}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

4) $\|\vec{u}\| = 1\,;\|\vec{v}\| = 2$ et $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

Solution intégrale

Calculons $\vec{u}.\vec{v}$

1) $\|\vec{u}\| = 5 ; \|\vec{v}\| = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = 5 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{u}.\vec{v} = 5\sqrt{2}$

2) $\|\vec{u}\| = 3 ; \|\vec{v}\| = \frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = 3 \times \frac{3}{2} \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

3) $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2} ; \|\vec{v}\| = \frac{5}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{15}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-15}{8}$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{-15}{8}$

4) $\|\vec{u}\| = 1 ; \|\vec{v}\| = 2$ et $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = 1 \times 2 \times \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 0 = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = 0$

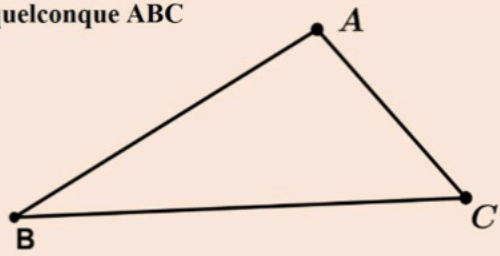
N.B :

- **Si l'angle orienté $(\vec{u} ; \vec{v})$ forme un angle aigu alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est positif.**
- **Si l'angle orienté $(\vec{u} ; \vec{v})$ forme un angle obtus alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est négatif.**
- **Si l'angle orienté $(\vec{u} ; \vec{v})$ forme un angle droit alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul**

1.3. EXPRESSION MÉTRIQUES DU PRODUIT SCALAIRE

1.3.1. Relation D'AL KASHI (théorème de Pythagore généralisé)

Soit un triangle quelconque ABC



On a :

- $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$ **de même**
- $\mathbf{AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})}$ **et**
- $\mathbf{AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{ACB})}$

Preuve :

D'après la relation de Chasles, on :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2 \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

$$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2 \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}^2$$

Or $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ ainsi

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

REMARQUE :

Ces formules permettent de faire des calcules de longueur dans un triangle qui n'est pas obligatoirement rectangle ; contrairement à Pythagore. À noter cependant que le théorème de Pythagore est un cas particulier de la relation d'Al Kashi , puis que le cosinus de l'angle droit est égal à zéro (o)

- **Exercice d'application**

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$; $AC = 9$ et $\left(\widehat{BAC}\right) = 60°$

a) calculer la longueur BC

b) calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$

Solution intégrale

calculons la longueur BC

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Soit $BC^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \times 7 \times 9 \times 0{,}5 = 67$ d'où $BC = 8{,}2$

a) calculons la mesure de l'angle $(\widehat{ACB})$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{ACB})$ d'où

$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{2 \times AC \times BC} = \frac{49 - 81 - 67}{2 \times 9 \times \sqrt{67}} = \frac{11}{\sqrt{67}}$ d'où $\widehat{ACB} \simeq 47,8°$

1.3.2. PROPRIÉTÉ

Soit trois points O , A et B non alignés ; d'après le théorème de Pythagore généralisé :

$\mathbf{OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)}$ **d'où**

$\mathbf{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - \|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\|^2\right)}$

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ **et** $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ **on obtient :**

$\mathbf{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)}$ **ou**

$\mathbf{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}$

Exercice d'application

On considère un triangle ABC tel que $AB = 7$; $AC = 5$ et $BC = 6$

1) Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$. En déduire celle de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) ; déterminer la valeur de AH.

3) Déterminer une valeur approchée de la mesure en degré de l'angle $\widehat{HAC}$.

Solution intégrale

1) Donnons la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ on a ainsi $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

Or $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Ainsi $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right] = \frac{1}{2}[BC^2 - BA^2 - AC^2]$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(36 - 49 - 25) = -19$ $\boldsymbol{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -19}$

Déduisons celle de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On sait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ d'où $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 19}$

2) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) ; déterminons la valeur de AH.

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ étant positif , si H le projeté orthogonal de C sur (AB) ; on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 19 \Leftrightarrow AH = \frac{19}{AB} = \frac{19}{7}$ $\boldsymbol{AH \simeq 2.71}$

3) Déterminons une valeur approchée de la mesure en degré de l'angle $\widehat{HAC}$.

On a $\cos(\widehat{HAC}) = \frac{AH}{AC} = \frac{19}{7} \times \frac{1}{5}$ $\boldsymbol{\widehat{HAC} = 57.12°}$

1.4. EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

DÉFINITION

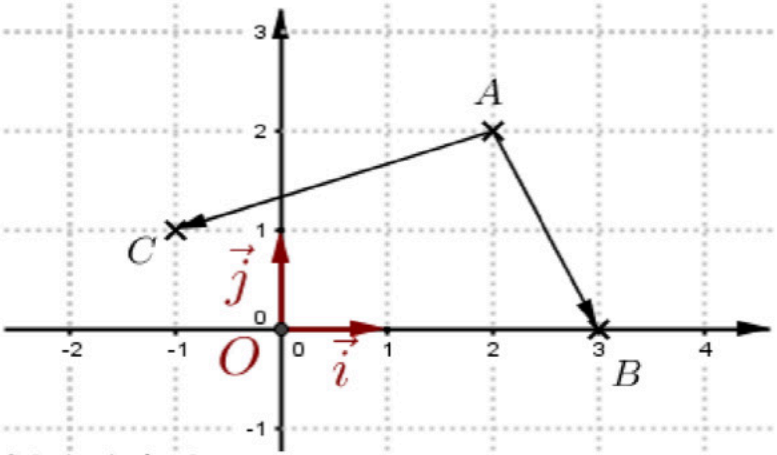
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ est :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

On peut aussi utiliser la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Exercice d'application Déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



Solution intégrale

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3-2\\0-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1-2\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1\times(-3)\times(-2)(-1) = -1$ $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1}$

2. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

2.1. OPERATIONS VECTORIELLES

P_1 : $\forall\ \vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ; on $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

P_2 :soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel non nul on a :

- ✓ $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
- ✓ $\vec{u}(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
- ✓ $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- ✓ $(\vec{v}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

2.2. PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

- ✓ $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- ✓ $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- ✓ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- ✓ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- ✓ $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- ✓ $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$

2.3. PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ (PERPENDICULARITÉ)

Propriété : le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. soient $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x';\,y')$; les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$

N.B : Ne pas confondre avec la colinéarité $xy' - yx' = 0$

Exercice d'application

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient $\vec{u}(2\,;1)$; $\vec{v}(3\,;-6)$ et $\vec{w}(1\,;\,3)$

1) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$. Que peut- on déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

2) Calculer $\vec{u}.\vec{w}$; $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{w}\|$. Que peut- on en déduire pour l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.

Solution intégrale

1) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(2\,;1)$ et $(3\,;-6)$

$\vec{u}.\vec{v} = 2\times 3 + 1\times(-6) = 6-6 = 0$ **$\vec{u}.\vec{v} = 0$**

On déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2) Calculer $\vec{u}.\vec{w}$; $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{w}\|$

❖ $\vec{u}.\vec{w}$

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont pour coordonnées $(2\,;1)$ et $(1\,;\,3)$

$\vec{u}.\vec{v} = 2\times 1 + 1\times 3 = 5$ **$\vec{u}.\vec{w} = 5$**

❖ $\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2+(1)^2} = \sqrt{5}$ **$\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$**

❖ $\|\vec{w}\| = \sqrt{(1)^2+(3)^2} = \sqrt{10}$ **$\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$**

Déduisons l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.

On a $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \Leftrightarrow 5 = \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \Leftrightarrow \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ainsi $\cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\boldsymbol{(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \; ou \; (\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]}$

3. APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE

PRÉLIMINAIRE : vecteur directeur ; vecteur normal

- **On appelle vecteur directeur d'une droite tout vecteur de même direction que la droite**
- **On appelle vecteur normal à une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$**

3.1. ÉQUATION DE DROITE

PROPRIÉTÉS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

P_1 - La droite (d) passant par $A(x_A\,;y_A)$ et ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$; elle a pour équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

P_2 - Une droite (d) ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(a;b)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$

P_3 - Une droite (d) ayant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a;b)$

PREUVE Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

P_1 - Soit droite (d) passant par A et ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$, (d) est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A\,;\,y - y_A)$et le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées $(a;b)$. Le repère étant orthonormé on a ainsi :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ donc la droite (d) a pour équation $\boldsymbol{a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0}$

P_2 - Soit droite (d) ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$. on note $A(x_A\,;\,y_A)$ un point de la droite (d), d'après le résultat précédent , (d) a pour équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0$

En posant $C = -ax_A - by_A$ on a alors l'équation de la droite (d) : **$ax + by + c = 0$**

P_3 - Si la droite (d) a pour équation de la forme $ax + by + c = 0$; on ainsi $(a\,;b) \neq (0;0)$ et (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$ le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est non nul et orthogonal à $\vec{u}$ puisque $-b \times a + a \times b = 0$ donc $\vec{n}(a;b)$ est vecteur normal à (d)

Exercice d'application Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$; on donne les points $A(-1;2)$ et $B(3;4)$.

Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$

Solution intégrale

Méthode 1

Soit I le milieu de [AB], et (d) la médiatrice de [AB]. Tout point $M(x\,;y)$ du plan appartient à la droite (d) si et seulement les droites (IM) et (AB) sont perpendiculaires. Autrement dit ; on a $M(x\,;y) \in$ (d) $\Leftrightarrow$ (IM) perpendiculaire (AB) $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$

Le point I a pour coordonnées $(1\,;3)$,le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(x-1;y-3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4\,;2)$ par conséquent ; on a :

$M(x\,;y) \in$ (d) $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \times 4 + (y-3) \times 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 2y - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$ ainsi une équation cartésienne de la médiatrice [AB] est : $2x + y - 5 = 0$

Méthode 2

Soit I le milieu de [AB] . La médiatrice de [AB] est la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point I milieu de [AB].On a $\overrightarrow{AB}(4;2)$ donc une équation cartésienne de la médiatrice de [AB] est de la forme $4x + 2y + C = 0$ de plus $I(1\,;3)$ appartient à la médiatrice de [AB] donc $4(1) + 2(3) + C = 0 \Leftrightarrow C = -10$ ainsi l'équation devient :

$4x + 2y - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

3.2. ÉQUATION DE CERCLE

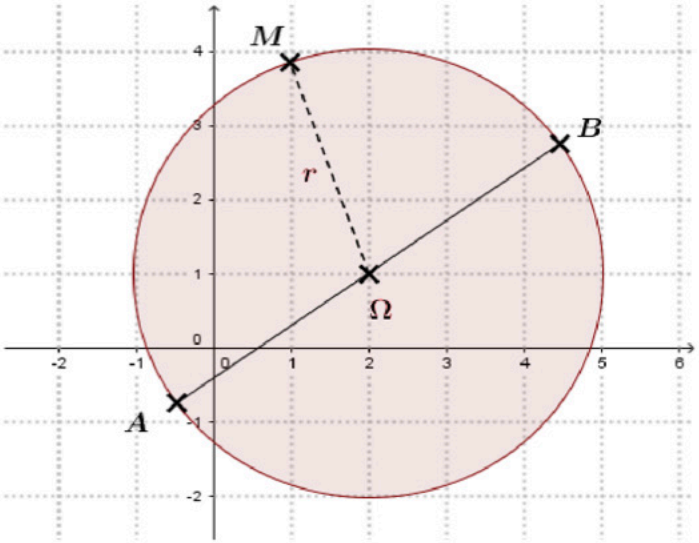
3.2.1. PROPRIÉTÉS

Dans le plan P muni d' un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$;

Le cercle de centre $\Omega(x_\Omega ; y_\Omega)$ et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$ ou encore $(\Omega M)^2 = r^2$; cette égalité permet de trouver son équation: $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$. Cette égalité permet de trouver son équation :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$



3.2.3. THÉORÈME

Tout cercle a une équation cartésienne de la forme : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

REMARQUE : une équation de cette forme n'est pas toujours celle d'un cercle.

Exemple : $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 33 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - 10x + y^2 + 4y + 33 = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2 - 25 + (y+2)^2 - 4 + 33 = 0 \Leftrightarrow$
$(x-5)^2 + (y+2)^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y+2)^2=-4$ impossible,
donc $x^2+y^2-10x+4y+33=0$ n'est pas une équation d'un cercle.

EXERCICES D'APPLICATIONS

- **Exercice 1** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ sachant que les points A et B on pour coordonnées respectives $(1\,;-1)$ et $(3\,;-2)$
- **Exercice 2** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$,on donne les points $A(-2\,;1)$ et $B(2\,;3)$. Déterminer une équation de la tangente au cercle de diamètre [AB] et passant par A.

Solution intégrale

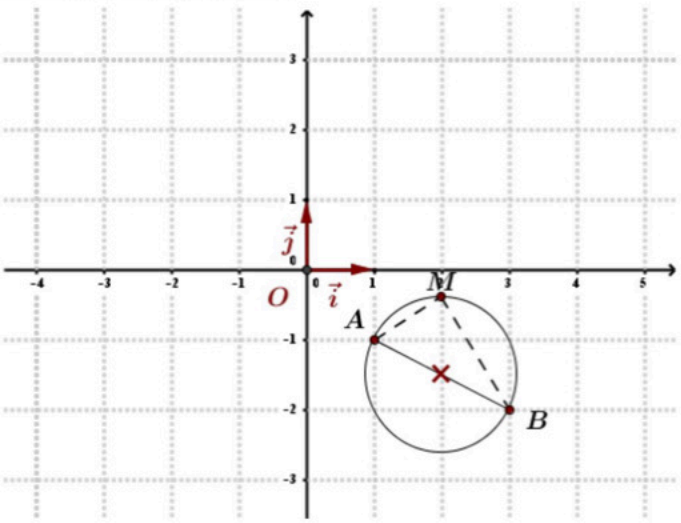
- **Exercice 1**

Déterminons une équation du cercle de diamètre [AB] sachant que les points A et B on pour coordonnées respectives $(1\,;-1)$ et $(3\,;-2)$

Tout point $M(x;y)$ du plan appartient au cercle (C) de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M, autrement dit on a :

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)+(y+1)(y+2)=0\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+3y+5=0$, une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est :
$x^2-4x+y^2+3y+5=0$



Exercice 2

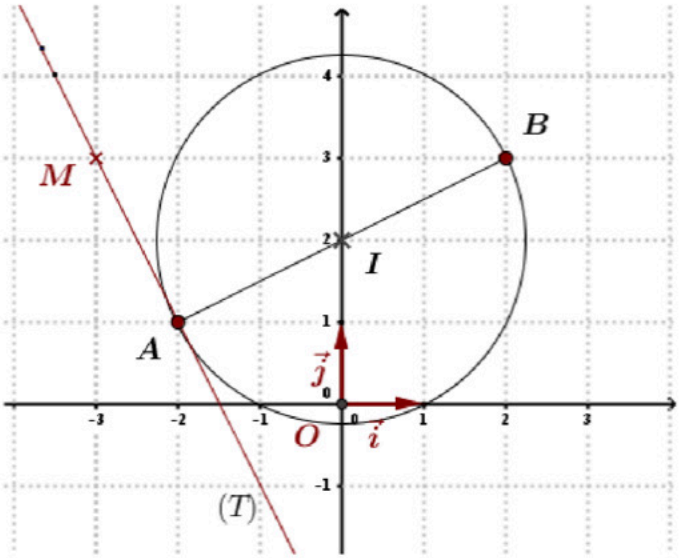
Déterminons une équation de la tangente au cercle de diamètre [AB] et passant par A

Posons I milieu de [AB] ; soit (C) le cercle diamètre [AB] et soit (T) la tangente à (C) en A.

Tout point $M(x\,;y)$ du plan appartenant à (T) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

On a : $I(0\,;\,2)$; $\overrightarrow{AI}(2\,;\,1)$ et $\overrightarrow{AM}(x+2\,;\,y-1)$ par conséquent on a $M(x\,;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 2(x+2) + 1(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0$; ainsi une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) de diamètre [AB] est $\mathbf{2x + y + 3 = 0}$



SÉRIE D'EXERCICES

Thème : Produit scalaire

EXERCICE 1

1) Soit ABC un triangle tel que AB = 2 ; AC = 3 et BC = 4

Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

2) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$

Dans chacun des cas suivants déterminer $\vec{u}.\vec{v}$

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}0.5\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}m+1\\m-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2-m\\m+4\end{pmatrix}$ avec $m \in IR$

EXERCICE 2

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 1$

Calculer

a) $(2\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$;

b) b) $(\vec{u} + 2\vec{v})^2$

c) $(-3\vec{u} + \vec{v})^2$

d) $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2$

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants déterminer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\x+1\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2x-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3x+2\\x+1\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}x-4\\2x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2x\\3-x\end{pmatrix}$

EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$; k est un réel.

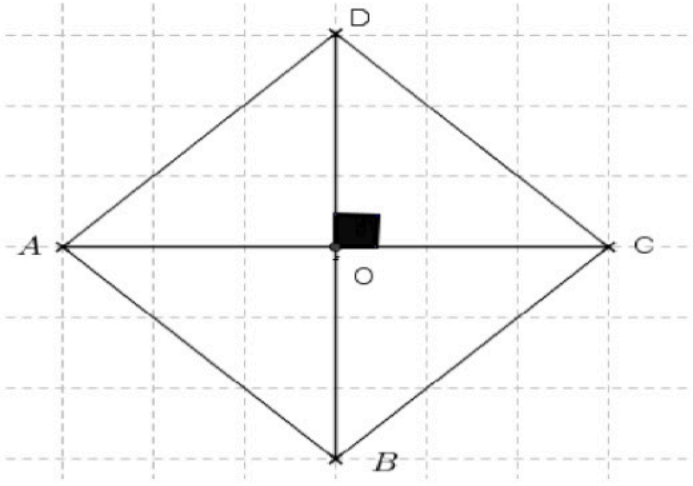
Soit $\vec{u}(k\,;\,-5)$ et $\vec{v}(2k-1\,;\,k+4)$

Existe-t-il des valeurs du réels k pour les quelles $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$

EXERCICE 5 (corrigé)

ABD et BCD sont deux triangle équilatéraux avec $AB = 4$

Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$



EXERCICE 6 (corrigé)

Soit un triangle ABC

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et BC dans chacun des cas suivants :

1) $AB = 6cm$; $AC = 5cm$ et $\widehat{BAC} = 60°$

2) $AB = 7cm$; $AC = 4cm$ et $\widehat{BAC} = 120°$

EXERCICE 7

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Soient $\vec{u}(2;1)$; $\vec{v}(3;-6)$ et $\vec{w}(1;3)$

1) Calculer $\vec{u}\,.\vec{v}$ que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) Calculer $\vec{u}\,.\vec{w}$; $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{w}\|$ que peut-on en déduire pour l'angle $(\vec{u}\,;\vec{w})$?

EXERCICE 8

Dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ on considère les points suivants : $A(2\,;1)$; $B(7\,;2)$ et $C(3\,;4)$.

Les questions suivantes sont indépendantes

1) Calculer les coordonnées du barycentre G de : $(A\,;3)$; $(B\,;2)$ et $(C\,;-4)$.

2) Déterminer une équation de la médiatrice de $[BC]$

3) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; l'angle $\hat{A}$ est –il droit ?

EXERCICE 9 (corrigé)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$;

1) On considère le point $A(2\,;-3)$ et le vecteur $\vec{n}(3\,;\,5)$.

Soit M un point de coordonnées $(x;y)$

Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en déduire l'équation de la droite (d_1) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2) Déterminer l'équation de la droite (d_2) passant par $B(3\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{v}(1\,;\,-3)$.

3) Déterminer l'équation de la droite (d_3) passant par $C(-1\,;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4\,;\,2)$.

EXERCICE 10 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1. Déterminer une équation du cercle (C_1) de centre le point $A(-2;1)$ et de rayon 5

2. Déterminer une équation du cercle (C_2) de diamètre $[BC]$ avec $B(-1;2)$ et $C(3;-1)$

3. Déterminer la nature de l'ensemble (E_1) de l'équation

$x^2 + y^2 + 7x - 8y + 8 = 0$

4. Déterminer la nature de l'ensemble (E_2) de l'équation

$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$

EXERCICE 11 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$; on considère les points $A(1\,;-1)$; $B(3\,;3)$; $C(4\,;4)$ et $D(2\,;1)$.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 12 Dire si les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires dans chacun des cas suivants :

1. (d_1) et (d_2) ont pour équations respectivement

$(d_1) : 2x + 3y - 5 = 0$ et $(d_2) : 6x - 4y + 5 = 0$

2. (d_1) et (d_2) ont pour équations respectivement

$(d_1) : x - y + 3 = 0$ et $(d_2) : 2x + y = 0$

PRODUIT SCALAIRE

EXERCICE 13 (corrigé)

On considère un triangle ABC dans un repère orthonormé avec $A(-1\,;2)$; $B(3\,;1)$ et $C(2\,;4)$

1) Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$

2) Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

EXERCICE 15

Examiner si les équations suivantes sont des équations du cercle et si c'est le cas , préciser le centre et le rayon du cercle.

1) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

2) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

EXERCICE 16 (corrigé)

Dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ on donne un point $I(2;-3)$

1. Déterminer l' équation du cercle (C) de centre I et de rayon $r = 5$.
2. Démontrer que le point $A(-2\,;0)$ est un point du cercle (C).
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle (C) .

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

THÈME : PRODUIT SCALAIRE

EXERCICE 5

Calculons les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$

❖ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AD}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) = 4\times 4\times\frac{1}{2} = 8$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 8$

❖ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) = 4\times 4\times\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -8$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -8$

❖ $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{DO};\overrightarrow{CD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DO};\overrightarrow{DC}}\right) + \pi(2\pi) = \frac{\pi}{3} + \pi(2\pi)$ or

$\text{Cos}\left(\widehat{\overrightarrow{DO};\overrightarrow{CD}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi(2\pi)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{DO}\|\|\overrightarrow{CD}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DO};\overrightarrow{CD}}\right) = 2\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = -4$

EXERCICE 6

1) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6\times 5\times\cos(60°) = 15$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 15$

Calculons BC

D'après la formule d'Alkashi

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2\times 15 = 31$

d'où $BC = \sqrt{31}$ cm

2) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7\times 4\times\cos(120°) = -14$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -14$

Calculons BC

En utilisant la formule d'Alkashi

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow BC^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \times (-14) = 93$

$BC = \sqrt{93}$ cm

EXERCICE 9

1) Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

Le point A a pour coordonnées $(2; -3)$ soit M un point de coordonnées $(x ; y)$; $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - 2; y + 3)$

Déduisons l'équation de la droite (d_1) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Méthode 1

La droite (d_1) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(3;5)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2) \times (3) + (y + 3) \times (5) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y + 9 = 0$

La droite (d_1) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(3;5)$ à pour équation $3x + 5y + 9 = 0$

Méthode 2

La droite (d_1) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(3;5)$ donc une équation cartésienne de (d_1) est de la forme $3x + 5y + C = 0$ or $A(2 ; -3)$ appartient à la droite alors $3(2) + 5(-3) + C = 0 \Leftrightarrow C = 9$ ainsi l'équation de la droite (d_1) est $3x + 5y + 9 = 0$

2) Déterminons l'équation de la droite (d_2).

Le point B a pour coordonnées $(3; 2)$ soit M un point de coordonnées $(x ; y)$ $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x - 3; y - 2)$

La droite d_2 passant par B et de vecteur normal $\vec{v}(1;-3)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3) \times (1) + (y - 2) \times (-3) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3 = 0$

La droite d_2 passant par B et de vecteur normal $\vec{v}(1;-3)$ à pour équation $x - 3y + 3 = 0$

3) Déterminons l'équation de la droite (d_3).

Le point C a pour coordonnées $(-1;4)$ soit M un point de coordonnées $(x ; y)$, $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $(x + 1 ; y - 4)$

La droite d_3 passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}(4;2)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM}$ soit colinéaire à $\vec{u}$

$\overrightarrow{CM}$ soit colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow (x+1)\times(2) - (y-4)\times(4) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4y + 18 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 9 = 0$

EXERCICE 13

1) Déterminons une équation de la médiatrice de [AB]

Soit $M(x;y)$ un point de la médiatrice de [AB] et I milieu de [AB] alors $(MI) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} = 0$

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{AB}$

I milieu de [AB] alors $I\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$; $\overrightarrow{MI}$ a pour coordonnées $\left(1 - x ; \frac{3}{2} - y\right)$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4 ; -1)$

Ainsi $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (1-x)\times(4) + \left(\frac{3}{2} - y\right)\times(-1) = 0$

$\Leftrightarrow -4x + y + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 8x - 2y - 5 = 0$

D'où une équation de la médiatrice de [AB] est $8x - 2y - 5 = 0$

2) Déterminons une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC

Soit $M(x;y)$ un point de la hauteur issue de A dans le triangle ABC $\Leftrightarrow$ $(MA) \perp (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ On a $\overrightarrow{AM}(x+1; y-2)$ et $\overrightarrow{BC}(-1;3)$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x+1)\times(-1) + (y-2)\times(3) = 0 \Leftrightarrow$

$-x + 3y - 7 = 0$; une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est $x - 3y + 7 = 0$

EXERCICE 15

1) Déterminons l' équation du cercle (C) de centre I .

$I(2; -3)$ centre du cercle donc l'équation du cercle devient :

$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$ d'ou l'équation devient :

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

2) Démontrons que le point $A(-2;0)$ est un point du cercle (C)

Remplaçons x par -2 et y par 0 dans le membre de gauche de l'équation du cercle

$(-2-2)^2 + (0+3)^2 = 16 + 9 = 25$ d'où le point $A(-2;0)$appartient au cercle (C).

PRODUIT SCALAIRE

3) Déterminons une équation cartésienne de la tangente en A au cercle (C)

Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AI}(4\,;\,-3)$

Soit $M(x\,;y)$ un point de la tangente en A à (C) alors $(MA)\ \perp\ (AI)$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI}\ =0$ avec $\overrightarrow{AI}(4\,;\,-3)$ et $\overrightarrow{MA}(-2\ -x;\ -y)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI}\ =0 \quad \Leftrightarrow (-2-x)\times(4)\ +\ (-y)\times(-3)=0\ \Leftrightarrow$

$4x-3y+\ 8=0$

une équation cartésienne de la tangente en A au cercle (C) est

$4x-3y+\ 8=0$

La droite d_3 passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}(4;2)$ à pour équation $x\ -2y\ +9=0$

FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Connaître la définition de fonction et d'application.
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Représenter graphiquement les fonctions au programme.
- Interpréter la représentation graphique (sens de variation, éléments de symétrie, extrema).
- Déterminer la parité d'une fonction.
- Faire le lien entre parité de la fonction et symétrie de la courbe représentative d'une fonction.
- Utiliser les formules de changement d'origine pour représenter des fonctions.
- Déterminer le sens de variations des fonctions au programme

PLAN DU COURS

1. GÉNÉRALITÉ SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES..... 235
1.1. DÉFINITION ET EXEMPLES..... 235
1.1.1. Définition..... 235
1.1.2. Exemples..... 236
1.2. ENSEMBLE OU DOMAINE DE DÉFINITION OU D'EXISTENCE D'UNE FONCTION..... 237
1.2.1. Définition..... 237
2. EGALITE DE DEUX FONCTIONS..... 240
3. RESTRICTION D'UNE FONCTION..... 241
4. COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS..... 242
4.1. Définition..... 242
4.2. ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION COMPOSÉE..... 243
5. PARITÉ D'UNE FONCTION..... 244
5.1. FONCTION PAIRE..... 244

5.1.1. Définition..... 244
5.1.2. Interprétation graphique 244
5.2. FONCTION IMPAIRE 245
5.2.1. Définition..... 245
5.2.2. Interprétation graphique 246
6. VARIATION DE FONCTION 247
6.1. TAUX DE VARIATION OU D'ACCROISSEMENT 247
6.1.1. Définition..... 247
6.2. TAUX ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION USUELLE..... 248
7. COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION..... 250
7.1. DÉFINITION 250
7.2 COURBE REPRÉSENTATIVE DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES..... 251
8. RÉSOLUTION GRAPHIQUE..... 255
8.1. VARIATION D'UNE FONCTION A PARTIR DE SA REPRÉSENTATION 256
8.2. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS..... 258
8.3. RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS..... 259
8.4. SIGNE D'UNE FONCTION..... 260

APERÇU HISTORIQUE

Jusqu'au 17ème siècle, la notion de fonction n'est pas définie avec rigueur, le concept reste assez vague ; Le terme a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) dans un cadre géométrique. Il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques ; C'est Leibniz (1646-1716) qui utilise le mot fonction pour la première fois en mathématiques en 1673, et J.Bernouilli (1654-1705) en donne une première définition.

La notation :

⇨ BERNOULLI Jean (1667-1748) propose la notation : Φx ;

⇨ Le symbole f (x) pour désigner une fonction de la variable x, voit sa première utilisation avec Leonhard EULER (1707-1783) en 1734 dans Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.

1. GÉNÉRALITÉ SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

1.1. DÉFINITION ET EXEMPLES

1.1.1. Définition

soit A et B deux ensembles non vide ; on appelle fonction de A vers B tout procédé qui pour tout x élément de A (ensemble de départ) on associe au plus un élément y de B (ensemble de d'arrivé) on note :

$$\mathscr{F} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$$
$$X \longrightarrow y : f(X)$$

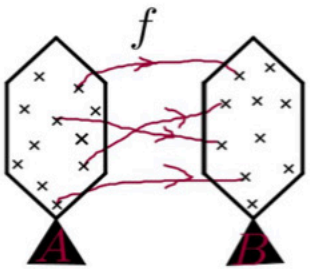
On dit que f est une fonction de A vers B

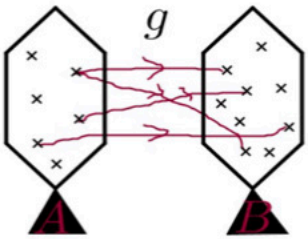
- **x est l'antécédent de y par la fonction f**
- **y est l'image de x par la fonction f**

N.B : pour une fonction f , un antécédent x ne peut pas avoir plus qu'une image ; cependant une image y peut avoir plu qu'un antécédent

1.1.2. EXEMPLES

Soient les graphes (diagrammes sagittaux) suivants





- **f est une fonction de A vers B**
- **g n'est pas une fonction de A vers B**

REMARQUE :

Si l'ensemble de départ A est inclus dans l'ensemble IR ou égale à l'ensemble IR (A ⊆ IR) et l'ensemble d'arrive B aussi inclus dans l'ensemble IR ou égale à l'ensemble IR (A ⊆ IR) ; on dit alors que la fonction est numérique à variable réelle

Exemples :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}'\{-1;1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

1.2. ENSEMBLE OU DOMAINE DE DÉFINITION OU D'EXISTENCE D'UNE FONCTION

Activité

Calculer les valeurs numériques en complétant le tableau suivant pour chacune des fonctions suivantes si possible

x / Fonctions	-7	-5	-2	1	2	7
$f(x) = x^2 + 3x - 5$						
$g(x) = \sqrt{x+2}$						
$h(x) = \dfrac{x+4}{x^2-4}$						

1.2.1. Définition

Soit f une fonction ; on appelle ensemble ou domaine den définition ou d'existence de la fonction f noté souvent D_f ; l'ensemble des réels x appartenant à l'ensemble de départ et qui ont une image y dans l'ensemble d'arrivée par la fonction f ;
$D_f = \{x \in$ l'ensemble de depart tels que $f(x)$ existe $\}$

Propriétés

- **Toute fonction polynôme est définie dans son ensemble de départ,**
- **Toute fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ est définie pour tout x appartenant à son ensemble de départ tels que $D(x) \neq 0$;**
- **Une fonction irrationnelle $f(x) = \sqrt{A(x)}$ est définie pour tout x appartenant à son l'ensemble de départ tels que $A(x) \geq 0$**

N.B : Dans la suite de ce chapitre et sauf indication contraire, pour une fonction d'une variable réelle, l'ensemble de départ est l'ensemble IR

Exercice d'application

Préciser l'ensemble de définition des fonctions suivante

$f(x) = x^2 + 7x - 2$; $P(x) = \sqrt{3x + 1}$

$Q(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$; $Z(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

$h(x) = \frac{x + 5}{x^2 - x - 2}$; $T(x) = \sqrt{\frac{x - 7}{x + 2}}$

$g(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$; $k(x) = \frac{\sqrt{-2x-3}}{2x^2-x-1}$

Solution intégrale

Précisons l'ensemble de définition des fonctions suivante

❖ $f(x) = x^2 + 7x - 2$; la fonction f est une fonction polynôme par conséquent $\mathbf{D_f = IR}$

❖ $Q(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$; h est fonction rationnelle ; elle existe si et seulement $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ ainsi $\mathbf{D_Q = IR'\{2\}}$

❖ $h(x) = \frac{x+5}{x^2-x-2}$; h est fonction rationnelle ; elle existe si et seulement

$x^2 - x - 2 \neq 0$

Posons $x^2 - x - 2 = 0$

Calculons Δ ;

$\Delta = 9$

Calculons x_1 et x_2 ;

$x_1 = -1$ et $x_2 = 4$ ainsi $\mathbf{D_h = IR'\{-1\ ;\ 4\}}$

❖ $g(x) = \frac{x}{x^2+4}$; g est fonction rationnelle ; elle existe si et seulement $x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 \neq -4$ toujours vraie $\mathbf{D_g = IR}$

❖ $P(x) = \sqrt{3x + 1}$; *P* est une fonction irrationnelle ; elle existe si et seulement si $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ $\mathbf{D_P = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[}$

<u>REMARQUE</u> : Ici il est important de tenir bien compte du sens de l'inégalité qui va devoir changer de sens si le coefficient de la variable porte un signe négatif.

❖ $Z(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; *Z* est une fonction irrationnelle ; elle existe si et seulement si $x^2 + 2x - 3 \geq 0$; élaborons le tableau de signe de $x^2 + 2x - 3$

Posons $x^2 + 2x - 3 = 0$

Calculons Δ ;

$\Delta = 9$

Calculons x_1 et x_2 ;

$x_1 = -3$ et $x_2 = 1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$\mathbf{D_Z =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[}$

❖ $T(x) = \sqrt{\frac{x-7}{x+2}}$; T existe si et seulement $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ \frac{x-7}{x+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \frac{x-7}{x+2} \geq 0 \end{cases}$

Élaborons le tableau de signe de $\frac{x-7}{x+2}$

x	$-\infty$	-2		7	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-7}{x+2}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

$\mathbf{D_T =]-\infty; -2[\cup [7; +\infty[}$

❖ $k(x) = \frac{\sqrt{-2x-3}}{2x^2-x-1}$; h existe si et seulement $\begin{cases} 2x^2-x-1 \neq 0 \\ -2x+3 \geq 0 \end{cases}$

Posons $\mathbf{2x^2 - x - 1 = 0}$

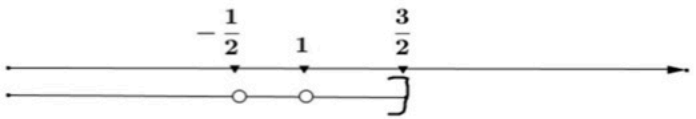
Calculons Δ ;

$\Delta = 9$

Calculons x_1 et x_2 ;

$x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$

$\mathbf{-2x+3 \geq 0} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$ ainsi $\begin{cases} 2x^2-x-1 \neq 0 \\ -2x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 1 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$



$\mathbf{D_K = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]' \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}}$

N.B : la tracé de la droite est une facilité pour bien retrouver l'intervalle correspondant à l'ensemble de définition cependant elle n'est pas toujours nécessaire

2. EGALITE DE DEUX FONCTIONS

Propriété

Soit f et g deux fonctions d'ensemble de définition D_f et D_g. Les fonctions f et g sont égales si et seulement si $D_f = D_g$ et $\forall x \in D_f ; f(x) = g(x)$

Exercice d'application

Soit les fonctions $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ et $g(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$

Prouver que f et g sont égales.

Solution intégrale

Prouvons que f et g sont égales.

Déterminons les ensembles de définitions de f et de g .

$f(x) = \frac{2x\ \ 3}{x+2}$ existe si et seulement si $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$D_f = IR'\{-2\}$

$g(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$ existe si et seulement si $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$D_g = IR'\{-2\}$

$\mathbf{D_f = D_g = IR'\{-2\}}$

Vérifions que $\forall x \in IR'\{-2\} ; f(x) = g(x)$

Méthode 1

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2}$$

$g(x) = \frac{2x+3}{x+2} = f(x)$

$\mathbf{g(x) = f(x)}$

$D_f = D_g = IR'\{-2\}$ et $g(x) = f(x)$ donc les fonctions **f** et **g** sont égales.

Méthode 2

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2x+4-1}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} - \frac{1}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}$$

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+2} = g(x)$$

$f(x) = g(x)$

$D_f = D_g = IR'\{-2\}$ et $f(x) = g(x)$ donc les fonctions **f** et **g** sont égales

3. RESTRICTION D'UNE FONCTION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie de A $\longrightarrow$ B et I un sous ensemble de A ($I \subset A$)

On appelle restriction de la fonction f en I ; la fonction g définie par :

$$\begin{array}{rccc} g : & I & \longrightarrow & B \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

N.B : la fonction f est appelé prolongement de g sur A.

Exercice d'application (les questions sont indépendantes)

1) Prouver que la fonction g définie sur IR^+ par $g(x) = \sqrt{x+4}$ est la restriction de f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{|x|+4}$.

2) On considère la fonction f définie par $f(x) = 3|2x+1| + |5x-1|$

Déterminer un sous ensemble I de IR sur le quel la restriction de f est la fonction h définie par $h(x) = x + 4$.

Solution intégrale

1) Prouvons que la fonction g définie sur IR^+ par $g(x) = \sqrt{x+4}$ est la restriction de f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{|x|+4}$.

Ecrivons la fonction f sans les symboles de valeur absolue

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$\lvert x\rvert$	$-x$		x
$\sqrt{\lvert x\rvert+4}$	$\sqrt{-x+4}$		$\sqrt{x+4}$

$g(x) = \sqrt{x+4}$ est la restriction de $f(x) = \sqrt{|x|+4}$ sur IR^+.

2) Déterminons un sous ensemble I de IR sur le quel la restriction de f est la fonction h définie par $h(x) = x + 4$.

Écrivons la fonction f sans les symboles de valeur absolue

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0 $+$		$+$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	$2x+1$		$2x+1$
$5x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$\lvert 5x-1\rvert$	$-5x+1$	$-5x+1$		$5x-1$
$f(x)$	$-11x-2$	$x+4$		$11x+2$

Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{5}\right]$; f(x) = x + 4 = h(x) donc I = $\left[-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{5}\right]$

4. COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

4.1. DÉFINITION

Soit A ; B et C trois ensembles non vide et, f et g deux fonctions définies par

$$f : A \longrightarrow B \quad x \longrightarrow f(x) \qquad g : B \longrightarrow C \quad x \longrightarrow g(x)$$

La composée des fonctions f et g noté gof « lit g rond f « désigne la fonction définie de I

$$gof : A \longrightarrow C \quad x \longrightarrow gof(x)$$

Exercice d'application

On considère les fonctions f(x) = 2x − 3 et g(x) = x^2 + 1

Déterminer fog (x) ; gof (x) et fof (x).

Solution intégrale

Déterminons fog (x) ; gof (x) et fof (x).

f(x) = 2x − 3 et g(x) = x^2 + 1

fog (x) = $f(g(x)) = 2(x^2+1) - 3 = 2x^2 - 1$ **fog (x) = $2x^2 - 1$**

gof (x) = $g(f(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 9 + 1$

gof (x) = $4x^2 - 12x + 10$

fof (x) = $f(f(x)) = 2(2x-3) - 3 = 4x - 6 - 3 = 4x - 9$

fof (x) = $4x - 9$

N.B : Généralement fog (x) ≠ gof (x)

4.2. ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION COMPOSÉE

La fonction composé fog (x) est définie pour tout les valeurs de x tel que : $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$

Exercice d'application

On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \frac{1}{x-1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f et g puis déduire l'ensemble de définition de gof (x).

b) Déterminer la fonction gof (x).

Solution intégrale

a) Déterminons l'ensemble de définition de f et g puis déduisons l'ensemble de définition de gof (x).

- l'ensemble de définition de f

$f(x) = \sqrt{x+3}$ existe si seulement si $x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3$

$\mathbf{D_f = [-3 ; +\infty[}$

- l'ensemble de définition de g

$g(x) = \frac{1}{x-1}$ existe si seulement si $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$

$\mathbf{D_g = IR'\{1\}}$

- l'ensemble de définition de gof (x)

gof (x) existe si seulement si $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-3 ; +\infty[\\ \sqrt{x+3} \neq 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \in [-3 ; +\infty[\\ \left(\sqrt{x+3}\right)^2 \neq (1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-3 ; +\infty[\\ x+3 \neq 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \in [-3 ; +\infty[\\ x \neq -2 \end{cases}$

$\mathbf{D_{gof} = [-3; -2[\cup]2; +\infty[}$

b) Déterminons la fonction gof (x).

$g(x) = \frac{1}{x-1}$ et $f(x) = \sqrt{x+3}$

Pour tout $x \in D_{gof}$; $gof(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x+3}-1}$

$gof(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}-1}$

5. PARITÉ D'UNE FONCTION

Préliminaire : intervalle symétrique par rapport à 0

Un intervalle est symétrique par rapport à 0 (zéro) lorsque pour tout x de l'intervalle son opposé $(-x)$ appartient aussi à cet intervalle.

Exemples

- $[-20\,;\,20]$; est symétrique par rapport à 0
- $]-\infty\,;\,+\infty[$; est symétrique par rapport à 0
- $[-10\,;\,+\infty[$; n'est pas symétrique par rapport à 0

5.1. FONCTION PAIRE

5.1.1. Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f ; la fonction f est dite paire si et seulement les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiés :

- **D_f symétrique par rapport à 0** $(\forall x \in D_f\,;\,-x \in D_f)$
- **Pour tout $x \in D_f$; $f(-x) = f(x)$**

Exercice d'application

Soit g : IR $\rightarrow$ IR

$x \rightarrow \frac{2|x|}{x^2-4}$

Montrer que g est une fonction paire

Solution intégrale

Montrons que g est une fonction paire

g est définie si et seulement si $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$

$D_g = IR'\{-2\,;2\}; \forall x \in D_g\,;\,-x \in D_g$

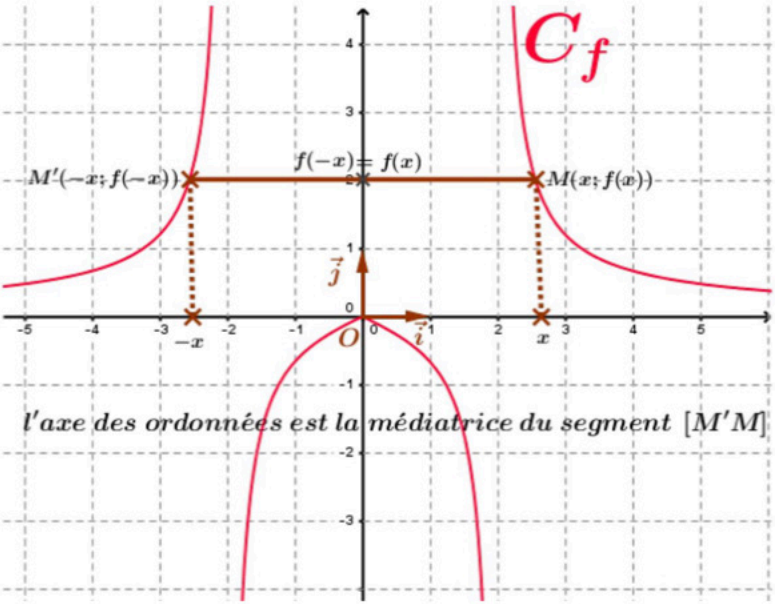
Calculons $g(-x)$

$g(-x) = \frac{2|-x|}{(-x)^2-4} = \frac{2|x|}{x^2-4} = g(x)$ ainsi $g(-x) = g(x)$

donc la fonction g est une fonction paire.

5.1.2. Interprétation graphique

Si f est une fonction paire alors sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,;\vec{j})$; est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(y'y)$



5.2. FONCTION IMPAIRE

5.2.1. Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f ; la fonction f est dite impaire si et seulement les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiés :

- **D_f symétrique par rapport à 0 ($\forall x \in D_f ; -x \in D_f$)**
- **Pour tout $x \in D_f$; $f(-x) = -f(x)$**

Exercice d'application

Soit h : IR → IR et k : IR → IR

$x \to x^3 + x$ $x \to \frac{-7x}{x^2+1}$

Montrer que les fonctions h et K sont des fonctions paires

Solution intégrale

❖ h est définie sur IR ; $D_h = IR$

$\forall x \in D_h ; -x \in D_h$

Calculons $h(-x)$

$h(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -h(x)$ ainsi $h(-x) = -h(x)$

donc la fonction h est une fonction impaire.

❖ K est définie si et seulement si $x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$ toujours vraie donc $D_k = IR$

$\forall x \in D_h ; -x \in D_h$

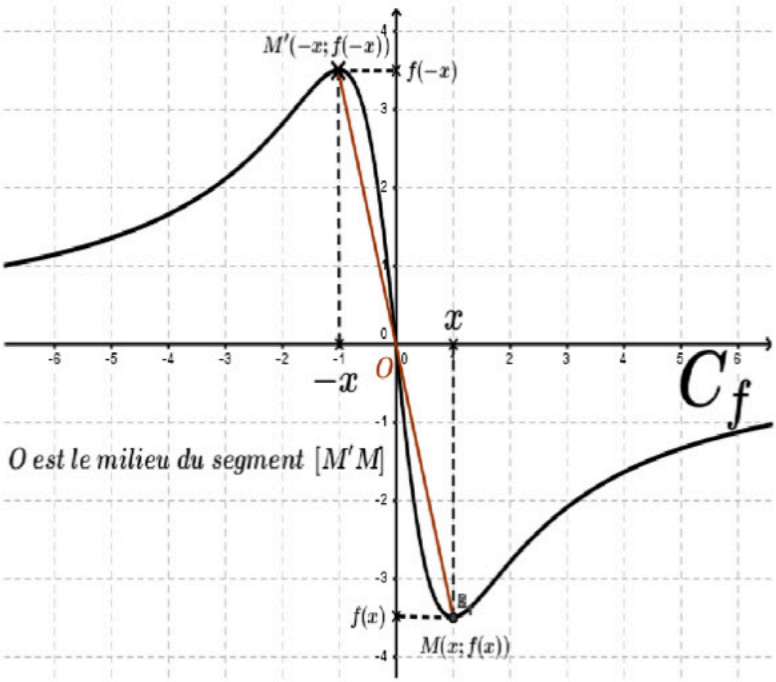
Calculons $k(-x)$

$k(-x) = \frac{-7(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{7x}{x^2+1} = -\frac{-7x}{x^2+1} = -k(x)$ ainsi

$k(-x) = -k(x)$ alors la fonction K est une fonction impaire.

5.2.2. Interprétation graphique

Si f est une fonction impaire alors sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$; est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



6. VARIATION DE FONCTION

6.1. TAUX DE VARIATION OU D'ACCROISSEMENT

Activité

Soit f : IR → IR

$x \to x^2$

a) Calculer f(1) ; f(2)

b) Exprimer en fonction de x le rapport $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ puis calculer $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$

Solution intégrale

a) Calculons f(1) ; f(2)

$f(1) = (1)^2 = 1$ $f(1) = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$ $f(2) = 4$

b) Exprimer en fonction de x le rapport $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ (avec $x \neq 1$)

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = x+1$

Calculons $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 2+1 = 3$; $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = = 3$

6.1.1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle D ; x et y deux réels distincts de D. On appelle taux de variation ou taux d'accroissement de la fonction f sur D entre les réels x et y noté $T_f(x,y)$ défini par : $T_f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

Remarque : $T_f(x,y) = T_f(y,x)$

Exercice d'application

Soient les fonctions g et h définies par : g : $x \to \sqrt{x}$ et h : $x \to x^3$

a) Calculer en fonction des réels x , y le taux de variation fonctions g et h

b) En déduire le taux de variation associé à g entre $\frac{1}{2}$ et 3 et de h entre -1et 4

Solution intégrale

a) Calculons en fonction des réels x , y le taux de variation fonctions g et h

❖ $g : x \to \sqrt{x}$

$D_g = [0 ; +\infty[$

Soit x et y deux réels distincts de D_g, on a :

$$T_g(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$T_g(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

❖ $h : x \to x^3$

$D_h = IR$

Soit x et y deux réels distincts de IR, on a :

$$T_h(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{x^3-y^3}{x-y} = \frac{(x-y)(x^2+2xy+y^2)}{x-y} = x^2+2xy+y^2$$

$$T_h(x,y) = x^2+xy+y^2$$

b) En déduire le taux de variation associé à :

❖ g entre $\frac{1}{2}$ et 3

on a $T_g(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$ alors $T_g\left(\frac{1}{2},3\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}} = \frac{1}{5}(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

$$T_g\left(\frac{1}{2},3\right) = -\frac{1}{5}(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$$

❖ h entre -1 et 4

on a $T_h(x,y) = x^2+xy+y^2$ alors $T_h(-1,4) = (-1)^2+2(-1)(4)+(4)^2$

$$T_h(x,y) = 13$$

6.2. TAUX ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION USUELLE

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x ; y deux réels de I.

On a si :

- **$T_f(x,y) > 0$ alors la fonction f est croissante sur I.**
- **$T_f(x,y) < 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.**
- **$T_f(x,y) = 0$ alors la fonction f est constante sur I.**

Exercice d'application

Étudier le sens de variations des fonctions suivantes :

$f : x \to \frac{1}{x}$; $g : x \to x^2$; $h : x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$

Solution intégrale

Étudions le sens de variations des fonctions

- $f : x \to \frac{1}{x}$

$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Soit x et y deux réels distincts de l'intervalle $]-\infty; 0[$

$$T_f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{x - y} = \frac{y - x}{xy(x - y)} = \frac{-1}{xy}$$

$\forall x ; y \in]-\infty; 0[$; $T_f(x,y) = \frac{-1}{xy} < 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall x ; y \in]0; +\infty[$; $T_f(x,y) = \frac{-1}{xy} < 0$ donc f est décroissante sur $]0; +\infty[$

On résume les résultats obtenus dans un tableau dit tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$T_f(x,y)$	−	‖	−
f	↘	‖	↘

- $g : x \to x^2$

$D_g = IR$

Soit x et y deux réels distincts de l'intervalle $]-\infty; 0]$

$$T_g(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x - y} = x + y$$

$\forall x ; y \in]-\infty; 0]$; $T_g(x,y) < 0$ donc g est décroissante sur $]-\infty; 0]$

$\forall x ; y \in [0; +\infty[$; $T_g(x,y) > 0$ donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$T_g(x,y)$	−	‖	+
g	↘	‖	↗

• $h : x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$

$D_h =]0; +\infty[$

Soit x et y deux réels distincts de l'intervalle $]0; +\infty[$

$$T_h(x,y) = \frac{h(x) - h(y)}{x - y} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}}{x - y} = \frac{\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy}}}{x - y} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{xy}} \times \frac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

$$T_h(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

$\forall x ; y \in]0; +\infty[; \ T_g(x,y) < 0$ donc h est décroissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$T_h(x,y)$		$-$
h		

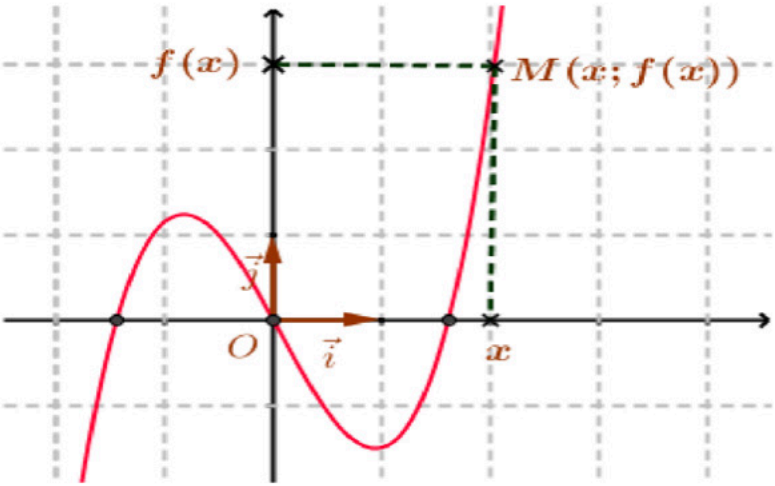
7. COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION

7.1. DÉFINITION

Soit P un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ et f une fonction numérique à variable réelle f : IR → IR

$x \to f(x) = y$

L'ensemble des points $M(x ; f(x))$ du plan tels que $x \in D_f$ est appelé représentation graphique de f ou courbe représentative de f notée souvent (C_f)



- **L'axe horizontal (x′ox) s'appelle l'axe des abscisses**
- **L'axe vertical (x′oy) s'appelle l'axe des ordonnées**

7.2 COURBE REPRÉSENTATIVE DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES

- **FONCTION CARRE**

$$f : IR \rightarrow IR$$
$$x \rightarrow f(x) = x^2$$

$D_f = IR$

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

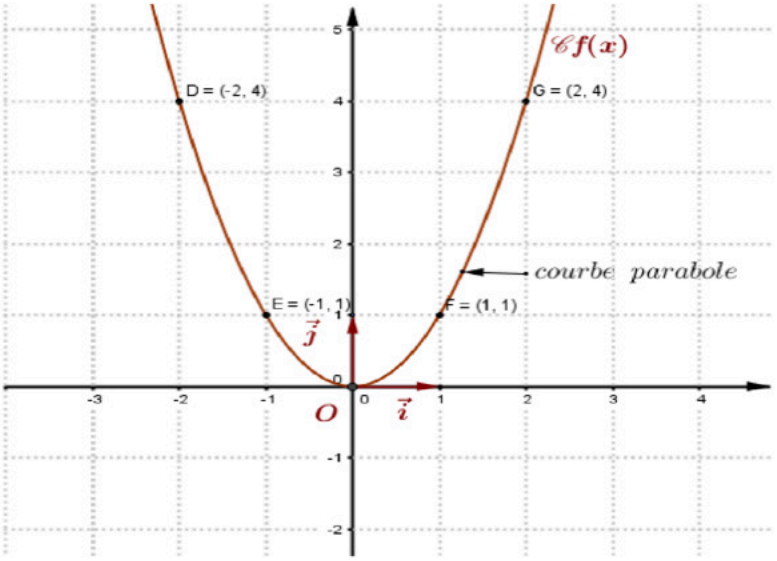
Son tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		↘	0	↗	

La fonction carré est une fonction paire ; sa courbe (C_f) a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées elle s'appelle **une parabole**

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
Y	4	1	0	1	4



♦ **FONCTION CUBE**

$f : IR \rightarrow IR$

$x \rightarrow f(x) = x^3$

$D_f = IR$

La fonction carré est strictement croissante sur $]-\infty ; +\infty[$

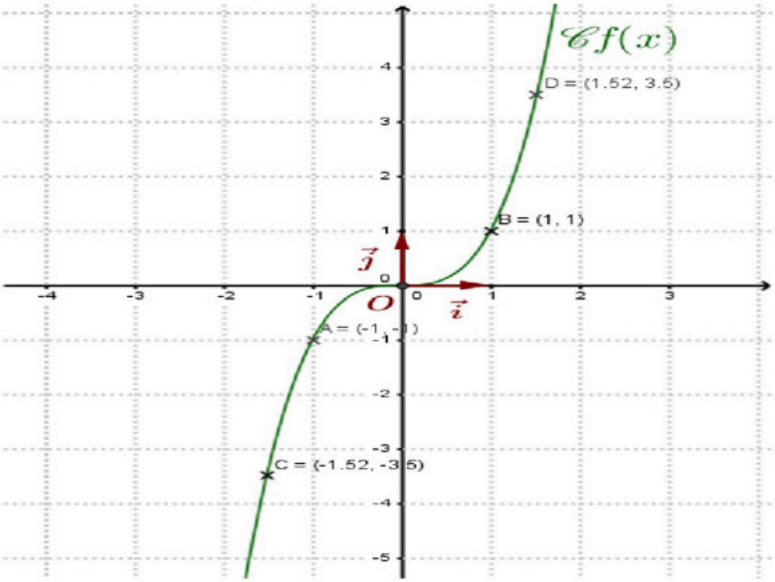
Son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = x^3$	↗	

La fonction x^3 est une fonction impaire ; sa courbe (C_f) a pour centre de symétrie le point O

Tableau de valeurs

x	-1	0	1
y	-1	0	1



♦ **FONCTION INVERSE** $f : IR \rightarrow IR$

$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f = IR'\{0\}$ ($D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ en termes d'intervalle)

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

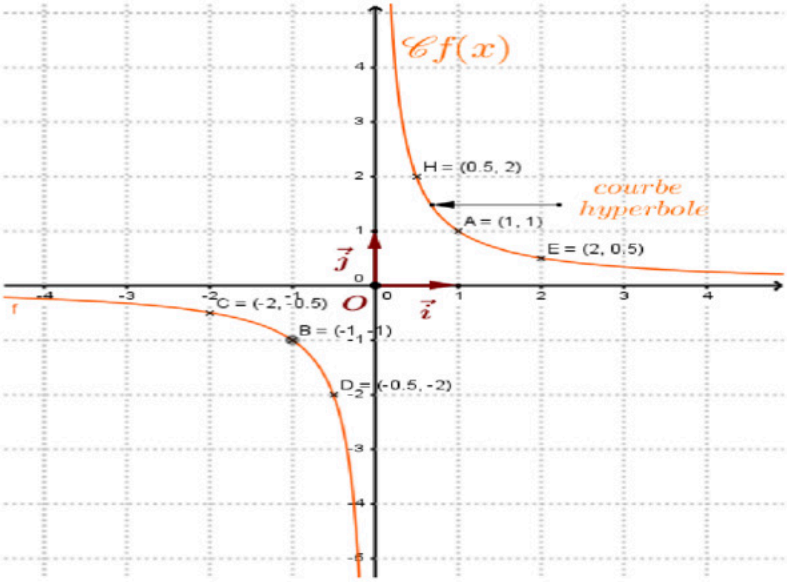
Son tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	↘		‖	↘	

La fonction inverse est une fonction impaire ; sa courbe (C_f) a pour centre de symétrie le point O elle s'appelle **hyperbole.**

Tableau de valeurs

X	-2	-1	-0.5	-0.5	1	2
Y	-0.5	-1	-2	2	1	0.5



♦ **FONCTION RACINE CARRE**

$f : [0 ; +\infty[\rightarrow IR$

$x \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = [0 ; +\infty[$

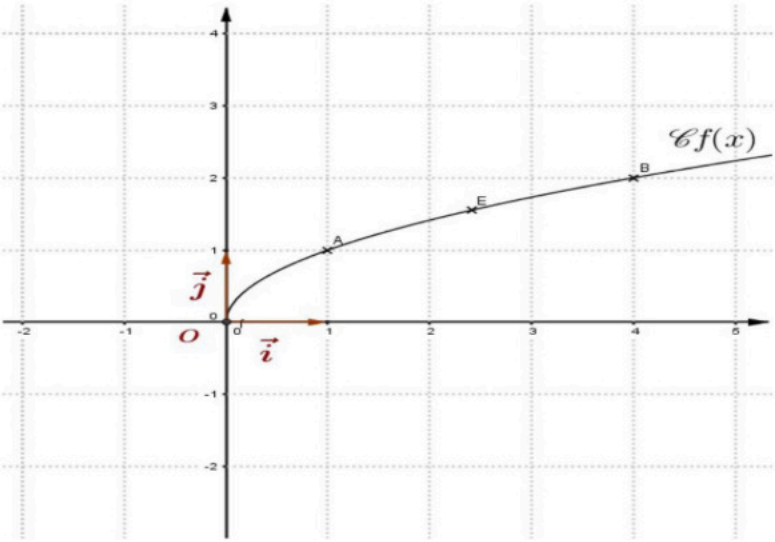
La fonction racine carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

Son tableau de variation est :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$		↗	

Tableau de valeurs

X	0	1	4
Y	0	1	2



8. RÉSOLUTION GRAPHIQUE

À partir de la courbe représentative d'une fonction, on peut répondre à plusieurs types de questions :

- **variation de la fonction ;**
- **résolution d'équations ;**
- **résolution d'inéquation ;**
- **signe d'une fonction . . .**

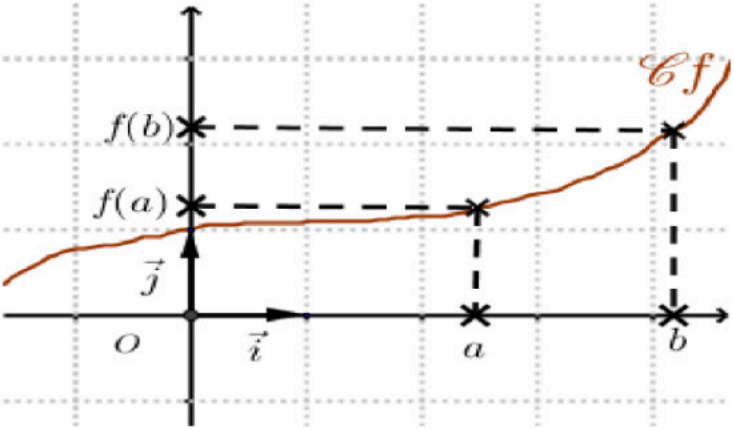
Cependant la résolution ne peut qu'être approchée et ne peut avoir que la précision du graphique. Ce type d'exercice a pour but de se familiariser avec la relation entre la représentation graphique et les propriétés d'une fonction.

8.1. VARIATION D'UNE FONCTION A PARTIR DE SA REPRÉSENTATION

Lorsqu'on étudie les variations d'une fonction f, on cherche à savoir sur quels intervalles la fonction est croissante et décroissante.

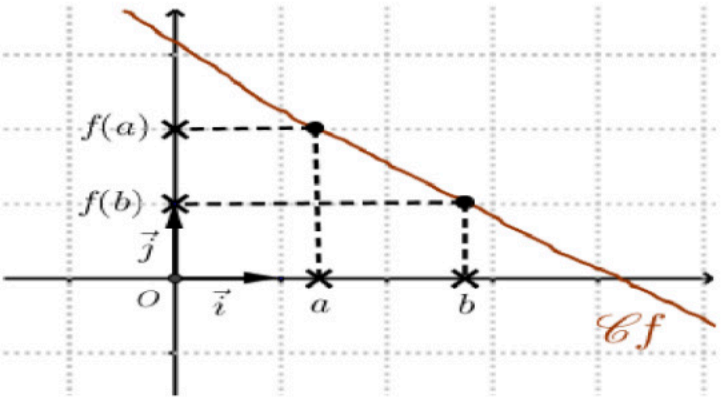
❖ **fonction croissante**

on dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle, si pour tout a et b de I tels que $a < b$; on a $f(a) < f(b)$



❖ **fonction décroissante**

on dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I, si pour tout a et b de I tels que $a < b$; on a $f(a) > f(b)$

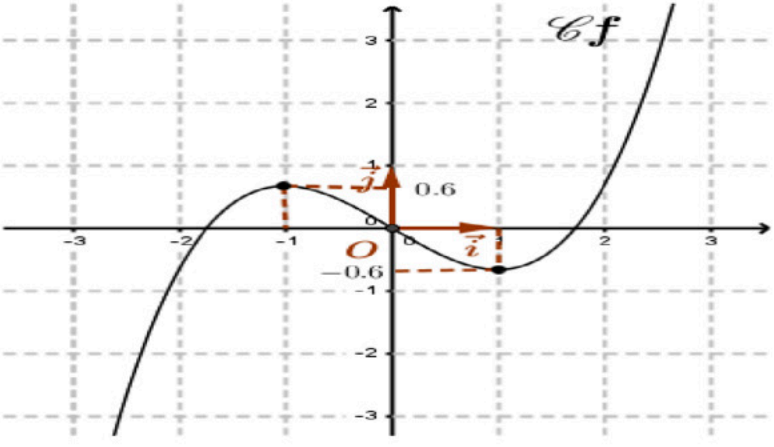


REMARQUE :

♦ **on dit qu'une fonction croissante ne change pas la relation d'ordre car a** $< b$ **alors f(a)** $< f$**(b)**

♦ **on dit qu'une fonction décroissante inverse la relation d'ordre car a** $< b$ **alors f(a)** $> f$**(b)**

Exemple : étudions les variations de la fonction f suivante



On remplit généralement un tableau de variation pour présenter les résultats de la variation de la fonction

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0.6	↘	-0.6 ↗ $+\infty$

8.2. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

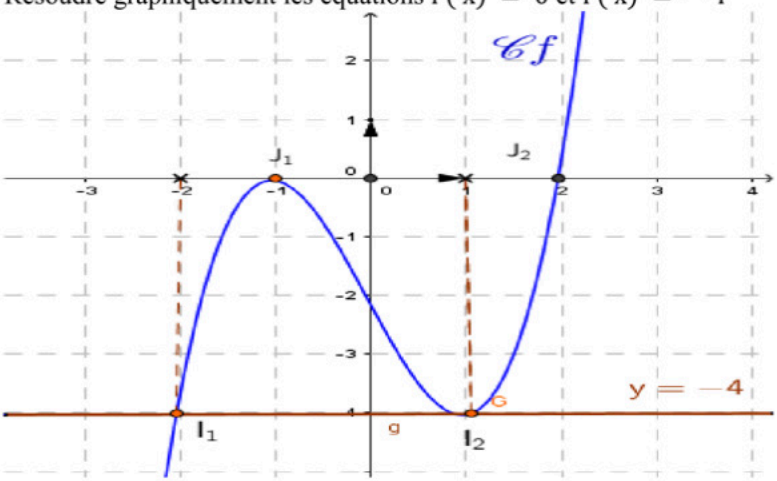
Résoudre l'équation $f(x) = a$, revient à déterminer tous les antécédents du réel a.

Pour résoudre graphiquement cette équation :

- **on trace la droite horizontale $y = a$**
- **on recherche les points d'intersection de la droite horizontale avec la courbe de la fonction f**
- **on détermine les abscisses de ces points d'intersection qui sont les solutions de l'équation.**

Exemple

Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = -4$



❖ $f(x) = 0$

On trouve deux points J_1 et J_2 d'intersection entre la courbe C_f et la droite d'équation $y = 0$.

On trouve alors deux solutions $S_{IR} = \{-1\,;\,2\}$

❖ $f(x) = -4$

On trouve deux points I_1 et I_2 d'intersection entre la courbe C f et la droite d'équation $y = -4$

On trouve alors deux solutions $S_{IR} = \{-2\,;\,1\}$

REMARQUE :

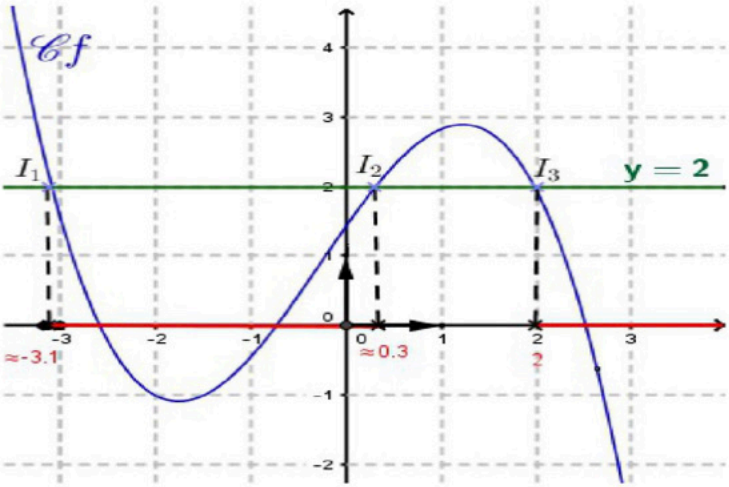
On peut aussi être amené à résoudre des équations de la forme $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions définies sur un intervalle I. La solution est l'ensemble des abscisses des points d'intersection des deux courbes.

8.3. RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS

Pour résoudre les inéquations $f(x) > a$ ou $f(x) \geq a$, on trace la droite horizontale $y = a$. Les solutions sont les abscisses des points qui sont au-dessus de la droite et éventuellement sur celle-ci.

Pour résoudre les inéquations $f(x) < a$ ou $f(x) \leq a$, on trace la droite horizontale $y = a$. Les solutions sont les abscisses des points qui sont en dessous de la droite et éventuellement sur celle-ci.

Exemple : Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq 2$



On trace la droite $y = 2$.

On considère les abscisses des points qui sont en dessous et sur cette droite.

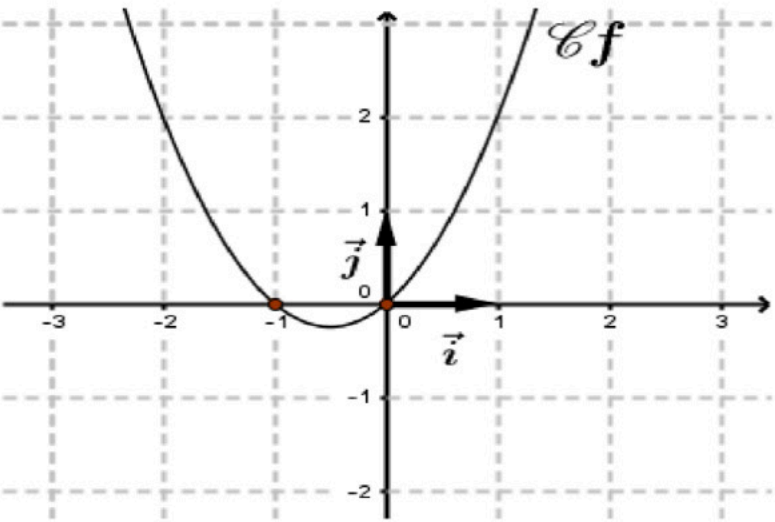
$S_{IR} = [-3.1\ ;\ 0.3] \cup [2;\ +\infty[$

REMARQUE :

On peut aussi être amené à résoudre des inéquations de la forme $f(x \geq g(x)$ (respectivement $(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$) . La solution est l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de C_g (respectivement l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessous de C_g , l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de C_g sans les abscisses des points d'intersection, l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessous de C_g sans les abscisses des points d'intersection).

8.4. SIGNE D'UNE FONCTION

Il s'agit de savoir quand une fonction est positif, négatif ou nul. On présente, en général, les résultats sous forme d'un tableau de signe.



On remplit généralement un tableau de signe pour présenter les résultats

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

SÉRIE D'EXERCICES

THÈME : FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

EXERCICE 1

Déterminer dans chaque cas, l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x) = -5x^2 + 1$; $f_2(x) = \frac{2x+1}{x+1} + \frac{5x}{x-4}$

$f_3(x) = -3x + 1 - \frac{1}{x}$; $f_4(x) = \frac{-x+1}{x^2-4}$

$f_5(x) = \frac{x}{x^2+3}$; $f_6(x) = \frac{7}{|x+1|}$

$f_7(x) = \sqrt{-2x+1}$; $f_8(x) = \sqrt{-x}$ $f_{10}(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$; $f_{11}(x) = \frac{-2}{\sqrt{x-1}}$

$f_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; $f_{13}(x) = \sqrt{\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|}$

EXERCICE 2

1) une fonction f ayant ensemble de définition $D_f = [-4\,;\,2]$ peut-elle être paire ? impaire ? justifier.

2) Soit la fonction h définie par $h(x) = x^2 - 3$ et $g(x) = x|x|$

a) Prouver que h est une fonction paire.

b) Prouver que g est une fonction impaire.

EXERCICE 3

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = |x|$; $f_2(x) = x^2 + 1$

$f_3(x) = x^2 + x$; $f_4(x) = 4x^2 - 3x + 1$

$f_5(x) = 5x^2 + \frac{3}{2}$; $f_6(x) = 4x^3 - 3x + 2$

$f_7(x) = 4x^5 - 1$; $f_8(x) = x^3 + 1$

$f_9(x) = 2|x| - 5$; $f_{10}(x) = \frac{2|x|+3}{x^2+1}$

$f_{11}(x) = \frac{3x-1}{x^2}$; $f_{12}(x) = \sqrt{x-2}$

$f_{13}(x) = \sqrt{x^2+x}$; $f_{14}(x) = \sqrt{x^2-4}$

$f_{15}(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{9-x^2}}$; $f_{15}(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2-9}}$

EXERCICE 4 Dans chacun des cas suivants ; dire si les fonction f et g sont égales sur l'intervalle IR ou non.

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$

b) $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$; $g(x) = |x| - 1$

c) $f(x) = x$; $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

d) $f(x) = |x^2 - 4|$; $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 \; si \; x \in [-2\,;\,2] \\ x^2 - 4 \; si \; x \in [-2\,;\,2] \end{cases}$

EXERCICE 5 Dans chacun des cas suivants ;
étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle D ; en utilisant le signe du rapport $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ ou a et b sont des nombres réels distincts de D.

a) $f_1(x) = -3x^2 + 2x + 1$; $D = \left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$

b) $f_2(x) = \sqrt{x^2+4x+7}$; $D = [-\infty\,;\,-2[$

c) $f_3(x) = x + \frac{5}{x}$; $D = [0\,;\,\sqrt{5}[$

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x+1| + |x-1|$

1) a) monter que $f(-x) = f(x)$

b) interpréter graphiquement ce résultat

2) Écrire $f(x)$ suivant les valeurs de x, sans le symbole de la valeur absolue.

3) a) étudier les variations de f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$; $[-1;1]$ et $[1\,;\,+\infty[$

b) Dresser son tableau de variation.

4) Représenter graphiquement f

EXERCICE 7

Voici un tableau de variation

x	-3		-1		1		3
$f(x)$	-0.3	↘	-0.5	↗	0.5	↘	0.3

Dessiner la représentation graphique d'une fonction f vérifiant ce tableau

EXERCICE 8

L'égalité $f(x) = -5$ se traduit par un vocabulaire différent pour la fonction f et pour la courbe C_f.

Fonction :

- L'image de 3 par la fonction f est -5.
- 3 est un antécédent de -5 par f

Graphique

- Le point d'abscisse 3 de la courbe C_f a pour ordonné -5.
- 3 est l'abscisse d'un point de la courbe C_f d'ordonné -5.

1) Comme indiqué ci-dessus , traduire les égalités suivantes :

$f(-2) = 0$; $f(0) = 3$ et $f(-\sqrt{2}) = -1$

2) Traduire les phrases suivantes à l'aide d'égalités

a) Par la fonction g ; -5 est l'image de 4

b) 2 a pour image 0 par la fonction f.

c) Un antécédent de -3 par h est 5.

d) Les image par f de -3 et 5 sont nulles.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie par

$f(x) = -2x^2 + 1$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f.
2. Quelles sont les images de -2 ? de 5 ? de 0 ? et $2\sqrt{2}$?
3. Quels sont les antécédents éventuels de -3 ? de 0 ? et 5 ?

EXERCICE 10

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

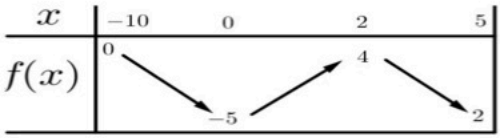
1) Calculer les images de 2 ; 0 et -3 par la fonction f.

2) Calculerf $\left(-\frac{1}{3}\right)$; $f(\sqrt{2})$; et $f(\sqrt{2} + 1)$

3) Déterminer le (ou les) nombre(s) dont l'image par f est -2.

EXERCICE 11

On définit la fonction f par son tableau des variations

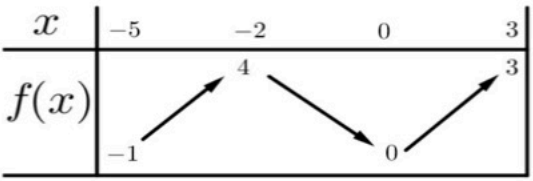


Sur quels intervalles, la fonction f est –elle

a) Croissante ?

b) Décroissante ?

EXERCICE 12 On donne le tableau des variations d'une fonction



1) A l'aide du tableau des variations ; indiquer si les égalités ou inégalités suivantes sont vraies, fausses ou si le tableau ne permet pas de conclure, en justifiant la réponse.

a) $f(-1) = 0$

b) $f(1) = 0$

c) $f(-4) > f(-2)$

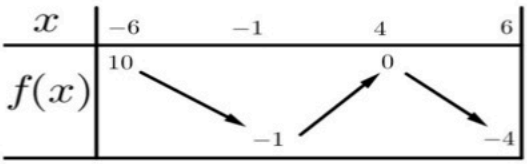
d) $f(1) > f(2)$

e) $f(-3) > 1$

f) $f(-5) < f(2)$

2) Donner l'allure de la courbe représentative d'une fonction f dont le tableau des variations ci-dessus peut convenir.

EXERCICE 1 On définit une fonction f par son tableau des variations.



1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?

2. Quelles sont les images de -1 ? de 4 ? de 6 ?
3. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'image de 0.
4. a) donner un antécédent de -1.

b) -1 a t-il d'autres antécédents dans $[-6\,;\,6]$.

5. Combien 0 a-t-il d'antécédents ?
6. Combien 2 a-t-il d'antécédents ?

EXERCICE 1 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f

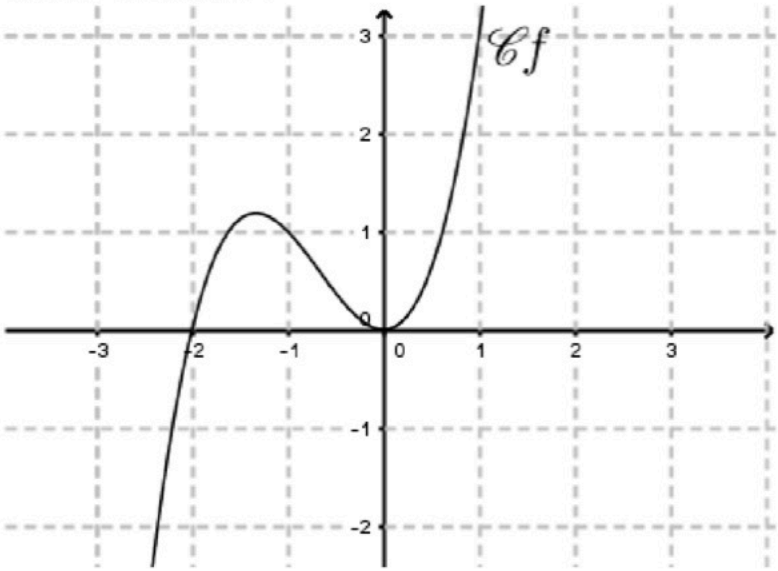
2) En utilisant la courbe (C_f) ; donner les valeurs def(-2) ; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$

3) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$

4) Résoudre graphiquement

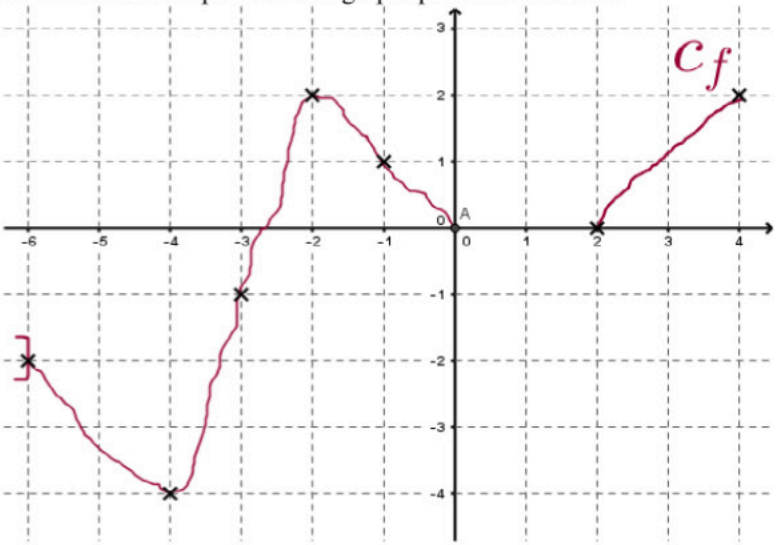
a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 3$

c) $f(x) > 0$; d) $f(x) \leq 0$



EXERCICE 15

On considère la représentation graphique d'une fonction



1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2) Déterminer $f(2)$; $f(0)$ et $f(-1)$
3) Déterminer les antécédents éventuels de 1.
4) Combien 1 a-t-il d'antécédent s ?
5) Donner le sens de variations de f (faire des phrases).
6) Dresser le tableau des variations de la fonction.

REPÈRAGE CARTÉSIEN

COMPÉTENCES EXIGIBLES :

- Connaitre la définition de repère cartésien et de mesure algébrique.
- Retrouver et utiliser les formules de changement d'origine ;
- Utiliser le déterminant pour étudier la colinéarité ;
- Déterminer l'équation cartésienne d'une droite connaissant un vecteur directeur et un point de cette droite ;
- Donner le système d'équations paramétriques d'une droite ;
- Reconnaitre qu'un système d'équations paramétriques est celui d'une droite ;
- Déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir d'un système d'équations paramétriques et inversement.

PLAN DU COURS

1. REPERAGE SUR UNE DROITE 270
1.1. REPERAGE SUR UNE DROITE : ABSCISSE D'UN POINT, MESURE ALGEBRIQUE 270
1.2. PROPRIETES ANALYTIQUES REPERE SUR UNE DROITE 272
2. VERSION ALGEBRIQUE DU THEOREME DE THALES 273
2.1. VERSION ALGEBRIQUE DU THEOREME DE THALES 273
2.2. PROPRIETE RECIPROQUE 273
3. REPERAGE DU PLAN 274
3.1. BASE DE VECTEUR DANS LE PLAN 276
3.2. REPERE DU PLAN 276
3.3. TYPE DE REPERE DU PLAN 277
3.4. CALCUL DANS UN REPERE ORTHONORME O ; I , J : DISTANCE ET MILIEUX 278
3.4.1. Distance 278
3.4.2. Coordonnées du milieu d'un segment dans un repère orthonormé 278
3.5. COORDONNÉES DU BARYCENTRE 279
3.5.1. Coordonnées du barycentre de deux points 279
3.5.2. Coordonnées du barycentre de trois points pondères 281
3.6. CHANGEMENT DE REPERE PAR TRANSLATION 283
4. COLINEARITE DE DEUX VECTEURS : 285
4.1. CONDITION ANALYTIQUE DE LA COLINEARITE 285
4.2. DETERMINANT DE DEUX VECTEURS 286
4.2.1. Cas Général 286
4.2.2. Expression du déterminant dans une base orthonormale directe 287
5. EQUATION DE DROITE 287
5.1. VECTEUR DIRECTEUR D'UNE DROITE 287
5.2. EQUATION CARTESIENNE D'UNE DROITE 288
5.2.1. Equation générale : $ax + by + c = 0$ 288
5.2.2. Vecteur Normal d'une droite 290

5.2.3. Equation Réduite 291
5.3. DROITE PARALLELES – DROITES ORTHOGONALES 292
5.3.1. DROITES PARALLELES 292
5.3.2. DROITES ORTHOGONALES 293
5.4. REPRESENTATION PARAMETRIQUE ANALYTIQUE D'UNE DROITE 294
5.4.1. Utilisation d'une représentation paramétrique 295
5.4.2. Passage d'une représentation paramétrique d'une droite à une représentation cartésienne et vice versa 295
5.5. INTERSECTION DE DEUX DROITES 297

APERÇU HISTORIQUE :

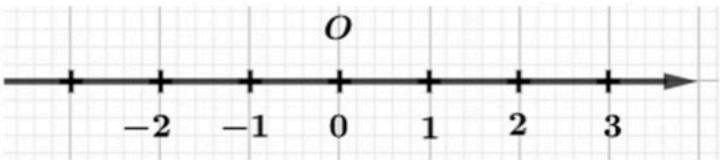
À partir du IX^{ème} siècle, les mathématiciens du monde arabe développent des méthodes algébriques tout en s'appuyant sur une représentation géométrique des grandeurs impliquées dans leurs calculs et transformations. La géométrie analytique naît de la rencontre de l'algèbre et de la géométrie. Pour représenter les objets dont elle veut étudier les propriétés. Bien que déjà en partie présente chez Archimède et Apollonius (les Coniques) au IIIème siècle avant J.-C., c'est à l'époque de Descartes (première partie du XVI^{ème} siècle) que la méthode est systématisée et permet alors de représenter les courbes algébriques et les figures à l'aide de systèmes d'équations ou d'inéquations. Elle utilise le fait que toute propriété géométrique peut s'exprimer algébriquement et que, inversement, tout résultat algébrique possède une représentation géométrique. Dans le plan, on parle dès lors des coordonnées d'un point, de l'équation d'une droite, de celle d'un cercle ou d'une courbe en général.

1. REPERAGE SUR UNE DROITE

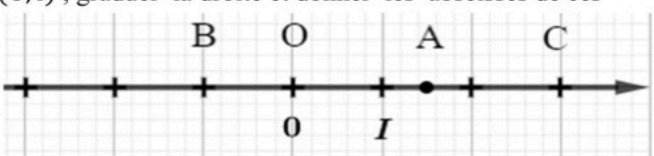
1.1. REPERAGE SUR UNE DROITE : ABSCISSE D'UN POINT, MESURE ALGEBRIQUE

ACTIVITE

a) On donne les coordonnées des points $M(0,5)$; $N(-2)$ et $P(2.25)$, placer M , N et P sur la droite graduée.



b) On donne les points A , B, C sur une droite et un segment unitaire (O, I) ; graduer la droite et donner les abscisses de ces points.



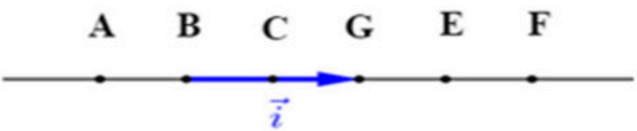
DEFINITION : Un repère d'une droite (D) est un couple $(O,\vec{\imath})$ dans le quel O est un point fixé de la droite (D) et $\vec{\imath}$ un vecteur directeur de (D) ou vecteur de base . A tout point M de la droite repérée par $(O,\vec{\imath})$, on peut associer un nombre réel x telque $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$. ce nombre x s'appelle **abscisse du point** M dans le repère $(O,\vec{\imath})$ noté M(x). **la mesure algébrique** notée $\overline{OM}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ relativement à $\vec{\imath}$, est égale à x ainsi $\overline{OM} = x$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$; Dans cette égalité, x est un nombre réel qui peut être positif, négatif ou nul.

- Lorsque M appartient à la demi-droite]Ox), $\overline{OM}$ est positive.
- Lorsque M appartient à la demi-droite (x'O[, $\overline{OM}$ est négative.
- Lorsque M est en O, $\overline{OM}$ est nulle.

NB : on peut aussi repérer avec deux points de la droite

Exemple : sur la droite (D) muni du repérer $(B,\vec{\imath})$



$\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\vec{\imath}$ équivaut à $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ ou $\overline{BA} = -\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{BG} = \vec{\imath}$ équivaut à $G(1)$ ou $\overline{BG} = 1$

$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{\imath}$ équivaut à $C\left(\frac{1}{2}\right)$ ou $\overline{BC} = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\vec{\imath}$ équivaut à $E\left(\frac{3}{2}\right)$ ou $\overline{BE} = \frac{3}{2}$

$\overrightarrow{BF} = 2\vec{\imath}$ équivaut à $F(2)$ ou $\overline{BF} = 2$

REPÉRAGE CATÉSIEN

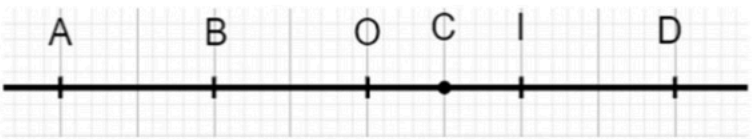
1.2. PROPRIETES ANALYTIQUES REPERE SUR UNE DROITE

Soit la droite (D) muni d'un repère $(O, \vec{i})$ avec $A(x_A)$, $B(x_B)$ $C(x_C)$ trois points quelconques de (D). $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires à $\vec{i}$ de mesures algébriques respectives x et x' ; k un réel alors :

- **La mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overline{AB} = x_B - x_A$**
- **L'abscisse du milieu I de [AB] est $\frac{x_B + x_A}{2}$**
- **La mesure algébrique du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ relativement à $\vec{i}$ est $x + x'$**
- **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si leurs mesure algébriques relativement à $\vec{i}$ sont égales : $x = x'$**
- **La mesure algébrique du vecteur $k\vec{u}$ relativement à $\vec{i}$ est kx.**
- **Relation de Chasles des mesures algébriques : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$**
- **$|\overline{AB}| = AB$ et $\overline{BA} = -\overline{AB}$**
- **$\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overline{AC} = \alpha\overline{AB}$**

Exercice d'application

Soit (D) une droite graduée de repère (O, I)



a) Donner les abscisses des points A , B , C et D

b) Donner la mesure algébrique des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BD}$

Résolution

a) Donnons les abscisses des points A, B, C et D

$A(-2)$, $B(-1)$, $C\left(\frac{1}{2}\right)$ et $D(2)$

b) Donnons la mesure algébrique des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BD}$

$\overline{AC} = \left(\frac{1}{2}\right) - (-2) = \frac{5}{2}$

$\overline{AD} = (2) - (-2) = 4$

$\overline{CB} = (-1) - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

$\overline{BD} = (2) - (-1) = 3$

2. VERSION ALGEBRIQUE DU THEOREME DE THALES

2.1. VERSION ALGEBRIQUE DU THEOREME DE THALES

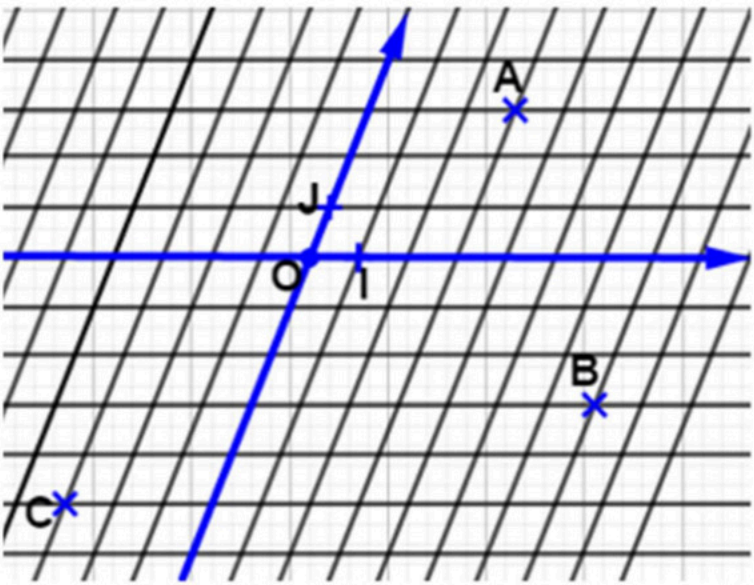
ABC étant un triangle, K un nombre réel , M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).
Si (MN) et (BC) sont parallèles et $\overline{AM} = k\overline{AC}$ alors $\overline{AN} = k\overline{AC}$ et $\overline{NM} = k\overline{BC}$

2.2. PROPRIETE RECIPROQUE

ABC étant un triangle , M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC). S'il existe un réel k tel que $\overline{AM} = k\overline{AB}$ et $\overline{AN} = k\overline{AC}$ alors (MN) et (BC) sont parallèles

3. REPERAGE DU PLAN

ACTIVITE 1 :



a) Indiquer les coordonnées des points :

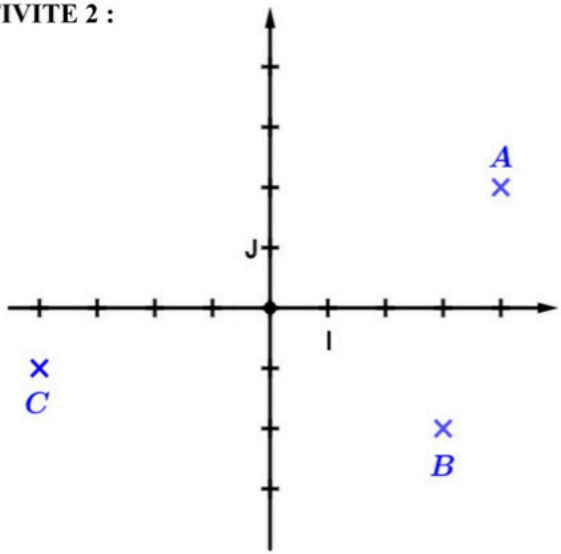
A(….. ; …..) , B(….. ; …..) et C (….. ; …..)

b) Placer les ponts $D(3;5)$, $E(-4;6)$ et $F(-1;-3)$

c) Construire les points A', B' et C' symétriques respectifs de A , B et C par rapport à l'axe des abscisses puis indiquer leurs coordonnées approximative

A'(….. ; …..) , B'(….. ; …..) et C' (….. ; …..)

ACTIVITE 2 :



a) Indiquer les coordonnées des points :

A(….. ; …..) , B(….. ; …..) et C (….. ; …..)

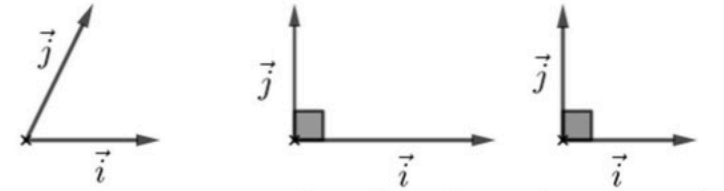
b) Placer les ponts $D(2;3)$, E $(-4;3)$ et $F(5;-2)$

c) Construire les points D', E' et F' symétriques respectifs de D , E et F par rapport à l'axe des abscisses puis indiquer leurs coordonnées approximative

D'(….. ; …..) , E'(….. ; …..) et F' (….. ; …..)

3.1. BASE DE VECTEUR DANS LE PLAN

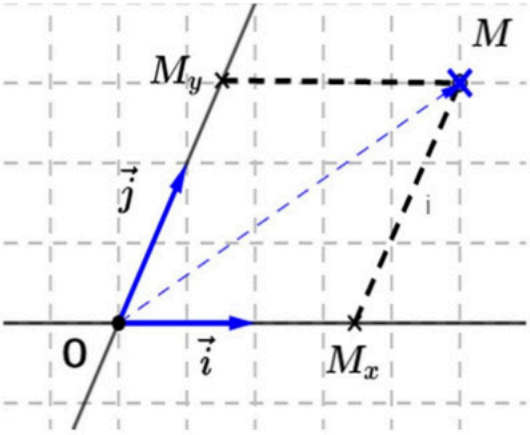
Une base de vecteur dans le plan est un couple $(\vec{i},\vec{j})$ de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires. Dans le cas ou $\vec{i} \perp \vec{j}$ on dit que cette base est orthogonale, si de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$ on dit que cette base est orthonormale.



3.2. REPERE DU PLAN

Un repère du plan est un triplet $(O;\vec{i},\vec{j})$ dans le quel O est un point fixe du plan et $\vec{i}$, $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan. Si $(\vec{i},\vec{j})$ est une base de vecteur du plan et O un point fixé du plan alors $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan.

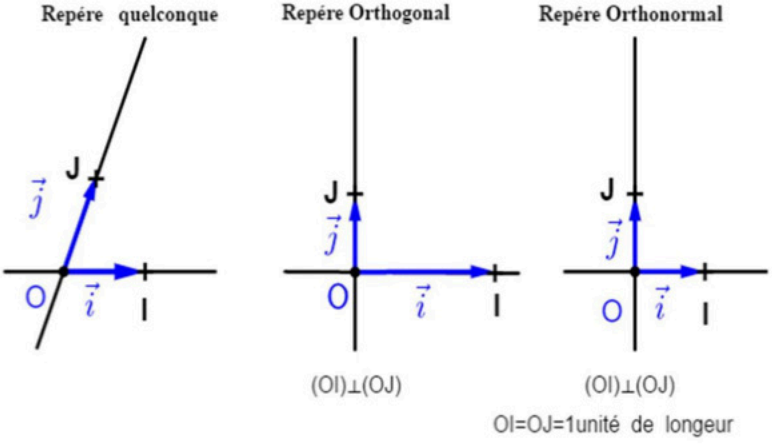
A tout point M de ce plan il existe deux uniques points M_x et M_y tels que $M_x \in (O,\vec{i})$; $M_y \in (O,\vec{j})$ et OM_xMM_y est un parallélogramme



DEFINITION Soit le plan P de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et M un point du plan , on peut associer un seul couple de réel $(x ; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ce couple réels s'appelle coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- **x est appelé abscisse du point M.**
- **y est appelé ordonné du point M**

3.3. TYPE DE REPERE DU PLAN



À chaque fois que c'est possible on préfère choisir un repère orthonormale (R.O.N) parce que d'une part c'est le repère le plus « régulier » (donc facile à utiliser) et d'autre part parce que certaines formules ne sont utilisables que dans un R.O.N. Pour des raisons pratiques on est cependant parfois obligé de choisir un repère orthogonal.

3.4. CALCUL DANS UN REPERE ORTHONORME $(O\ ;\ \vec{I}, \vec{J})$: DISTANCE ET MILIEUX

3.4.1. Distance

PROPRIETE : soit $A(x_A\ ;\ y_B)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points du plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{I}, \vec{J})$; la distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXERCICE D'APPLICATION

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{I}, \vec{J})$ on donne $C(-1; 2)$ et $D(3; -4)$; calculer la distance CD

Résolution

Calculons la distance CD

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{52}$$

$$CD = \sqrt{52}$$

3.4.2. Coordonnées du milieu d'un segment dans un repère orthonormé

PROPRIETE : soit $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points du plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{I}, \vec{J})$;le milieu du segment [AB] à pour coordonnées : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

EXERCICE D'APPLICATION

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{I}, \vec{J})$ on donne $C(1; 5)$ et $D(-1; 3)$; calculer les coordonnées de I milieu [CD].

Résolution

Calculons les coordonnées de I milieu [CD].

$x_I = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \quad ; x_I = 0$

$y_I = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \quad ; y_I = 4$

$I(0;4)$

3.5. COORDONNÉES DU BARYCENTRE

3.5.1. Coordonnées du barycentre de deux points

Activité : Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; on donne les points $A(x_A ; y_A)$et $B(x_B ; y_B)$. soit

$G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B ; \beta)\}$ tel que $G(x_G ; y_G)$.

1) Ecrire la relation vectorielle traduisant que G est barycentre du système : $\{(A; \alpha), (B ; \beta)\}$

2) En déduire les coordonnées de G en fonction de celles de A et B

PROPRIETE : Dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ du plan ; si $G = \text{bar}\{(A ; \alpha); (B ; \beta)\}$ alors les coordonnées du point G dans le repère sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Preuve :

Soit $G = \text{bar}\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta)\}$, pour tout point M du plan

$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Si $M = O$ (origine du repére)

On a: $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

$x_G\vec{i} + y_G\vec{j} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_A\vec{i} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_A\vec{j} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B\vec{i} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_B\vec{j}$

$$x_G\vec{i} + y_G\vec{j} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B\right)\vec{i} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_B\right)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow x_G\vec{i} + y_G\vec{j} = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}\vec{i} + \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\vec{j}.$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement leurs coordonnées sont égaux, ainsi $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}$ et $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}$

EXERCICE D'APPLICATION :

Dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A (1 ; 4) et B (4 ; 1)

Soit G = bar {(A ; 2); (B ; 1)}

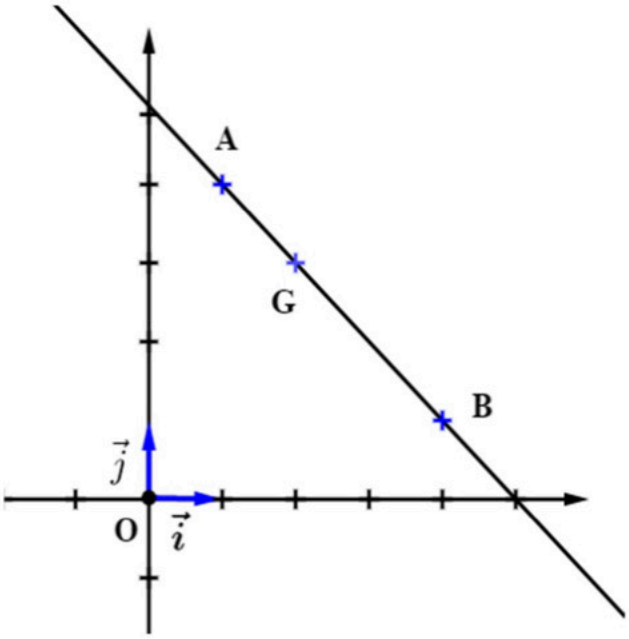
1) Construire le point G puis calculer ses coordonnés

2) Soit H le point tel que G soit aussi barycentre de (H ; 2) et (O ; 1)

Calculer les coordonnées de H

Solution intégrale

1) Construisons le point G



Calculons ses coordonnés $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} = \frac{(2\times1)+(1\times4)}{2+1} = \frac{6}{3}$ $x_G = 2$

$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} = \frac{(2\times4)+(1\times1)}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$ $y_G = 3$ ainsi $\mathbf{G(2\,;3)}$

2) Calculons les coordonnées de H puis démontrons que les droites (AH) et (OB) sont parallèles

❖ Calculons les coordonnées de H

$x_G = \frac{2x_H + 1x_0}{3}$ et $y_G = \frac{2y_H + 1y_0}{3}$ or $x_0 = y_0 = 0$

Ainsi $2 = \frac{2x_H}{3}$ et $3 = \frac{2y_H}{3}$

d'où $x_H = 3$; $y_H = \frac{9}{2}$

3.5.2. Coordonnées du barycentre de trois points pondères

PROPRIETE :Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$; les coordonnés du barycentre G des points $(A\,;\alpha)$; $(B\,;\beta)$ et $(C\,;\gamma)$ sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + C} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + C}$$

EXERCICE D'APPLICATION :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$; on donne les points $A(1\,;2)$, $B(-3\,;4)$ et $C(-2\,;5)$ et

$G = \text{bar}\{(A\,;3),(B\,;2),(C\,;-4)\}$

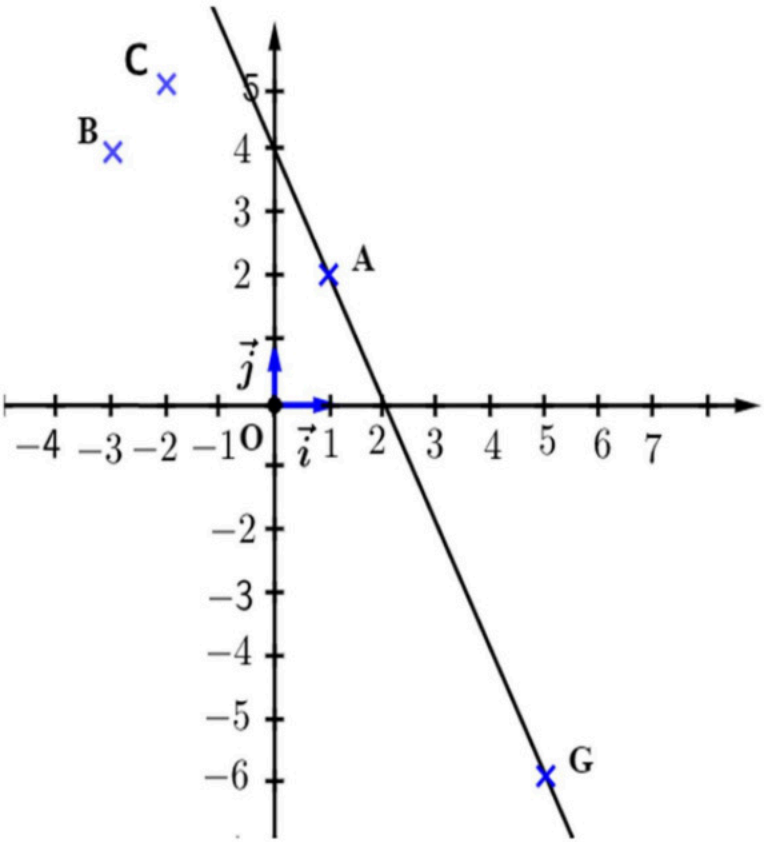
Déterminer les coordonnés du G puis placer le dans le plan.

Solution intégrale

Déterminons les coordonnés du G puis plaçons le dans le plan

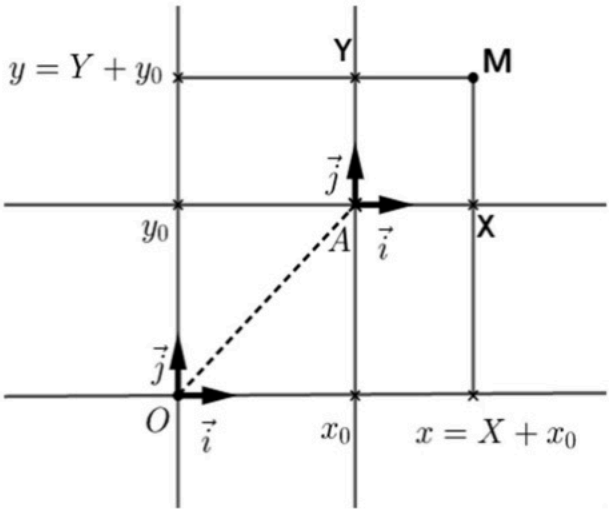
$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + C} = \frac{3\times(1) + 2(-3) + (-4)(-2)}{3 + 2 - 4} = 5 \qquad x_G = 5$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + C} = \frac{3(2) + 2(4) + (-4)(5)}{3 + 2 - 4} = -6 \qquad y_G = -6$$



3.6. CHANGEMENT DE REPERE PAR TRANSLATION

ACTIVITE :



Soit $A(x_0 ; y_0)$ et $M(x ; y)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les coordonnées **X** et **Y** de point M dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$.

b) Déduire - en que $\overrightarrow{AM} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$

c) Prouver que $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

PROPRIETE : Soit le plan P muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le repère $\mathcal{R}' = (O'; \vec{i}, \vec{j})$ avec O' un point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$ dans le repère $\mathcal{R}$. le nouveau repère a une nouvelle origine de même vecteurs de base que $\mathcal{R}$. Soit M un point quelconque du plan, $(x; y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$ et $(X; Y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}'$ on a ainsi : $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ Qui est la formule de changement de repère par la translation.

PREUVE ; O' un point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$ dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ donc $\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$

M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$;
M de coordonnées $(X; Y)$ dans le repère $\mathcal{R}'$ donc $\overrightarrow{O'M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$.

D'après la relation de Chasles, on a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j}$$

$\overrightarrow{OM} = (x_0 + X)\vec{i} + (y_0 + Y)\vec{j}$, par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base on : $\begin{cases} \mathbf{x = X + x_0} \\ \mathbf{y = Y + y_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

Exercice d'application

Soit $A(-1;2)$ et $B(5;3)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Calculer les coordonnées de A dans le repère $(B ; \vec{i}, \vec{j})$

Résolution

Calculons les coordonnées de A dans le repère $(B ; \vec{i}, \vec{j})$

Soit X_A et Y_A les coordonnées de A ; on a :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + X_A\vec{i} + X_A\vec{i}$$

$$\Leftrightarrow x_A\vec{i} + y_A\vec{j} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + X_A\vec{i} + X_A\vec{i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B + X_A \\ y_A = y_B + Y_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{X_A = x_A - x_B} \\ \mathbf{Y_A = y_A - y_B} \end{cases} \textbf{ d'où } \mathbf{X_A = -6} \textbf{ et } \mathbf{Y_A = -1 ; A(-6;-1)}$$

4. COLINEARITE DE DEUX VECTEURS :

4.1. CONDITION ANALYTIQUE DE LA COLINEARITE

THEOREME : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ alors les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $xy' - x'y = 0$

PREUVE :

Supposons que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ colinéaires , alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

$\Leftrightarrow x'\vec{i} + y'\vec{j} = kx\vec{i} + ky\vec{j}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx' = kxy \\ xy' = kxy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -yx' = -kxy \\ xy' = kxy \end{cases}$ En effectuant la somme membre en membre

$xy' - x'y = kxy - kxy = 0$, par conséquent si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire alors $xy' - x'y = 0$

EXERCICE D'APPLICATION

Déterminer toutes les valeurs du réel m pour que les deux vecteurs $\vec{u}\ (m; \frac{1}{2})$ et $\vec{v}\ (\frac{3}{2}; \sqrt{2})$ soient colinéaires.

Résolution

Déterminons les valeurs du réel m pour que les deux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

$\vec{u}(m; \frac{1}{2})$ et $\vec{v}\ (\frac{3}{2}; \sqrt{2})$ colinéaires si et seulement si

$(m)(\sqrt{2}) - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow m\sqrt{2} = \frac{3}{4}$ d'où $m = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ ainsi il y-a qu'une seule valeur de m vérifiant la condition que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

4.2. DETERMINANT DE DEUX VECTEURS

4.2.1. Cas Général

DEFINITION : Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan (P) ; noté dét$(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est défini de manière géométrique par : dét$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ si les deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls sinon dét$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$

PROPRIETE : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un plan (P) sont colinéaire si et seulement si dét$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$

Preuve

- Si l'un des vecteurs entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul alors la propriété est évidente.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right) = 0[\pi]$ et $\sin\left(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}\right) = 0$.

Il vient alors que dét$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$

N.B : le déterminant est antisymétrique autrement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan alors :

$$\text{dét}(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = -\,\text{dét}(\vec{v}\,;\,\vec{u})$$

4.2.2. Expression du déterminant dans une base orthonormale directe

Soit $(\vec{i}\,;\vec{j})$ une base orthonormale directe et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = xy' - yx'$

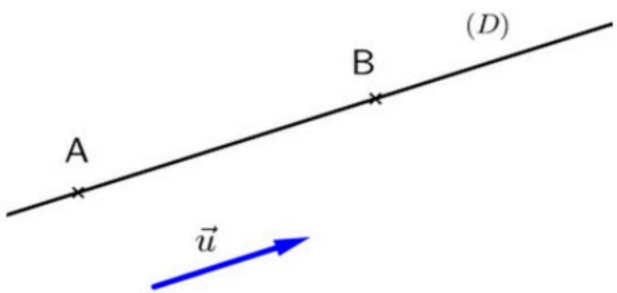
On notera $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ le déterminant $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$

On a donc $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

5. EQUATION DE DROITE

5.1. VECTEUR DIRECTEUR D'UNE DROITE

Soit (D) une droite du plan déterminée par un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul qui indique la direction de (D).



Un tel vecteur non nul $\vec{u}$ est appelé vecteur directeur de (D). Si A et B deux points distincts d'une droite (D), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi vecteur directeur de (D).

<u>NOTATION</u> : La droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est notée $D(A;\vec{u})$

NB :

- **Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous colinéaires.**
- **Un vecteur directeur indique la direction d'une droite donc toutes les droites ayant comme vecteur directeur un même vecteur $\vec{u}$ sont parallèles.**

PROPRIETE

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit (D) une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ alors $\forall$ P $\in$ (D) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Autrement le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{u}$ s'annule .

$$P(x;y) \in D(A;\vec{u}) \Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{AP};\vec{u}\right) = 0$$

5.2. EQUATION CARTESIENNE D'UNE DROITE

5.2.1. Equation générale : $ax + by + c = 0$

Soient $A(x_A ; y_A) \in (D)$ et $P(x ; y)$ un point du plan et $\vec{u}(x_u ; y_u)$ un vecteur directeur dans un repère quelconque $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ alors d'après la propriété on a :

$P(x ; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} x & x_A \\ y & y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}(x_u ; y_u)$ sont colinéaires.

équivaut à $\det\left(\overrightarrow{AP} ; \vec{u}\right) = 0$

$$\det\left(\overrightarrow{AP} ; \vec{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u \\ y - y_A & y_u \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)y_u - (y - y_A)x_u = 0$$

$$\Leftrightarrow y_u x - x_u y - x_A y_u + y_A x_u = 0$$

En posant $a = y_u$, $b = -x_u$ et $c = -x_A y_u + y_A x_u$

On obtient $P(x;y) \in (D) \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ on dit que $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (D)

Le plan étant muni d'un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$, l'ensemble des points M du plan p dont les coordonnées x et y sont telles que : $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

EXERCICE D'APPLICATION

a) Ecrire une équation de la droite $D(A;\vec{u})$ sachant que $A(\frac{3}{2};2)$ et $\vec{u}(1;2)$

b) Ecrire une équation de la droite (D) passant par les points A (-1;3) et B (2,5)

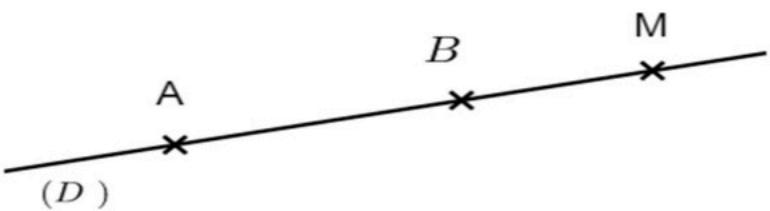
Résolution

a) Ecrivons une équation de la droite $D(A;\vec{u})$

$$\det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\frac{3}{2} & 1 \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

d'où $\mathbf{(D) : 2x - y - 1 = 0}$

N.B : on peut aussi déterminer l'équation d'une droite connaissant deux points A et B distincts de cette droite



$$\mathbf{M(x;y) \in D(A;B) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0}$$

b) Ecrivons une équation de la droite (D) passant par les points $A(-1;3)$ et $B(2,5)$

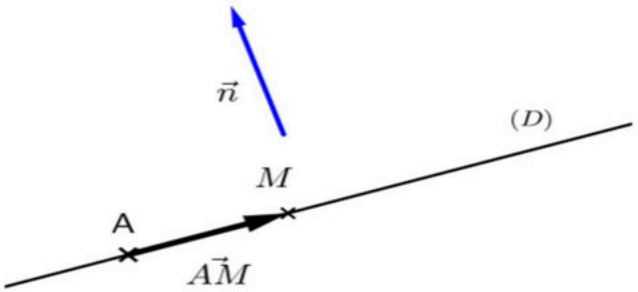
Soit $M(x;y)$ un point la droite (D) alors $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y-3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 11 = 0$$

Ainsi $\mathbf{(D) : 2x - 3y + 11 = 0}$

5.2.2. Vecteur Normal d'une droite

DEFINITION : On appelle vecteur normal d'une droite (D) tout vecteur $\vec{n}$ (avec $\vec{n} \neq \vec{0}$) qui est orthogonal à tout vecteur directeur de (D)



- Pour déterminer l'équation de la droite (D) il suffit de connaitre un point A $\in$ (D) et un vecteur $\vec{n}$ normal à (D)

Si $A(x_A ; y_A)$, $M \in (D)$ et $\vec{n}(x_n ; y_n)$ dans un R.O.N alors

$$M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \perp \vec{n}(x_n ; y_n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)x_n + (y - y_A)y_n = 0$$

$$\Leftrightarrow x_n x + y_n y - x_n x_A - y_n y_A = 0$$

En posant $a = x_n$, $b = y_n$ et $c = -x_n x_A - y_n y_A$ on obtient l'équation :

$$M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad n\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

vecteur normal à (D).

EXERCICE D'APPLICATION

Déterminer la droite (D) passant par le point $A(-4;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2;-13)$.

Résolution

Déterminons la droite (D) passant par le point $A(-4;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2;-13)$.

Soit $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+9 \\ y-5 \end{pmatrix} \perp \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (x+9)2 + (y-5)(-13) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 13y + 83 = 0$

$(D) : 2x - 13y + 83 = 0$

Notes :

Si (D) : $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D).

Exemple :

Pour $(D) : 4x - 11y + 29 = 0$

- $\vec{u}\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).
- $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) .

5.2.3. Equation Réduite

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit (D) la droite dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$. lorsque $b \neq 0$ la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et l'équation de la droite peut s' écrire sous la forme réduite $y = mx + p$ avec $m = \frac{-a}{b}$ et $p = \frac{-c}{b}$

- Le réel m est appelé le **coefficient directeur** de (D)
- Le réel p est appelé **l'ordonné à l'origine** de (D)
- $\vec{u}(1\,;m)$ est un **vecteur directeur** de (D).

EXERCICE D'APPLICATION :

soit (D) la droite dont une équation cartésienne est $4x+2y-5=0$
Déterminer son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine

Résolution

Déterminons le coefficient directeur et l' ordonnée à l'origine de la droite $4x+2y-5=0$

$4x+2y-5=0 \Leftrightarrow 2y=-4x+5$

$$y=-2x+\frac{5}{2}$$

- le coefficient directeur est $m=-2$
- l'ordonnée à l'origine est $P=\frac{5}{2}$
- $\vec{u}(1\,;-2)$ est un vecteur directeur de (D)

5.3. DROITE PARALLELES – DROITES ORTHOGONALES

5.3.1. DROITES PARALLELES

Soient (D)et (D′)deux droites tel que (D): $ax+bx+c=0$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}$ et (D′) : $a'x+b'x+c'=0$ passant par le point B de vecteur directeur $\vec{v}$. les droites (D) et (D′) sont parallèles si et seulement si $dét(\vec{u};\vec{v})=0$

$$D(A;\vec{u}) \;//\; D(B;\vec{v}) \Leftrightarrow dét(\vec{u};\vec{v})=0$$

EXERCICE D'APPLICATION :

On donne les droites $(D_1) = 3x + 2y - 6 = 0$ et $(D_2) : x + \frac{2}{3}y - 6 = 0$ deux droites ; montrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles

Résolution

Montrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles

(D_1): $3x + 2y - 6 = 0$ à pour vecteur directeur $\vec{u}(-2; 3)$

$(D_2) : x + \frac{2}{3}y - 6 = 0$ à pour vecteur directeur $\vec{v}(-\frac{2}{3}; 3)$

$$\text{dét}(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & \frac{-2}{3} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

dét $(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ donc les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles .

5.3.2. DROITES ORTHOGONALES

DEFINITION : Soient (D)et (D')deux droites tel que (D): $ax + bx + c = 0$ et $(D') : a'x + b'x + c' = 0$. les droites (D) et (D') sont orthogonales si et seulement si $aa' + bb' = 0$

EXERCICE D'APPLICATION :

On donne les droites $(D_1) = \frac{6}{7}x + y + 2 = 0$ et $(D_2) : -7x + 6y + 10 = 0$ deux droites ; montrer que (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

Résolution

Montrons que (D_1) et (D_2) sont orthogonales

$(D_1) = \frac{6}{7}x + y + 2 = 0$ et $(D_2) : -7x + 6y + 10 = 0$

$\left(\frac{6}{7}\right)(-7) + (1)(6) = -6 + 6 = 0$ Donc les droites sont orthogonales.

5.4. REPRESENTATION PARAMETRIQUE ANALYTIQUE D'UNE DROITE

Soit (D) la droite passant par le point $A(x_0 ; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha ; \beta)$.
$M(x;y) \in D(A;\vec{u})$ alors il existe un unique $t \in IR$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \text{ alors } \begin{cases} x - x_0 = \alpha t \\ y - y_0 = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases} \text{ avec } t \in IR$$ **est l'expression paramétrique analytique de la droit (D).**

EXERCICE D'APPLICATION :

Soit $A(-4;3)$ et $B(2;5)$ deux points du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer la représentation paramétrique analytique de la droite passant par A et B.

Résolution

Déterminons la représentation paramétrique analytique de la droite passant par A et B

$M(x;y) \in D(A;\vec{u})$ alors il existe un unique $t \in IR$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, \text{ alors } \begin{cases} x - 4 = 6t \\ y - 3 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in IR$$

Notation :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \to (x_0 + \alpha t ; y_0 + \beta t)$$

La représentation paramétrique de la droite (D)

5.4.1. Utilisation d'une représentation paramétrique

Exemple : Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite **(D)** ayant par représentation paramétrique

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \to (4t - 1 ; -3t + 3) ;$$

Donner l'abscisse du point P d'ordonnée 1 de la droite (D).

Résolution

Donnons l'abscisse du point P d'ordonnée 1 de la droite (D).

La droite (D)passe par le point $A(-1; 3)$ et à pour vecteur directeur $\vec{u}(4; -3)$.

Soit $P(x; 1) \in D(A; \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t - 1 \\ 1 = -3t + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t - 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$ ainsi $x = \frac{5}{3}$

d' ou $P\left(\frac{5}{3} ; 1\right)$

5.4.2. Passage d'une représentation paramétrique d'une droite à une représentation cartésienne et vice versa

- Passage d'une représentation paramétrique d'une droite à une représentation cartésienne

Exemple : soit (D) la droite dont une représentation analytique est

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$t \to (x; y) \text{ tel que } \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -7 - 2t \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne de (D)

Résolution

Déterminons une équation cartésienne de (D)

On a $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -7 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-5}{2} \\ t = \frac{-y-7}{2} \end{cases}$

Ainsi $\frac{x-5}{2} = \frac{-y-7}{2}$ d'où $x + y + 2 = 0$

(D) : $x + y + 2 = 0$ est l'équation cartésienne de (D)

- Passage d'une représentation cartésienne d'une représentation paramétrique d'une droite.

Exemple : soit la droite (D) d'équation cartésienne $3x + 2y - 4 = 0$

Déterminer une représentation paramétrique analytique de (D) .

Résolution

Déterminons une représentation paramétrique analytique de (D) d'équation cartésienne $3x + 2y - 4 = 0$

Soit $A(2; -1)$ un point de (D) et $\vec{u}\ (-2; 3)$ un vecteur directeur de (D).

$M(x; y) \in D(A; \vec{u})$ alors il existe un unique réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -2t \\ y + 1 = 3t \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$ $t \in IR$ est la représentation paramétrique analytique de (D)

5.5. INTERSECTION DE DEUX DROITES

Soient deux droites $(D): ax+by+c=0$ et $(D'): a'x+b'y+c'=0$ données par leurs équation cartésienne alors : $I(x;y) \in (D)\cap(D') \Leftrightarrow (x;y)$ est solution du système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

N.B : déterminer l'intersection de (D) et (D') et résoudre le système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ **revient au même .**

On a trois possibilités :

- **Si $(D)\cap(D')=\{I\}$, ((D) et (D') sont sécantes), ainsi le système à une seule solution : les coordonnées de I**
- **Si $(D)\cap(D')=\emptyset$, ((D) et (D') strictement parallèles) alors le système n'a pas de solution .**
- **Si $(D)\cap(D')=(D)=(D')$, ((D) et (D')sont confondues) le système a une infinie de solution.**

REMARQUE : Soient deux droites $(D): ax+by+c=0$ et $(D'): a'x+b'y+c'=0$ alors :

- $(D)\parallel(D') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$
- (D) et (D') sécante $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

EXERCICE D'APPLICATION :

1) Résoudre les systèmes d'équations suivants puis interpréter géométriquement les résultats.

a) $\begin{cases} 5x + 17y - 1 = 0 \\ x - 2y - 11 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - 8y - 11 = 0 \\ -21x + 24y + 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5y + 4 = 0 \\ -6x + 10y - 8 = 0 \end{cases}$

2) Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. on donne deux droites $(D) : 2x + y - 1 = 0$ et $(D') : \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 3 \end{cases}$

Prouver que les droites (D) et (D′) sont sécantes puis déterminer les coordonnées du point d'intersection.

Résolution

1) Résolvons les systèmes suivants puis interpréter géométriquement les résultats.

a) $\begin{cases} 5x + 17y - 1 = 0 \\ x - 2y - 11 = 0 \end{cases}$ $S = \{(7 ; -2)\}$

Interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites sécantes qui se coupent en $I(7 ; -2)$

b) $\begin{cases} 7x - 8y - 11 = 0 \\ -21x + 24y + 5 = 0 \end{cases}$ $S = \emptyset$

Interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites strictement parallèles (disjointes).

c) $\begin{cases} 3x - 5y + 4 = 0 \\ -6x + 10y - 8 = 0 \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{5}{3}y - \frac{4}{3} ; y\right) \text{avec } y \in IR\right\}$

Interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites confondues.

2) Prouvons que les droites (D) et (D′) sont sécantes

Soit $\vec{u}(-1; 2)$ un vecteur directeur de la droite (D) et $\vec{v}(-1; 3)$ un vecteur directeur de (D′)

$\text{dét}(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$

$\text{dét}(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,) \neq 0$ donc les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction ainsi les droites (D) et (D′) sont sécantes en un point I(x; y).

Déterminons les coordonnées du point d'intersection

Les droites (D) et (D′) sont sécantes en un point I(x; y) alors

$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 3 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$; remplaçons x et y par leurs valeurs dans l'équation $2x + y - 1 = 0$

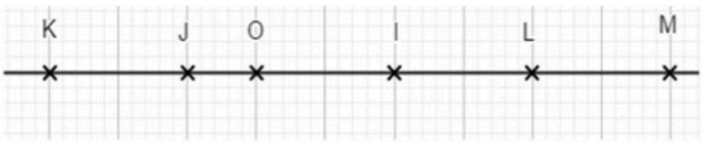
On a ainsi $2(-t + 2) + (3t - 3) - 1 = 0$ d'où $t = 0$

$t = 0$ alors $x = 2$ et $y = -3$

$I(2\,;\,-3)$

SÉRIE D'EXERCICES

EXERCICE 1 :



a) Déterminer l'abscisse du point M dans le repére (O, I)
a) Déterminer l'abscisse du point M dans le repére (O, J)
b) Déterminer l'abscisse du point M dans le repére (O, K)
a) Déterminer l'abscisse du point M dans le repére (O, L)

EXERCICE 2 :

On se place dans un repère $(O ; I, J)$; on considère les points $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$ $C(1; 3)$ et $D(-1; 4)$.

1) Faire une figure
2) Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure ;
a) Dans le repère (B, C, D)
b) Dans le repère (B, D, C)
3) Placer le point K de coordonnés $(2; 1)$ dans le repère $(O ; I, J)$.
4) Déterminer les coordonnés de tous les points de la figure dans le repère (I, K, J)

EXERCICE 3 :

1) Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans les cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\15\end{pmatrix}$

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{2}\\3+\sqrt{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3-\sqrt{6}\\\sqrt{5}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$

2) Déterminer la valeur de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\2+x\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-x\\3x\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}x-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\x-2\end{pmatrix}$

EXERCICE 4 :

Soit (Δ) une droite de repère $(O,\vec{u})$ et A, B, C et D quatre points de (Δ) donnés par leurs abscisses respectives : $-12\ ; -2; -5;\ 3$ et soient I, J et K les milieux respectives de [AB], [CD] et [IJ]

1) Calculer les abscisses des points I, J et K

2) Soit M un point de (Δ) d'abscisse x. Exprimer en fonction de x le nombre réel α défini par : $\alpha = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$

3) Calculer α dans chacun des cas suivants : a) $M = I$ b) $M = J$ c) $M = K$

EXERCICE 5 (CORRIGE)

On considère un nombre réel m et on note (D_m) la droite d'équation : $(2m-1)x - my + 3x + 1 = 0$

1) Tracer (D_0) ; (D_1) ; (D_2) et (D_{-1}).

2) Montrer que toutes les droites (D_m) passent par un meme point I dont on précisera les coordonnées.

3) Existe-t-il des droites (D_m) passant par $A(-1;4)$? si oui , les quelles ?

4) Existe-t-il des droites (D_m) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$? si oui , les quelles ?

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère $(O.\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Dans chacun des cas suivants déterminer un système d'équation paramétrique de la droite (D)

1) (D) passe par $A(-1;2)$ et $B(1;-4)$

2) (D) passe par $C(-1;2)$ et a pour coefficient directeur -3.

3) (D) passe par $I(3;-1)$ et est parallele à la droite d'équation $2x - y + 4 = 0$

4) (D) passe par $E(1\ ;3)$ et est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x + 1$

EXERCICE 7 : (CORRIGE)

Déterminer l'intersection des droites $(D)_1$ et $(D)_2$ avec

$(D_1): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \end{cases} (t \in IR)$ $\qquad$ $(D_2): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases} (t \in IR)$

EXERCICE 8 : (CORRIGE)

Déterminer une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite (D).

1) Passant par $A(2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(1;-1)$
2) Passant par $A(1;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1;-2)$
3) Passant par $A(1;2)$ et $B(-2;3)$
4) Passant par l'origine et parallèle à la droite $(D'): x+y-1=0$
5) Passant par $A(1;1)$ et perpendiculaire à la droite $(D_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases} (t \in R)$

EXERCICE 9 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O.\vec{i},\vec{j})$. On considère la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$ (avec $t \in$ IR).

1) La droite (D) passe t-elle par $A(-2;1)$? par $B(2;-3)$? par $C(1;5)$?
2) Quelle est le point de (D) qui a pour abscisse 0 ?
3) Quelle est le point de (D) qui a pour ordonnée 0 ?
4) Donner une équation cartésienne de la droite (D)

EXERCICE 10 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O.\vec{i},\vec{j})$, les droites (D) et (D') définies par : $(D): \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases} (t \in IR)$

$(D'): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = b + mt \end{cases} (t \in IR)$

1) Peut –on trouver des couples $(m;b)$ tels que (D) et (D') soit parallèles ?
2) Peut –on trouver des couples $(m;b)$ tels que $(D) = (D')$?

EXERCICE 11 :

Soit ABCD un carré de côté 4cm le point E est défini par $4\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$; F est le point d'intersection des droites (AD) et (BE) et G est le point d'intersection des droites (AB) et (DE)

1) Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$ est un repère.
2) Déterminer les coordonnées des points A, B,C et D dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$.
3) Déterminer les coordonnées des points F et G dans le repère
4) Démontrer que les droites (BD) et (FG) sont parallèles

CORRECTION DE QUELQUES EXERCICES

EXERCICE 5

1) Traçons (D_0) ; (D_1) ; (D_2) et (D_{-1}).

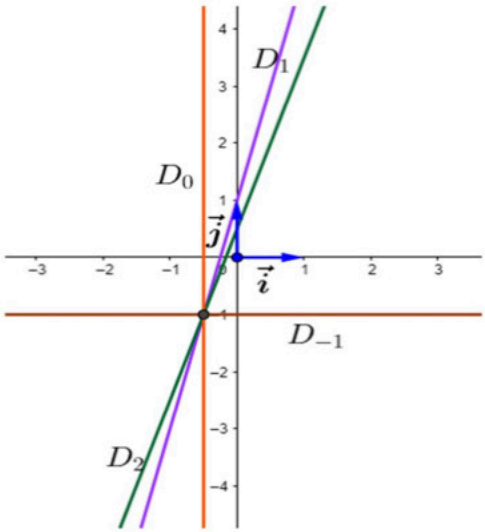
(D_0) : $2x + 1 = 0$ ou encore $x = -\frac{1}{2}$

(D_1) : $4x - y + 1 = 0$ ou encore $y = 4x + 1$

(D_2) : $6x - 2y + 1 = 0$ ou encore $y = 3x + \frac{1}{2}$

(D_{-1}) : $y + 1 = 0$ ou encore $y = -1$

2) Montrons que toutes les droites (D_m) passent par un même point I dont on précisera les coordonnées.



Graphiquement , les quatre droites (D_m) tracées passent par $I(-\frac{1}{2}; -1)$, vérifions si c'est le cas pour toute valeur de m :

$(2m-1)\left(-\frac{1}{2}\right)-m(-1)+3\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$ donc pour tout point $m \in IR$, (D_m) passe par le point $I(-\frac{1}{2};-1)$.

3) Vérifions s'il existe des droites (D_m) passant par $A(-1;4)$ .si oui , donnons les.

$A(-1;4) \in (D_m) \Leftrightarrow (2m-1)(-1)-4m-3-1=0$

$\Leftrightarrow -6m-3=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Le point $A(-1;4)$ appartient à (D_m) si et seulement si $m=\frac{1}{2}$

Pour $m=\frac{1}{2}$ alors $\left(D_{\frac{1}{2}}\right)$: $3x-\frac{1}{2}y+1=0$

4) Vérifions s'il existe des droites (D_m) de vecteur directeur $\vec{u}\binom{2}{-1}$. si oui , donnons les .

Une équation cartésienne de (D_m): $(2m-1)x-my+3x+1=0$ à pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_m}\binom{m}{2m+2}$; $\vec{u}$ dirige (D_m) d'où $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u_m}$ colinéaire alors $2(2m+2)+m=0$

Ainsi $m=-\frac{4}{5}$

Donc pour $m=-\frac{4}{5}$; $\vec{u}$ dirige (D_m)

EXERCICE : 7

Déterminer les coordonnées du point I intersection des droites $(D)_1$ et $(D)_2$

METHODE 1

On prend deux paramètres distincts t et u et on égale les abscisses et ordonnées pour obtenir le système : $\begin{cases} 2t-1=u+2 \\ -t+2=3u+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-u=3 \\ -t-3u=-1 \end{cases}$ d'où $u=-\frac{1}{7}$

On déduit $x=-\frac{1}{7}+2=\frac{13}{7}$ et $y=-\frac{1}{7}+1=\frac{4}{7}$

$$(\mathbf{D_1}) \cap (\mathbf{D_2}) = \mathbf{I}\left(\frac{13}{7};\frac{4}{7}\right)$$

METHODE 2

Déterminons l'intersection des droites $(D)_1$ et $(D)_2$ avec

(D_1): $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \end{cases}$ $(t \in R)$ $\quad$ (D_2): $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases}$ $(t \in R)$

Soit $\vec{u}(2; -1)$ un vecteur directeur de (D_1) et $\vec{n}(1; 2)$ est un vecteur normal de (D_1). Ainsi une équation cartésienne de (D_1) est $x + 2y + c = 0$ or pout $t = 0$; $M(-1; 2) \in (D_1)$ d'où $c = 3$

En traduisant un point de (D_2) vérifiant cet équation de (D_1) on obtient : $(t + 2) + 2(3t + 1) = 3$ d'où $t = \frac{1}{7}$ par suite en remplaçant t par sa valeur on obtient $x = \frac{13}{7}$ et $y = \frac{4}{7}$

$$(\mathbf{D_1}) \cap (\mathbf{D_2}) = \mathbf{I}\left(\frac{13}{7};\frac{4}{7}\right)$$

EXERCICE 8

1) Une droite (D) Passant par $A(2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -1)$

- Déterminons une équation cartésienne de (D).

Comme (D) admet $\vec{n}(1; -1)$ comme vecteur normal alors une équation cartésienne de (D) est de la forme $x - y + c = 0$ avec $c \in IR$, comme $A \in (D)$; alors $c = -1$ d'où

$$(D) : x - y - 1$$

- Déterminons une équation paramétrique de la droite (D).

Un vecteur directeur à (D) passant par $A(2; 1)$ est celui de coordonnées $(1; 1)$ donc une équation paramétrique de (D) est :

$$(D): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases} ; t \in IR$$

2) Une droite (D) passant par $A(1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; -2)$

- Déterminons une équation cartésienne de (D).

Comme (D) est dirigée par $\vec{u}$, elle admet comme vecteur normal celui coordonnée $(-2;-1)$ ou encore $(2;1)$. Une équation de (D) est donc de la forme $2x+y+c=0$ $c \in$ IR or (D) passe par $A(1;0)$ ainsi $c=2$

$$(D):\ 2x+\ y+2\ =0$$

- Déterminons une équation paramétrique de la droite (D).

$$(D):\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \end{cases} ;t \in IR$$

3) Une droite (D)passant par $A(1;2)$ et $B(-2;3)$

- Déterminons une équation cartésienne de (D).

Les points $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ sont des points de la droite (A) , le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ dirige (D) et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ dirige (D) . une équation cartésienne de (D) est alors de la forme $x+3y+c=0$ avec $c \in$ IR . $A(1;2) \in$ (D) on trouve ainsi $c=-7$

(D) : $x+\ 3y-7=\ 0$

- Déterminons une équation paramétrique de la droite (D).

$$(D):\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+t \end{cases} ;t \in IR$$

4) Une droite (D)passant par l'origine et parallèle à la droite

$$(D'):x+y-1=0$$

- Déterminons une équation cartésienne de (D).

(D) et (D′) sont parallèle , le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ normal à (D′) est aussi normal à (D) et donc une équation cartésienne de (D) est de la forme $x+y+c=0$ avec $c \in$ IR or $O(0;0) \in$ (D) ainsi $c=0$

(D) : $x+\ y=0$

- Déterminons une équation paramétrique de la droite (D).

Une vecteur directeur à (D) passant par $O(0;0)$ est $\vec{u}(-1;1)$ et une équation paramétrique de (D) est :

$$(D):\begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases} \quad ; t \in IR$$

5) Une droite (D)passant par $A(1;1)$ et perpendiculaire à la droite $(D'):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases} (t \in R)$

Un vecteur directeur de (D') est $\vec{u}(2;1)$ qui est normal à (D) car les deux droites sont perpendiculaires. Une équation de (D) est donc de la forme $2x + y + c = 0$ avec $c \in IR$ or $A(1;1) \in (D)$ alors $c = -3$ ainsi

$$(D) : 2x + y - 3 = 0$$

- Déterminons une équation paramétrique de la droite (D). Une vecteur directeur de (D) passant par $A(1;1)$ est $\vec{u}(-1;2)$ et une équation paramétrique de (D) est :

$$(D):\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad ; t \in IR$$

TABLE DES MATIÈRES

Préface **7**
Avant-propos **9**
Remerciement **11**
Historique des symboles mathématiques **13**
Sommaire **17**

CALCUL DANS IR **19**
1. Puissance dans IR 21
1.1. ACTIVITÉ 21
1.2. Définition et propriétés 21
1.2.1. Définition 21
1.2.2. Propriétés 21
1.3. NOTATION SCIENTIFIQUE 23
1.4. RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES IDENTITÉS REMARQUABLES 23
1.4.1. RAPPELS 23
1.4.2. COMPLÉMENTS 23
2. Ordre et opérations dans IR 24
3. CALCUL AVEC LES RADICAUX 26
3.1. DÉFINITION 26
3.2. PROPRIÉTÉS 27
4. VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL 27
4.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS 27
4.1.1. Définition 27
4.1.2. Propriétés 29
4.2. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATION COMPORTANT UNE VALEUR ABSOLUE 31
5. DISTANCE SUR IR 32

5.1. DROITE RÉELLE (droite Numérique) 32
5.2. DISTANCE 33
5.2.1. Définition 33
6. PARTIE ENTIÈRE 33
6.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ 33
6.1.1. Définition 33
6.1.2. PROPRIÉTÉS 33

CALCUL VECTORIEL 43
Partie I : Vecteurs 43
1. DÉFINITIONS 45
1.1. VECTEUR 45
1.2. RELATION DE CHASLES 46
2. EGALITE DE DEUX VECTEURS 46
2.1. DÉFINITION : 46
2.2. VECTEUR ET MILIEU D'UN SEGMENT 47
2.2.1. Propriétés 47
2.2.2 THÉORÈME 48
2.2.3. VECTEUR ET PARALLÉLOGRAMME 48
3. SOMME DE DEUX VECTEURS 49
3.1. RELATION DE CHASLES 50
3.2. RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME 50
3.3. PROPRIÉTÉS 50
4. MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL 51
4.1. DÉFINITION 51
4.2. PROPRIÉTÉS 51
5. COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS 52
5.1. DÉFINITION 52
5.2. THÉORÈME 52

INTERVALLE ET CALCUL APPROCHÉ 73
1. INTERVALLE DANS IR 74
1.1. VOCABULAIRE ET NOTATION 74
1.1.1. Vocabulaire 74
1.1.2. Notation 74
1.2. INTERSECTION ET RÉUNION DE DEUX INTERVALLES. 75
1.2.1. Intersection de deux intervalles 75
1.2.2. Réunion de deux intervalles 75
1.3. CENTRE ET RAYON D'UN INTERVALLE FERME BORNE 75
2. ENCADREMENT ET OPERATIONS 77
2.1. DÉFINITION 77
2.2. PROPRIÉTÉS 78
3. APPROXIMATION DÉCIMALES D'ORDRE **n** PAR DÉFAUT PAR EXCÈS 81
4. Arrondi d'ordre **n** 82
5. VALEUR APPROCHE 82
5.1. DÉFINITION 82

CALCUL VECTORIEL 93
Partie II : Barycentre 93
1. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES 95
1.1. ACTIVITÉ 95
1.2. DÉFINITION DU BARYCENTRE 97
1.3. PROPRIÉTÉ 97
1.4. RÉDUCTION DE LA SOMME DE VECTEURS $\boldsymbol{\alpha MA + \beta MB}$ LORSQUE $\boldsymbol{\alpha + \beta \neq 0}$ 97
1.5. DROITE ET BARYCENTRE 100
2. PROPRIÉTÉS DU BARYCENTRE 100
2.1. HOMOGÉNÉITÉ DU BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES 100
2.2. ISOBARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÈRES 101
3. EXTENSION AU SYSTÈME DE BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES 101

3.1. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES 101
3.1.1. Théorème 101
3.1.2. Position du point G sur le plan 101
3.2. RÉDUCTION DE LA SOMME DE TROIS VECTEURS $\alpha MA + \beta MB + \gamma MC$ lorsque $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ 102
3.2.1 Théorème : 102
3.3. ISOBARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÈRES 103
3.4. BARYCENTRE PARTIEL OU ASSOCIATIF 104

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ 119
1. FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ 121
1.1. DÉFINITION 121
1.1.1. Monôme 121
1.1.2. Trinôme du second degré 121
1.1.3. Racine ou zéro d'un trinôme 121
1.2. FORME CANONIQUE D'UN TRINÔME 122
1.2.1. Rappels 122
1.2.2 Étapes d'élaboration de la forme canonique 122
2. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ 123
2.1. DÉFINITION ET EXEMPLES 123
2.2. RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ $ax2 + bx + c = 0$ 123
2.3. ÉQUATIONS SE RAMENANT A UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ 127
2.3.1. Cas des équations bicarrées 127
2.3.2. Autres cas 128
3. FACTORISATION D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ. 129
4. SOMME ET PRODUIT DES RACINES D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ 131
5. TROUVER DEUX NOMBRES CONNAISSANT LEUR SOMME ET LEUR PRODUIT 133
6. INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ 136
6.1. DÉFINITION 136

6.2. RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ 136
6.2.1. Étude de signe d'un trinôme du second degré 137
6.2.2. Application à la résolution d'inéquation 140
7. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES 143
7.1. DÉFINITION 143
7.2. ÉTUDE DE L'EXISTENCE ET DU SIGNE DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION PARAMÉTRIQUE ... 146

ANGLES ORIENTÉS - TRIGONOMÉTRIE 161
1. RAPPELLE ET COMPLÉMENTS SUR LES ANGLES GÉOMÉTRIQUE 163
1.1. RADIAN 163
1.1.1. DÉFINITION 163
1.1.2. CONVERSION DES DEGRÉS EN RADIANS ET DES RADIANS EN DEGRÉ 163
1.2. ORIENTATION DU PLAN 164
1.2.1 SENS DIRECT ET SENS INDIRECT 164
1.2.2. ANGLES ORIENTES DE DEMIES DROITES 164
1.2.3. ANGLE ORIENTE DE DEUX VECTEURS 165
2. MESURE PRINCIPALE D'UN ANGLE ORIENTE 166
2.1. DÉFINITION 166
2.2. PROPRIÉTÉ 167
2.3. MÉTHODE DE DÉTERMINATION DE L'ANGLE PRINCIPAL 167
3. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES 168
3.1. DÉFINITION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIE 168
3.2. DÉFINITIONS DU SINUS, DU COSINUS ET DE LA TANGENTE D'UN ANGLE ORIENTE 169
3.2.1. DÉFINITION 169
3.2.2. PROPRIÉTÉS 170
3.2.3. SIGNE DU COSINUS ET DU SINUS 170
3.3. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUE DES ANGLES REMARQUABLES 170

3.4. LIGNES TRIGONOMÉTRIQUE DES ANGLES ASSOCIÉS 171

POLYNÔMES – FRACTIONS RATIONNELLES 179
1. GÉNÉRALITÉS 181
1.1. DÉFINITIONS 181
1.1.1. Monôme 181
1.1.2. Polynôme 181
1.2. DEGRÉ D'UN POLYNÔME NON NUL 182
2. CALCUL SUR LES POLYNÔMES 183
2.1. EGALITE DE DEUX POLYNÔMES 183
2.2. SOMME ET PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES 183
2.2.1. Somme de deux polynômes 183
2.2.2. PRODUIT DE DEUX POLYNÔMES 184
2.3. FACTORISATION D'UN POLYNÔME 184
2.3.1. Zéro ou racine d'un polynôme 184
2.3.2. Détermination du quotient **Qx** de **Px** Par $\mathbf{x - \alpha}$ 184
3. POLYNÔME SYMÉTRIQUE OU RÉCIPROQUE 189
3.1. DÉFINITION 189
4. FRACTION RATIONNELLE 191
4.1. DÉFINITION 191
4.2. CONDITION D'EXISTENCE D'UNE FRACTION RATIONNELLE 191
4.3. SIMPLIFICATION D'UNE Fraction RATIONNELLE 192
4.4. ÉTUDE DU SIGNE D'UNE FONCTION RATIONNELLE ... 193
4.5. DÉCOMPOSITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE ... 195

PRODUIT SCALAIRE 207
1. DIFFÉRENTES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE .. 209
1.1. EXPRESSION ALGÉBRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE ... 210
1.2. EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE 213
1.2.1. Norme 213
1.3. EXPRESSION MÉTRIQUES DU PRODUIT SCALAIRE 215

1.3.1. Relation D'AL KASHI (théorème de Pythagore généralisé). 215
1.3.2. PROPRIÉTÉ 216
1.4. EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ 217
2. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE 218
2.1. OPERATIONS VECTORIELLES 218
2.2. PROPRIÉTÉS 219
2.3. PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ (perpendicularité) 219
3. APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE 220
3.1. ÉQUATION DE DROITE 220
3.2. ÉQUATION DE CERCLE 222
3.2.1. PROPRIÉTÉS 222
3.2.3. THÉORÈME 222

FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE 233
1. GÉNÉRALITÉ SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES 235
1.1. DÉFINITION ET EXEMPLES 235
1.1.1. Définition 235
1.1.2. EXEMPLES 236
1.2. ENSEMBLE OU DOMAINE DE DÉFINITION OU D'EXISTENCE D'UNE FONCTION 237
1.2.1. Définition 237
2. EGALITE DE DEUX FONCTIONS 240
3. RESTRICTION D'UNE FONCTION 241
4. COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS 242
4.1. DÉFInitION 242
4.2. ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION COMPOSÉE 243
5. PARITÉ D'UNE FONCTION 244
5.1. FONCTION PAIRE 244
5.1.1. Définition 244
5.1.2. Interprétation graphique 244
5.2. FONCTION IMPAIRE 245

5.2.1. Définition..... 245
5.2.2. Interprétation graphique 246
6. VARIATION DE FONCTION 247
6.1. TAUX DE VARIATION OU D'ACCROISSEMENT 247
6.1.1. Définition..... 247
6.2. TAUX ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION USUELLE..... 248
7. COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION..... 250
7.1. DÉFINITION 250
7.2 COURBE REPRÉSENTATIVE DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES..... 251
8. RÉSOLUTION GRAPHIQUE..... 255
8.1. VARIATION D'UNE FONCTION A PARTIR DE SA REPRÉSENTATION 256
8.2. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS..... 258
8.3. RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS..... 259
8.4. SIGNE D'UNE FONCTION..... 260

REPÈRAGE CARTÉSIEN 267
1. REPERAGE SUR UNE DROITE..... 270
1.1. REPERAGE SUR UNE DROITE : ABSCISSE D'UN POINT, MESURE ALGEBRIQUE..... 270
1.2. PROPRIETES ANALYTIQUES REPERE SUR UNE DROITE..... 272
2. VERSION ALGEBRIQUE DU THEOREME DE THALES..... 273
2.1. VERSION ALGEBRIQUE DU THEOREME DE THALES.. 273
2.2. PROPRIETE RECIPROQUE..... 273
3. REPERAGE DU PLAN 274
3.1. BASE DE VECTEUR DANS LE PLAN..... 276
3.2. REPERE DU PLAN..... 276
3.3. TYPE DE REPERE DU PLAN..... 277
3.4. CALCUL DANS UN REPERE ORTHONORME **O** ; **I** , **J** : DISTANCE ET MILIEUX..... 278
3.4.1. Distance 278

3.4.2. Coordonnées du milieu d'un segment dans un repère orthonormé 278
3.5. COORDONNÉES DU BARYCENTRE 279
3.5.1. Coordonnées du barycentre de deux points 279
3.5.2. Coordonnées du barycentre de trois points pondères 281
3.6. CHANGEMENT DE REPERE PAR TRANSLATION 283
4. COLINEARITE DE DEUX VECTEURS : 285
4.1. CONDITION ANALYTIQUE DE LA COLINEARITE 285
4.2. DETERMINANT DE DEUX VECTEURS 286
4.2.1. Cas Général 286
4.2.2. Expression du déterminant dans une base orthonormale directe 287
5. EQUATION DE DROITE 287
5.1. VECTEUR DIRECTEUR D'UNE DROITE 287
5.2. EQUATION CARTESIENNE D'UNE DROITE 288
5.2.1. Equation générale : $\mathbf{ax + by + c = 0}$ 288
5.2.2. Vecteur Normal d'une droite 290
5.2.3. Equation Réduite 291
5.3. DROITE PARALLELES – DROITES ORTHOGONALES 292
5.3.1. DROITES PARALLELES 292
5.3.2. DROITES ORTHOGONALES 293
5.4. REPRESENTATION PARAMETRIQUE ANALYTIQUE D'UNE DROITE 294
5.4.1. Utilisation d'une représentation paramétrique 295
5.4.2. Passage d'une représentation paramétrique d'une droite à une représentation cartésienne et vice versa 295
5.5. INTERSECTION DE DEUX DROITES 297

XY-MATHS

CAP VERS LA RÉUSSITE

2nde S

Le contenu de ce manuel est conforme au programme de seconde scientifique en vigueur au Sénégal dont il s'efforce d'atteindre les objectifs fondamentaux tant sur le plan méthodologique que sur le plan des connaissances.

Pour atteindre ces exigences, nous avons construit chacun des chapitres selon une structure simple.

- **Un cours clair** et détaillé où l'essentiel est donné (définition, remarques, théorèmes, propriétés).
- À la fin de chaque sous-titre du cours, des **exercices d'applications** résolus pour appliquer le cours.
- **Une série d'exercices** est proposée pour chaque cours pour mettre en application les méthodes étudiées.
- **Exercices corrigés** sur chacune des séries : exercices-types qu'il faut savoir résoudre pour aller plus loin.
- **Des devoirs à la maison :** des exercices classiques et de recherches permettant d'aller à la frontière du programme. Ils mettent les élèves dans une situation de chercheur et de rédacteur de solutions.

Ce manuel, « XY-MATHS », sera très utile non seulement aux élèves mais également aux professeurs.



*Orienté en 2003, au lycée de Bambey en classe de seconde scientifique, **Papa Ousmane Thiao** fut un excellent élève. Il obtient le baccalauréat en 2006. Il fait son cursus universitaire à l'Université Alioune Diop de Bambey où il obtient une licence en Maths-Physique-Chimie-Informatique ; il s'inscrit ensuite en formation professionnelle à l'École Supérieure Polytechnique de Dakar et obtient le Master II en Management de la Qualité de la Santé et Sécurité au travail et de l'Environnement. Il est actuellement professeur de mathématiques au lycée de Bambey depuis 2012.*

Illustration de couverture : © 123RF

ISBN : 978-2-343-12743-9

35 € / 10 000 F CFA

@MOMAR: COLLECTION

