

BACCALAUREAT MALIEN, SESSION DE JUIN 2025		
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES		
SERIE : TSE-STI	DUREE : 4 HEURES	COEFFICIENT : 4

—□□ — — — □ — — — —□

Exercice 1 **4 pts**

On considère l'équation $(E) : z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

1. a. Démontre que (E) admet une solution imaginaire pure que tu détermineras.
- b. Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $1 + 2i$, $3i$ et $-2 + 3i$

Soit G le barycentre des points A , B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

- a. Détermine puis écris sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overline{GA}$, $\overline{GB}$ et $\overline{GC}$.
- b. Démontre que les affixes des vecteurs $\overline{GA}$, $\overline{GB}$ et $\overline{GC}$ sont les termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.
- c. Déduis-en qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C . Détermine les éléments caractéristiques de cette similitude.

Exercice 2 **7 pts**

I. (3,5 points)

Diaki et Zeini, deux fameux amateurs de football s'amuse à tirs au but. Diaki est décidément très fort : quand il tire au but face à Zeini, il marque toujours 4 fois sur 5.

En face, Zeini marque 3 fois sur 5 invariablement.

Le jeu se déroule en deux phases : dans chaque phase, les deux joueurs tirent chacun à leur tour.

1. Représente au moyen d'un arbre pondéré les différentes éventualités d'une phase.

Calcule les probabilités des évènements :

—□□ — — — □ — — — —□

—□□ — — — □ — — — —□

- les joueurs sont ex-aequo (ils ont tous deux marqué ou tous deux manqué),
 - Diaki gagne,
 - Zeini gagne.
2. Au bout de deux phases, le perdant éventuel donne 10 Francs au gagnant. En cas d'égalité, aucune somme d'argent n'est échangée.

Quelle est l'espérance de gain de Zeini?

II. (3,5 points)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$.

- Détermine un couple (α_0, β_0) d'entiers relatifs, solution de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$.
- Trouve un couple (u_0, v_0) solution de l'équation $(E) : 23u - 7v = -6$. Résous complètement l'équation (E) .
- Démontre que x est solution de l'équation (S) si et seulement s'il existe un couple (u, v) entiers relatifs vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$. Déduis-en l'ensemble des solutions de (S) .
- Détermine la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

Problème **9 pts**

Dans tout le problème le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; I, J)$, unité 2 cm.

Partie A

- On considère la fonction numérique de courbe représentative (C_f) définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto f(x) = xe^{1-x}$.
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variations.
 - Trace la courbe (C_f) et la tangente à l'origine.

—□□ — — — □ — — — —□

—□□ — — — □ — — — —□

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto g(x) = |x|e^{1-|x|}$.
 - a. Ecris $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
 - b. Déduis-en une méthode pour obtenir la courbe représentative (C_g) de g sur $] -\infty, 1]$ à partir de (C_f) .
 - c. Déduis-en sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le sens de variation de la fonction $h : x \mapsto h(x) = xe^{-1+x}$.
 - d. Etudie la dérivabilité de g en 0 et en 1.
 - e. Déduis-en des questions précédentes le tableau de variations de g .
 - f. Trace (C_g) ainsi que les demi-tangentes à (C_g) aux points d'abscisse 0 et 1.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On considère la famille de fonctions f_n définies par $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$, on note (C_n) la courbe représentative de f_n .

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ puis donne une interprétation graphique.
2. On admet que, pour tout entier naturel non nul n , la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a. Calcule la fonction dérivée f'_n de f_n
 - b. Etudie le signe de $f'_n(x)$ puis dresse le tableau de variations de f_n .
 - c. Résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_n(x) = 0$.
 - d. Déduis-en que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.
4. Etudie la position de (C_n) par rapport à (C_{n+1}) .
5. Trace (C_2) dans le repère $(O; I, J)$.
6. α étant un nombre réel, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^\alpha f_n(x) dx$.
 - a. Calcule $I_n(\alpha)$.
 - b. Calcule la limite de $I_n(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

—□□ — — — □ — — — —□