



COURS PRIAMS



PREPA-BAC TSE/STI-2022-2023



ARITHMETIQUE AU BAC 2022 à 1999

Exercice 1 (BAC 2022)

- Démontre que pour tout entier naturel n , $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.
- Détermine le chiffre des unités du nombre 17^{97} écrit dans le système décimal.
- Détermine les entiers naturels a et b ($a < b$) tel que
$$\begin{cases} a \times b = 1734 \\ a \wedge b = 17 \end{cases}$$
- a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $17x - 13y = 4$.
b) La division euclidienne d'un entier naturel N par 13 donne pour reste 5, le même entier divisé par 17 donne pour reste 1. Quel sera son reste dans la division euclidienne par 221 ?

Exercice 2 (BAC 2021)

A// On désigne par x un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soient les entiers naturels N et N' qui s'écrivent respectivement $100x$ et $x001$ dans le système de base $x + 1$.

- Ecris N et N' dans le système de base x .
- Ecris $N + N'$ dans le système de base $x + 1$.
Dédus-en que $N + N'$ est un multiple de $x + 1$.
- Donne, dans le système de base x , le quotient q de la division euclidienne de $N + N'$ par $x + 1$.
- Montre qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que : $\overline{ab}^x \times \overline{aaa}^x = q$.

B// Détermine tous les couples (α, β) d'entiers naturels non nuls vérifiant : $\text{PGCD}(\alpha, \beta) + \text{PPCM}(\alpha, \beta) = \beta + 9$.

Exercice 3 (BAC 2020)

- Démontre que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. En déduis que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
- Détermine les restes de la division par 7 des puissances de 2.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
b) Démontre que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
c) Étudie le cas où $p = 3n + 2$.

Exercice 4 (BAC 2019)

Une roue d'engrenage (A) a douze dents.



- Elle est en contact avec une roue (B) de 18 dents. Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?
- Elle est maintenant en contact avec une roue dentée (C), ayant plus de 12 dents. Après 10 tours de (A), les deux

roues sont, de nouveau pour la première fois, dans la même position.

Détermine le nombre de dents de la roue (C).

Exercice 5 (BAC 2018)

On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

- a) Donne une solution particulière de l'équation (E).
b) Résous l'équation (E).
- Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :
$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montre que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).
b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
- a) Résous l'équation $8x + 5y = 100$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.
b) Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 6 (BAC 2016)

I// On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calcule :

- La distance comprise entre deux arbres.
- Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

II// On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$ où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

- Vérifie que le couple $(-7; -3)$ est une solution de (E).
- Résous alors l'équation (E).
- En déduis le couple d'entiers relatifs (p, q) solution de (E) tel que : $0 \leq p \leq 25$.

Exercice 7 (BAC 2015)

I// α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N .

- Prouve que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
- En déduis les valeurs de N .

II// Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$,

$b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$. Soit f la transformation du plan

dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f .
- Détermine l'affixe du point B' image du point B par f .

Vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.

- Soit $M(x; y)$ où x et y sont des entiers relatifs et M' son

image par f . Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.

- 4) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $x + 3y = 2$ et en déduis l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-5; 5]$.

Exercice 8 (BAC 2014-A)

I//

- 1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 11x + 8y = 79$.
a) Montre que si $(x; y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$.
b) Résous alors l'équation (E) .

- 2) Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48000F. Le prix d'une pièce du 1^{er} lot est 4800F; le prix d'une pièce du 2^{ème} lot est 3600F et le prix d'une pièce du 3^{ème} lot est 400F.

Détermine le nombre de pièces de chaque lot.

II/ Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1^{er} chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15;
- Le troisième est la différence des deux premiers (le 1^{er} moins le 2^{ème});
- Le 1^{er} chiffre est le produit du troisième par le quatrième;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ?

Exercice 9 (BAC 2014-B)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) :

$$\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$$

- 1) Détermine un couple $(\alpha; \beta)$ d'entiers relatifs solution de l'équation $23\alpha + 7\beta = 1$.

- 2) En déduis un couple $(u_0; v_0)$ solution de l'équation $(E) : 23u - 7v = -6$. Résous complètement l'équation (E) .

- 3) Démontre que x est solution de l'équation (S) si et seulement si il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs

$$\text{vérifiant : } \begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$$

En déduis l'ensemble des solutions de (S) .

- 4) Détermine la plus petite solution (entier naturel) de (S) divisible par 16.

Exercice 10 (BAC 2013)

- 1) Résous dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 631$.

- 2) a) Trouve le reste de la division euclidienne de 111 par 7 et de 10^n par 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n .

- b) Soit l'entier naturel

$$N = 999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111.$$

- Montre que N peut s'écrire en fonction de 111.

- Quel est le reste de la division euclidienne de par ?

Exercice 11 (BAC 2012)

Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5 F l'unité.

Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

- 1) Détermine les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.
- 2) Détermine le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduis le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.
- 3) a) Décompose m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.
b) En déduis le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 , puis le PGCD($m_1; m_2$).
- 4) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1u + m_2v = 5$ où u et v sont deux entiers relatifs.

Exercice 12 (BAC 2011)

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on donne le point $A(12; 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et par C un point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

- 1) Démontre que le couple (x, y) est solution de l'équation $(E) : 2x + 3y = 78$.
- 2) On se propose de trouver tous les couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des entiers relatifs.
a) Montre que l'on est ramené à l'équation (E) , avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
b) A partir de la définition de B et de C, trouve une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E) .
c) Démontre qu'un couple (x, y) est solution de (E) si et seulement si $(x; y) = (12 + 3k; 18 - 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
d) Combien y a-t-il de couples de points (B ; C) ayant pour coordonnées des entiers relatifs tels que :
 $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$?

Exercice 13 (BAC 2009)

- 1) Démontre par récurrence les propriétés suivantes :

$$a) (n+1)! \geq \sum_{i=1}^n i! \quad b) \sum_{i=1}^n i \times i! = (n+1)! - 1.$$

NB : $n!$ désigne factorielle n .

- 2) Un ouvrier dispose d'une plaque de métal rectangulaire de 110 cm de longueur sur 88 cm de largeur. Il veut découper dans cette plaque des carrés tous identiques, les plus grands possible, de façon à ne pas avoir de perte.
a) Détermine la longueur du côté du carré qui convient.
b) Détermine le nombre de carrés qu'il pourra découper dans la plaque de métal.

Exercice 13 (BAC 2008)

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $1x416$ dans le système de numération de base sept.

- Détermine x pour que :
 - A soit divisible par six.
 - A soit divisible par cinq.
 - En déduis qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.
- On donne à x la valeur zéro, détermine l'écriture décimale de A . Dans ce cas, quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois ?

Exercice 14 (BAC 2007)

On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+a}{2}$ avec a un entier naturel non nul.

- Démontrer que si n est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés.
- On pose $n = 3$; $4n + 1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?
Etudie la réciproque de la propriété 1).

Exercice 15 (BAC 2006)

- Décompose les nombres 450 et 320 en produit de facteurs premiers.
- Quel est le PGCD de 450 et de 320 ?
- Une pièce rectangulaire a pour dimension 4,5 m et 3,2 m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

Exercice 16 (BAC 2005)

- Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{3n} - 3^{3n}$ est divisible par 49.
- En déduis que si l'entier n n'est pas multiple de 3, alors $5^{2n} + 15^n + 3^{2n}$ est divisible par 49.

Exercice 17 (BAC 2004)

- I//
- Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation d'inconnue $(p, q) : 11p - 7q = 1$.
 - La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4 ; le même entier divisé par 11 donne pour reste 3.
Quel sera son reste dans la division par 77 ?
 - Détermine les valeurs de l'entier naturel n inférieures à 200.

II// Soit (U_n) une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.

- Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$, calcule U_2 .
- On désigne par m et d respectivement le PPCM et PGCD de U_1 et U_3 , sachant que $\frac{m}{d} = 12$.
Détermine U_1 et U_3 .
- En déduis l'expression de U_n en fonction de n .
Calcule $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n .
Détermine n pour que S_n soit égale à 525.

Exercice 18 (BAC 2003)

- Détermine l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(\alpha ; \beta)$ dans chacun des cas suivants :
 - $17\alpha - 19\beta = 2$.
 - $17\alpha - 19\beta = -2$.
- Détermine l'ensemble des entiers n tels que :
 - $n \equiv 0[17]$ et $n \equiv -2[19]$.
 - $n \equiv 0[19]$ et $n \equiv -2[17]$.
- En déduis l'ensemble des entiers n tels que $n^2 + 2n$ soit divisible par 323.

Exercice 19 (BAC 2002)

Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesures respectivement 30 m et 21 m, les deux autres côtés mesurent 18 m et 12 m. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

- Quelle est la distance entre deux poteau ?
- Détermine le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

Exercice 20 (BAC 2001)

- Le système de numération est un système décimal.
 - Détermine l'entier naturel : $N = \text{PGCD}(17787; 689; 297)$.
 - Résoudre l'équation : $\{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 : 13x - 84y = 7\}$.
- Détermine tous les couples $(a; b)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que : $\begin{cases} a \times b = 0 \\ a - b = 5 \end{cases}$.
 - Résous dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 3x - 4 = 0$.
 - Démontre que, quel que soit l'entier naturel n on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$.

Exercice 21 (BAC 1999)

- Détermine, suivant les valeurs de n , le reste de la division par 7 de l'entier 3^n . En déduis le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.
 - Donne le système de numération décimale, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$. Détermine x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.
- Détermine le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525.
 - Détermine l'ensemble des entiers x tels que $34x \equiv 2[15]$.
 - Résous l'équation : $(x; y) \in \mathbb{Z}^2 ; 21590x + 9525y = 1270$
 - Quel est le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{1980} écrit dans le système décimal ?

BAC $\equiv$ BOSSER[COURAGE]

$\Rightarrow$ BAC = Bosser + kCourage