

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points M_n de coordonnées (x_n, y_n, z_n) définis par $M_0(1, 1, 3)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer A^2 et montrer par récurrence que $\forall n \geq 1, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$ 0,5pt
- b) En déduire que $x_n = y_n = 3^n$ et que $z_n = 3 \times 5^n$ pour tout entier n . 0,5pt
2. On considère la droite (D) passant par le point $B(0, 1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3, 5, 4)$. Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble (E) de points $M(x, y, z)$ de coordonnées entières de la droite (D) vérifiant la condition $(*) : z \equiv 0 [15]$
- a) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) . 0,5pt
- b) Soit $M(x, y, z)$ un point de coordonnées entières de la droite (D) .
Montrer que M vérifie la condition $(*)$ si et seulement s'ils existent deux entiers t et k tels que $z = 2 + 4t$ et $15k - 4t = 2$ 0,5pt
3. Vérifier que le couple $(-2; -8)$ est solution de l'équation $15x - 4y = 2$ puis la résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, et en déduire l'ensemble (E) . 1 pt

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. 1,25 pt
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$, où f' est la dérivée de f , puis dresser le tableau de variation de f . 0,75 pt
3. Montrer que (C) admet un point d'inflexion A à préciser. Construire (C) . 1 pt
4. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx$
- a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée. 0,5 pt
- b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{e}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. 0,5 pt

Exercice 3 (5 points)

$ABCD$ un carré direct de centre O . On construit les triangles AEB , BFC , CGD et DHA rectangles isocèles directs respectivement en E , F , G et H .

1. Faire une figure soignée correspondant aux données ci-dessus. 0,75 pt
2. Montrer qu'il existe une unique symétrie glissante f transformant B en D et E en O . Caractériser f . 0,75 pt

- | | |
|--|---------|
| 3. Montrer qu'il existe une unique rotation R transformant B en C et E en G . Caractériser R . | 0,75 pt |
| 4. Montrer qu'il existe une unique homothétie h qui transforme C en B et G en D . Déterminer le rapport de h et placer avec justification son centre I . | 0,75 pt |
| 5. On considère la similitude directe $S = h \circ R$. Déterminer $S(B)$ et caractériser S puis déterminer $S(A)$. | 1,25 pt |
| 6. On note $g = R \circ S$. Montrer que g est une homothétie. Préciser son rapport et écrire son centre J comme barycentre des points B et C . | 0,75 pt |

Exercice 4 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, On considère, dans l'ensemble de nombres complexes, l'équation d'inconnue z : $E_m : z^2 - 2(m+i)z + (m+i)^2 + 4e^{i\theta} = 0$ et soient P et Q les points d'affixes z_1 et z_2 solutions de cette équation.

- | | |
|--|---------|
| a) Montrer que le discriminant de l'équation E_m est $\Delta = (4ie^{i\theta})^2$ puis la résoudre. | 1pt |
| b) Montrer que la distance PQ est égale à 4 et que le milieu I du segment $[PQ]$ appartient à une droite fixe, à préciser. | 0,75 pt |
| 2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : | |
| $z_A = 3+i, z_B = -1+i, z_C = 1-\frac{3}{2}i$ et $z_D = 1+\frac{5}{2}i$ et soit E l'ellipse dont A et C sont deux sommets et D un foyer. | |
| a) Reconnaître l'axe focale de E et en déduire que B est un sommet de E . | 0,75 pt |
| b) Déterminer les affixes du centre, du 2 ^e foyer et du 4 ^e sommet de E . | 0,75 pt |
| c) Ecrire une équation de E dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, puis construire E . | 0,75 pt |

Exercice 5 (4 points)

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- | | |
|--|--------|
| 1. Calculer et interpréter les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. | 1pt |
| 2.a) Soit x un réel strictement positif, et $t \in]0, x]$, montrer que : | |
| $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ puis déduire que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1) \leq x$. | 0,5 pt |
| b) Calculer $g'(x)$ et déduire de la question 2.a) que $g'(x)$ est négative. | 1pt |
| 3. On définit les deux suites (P_n) et (u_n) pour tout $n \geq 1$ par : | |
| $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $u_n = \ln(P_n)$. | |
| a) Montrer que $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right)$ et que (u_n) est croissante. | 0,5pt |
| b) Déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. | 0,5pt |
| c) Vérifier que $\forall k > 1, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et montrer que $e \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n \leq e^2$. | 0,5pt |

Fin.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(1+x)$ on note (T) la courbe représentative dans un repère orthonormé (O, x, y)

1) Soit α Calculer et interpréter les limites en 0 et en $+\infty$ de $g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$$

Alors g est continue à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

Leven, l'indétermination

$$g(x) = \ln(1+x)$$

on pose: $1+x = t$

$$x = t - 1 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ } t \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t(1 - \frac{1}{t})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{t} \right) = \frac{0}{1-0} = 0$$

Alors la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale en $+\infty$

2a) Soit x un réel strictement positif et $t \in [0, x]$

Soit à montrer que

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$t \in [0, x] \Rightarrow 0 \leq t \leq x$$

$$1 \leq 1+t \leq 1+x$$

$$\left\{ \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \right\} \text{ Cqfd}$$

Deduction: en que

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\frac{1}{1+x} \int_0^x 1 dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\frac{1}{1+x} \int_0^x 1 dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\frac{1}{1+x} [t]_0^x \leq [\ln(1+t)]_0^x \leq [t]_0^x$$

$$\frac{1}{1+x} [x-0] \leq [\ln(1+x)] \leq [x-0]$$

$$\left\{ \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \right\}$$

b) Calculons $g'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \mid g'(x) = \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]'$$

$$g'(x) = \frac{(\ln(1+x))'(x) - (x)'(\ln(1+x))}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x)$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

Deduis-mo en de la question 2a) que $g'(x)$ est négative

$$2a) \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$$

$$\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0$$

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) \leq 0$$

$$\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \leq 0$$

$$\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0$$

$$g'(x) \leq 0$$

③ On définit les deux suites (P_n) et (U_n) Pour tout $n \geq 1$ par :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{et } U_n = \ln(P_n)$$

a) Soit à montrer que $n \geq 1$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right)$$

et que U_n est croissante.

$$U_n = \ln(P_n) \text{ et } U_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$$

$$U_n = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{c.q.p.d.}$$

$$\text{on a : } U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\text{et } U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} g\left(\frac{1}{(n+1)}\right)$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x)$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

Deduis-moi en de la question 2a) que $g'(x)$ est négative

$$2a) \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$$

$$\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0$$

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right) \leq 0$$

$$\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \leq 0$$

$$\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \leq 0$$

$$g'(x) \leq 0$$

③ On définit les deux suites (P_n) et (U_n) Pour tout $n \geq 1$ par :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{et } U_n = \ln(P_n)$$

a) Soit à montrer que $n \geq 1$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right)$$

et que U_n est croissante.

$$U_n = \ln(P_n) \text{ et } U_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$$

$$U_n = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1}} + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{c.q.p.d.}$$

$$\text{on a : } U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\text{et } U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} g\left(\frac{1}{(n+1)}\right)$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{\ln(1 + \frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)} \times \ln(1 + \frac{1}{n+1})$$

$$n + 1 + \frac{1}{n+1} \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \geq 0$$

$$\frac{1}{n+1} \times \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \geq 0$$

Donc $\{u_{n+1} - u_n \geq 0\}$ car (u_n) est croissante.

b) De deux m - en que: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ car: $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k-1}$

$$\text{car a: } \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$\text{car b) a: } x = \frac{1}{k} \quad \frac{1/k}{1 + 1/k} \leq \ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k} \ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \times \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} g\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

c) Soit à vérifier que:

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$$

et à montrer que $e = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

car a: $k \geq k-1$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k-1}$$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{k-k+1}{k(k-1)}$$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} - \frac{(k-1)}{k(k-1)}$$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\text{car a: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$\text{an a: } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{an a: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq U_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$e^{1 - \frac{1}{n+1}} \leq e^{U_n} \leq e^{2 - \frac{1}{n}}$$

$$\text{an } P_n = \ln P_n = P_n = e^{U_n}$$

$$e^{1 - \frac{1}{n+1}} \leq P_n \leq e^{2 - \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{1 - \frac{1}{n+1}} = e \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2 - \frac{1}{n}} = e^2$$

$$e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \leq e^2$$

Altha ch' Drane

