

Exercice 1 :(5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la suite de points M_n du plan d'affixes respectives non nulles z_n définies par $z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

- 1) Ecris $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ sous forme exponentielle complexe.
- 2) Calcule z_1 , z_2 et z_3 et vérifie que z_3 est réel. Place les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3 .
- 3) a) pour tout entier naturel n , calcule le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$.
b) En déduis que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $M_nM_{n+1} = \sqrt{3}OM_{n+1}$.
- 4) a) On pose $r_n = |z_n|$. Montre que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
b) Ecris r_n en fonction de n . En déduis la longueur M_nM_{n+1} en fonction de n .
- 5) On considère la longueur ℓ_n de la ligne brisée formée par les points $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$.
On a alors $\ell_n = \sum_{k=1}^n M_kM_{k+1}$
a) Calcule ℓ_n en fonction de n .
b) Détermine la limite de ℓ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 :(5 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \cdot 10^n - 1, \quad b_n = 2 \cdot 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2 \cdot 10^n + 1.$$

- 1) a) Calcule $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ et c_3 .
b) Montre que a_n et c_n sont divisibles par 3.
c) Montre que b_3 est premier.
d) Montre que pour tout entier naturel non nul n , $b_n \times c_n = a_{2n}$.
En déduis la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6 .
e) Montre que $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(b_n, 2)$. En déduis que b_n et c_n sont premiers entre eux.
- 2) On considère l'équation : (1) $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .
a) Justifie que (1) possède au moins une solution.
b) Applique l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduis une solution particulière de (1).
c) Résous l'équation (1).

Problème :(10 points)**Partie A**

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E) : $y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$.

- 1) Détermine la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
- 2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par : $f(x) = e^{2x}g(x)$.
a) Calcule $g(0)$.
b) Calcule $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
c) Montre que f est solution de (E) si, et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
d) En déduis l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$.

1) On pose : $h(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

- Etudie la limite de h en $+\infty$.
 - Etudie le sens de variation de h .
 - En déduis le signe de $h(x)$ pour tout réel x .
- 2) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
- 3) Etudie la limite de f en $+\infty$.

Montre que $f(x) = e^{2x}[-2x + \ln(1 + e^{2x})]$. En déduis la limite de f en $-\infty$.

4) Dresse le tableau de variations de f .

5) Représente graphiquement la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en prenant 5 cm pour unité.

Partie C

1) En remarquant que $\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$; détermine sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-2x}}$.

2) Calcule, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en unité d'aire) de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative (C) de la fonction f et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Partie D

On définit la suite (U_n) pour tout entier naturel n par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

- Montre que pour tout élément x de $[0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0; 1]$.
En déduis que pour tout $n \geq 0$, $U_n \in [0; 1]$.
- Montre par récurrence que la suite (U_n) est croissante. En déduis qu'elle converge.
- Soit α la limite de la suite (U_n) . Montre que $f(\alpha) = \alpha$ et que $\alpha \in [0; 1]$.