

**PREPA
PREMIER
TRIMESTRE
TSE-STI
2024-2025**

Séries : TSE-STI Coef : 5 Durée : 4h

EXERCICE 1 : (5 points)Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) . Unité : 2 cm.On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante (E) :

$$iz^3 - (-1 + 5i)z^2 + (-6 + 10i)z + 16 - 8i = 0.$$

- 1) Demontre que (E) admet une unique solution imaginaire pure z_0 .
- 2) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que :
 $\forall z \in \mathbb{C}, iz^3 - (-1 + 5i)z^2 + (-6 + 10i)z + 16 - 8i = (z - 2i)(az^2 + bz + c).$
- 3) On pose $Q(z) = iz^2 - (1 + 5i)z + 4 + 8i$.
 - a) Détermine les racines carrées du nombre complexe $U = 8 - 6i$.
 - b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$.
- 4) En déduis les solutions de l'équation (E) .
- 5) Soit A, B et C les points d'afixes respectives : $z_A = 3 + i, z_B = 2i$ et $z_C = 2 - 2i$.
 - a) Place les points A, B et C dans le plan Complexe.
 - b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
- 6) Détermine l'afixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 7) a) Vérifie que I est le milieu du segment $[BC]$.
b) Démontre que l'afixe du point E , symétrique de A par rapport au point I est
 $z_E = -1 - i$.
- 8) Démontre que les points A, B, C et E appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 : (5 points)

I//

- 1) Détermine le reste de la division euclidienne 2019^{2023} par 7.
- 2) Démontre que pour tout entier naturel $n, 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.
- 3) Résous dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : x^2 + 3x - 4 = 0$.
- 4) On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.
Résous le système :
$$\begin{cases} PGCD(a; b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$$

II//

Le même entier naturel N s'écrit $\overline{abcca}$ dans la base 5 et $\overline{bbab}$ dans la base 8.

- 1) Montre que $309a + 15c = 226b$.
- 2) En déduis que $b \equiv 0[3]$ puis en déduis la valeur de b .
- 3) Montre que $3a \equiv 1[5]$ puis en déduis les valeurs de a et c .
- 4) Ecris N dans le système décimal.

PROBLEME :..... (10 points)

Partie A :

Soient les points **A** et **B** d'affixes respectives : $2i$ et i .

On désigne par **f** l'application qui à tout point **M** de $\mathcal{P}$ d'affixe z et distinct du point **B**, associe le point **M'** d'affixe z' tel que : $z' = \frac{iz+2}{z-i}$.

1) a) Développe $(z + 1 - i)(z - 1 - i)$.

b) Cherche les points **M** vérifiant $f(M) = M$ et exprime leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2) a) Montre que pour tout $z \neq i$, $|z'| = \frac{AM}{BM}$ et que, pour tout $z \neq \{i; 2i\}$,

$$\arg(z') = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

b) Détermine et construis l'ensemble (**E**) des points **M** tels que $|z'| = 1$.

c) Détermine et construis l'ensemble (**F**) des points **M** tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

3) a) Démontre que pour tout nombre complexe $z \neq i$, on a : $z' - i = \frac{1}{z-i}$ et en déduis que :
 $|z' - i| \times |z - i| = 1$.

b) Soit **M** un point du cercle (**C**) de centre **B** et de rayon $\frac{1}{2}$.

Prouve que le point **M'** appartient à un cercle (**C'**) de centre **B** et de rayon à déterminer.

Partie B :

I// Un collectionneur possède 432 timbres français et 384 timbres étrangers.

Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est -à-dire comportant le même nombre de timbres français et étrangers.

1) Quel nombre maximal de lots peut-il réaliser ?

2) Quel est le nombre total de timbres par lot ?

II/ Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 7[21] \\ x \equiv 11[13] \end{cases}$

1) Justifie que $x_0 = 154$ est une solution particulière de (S).

2) Resous alors le système (S).

3) Une marchandise est emboîtée dans des cartons à 21 pièces, le dernier carton ne contient que 7 pièces, et si elle est emboîtée dans des cartons de 13 pièces, le dernier carton contiendra exactement 11 pièces.

Détermine tous les nombres possibles de pièce de cette marchandise sachant qu'il est inférieur à 1000 pièces.

NB : Les parties A et B sont indépendantes.

Séries : TSE-STI Coef : 5 Durée : 4h

EXERCICE 1 : (5 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Montre que $(1 + i)^6 = -8i$.
- 2) On considère l'équation $(E) : z^2 = -8i$.
 - a) Dédus de 1) une solution de l'équation (E) .
 - b) L'équation (E) possède une autre solution, écris cette solution sous forme algébrique.
- 3) Dédus également de 1) une solution de l'équation $(E') : z^3 = -8i$.
- 4) On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
 - a) Détermine l'affixe b du point B , image de A par r , ainsi que l'affixe c du point C , image de B par r .
 - b) Montre que b et c sont solutions de (E') .
- 5) a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 2 cm).
Représente les points A, B et C .
 - b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?
 - c) Détermine le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 2 : (5 points)

- 1) Démontre par récurrence que :
 - a) $\forall n \geq 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
 - b) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.
- 2) Détermine l'entier naturel qui, divisé par 23, a pour reste 1 et qui, divisé par 17, a le même quotient et pour reste 13.
- 3) a) Ecris dans le système binaire le nombre 127.
 - b) Ecris dans le système décimal le nombre $\overline{432}^6$ et $\overline{FCFA}^{16}$.
- 4) Sachant que $13 = 12 + 1$, écris 13^8 dans le système de base 12.
- 5) Ecris le nombre $\overline{100100100110101}^2$ dans le système octal sans passer par le système décimal.

PROBLEME :..... (10 points)

Partie A :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm.
Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2 , associe $Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$.

- 1) Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprime la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y . On vérifiera que $\mathcal{R}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$.
- 2) En déduis la nature de :
 - a) l'ensemble E des points M d'affixe z , tels que Z soit un réel;
 - b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
 - c) l'ensemble H des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 1$.
- 3) Représente ces trois ensembles.
- 4) Calcule $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et en déduis que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

Partie B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, (unité graphique : 2 cm).
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : M_0 a pour d'affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel , $M_{n+1} = f(M_n)$.
On appelle z_n l'affixe de M_n .

- 1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f , place les points $M_0; M_1$ et M_2 .
- 2) Montre que pour tout entier naturel n , on a l'égalité $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$.
(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
- 3) Soient n et p deux entiers naturels tels n est supérieur ou égal à p . Montre que les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si, $(n - p)$ est un multiple de 12.
- 4) a) On considère l'équation $(E) : 12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
Après avoir vérifié que le couple $(4; 9)$ est solution, résous l'équation (E) .
b) En déduis l'ensemble des entiers naturels n tels que, M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

NB : Les parties A et B sont indépendantes.

COURS PRIAMS

MATHEMATIQUES

Séries : TSE-STI Coef : 5 Durée : 4h

EXERCICE 1 : (5 points)

Le plan complexe est un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-i, -2i$ et $1 - i$.

A tout point M d'affixe $z = x + iy$, on associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ défini par : $z' = \frac{z^2}{z+i}$.

- 1) a) Détermine les affixes des points B' et C' associés respectivement aux points B et C .
b) Montre les points A, B' et C' sont alignés.
c) Détermine la nature du triangle ACC' .
- 2) a) Exprime x' et y' en fonction de x et y .
b) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que z' soit un imaginaire pur.
- 3) a) Que représente géométriquement $|z + 1|$?
b) Trouve une relation simple liant les longueurs OM', OM et AM .
c) Détermine et construis l'ensemble (F) des points M du plan tel que les points M et M' soient sur le même cercle de centre O .

EXERCICE 2 : (5 points)

I//

- 1) Détermine les entiers x et y tels que $N = \overline{3x92y}$ soit divisible par 3 et 5.
- 2) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 4^n par 7.
- 3) Démontre que pour tout entier naturel n , $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.
- 4) Détermine le chiffre des unités du nombre 17^{97} écrit dans le système décimal.
- 5) On donne $K = \overline{2103211}^4$.
Détermine dans le système décimal le reste de la division de K par 7.

- 6) Résous dans $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$: $x^2 - 27x + 15 = 0$.

II//

- 1) On pose $d = \text{PGCD}(a; b)$ et $m = \text{PPCM}(a; b)$.

Détermine les couples $(a; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que : $\begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 < d < 15 \end{cases}$.

- 2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le nombre $\frac{2n+18}{n+3}$ est-il irréductible ?
- 3) Montre que, pour tout entier relatif n , les entiers $7n + 18$ et $10n^2 + 51n + 65$ sont Premiers entre eux.

PROBLEME :..... (10 points)

Partie A :

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$.

- 1) a) Démontre qu'il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
b) Vérifie que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).
- 2) a) Soit n_0 une solution de (S), vérifie que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$.
b) Démontre que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.
- 3) a) Trouve un couple $(u ; v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calcule la valeur de N correspondante.
b) Détermine l'ensemble des solutions de (S). (on pourra utiliser la question 2) b)).
- 4) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Partie B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
(unité graphique 1cm).

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.
- 2) On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes :
 $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.
a) Ecris a et b sous forme exponentielle.
b) Calcule les distances OA, OB, AB . En déduis la nature du triangle OAB .
- 3) On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Détermine l'affixe du point D .
- 4) On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O; -1), (D; 1), (B; 1)$.
a) Montre que le point G a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
b) Place les points A, B, C, D et G sur une figure.
c) Montre que les points C, D et G sont alignés.
d) Démontre que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

NB : Les parties A et B sont indépendantes.

Séries : TSE-STI Coef : 5 Durée : 4h

EXERCICE 1 : (4 points)1) On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.a) Mettre z sous forme trigonométrique.b) Calcule z^2 et z^3 .c) En déduis z^{1992} et z^{1994} .2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 8 = 0$.En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(iz - 1)^3 + 8 = 0$.**EXERCICE 2** : (6 points)

I//

Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses œuvres sur des panneaux contenant chacun le même nombre de photos de paysage et de photos portrait.

Il dispose de 160 photos de paysage et 224 portraits.

1) Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes les photos ?

2) Combien chaque panneau contient-il de paysages et de portraits ?

II//

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n .

Par exemple $\mathcal{D}_8 \cap \mathbb{N} = \{1; 2; 4; 8\}$ donc $S(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

1) Calcule $S(n)$ pour les valeurs suivantes : 3; 6; 11 et 18.2) a) Pour p entier naturel premier, prouve que $S(p) = p + 1$.b) Démontre par récurrence sur α que si p est un entier naturel premier alors :

$$S(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}; \alpha \in \mathbb{N}^*. \text{ On remarquera que : } S(p^{\alpha+1}) = S(p^\alpha) + p^{\alpha+1}.$$

3) En déduis : $S(2^7)$; $S(243)$ et $S(625)$.**PROBLEME** : (10 points)**Partie A :**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 1$.b) Vérifie que $2, 1 < \alpha < 2, 2$.4) Démontre que :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 1 cm).

- 1) a) Détermine le domaine de définition de f .
b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) a) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Détermine les nombres réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$.
b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
c) Détermine les asymptotes verticales à (C).
d) Détermine les coordonnées du point d'intersection A entre (C) et (D) puis étudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).
- 4) Trace (C) et (D). ($\alpha = 2, 2$).

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; -1[$.

- 1) Démontre que h est une bijection de $] -\infty; -1[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
- 2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') sa représentation graphique.
Dresse le tableau de variation de h^{-1} .
- 3) Trace (C') dans le même repère que (C).

COURS PRIAMS

MATHEMATIQUES

Séries : TSE-STI Coef : 5 Durée : 4h

EXERCICE 1 : (5 points)

On se propose de résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C} : z^3 - 3iz^2 - 3z + 8 + i = 0$.

1) Montre que Z est solution de (E) si, et seulement si $t = Z - i$ est solution de l'équation $(E') : t^3 + 8 = 0$.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') .

On déterminera le module et un argument de chacune des solutions de (E') .

3) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) .

4) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{u}; \vec{v})$. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}, z_B = -2$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

a) Place les points A, B et C dans le repère.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie.

5) Soit S la similitude plane directe définie telle que $S(A) = C$ et $S(C) = B$.

a) Détermine l'expression complexe de S .

b) Détermine le rapport k , une mesure θ de l'angle de S et le centre ω de S .

EXERCICE 2 : (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_1) : 11x + 8y = 79$.

a) Montre que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3[11]$.

b) Résous alors (E_1) .

2) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_2) : 3y + 11z = 372$.

a) Montre que si (y, z) est la solution de (E_2) alors $z \equiv 0[3]$.

b) Résous alors l'équation (E_2) .

3) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_3) : 3x - 8z = -249$.

4) Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de 48000 FCFA.

Le prix d'une pièce du premier lot est de 4800 FCFA.

Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 3600 FCFA.

Le prix d'une pièce du troisième lot est de 400 FCFA.

Détermine le nombre de pièces de chaque lot.

PROBLEME :..... (10 points)

On considère la fonction numérique f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité 1 cm.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

2) a) Détermine $g(]-\infty; 0])$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ pour tout $x \leq 0$.

Partie B

1) a) Justifie que f est définie sur $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

b) Etudie la continuité et dérivabilité de f en 0.

c) Interprète géométriquement les résultats de l'étude de dérivabilité.

2) a) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .

b) Démontre que pour tout $x \leq 0$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

c) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

5) a) Démontre que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives α et β et que $0 < \alpha < 0,5$; $5 < \beta < 5,5$.

b) En déduis le signe de f pour tout $x \in D_f$.

6) a) Etudie les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

b) Trace $(\mathcal{C})$.

Partie C

Soit l'application $h :]-1; 1[\rightarrow f(]-1; 1[)$

$$x \mapsto h(x) = f(x)$$

1) a) Détermine $J = f(]-1; 1[)$.

b) Démontre que h^{-1} est une bijection réciproque de J vers $]-1; 1[$.

c) Justifie que h^{-1} est dérivable sur $J - \{1\}$.

d) Justifie que le point $A\left(\frac{12}{7}; -\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1} .

2) Trace $(\mathcal{C}')$ dans le même repère.

COURS PRIAMS

MATHEMATIQUES

Séries : TSE-STI Coef : 5 Durée : 4h

EXERCICE 1 : (5 points)

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère ortho normal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f de $\mathcal{P}$ privé du point A dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i \left(\frac{z-3i}{z+1} \right)$ (1).

1) Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$.

Montre qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.

2) Détermine la nature du triangle ABC .

3) A l'aide de l'égalité (1), montre que, pour tout M distinct de A et B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \text{ (modulo } 2\pi).$$

4) En déduis et construis les ensembles de points suivants :

a) L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit situé sur le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

b) L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

1) Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4 .

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2) Montre que, pour tout entier naturel $n, u_{n+2} \equiv u_n[4]$.

En déduis que pour tout entier naturel $k, u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) a) Montre par récurrence que, pour tout entier naturel $n, 2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduis que, pour tout entier naturel $n, 2u_n \equiv 28[100]$.

4) Détermine les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n .

5) Montre que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant.

Précise sa valeur.

PROBLEME : (10 points)**Partie A**

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1) a) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α .

Vérifie que $1,4 < \alpha < 1,5$.

2) Détermine le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{2-x}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe

représentative dans un repère art orthonormé unité 2cm.

1) a) Détermine le domaine de $\mathcal{D}$ de f .

b) Calcule les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

2) a) Etudie la continuité de f en 0.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

b) Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$.

En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux à 10^{-1} près.

4) a) Trouve les réels a, b, c et d tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1} + \frac{d}{2x+1}$.

b) En déduis que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$.

c) Précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .

5) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.

6) Trace (Δ) et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \alpha \right]$.

1) a) Démontre que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de départ et d'arrivée.

b) Dresse le tableau de variation de h^{-1} .

2) Trace $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.