

sujet n°1

Séries : TSE-STI Coef : 4 Durée : 4h

sujet n°1

Exercice 1 :.....(5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, (unité graphique : 2 cm).

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = e^{i\frac{5\pi}{6}} z$ et on définit une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : M_0 a pour d'affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n .

- 1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f , place les points $M_0; M_1$ et M_2 .
- 2) Montre que pour tout entier naturel n , on a l'égalité $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$.
(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
- 3) Soient n et p deux entiers naturels tels n est supérieur ou égal à p .
Montre que les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si, $(n - p)$ est un multiple de 12.
- 4) a) On considère l'équation $(E) : 12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
Après avoir vérifié que le couple $(4; 9)$ est solution, résous l'équation (E) .
b) En déduis l'ensemble des entiers naturels n tels que, M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 2 :.....(5 points)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$.

a) Calcule I_0 puis à l'aide d'un changement de variable, démontre que $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

b) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx$.

c) En utilisant une intégration par parties sur $I_n, n \in \mathbb{N}^*$, montre que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$.

d) Calcule alors I_2 .

2) On considère la suite (J_n) définie pour tout entier naturel n non nul par, $J_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

a) Détermine les réels a et b tels que la fonction $f : t \mapsto (at + b)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0; 1]$. En déduis la valeur de J_1 .

b) Montre à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $J_{n+1} = (n+1)J_n - 1$.

c) Montre que pour tout entier naturel n non nul, $J_n \geq 0$.

d) Montre que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$.

e) En déduis que pour tout n non nul, $J_n \leq \frac{e}{n+1}$.

f) Détermine la limite de la suite (J_n) .

Problème :.....(10 points)

Partie A :

Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.

1) Calcule les limites de φ en 0 et en $+\infty$.

2) Etudie les variations de φ et dresse son tableau de variation.

3) a) Montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique telle que $0,27 < \beta < 0,28$.

b) Déduis le signe $\varphi(x)$ de suivant les valeurs de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) la représentation graphique de dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2 cm)

- 1) a) Etudie la continuité de f en 0.
b) Etudie la dérivabilité de f en 0.
- 2) Calcule la limite de f en $+\infty$ et étudie la branche infinie de (C) en $+\infty$.
- 3) a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$.
b) Déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
- 4) Montre que $f(\beta) = -\beta$.
- 5) Trace (C).

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

- 1) Montre que h réalise une bijection de I vers l'intervalle J à préciser.
- 2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') sa représentation graphique.
a) Dresse le tableau de variation de h^{-1} .
b) Calcule $h(2)$ et $(h^{-1})' \left(\frac{2 \ln 2}{3} \right)$.
- 3) Construis (C') dans le repère (O, I, J).

Partie D

- 1) A l'aide d'une intégration par partie, calcule l'intégrale $I = \int_1^e x \ln x \, dx$.
- 2) Montre que pour tout $x \in [1; e]$, $\frac{x \ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{x \ln x}{2}$.
- 3) En déduis que $\frac{e^2+1}{4(e+1)} \leq \int_1^e f(x) \, dx \leq \frac{e^2+1}{8}$.

Partie E

- 1) a) Démontre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[3; 4]$.
b) Démontre que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.
- 2) Soit g la fonction définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.
a) Etudie les variations de g pour x élément de $[3; 4]$ et démontre que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$.
b) Démontre que : $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- 3) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$.
a) Démontre que pour tout entier positif ou nul n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
Déduis-en que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
b) Démontre que la suite (u_n) est convergente et calcule sa limite.
c) Trouve les valeurs de n , pour lesquelles u_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie F

- 1) Soit n un entier naturel non nul. Démontre que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n et une seule.
Place α_1 et α_2 dans le même repère que précédemment.
- 2) a) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n , on a $\alpha_n \geq e^n$.
b) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n , $f(\alpha_n) = n$ est équivalent à $\ln \left(\frac{\alpha_n}{e^n} \right) = \frac{n}{\alpha_n}$.
c) Déduis des questions 2-a) et 2-b) que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{e^n} \right)$ est convergente et calcule sa limite.