

sujet n° 1

Séries : TSE-STI Coef: 4 Durée : 4h

sujet n° 1

Exercice 1 :(4 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = (x - 1)e^x$.

- 1) Détermine les réels a et b pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de (E).
- 2) Montre que v est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $u - v$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
- 3) Détermine les solutions de (E'). En déduis toutes les solutions de (E).
- 4) Trouve la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$.

Exercice 2 :(6 points)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.

a) Calcule I_0 puis à l'aide d'un changement de variable, démontre que $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

b) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx$.

c) En utilisant une intégration par parties sur $I_n, n \in \mathbb{N}^*$, montre que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$.

d) Calcule alors I_2 .

2) On considère la suite (J_n) définie pour tout entier naturel n non nul par, $J_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

a) Détermine les réels a et b tels que la fonction $f : t \mapsto (at + b)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0; 1]$. En déduis la valeur de J_1 .

b) Montre à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $J_{n+1} = (n+1)J_n - 1$.

c) Montre que pour tout entier naturel n non nul, $J_n \geq 0$.

d) Montre que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$.

e) En déduis que pour tout n non nul, $J_n \leq \frac{e}{n+1}$.

f) Détermine la limite de la suite (J_n) .

Problème :(10 points)

Partie A :

Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.

- 1) Calcule les limites de φ en 0 et en $+\infty$.
- 2) Étudie les variations de φ et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique telle que $0,27 < \beta < 0,28$.
b) Déduis le signe $\varphi(x)$ de suivant les valeurs de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2 cm)

- 1) a) Étudie la continuité de f en 0.
b) Étudie la dérivabilité de f en 0.

2) Calcule la limite de f en $+\infty$ et étudie la branche infinie de (C) en $+\infty$.

3) a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$.

b) Déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.

4) Montre que $f(\beta) = -\beta$.

5) Trace (C) .

Partie C

1) a) Démontre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[3; 4]$.

b) Démontre que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

2) Soit g la fonction définie pour tout réel strictement positif x par : $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.

a) Étudie les variations de g pour x élément de $[3; 4]$ et démontre que pour tout x élément de $[3; 4]$, $g(x)$ est un élément de $[3; 4]$.

b) Démontre que : $\forall x \in [3; 4], |g(x)| \leq \frac{1}{2}$.

3) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Démontre que pour tout entier positif ou nul n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

Déduis-en que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

b) Démontre que la suite (u_n) est convergente et calcule sa limite.

c) Trouve les valeurs de n , pour lesquelles u_n est une valeur approchée de a à 10^{-2} près.