

Exercice 1 :(5 points)

I/ On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, dx$.

- 1) a) Calcule I_0 .
- b) En utilisant une intégration par parties, calcule I_1 .
- 2) a) En effectuant deux intégrations parties successives, détermine, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n .
- b) Vérifie que $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.
- 3) Sans calculer l'intégrale I_n .
- a) Montre que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- b) Pour tout nombre n entier naturel non nul, compare I_n à $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, dx$.
- c) Détermine la limite de I_n .

II/ Un lycée de la place organise un tournoi sportif par équipe pour tous les élèves. Chaque équipe doit comporter le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Les professeurs d'EPS souhaitent constituer le plus grand nombre possible d'équipes, sachant qu'il y a 210 filles et 294 garçons.

- 1) Trouve le plus grand nombre d'équipes à constituer ;
- 2) Détermine le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe.

Exercice 2 :(5 points)

Soit le nombre complexe $a = -1 - i$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 ; z_1 = i \\ z_{n+1} = (1 - a)z_n + az_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1) Détermine z_2 et z_3 sous forme algébrique.
- 2) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = z_{n+1} - z_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- a) Détermine u_0 et u_1 sous forme algébrique.
- b) Démontre que (u_n) est géométrique de raison $-a$.
- c) Exprime u_n en fonction de n et a .
- 3) Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$. Exprime S_n en fonction de z_n .
- En déduis que $z_n = -1 + (1 + i)^n$.
- 4) a) Détermine le module et un argument de a .
- b) Donne la forme algébrique de z_{19} .
- 5) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A_0 le point d'affixe z_0 , A_1 le point d'affixe z_1 et A_2 le point d'affixe z_2 .
- Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2 .

Problème :(10 points)

PARTIE A

- 1) Détermine les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' + 2y' + y = 0$.
- 2) On considère l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 2y' + y = x + 3$.
- a) Vérifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 1$ est solution de (E_2) .
- b) Démontre qu'une fonction f est solution de (E_2) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E_1) .
- c) En déduis les solutions de (E_2) .
- d) Détermine la solution de (E_2) qui vérifie : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Calcule pour tout réel x , $f'(x)$ et $f''(x)$.
b) Etudie le sens de variation de f' .
c) Démontre que pour tout réel x positif, $f'(x) > 0$.
d) Calcule la limite de f en 0 et $+\infty$.
e) Dresse le tableau de variation de f .
- 2) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
b) Précise la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D).
c) La courbe $(\mathcal{C})$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D).

Détermine les coordonnées de A.

- 3) Démontre que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[0; +\infty[$ une unique solution α , puis vérifie que $0 \leq \alpha \leq 1$.
- 4) Construis la droite (D), le point A, la courbe $(\mathcal{C})$ et tangente en A à la courbe $(\mathcal{C})$.

PARTIE C

- 1) Démontre que sur $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à l'équation : $\frac{e^x}{e^x+1} = x$.
- 2) Soit la fonction h définie sur $[0; 1]$ par : $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.
a) Calcule $h'(x)$ et réalise son tableau de variation sur $[0; 1]$.
b) En déduis que $\forall x \in [0; 1], h(x) \in [0; 1]$.
c) Calcule $h''(x)$ et étudie le sens de variation h' sur $[0; 1]$.
d) En déduis que $\forall x \in [0; 1],$ on a : $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$.

PARTIE D

On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- 1) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$.
- 2) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$.
- 3) En déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis que la suite (U_n) converge vers α .
- 4) Détermine un entier p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et à l'aide de la calculatrice, propose une approximation décimale de U_p à 10^{-6} près. Que peut-on déduis de α ?