



CONCOURS D'EXCELLENCE EUTG

Epreuve de : Mathématiques

Série : TSE / STI

Durée : 03 Heures

Session : Septembre 2023

Exercice 1 : (6 points)

Pour tout nombre complexe z , on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1) Calculer $P(2)$. Déterminer une factorisation de $P(z)$ par $(z - 2)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive. Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2

3) a) Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), les points :

A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2 , et I milieu de [AB]

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle.

En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{OI})$

c) Calculer l'affixe Z_I de I, puis le module de Z_I

Exercice 2 : (4 points)

$$\text{Soit } \begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Soit (v_n) définie par $v_n = u_n\sqrt{2} - n$

a) Démontrer que v_n est une suite géométrique

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

Problème : (10 points)

Partie A : Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \ln x$$

1) Détermine la fonction dérivée de f et vérifie que $f'(x)$ a même signe que

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$$

- 2) a) Etudie les variations de g et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.
- b) Quel est le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]0; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$?
- 3) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et en déduis de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ un encadrement de $f(\alpha)$
- 4) Achève l'étude de la fonction f et trace sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie B :

- 1) Montre que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
- 2) a) Calcule $h'(x)$ et vérifie que $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, on a : $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) < -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$
- En déduis qu'il existe un réel $k \in [0; 1]$ tel que : $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |h'(x)| \leq k$
- b) Prouve que pour tout couple de réels $(x; y)$ choisi dans $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, on a :
- $$|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$
- 3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n)$
- a) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$
- b) En appliquant à $(U_n; \alpha)$ l'inégalité établie dans 2) b), prouve que :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$$
- c) En déduis par raisonnement par récurrence l'inégalité :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq k^n|U_0 - \alpha|$$
- Puis montre que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?
- 4) Montre en utilisant les variations de h que $U_{n+1} - \alpha$ et $U_n - \alpha$ sont de signe contraires. En déduis que α est compris entre U_n et U_{n+1} .
- Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}