

SUJET D'ENTRAÎNEMENT 1

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES — SÉRIE : T.S.E - S.T.I

DURÉE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 4

Exercice 1 **6 points**

I. (3 points)

1. a. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, détermine un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs solution de l'équation

$$(E_0) : 13u + 17v = 1.$$

b. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(E) : 13x + 17y = 5.$$

2. On se propose de déterminer les entiers naturels N vérifiant simultanément :

$$N \equiv 3 \pmod{13} \quad \text{et} \quad N \equiv 5 \pmod{17}.$$

a. Démontre que N est solution de ce système si et seulement s'il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} 13a - 17b = 2, \\ N = 13a + 3. \end{cases}$$

b. Détermine un couple particulier (a_0, b_0) solution de $13a - 17b = 2$; résous complètement cette équation.

c. Dédus-en l'ensemble des entiers naturels N vérifiant le système, puis donne ceux qui sont compris entre 1 et 500.

II. (3 points)

Trois candidats maliens, que l'on désigne par A , B et C , se présentent à l'épreuve orale de mathématiques du concours d'entrée dans une grande école. Chaque candidat est interrogé indépendamment des deux autres. On admet que les probabilités qu'un candidat soit admis à l'oral sont respectivement :

$$P(A) = 0,8; \quad P(B) = 0,6; \quad P(C) = 0,5.$$

1. Calcule la probabilité que les trois candidats soient tous admis.

2. Calcule la probabilité qu'au moins un candidat soit admis.

3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de candidats admis parmi A , B et C .

a. Détermine la loi de probabilité de X .

b. Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

4. Sachant que deux candidats exactement ont été admis, calcule la probabilité que A et B soient les deux candidats admis.

Exercice 2 **5 points**

Dans le plan, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3a$ et $AC = 4a$, où a est un nombre réel strictement positif. Pour la construction de la figure, on prendra $a = 1$ cm.

1. a. Construis le barycentre G du système pondéré $\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$.

b. Démontre l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}).$$

2. Démontre que, pour tout point M du plan,

$$2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3 \overrightarrow{MC} = 4 \overrightarrow{MG}.$$

3. Détermine et construis l'ensemble Γ_1 des points M du plan vérifiant

$$\| 2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3 \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \|.$$

4. Pour tout nombre réel k , on note E_k l'ensemble des points M du plan tels que

$$2 MA^2 - MB^2 + 3 MC^2 = k a^2.$$

a. Démontre que, pour tout point M du plan,

$$2 MA^2 - MB^2 + 3 MC^2 = 4 MG^2 + S,$$

où $S = 2 GA^2 - GB^2 + 3 GC^2$ est une constante que tu calculeras en fonction de a .

b. Discute suivant les valeurs de k , la nature et les éléments caractéristiques de E_k .

c. Détermine la valeur de k pour laquelle le point B appartient à E_k .

Problème **9 points**

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A. (1 point)

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 2 \ln(x) + 1.$$

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, puis étudie le sens de variation de g .

2. Résous dans $]0, +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$. Dédus-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans $]0, +\infty[$.

Partie B. (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x^2 \ln(x) \quad \text{pour } x > 0.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Démontre que f est continue en 0.

2. Étudie la dérivabilité de f en 0 et interprète graphiquement le résultat obtenu.

3. a. Démontre que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$f'(x) = x \cdot g(x).$$

b. Dédus-en, à l'aide de la partie A, le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$, en précisant les valeurs exactes des extrêmes.

4. Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

5. Démontre que $(\mathcal{C}_f)$ admet un unique point d'inflexion I , dont tu préciseras les coordonnées exactes.

6. Résous dans $[0, +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$, puis trace la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente (T) dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On prendra $e^{-1/2} \approx 0,61$ et $\frac{1}{2e} \approx 0,18$.

7. Pour tout nombre réel m , on s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ sur $[0, +\infty[$. Discute, suivant les valeurs de m , le nombre de ces solutions.

Partie C. (2 points)

Pour tout réel $\alpha \geq 1$, on pose

$$F(\alpha) = \int_1^\alpha t^2 \ln(t) dt.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontre que, pour tout $\alpha \geq 1$,

$$F(\alpha) = \frac{3\alpha^3 \ln(\alpha) - \alpha^3 + 1}{9}.$$

2. Calcule, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

3. Détermine $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha)$; donne une interprétation géométrique de ce résultat.

Partie D. (2 points)

Pour tout entier naturel n , on définit

$$u_n = \int_1^e x (\ln(x))^n dx.$$

1. Calcule u_0 .

2. À l'aide d'une intégration par parties, démontre que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} u_{n-1}.$$

En déduire les valeurs exactes de u_1 et de u_2 .

3. a. Démontre que, pour tout $x \in [1; e]$ et tout entier naturel n ,

$$0 \leq x (\ln(x))^{n+1} \leq x (\ln(x))^n.$$

b. Déduis-en que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, positive, puis qu'elle converge vers une limite ℓ .

4. À l'aide de la relation de récurrence établie à la question 2., démontre que

$$0 \leq u_{n-1} \leq \frac{e^2}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Conclus-en la valeur exacte de ℓ .