

SUJET D'ENTRAÎNEMENT N° 2

ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES — SÉRIE : T.S.E- S.T.I

DURÉE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 4

Exercice 1 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 2 cm.

I. (2 points) — *Résolution d'une équation*

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-3 + 5i)z + 6 + 2i = 0.$$

1. Démontre que (E) admet une solution réelle z_0 que tu détermineras.
2. Détermine deux nombres complexes p et q tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-3 + 5i)z + 6 + 2i = (z - z_0)(z^2 + pz + q).$$

3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + pz + q = 0$. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

II. (4 points) — *Étude géométrique*

On note A , B et C les points du plan d'affixes respectives

$$z_A = 2, \quad z_B = 1 + 2i, \quad z_C = -1 + i.$$

1. Place les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
2. a. Calcule $z_A - z_B$ et $z_C - z_B$, puis exprime $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous forme algébrique.
b. Dédus-en que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B .
3. Soit r la rotation de centre B qui transforme A en C .
a. Détermine la mesure principale de l'angle θ de r .
b. Donne l'écriture complexe de r sous la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α et β sont deux complexes à déterminer.
4. Soit s la similitude directe qui transforme A en C et B en A .
a. Justifie l'existence et l'unicité d'une telle similitude, puis donne son écriture complexe sous la forme $z' = az + b$.
b. Précise le rapport k , l'angle φ et l'affixe du centre Ω de la similitude s .

Exercice 2 **5 points**

I. (3 points) — *Équation diophantienne*

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(E) : 7x + 11y = 300.$$

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, détermine un couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ solution de l'équation $7u + 11v = 1$.
2. Dédus-en un couple particulier $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E) , puis résous complètement (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
3. Détermine le nombre et la liste des couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ solutions de (E) .

II. (2 points) — *Bases de numération*

Soit x un entier naturel tel que $x \geq 4$, et soient a et b deux chiffres de la base x , avec $a \neq 0$. On considère l'entier N dont l'écriture en base x est $\overline{a b b a}^x$.

1. Démontre que $N = a(x^3 + 1) + bx(x + 1)$.
2. En factorisant $x^3 + 1$, démontre que N est divisible par $x + 1$.
3. *Application.* Pour $x = 4$, $a = 3$ et $b = 2$, calcule la valeur de N en base 10 et vérifie la divisibilité par $x + 1$.

Problème **9 points**

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x e^{-x^2}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A. (2 points) — *Étude de la fonction*

1. Démontre que f est une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?
2. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Déduis-en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (1 - 2x^2) e^{-x^2}.$$

b. Étudie le signe de $f'(x)$, puis dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les valeurs exactes des extrêmes de f .

Partie B. (1,5 point) — *Points d'inflexion et tracé*

1. Démontre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = 2x(2x^2 - 3) e^{-x^2}.$$

2. Déduis-en les abscisses des points d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
3. Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point O .
4. Trace, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la tangente (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$. On prendra $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$; $\frac{1}{\sqrt{2}e} \approx 0,43$; $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$.

Partie C. (2 points) — *Calcul intégral*

1. Démontre que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$. Démontre que, pour tout $\alpha \geq 0$,

$$F(\alpha) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha^2}).$$

3. Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha)$.
4. Déduis-en, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie D. (3,5 points) — *Suite récurrente intégrale*

Pour tout entier naturel n , on définit

$$u_n = \int_0^1 x^{2n+1} e^{-x^2} dx.$$

1. En utilisant la partie C, démontre que $u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.
2. En effectuant une intégration par parties, démontre que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = -\frac{1}{2e} + n u_{n-1}.$$

Indication : on pourra poser $u = x^{2n}$ et $dv = x e^{-x^2} dx$.

3. En déduire les valeurs exactes de u_1 et de u_2 .
4. a. Démonstre que, pour tout $x \in [0; 1]$ et tout entier naturel n ,

$$0 \leq x^{2n+1} e^{-x^2} \leq x^{2n+1}.$$

b. Déduis-en l'encadrement

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+2}.$$

5. Déduis-en que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et précise sa limite ℓ .