

Mathématiques

Tout le cours — Toutes les méthodes

Bac TSE / STI

Préparation à l'épreuve de mathématiques

Programme officiel TSE 2025 — 12 séquences

Cours	Méthodes	Exemples
Pièges	Astuces	Fiches flash
Exercices issus des sujets de Bac		

Comment utiliser ce document.

Chaque chapitre suit la même structure rigoureuse : *définitions, théorèmes / propriétés, méthodes pas à pas, exemples détaillés, pièges classiques, astuces de rédaction, fiche flash récapitulative*, puis une liste d'*exercices issus des sujets de Bac* avec leur année.

Un chapitre par séance : le cours d'abord, les exemples ensuite, puis les exercices du Bac correspondants.

Avant-propos

Ce document s'adresse aux élèves de *Terminale Sciences Exactes* (TSE) préparant l'épreuve de mathématiques du Baccalauréat. Il couvre l'intégralité du programme officiel TSE 2025, organisé en douze séquences.

Ce que tu trouveras dans chaque chapitre

- **Un cours synthétique** : définitions encadrées (en bleu), théorèmes et propriétés (en rouge ou vert), avec les démonstrations courtes des résultats que tu dois savoir reproduire.
- **Des méthodes pas à pas** (en bleu vif) qui décrivent l'algorithme à suivre pour résoudre les types d'exercices classiques.
- **Des exemples résolus** (en vert) illustrant chaque méthode.
- **Des pièges classiques** (en orange) que les correcteurs guettent.
- **Des astuces de rédaction** (en violet) pour gagner des points sans calculer davantage.
- **Une fiche flash** (en bleu nuit) à la fin de chaque chapitre : 1 à 2 pages à apprendre par cœur la veille de l'épreuve.
- **Une liste d'exercices issus des sujets de Bac** (en bordeaux) avec l'année et le numéro d'exercice, pour t'entraîner avec ce qui est réellement tombé.

Comment organiser tes révisions

L'épreuve dure **4 heures**, coefficient **4**, avec la structure habituelle suivante :

- **Exercice 1** (4–6 points) : nombres complexes, parfois mêlés à une similitude ou un barycentre.
- **Exercice 2** (4–7 points) : arithmétique, probabilités, barycentres ou transformations du plan. Souvent en deux parties indépendantes.
- **Problème** (9–10 points) : étude complète d'une fonction, souvent avec logarithme ou exponentielle, parfois prolongée par une suite numérique ou un calcul intégral.

Le problème pèse à lui seul la moitié de la note : il faut donc maîtriser parfaitement l'étude de fonctions, le logarithme, l'exponentielle, l'intégration et les suites. Les chapitres correspondants sont les plus longs de ce document.

Conseils méthodologiques généraux

1. **Soigne la rédaction.** La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte dans l'appréciation des copies. Chaque question doit commencer par une phrase rappelant ce que l'on cherche.
2. **Justifie tout.** Une réponse juste sans justification ne rapporte presque rien ; une réponse fausse mais avec une méthode juste rapporte une part des points.
3. **Ne saute pas d'étape de calcul** dans les questions à 1–2 points : un signe oublié coûte généralement 0,25 à 0,5 point.
4. **Trace une figure** dès que possible (complexes, barycentres, transformations). L'énoncé précise souvent l'unité graphique : respecte-la.

5. **Vérifie tes résultats numériques** (équations diophantiennes, similitudes, valeurs aux bornes). Une vérification d'une ligne évite parfois une perte de 2 points.
6. **Conclus** chaque question par une phrase de conclusion encadrée ou soulignée.

Notations utilisées

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: ensembles usuels.
- $\mathbb{N}^*, \mathbb{R}^*$, etc. : ensembles privés de 0. $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[, \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.
- $|z|$: module de z ; $\bar{z}$: conjugué de z ; $\arg(z)$: argument de z .
- $\text{pgcd}(a, b), \text{ppcm}(a, b)$: pgcd et ppcm de a et b .
- $P(A)$: probabilité de l'événement A ; $P_B(A)$: probabilité de A sachant B .
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$: nombre de combinaisons.

Table des matières

Avant-propos	i
1 Nombres complexes	1
1.1 Forme algébrique	1
1.2 Conjugué et module	2
1.3 Argument, forme trigonométrique et forme exponentielle	3
1.4 Formule de Moivre et formules d'Euler	4
1.5 Racines n -ièmes d'un complexe	5
1.6 Racine carrée et équation du second degré dans $\mathbb{C}$	5
1.7 Équations de degré supérieur : méthode de la racine évidente	6
1.8 Applications géométriques : interprétation des affixes	6
1.9 Lieux géométriques classiques	7
1.10 Nombres complexes et transformations du plan	7
1.11 Suites de complexes (suites géométriques)	8
1.12 Fiche flash	8
1.13 Exercices issus des sujets de Bac	9
2 Arithmétique	11
2.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	11
2.2 Division euclidienne	11
2.3 Systèmes de numération	12
2.4 Nombres premiers et décomposition	12
2.5 PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide	13
2.6 Théorème de Bézout et lemme de Gauss	14
2.7 Équations diophantiennes $ax + by = c$	14
2.8 Congruences	15
2.9 Systèmes de congruences (théorème chinois implicite)	16
2.10 Fiche flash	17
2.11 Exercices issus des sujets de Bac	17
3 Fonctions numériques	19
3.1 Ensemble de définition	19
3.2 Limites	19
3.3 Continuité	20
3.4 Dérivabilité	21
3.5 Sens de variation	22
3.6 Asymptotes	22
3.7 Symétries de la courbe	23
3.8 Plan d'étude complète d'une fonction	23
3.9 Fonctions et valeurs absolues	24
3.10 Bijections et fonction réciproque	24
3.11 Fiche flash	24
3.12 Exercices issus des sujets de Bac	25

4	Primitives et calcul intégral	26
4.1	Primitives	26
4.2	Intégrale définie	27
4.3	Intégration par parties (IPP)	28
4.4	Applications : aires et volumes	29
4.5	Suites définies par une intégrale	29
4.6	Parité et intégrale	30
4.7	Fiche flash	30
4.8	Exercices issus des sujets de Bac	30
5	Fonction logarithme népérien	32
5.1	Définition et propriétés algébriques	32
5.2	Équations et inéquations avec $\ln$	33
5.3	Étude de la fonction $\ln$	33
5.4	Dérivée et primitive	34
5.5	Logarithme de base a	34
5.6	Méthodes typiques d'étude d'une fonction avec $\ln$	35
5.7	Fiche flash	35
5.8	Exercices issus des sujets de Bac	36
6	Fonction exponentielle népérienne	37
6.1	Définition et propriétés algébriques	37
6.2	Variations et limites	37
6.3	Équations et inéquations avec $\exp$	38
6.4	Dérivée et primitive	39
6.5	Exponentielle complexe (lien)	39
6.6	Exemples d'études classiques	39
6.7	Fiche flash	40
6.8	Exercices issus des sujets de Bac	40
7	Fonction puissance	41
7.1	Définition et propriétés algébriques	41
7.2	Étude de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$	41
7.3	Limites et croissances comparées étendues	42
7.4	Fonction racine n -ième	42
7.5	Fiche flash	43
7.6	Exercices issus des sujets de Bac	43
8	Suites numériques	44
8.1	Généralités	44
8.2	Suites arithmétiques et géométriques	45
8.3	Raisonnement par récurrence	45
8.4	Convergence et limite	46
8.5	Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$	47
8.6	Suites complexes (rappel)	47
8.7	Fiche flash	47
8.8	Exercices issus des sujets de Bac	48
9	Équations différentielles	49
9.1	Définitions générales	49
9.2	ED du premier ordre $y' + ay = 0$	49
9.3	ED du premier ordre avec second membre	49
9.4	ED du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$	51

9.5	Conditions initiales	51
9.6	Fiche flash	52
9.7	Exercices issus des sujets de Bac	52
10	Dénombrement et probabilités	53
10.1	Analyse combinatoire	53
10.2	Probabilités : définitions	54
10.3	Probabilités conditionnelles	55
10.4	Arbres pondérés	55
10.5	Variables aléatoires	56
10.6	Loi binomiale	57
10.7	Fiche flash	57
10.8	Exercices issus des sujets de Bac	58
11	Géométrie plane et transformations du plan	59
11.1	Barycentres	59
11.2	Applications affines du plan	61
11.3	Isométries du plan	61
11.4	Similitudes du plan	62
11.5	Fiche flash	64
11.6	Exercices issus des sujets de Bac	64
12	Coniques	66
12.1	Définition unifiée (foyer-directrice)	66
12.2	L'ellipse	66
12.3	L'hyperbole	67
12.4	La parabole	68
12.5	Reconnaître une conique depuis son équation	68
12.6	Fiche flash	69
12.7	Exercices issus des sujets de Bac	69
A	Formulaire général	70
A.1	Identités algébriques	70
A.2	Trigonométrie	70
A.3	Limites et croissances comparées	71
A.4	Dérivées usuelles	71
A.5	Primitives usuelles	71
A.6	Nombres complexes	72
A.7	Probabilités	72
A.8	Arithmétique	72
A.9	Géométrie : barycentre et similitudes	72
A.10	Équations différentielles	72

CHAPITRE 1

Nombres complexes

Introduction

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ne permet pas de résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. On construit donc un ensemble plus grand, $\mathbb{C}$, dans lequel on ajoute un nombre i tel que $i^2 = -1$. Ce chapitre est **quasi systématiquement en Exercice 1** du Bac TSE, souvent couplé à une similitude, un barycentre ou une suite. Maîtriser parfaitement le passage forme algébrique $\leftrightarrow$ forme trigonométrique $\leftrightarrow$ forme exponentielle est non négociable.

1.1 Forme algébrique

DÉFINITION 1.1 — Nombre complexe, partie réelle, partie imaginaire

Un nombre complexe est un nombre de la forme

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

où i est tel que $i^2 = -1$. On note :

- $\operatorname{Re}(z) = a$: la *partie réelle* de z ;
- $\operatorname{Im}(z) = b$: la *partie imaginaire* de z (qui est un *réel*, pas ib).

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. On a $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$, et z est dit *imaginaire pur* si $\operatorname{Re}(z) = 0$.

PROPRIÉTÉ 1.1 — Opérations dans $\mathbb{C}$

Pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$:

$$z + z' = (a + a') + i(b + b'), \quad z z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

$\mathbb{C}$ muni de $+$ et $\times$ est un corps commutatif (toutes les règles de calcul de $\mathbb{R}$ s'appliquent, sauf qu'il **n'y a pas d'ordre** sur $\mathbb{C}$).

⚠ PIÈGE CLASSIQUE

Ne jamais écrire $z < z'$, $z \leq z'$, ou “ z positif” pour des complexes non réels. Ces relations n'existent pas dans $\mathbb{C}$.

1.1.1 Puissances de i

Les puissances de i sont *périodiques de période 4* :

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots$$

⚙️ MÉTHODE 1.1 — Calculer i^n pour $n \in \mathbb{N}$

1. Effectuer la division euclidienne de n par 4 : $n = 4q + r$ avec $0 \leq r < 4$.
2. Alors $i^n = i^r$, donc $i^n \in \{1, i, -1, -i\}$ selon $r = 0, 1, 2, 3$.

💡 EXEMPLE 1.1 — Quelques puissances de i

i^{2025} : $2025 = 4 \times 506 + 1$, donc $i^{2025} = i^1 = i$.
 i^{100} : $100 = 4 \times 25$, donc $i^{100} = 1$.

1.2 Conjugué et module

DÉFINITION 1.2 — Conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

PROPRIÉTÉ 1.2 — Règles sur le conjugué

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{z z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0), \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

De plus :

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z), \quad z \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+.$$

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}. \quad z \text{ imaginaire pur} \iff z = -\bar{z}.$$

DÉFINITION 1.3 — Module

Le module de $z = a + ib$ est le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \bar{z}}.$$

PROPRIÉTÉ 1.3 — Règles sur le module

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$|z z'| = |z| \cdot |z'|, \quad |z/z'| = |z|/|z'| \quad (z' \neq 0), \quad |z^n| = |z|^n, \quad |\bar{z}| = |z|.$$

Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité $\iff z$ et z' ont même argument (ou l'un est nul).

⚙️ MÉTHODE 1.2 — Mettre une fraction $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique

1. Multiplier numérateur et dénominateur par $\bar{z}_2$.
2. Le dénominateur devient $z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2 \in \mathbb{R}$.
3. Développer le numérateur et regrouper partie réelle et imaginaire.

❖ EXEMPLE 1.2 — Mise sous forme algébrique

Mettre $\frac{3+2i}{1-i}$ sous forme algébrique :

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1+1} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

1.3 Argument, forme trigonométrique et forme exponentielle

DÉFINITION 1.4 — Argument

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Un *argument* de z est un réel θ tel que :

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

On le note $\arg(z) = \theta \text{ modulo } 2\pi$. L'unique argument dans $]-\pi, \pi]$ est l'*argument principal*, noté $\operatorname{Arg}(z)$.

Le nombre 0 n'a pas d'argument.

THÉORÈME 1.1 — Forme trigonométrique et forme exponentielle

Tout $z \in \mathbb{C}^*$ de module r et d'argument θ s'écrit :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}.$$

PROPRIÉTÉ 1.4 — Calculs sur la forme exponentielle

Pour $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$r e^{i\theta} \cdot r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}, \quad \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')},$$

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \quad \textbf{(formule de Moivre)}, \quad \overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}.$$

Conséquences sur les arguments : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \text{ } [2\pi]$; $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \text{ } [2\pi]$; $\arg(z^n) = n \arg(z) \text{ } [2\pi]$.

⚙️ MÉTHODE 1.3 — Passer de la forme algébrique à la forme trigo/expo

Soit $z = a + ib$, $z \neq 0$.

1. Calculer $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Factoriser : $z = r \left(\frac{a}{r} + i \frac{b}{r} \right)$.

3. Identifier θ tel que $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$ **(les deux conditions sont nécessaires !)**.

4. Conclure $z = r e^{i\theta}$.

⚠ PIÈGE CLASSIQUE

Ne jamais dire : “ $\tan \theta = b/a$ donc $\theta = \arctan(b/a)$ ”. Cela laisse une ambiguïté de π . Il faut *toujours vérifier le signe de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$ ensemble* pour fixer θ sans erreur.

💡 EXEMPLE 1.3 — Forme trigonométrique de $-1 + i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{1+3} = 2$. Donc $z = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On cherche θ avec $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$:
 $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Donc

$$-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

🔍 ASTUCE DE RÉDACTION

Mémorise par cœur les modules et arguments des complexes “simples” :

$$\arg(1) = 0, \arg(i) = \frac{\pi}{2}, \arg(-1) = \pi, \arg(-i) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, \arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}, \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Modules associés : $|1+i| = \sqrt{2}$, $|\sqrt{3}+i| = 2$, $|1+i\sqrt{3}| = 2$.

1.4 Formule de Moivre et formules d'Euler

THÉORÈME 1.2 — Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

THÉORÈME 1.3 — Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

⚙ MÉTHODE 1.4 — Linéariser $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$

1. Remplacer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ par leurs formes exponentielles d'Euler.
2. Développer avec le binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
3. Regrouper les termes conjugués $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$ pour reconnaître $2\cos(k\theta)$ ou $2i\sin(k\theta)$.

💡 EXEMPLE 1.4 — Linéariser $\cos^3 \theta$

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3\theta) + 6\cos \theta) = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos \theta. \end{aligned}$$

1.5 Racines n -ièmes d'un complexe

THÉORÈME 1.4 — Racines n -ièmes

Soit $Z = R e^{i\varphi}$ avec $R > 0$. L'équation $z^n = Z$ admet exactement n solutions dans $\mathbb{C}$, données par :

$$z_k = \sqrt[n]{R} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Géométriquement, ces n points sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$.

EXEMPLE 1.5 — Racines cubiques de -8

$-8 = 8 e^{i\pi}$ donc $\sqrt[3]{8} = 2$ et les racines sont :

$$z_k = 2 e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

soit $z_0 = 2 e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_1 = 2 e^{i\pi} = -2$, $z_2 = 2 e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}$.

1.6 Racine carrée et équation du second degré dans $\mathbb{C}$

MÉTHODE 1.5 — Racine carrée d'un complexe sous forme algébrique

Pour trouver $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = Z = a + ib$:

1. Écrire le système : $x^2 - y^2 = a$; $2xy = b$; $x^2 + y^2 = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Les deux premières équations donnent $x^2 = \frac{|Z|+a}{2}$, $y^2 = \frac{|Z|-a}{2}$.
3. Choisir le signe de y pour que $2xy$ ait le signe de b (le signe de x est libre).

On obtient ainsi les deux racines opposées $\pm\delta$.

EXEMPLE 1.6 — Racine carrée de $3 - 4i$

$|3 - 4i| = 5$. On cherche $\delta = x + iy$:

$$x^2 - y^2 = 3, \quad x^2 + y^2 = 5, \quad 2xy = -4.$$

D'où $x^2 = 4$, $y^2 = 1$, donc $x = \pm 2$, $y = \pm 1$, et $2xy < 0$ donc x et y de signes opposés. Racines : $\delta = 2 - i$ et $-\delta = -2 + i$.

THÉORÈME 1.5 — Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$: une solution double $z = -\frac{b}{2a}$.
- Sinon : soit δ une racine carrée de Δ ; alors les deux solutions sont

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

Cas particulier $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$: $\delta = i\sqrt{-\Delta}$, donc $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (racines complexes conjuguées).

1.7 Équations de degré supérieur : méthode de la racine évidente

❁ MÉTHODE 1.6 — Résoudre une équation $P(z) = 0$ avec $\deg P = 3$

1. **Trouver une racine “évidente”** z_0 , souvent suggérée par l'énoncé (“Démontre que (E) admet une solution imaginaire pure”, etc.) :
 - Si on cherche un imaginaire pur $z_0 = i\beta$, substituer et séparer partie réelle et partie imaginaire pour identifier β .
 - Si on cherche un réel, tester $z_0 = 1, -1, 2, \dots$
2. **Factoriser** : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ avec Q de degré 2. Calculer $Q(z)$ par division ou par identification.
3. **Résoudre** $Q(z) = 0$ avec la formule du discriminant.
4. **Conclure** en listant l'ensemble des solutions.

🔍 EXEMPLE 1.7 — Résolution d'une équation cubique

Réolvons $z^3 - (1+i)z^2 + (1+i)z - 1 = 0$.

Étape 1. On teste $z_0 = 1$: $1 - (1+i) + (1+i) - 1 = 0$. ✓

Étape 2. On factorise : $z^3 - (1+i)z^2 + (1+i)z - 1 = (z-1)(z^2 + az + 1)$. En développant et identifiant : $a = -i$. Donc $P(z) = (z-1)(z^2 - iz + 1) \cdot \dots$ (à compléter selon le sujet ; ici on illustre la méthode).

1.8 Applications géométriques : interprétation des affixes

DÉFINITION 1.5 — Affixe d'un point, d'un vecteur

Dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan, à tout point $M(a; b)$ on associe son *affixe* $z_M = a + ib$. Pour deux points A et B , l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

PROPRIÉTÉ 1.5 — Distances et angles

Pour des points A, B, C, D d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D :

- Distance : $AB = |z_B - z_A|$.
- Mesure d'angle orientée : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi]$.
- Mesure d'angle entre deux vecteurs :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

❁ MÉTHODE 1.7 — Nature d'un triangle ABC à partir des affixes

Calculer $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ (rapport “en A”).

- ABC rectangle en A $\iff Z$ imaginaire pur $\iff \operatorname{Re}(Z) = 0$.
- ABC isocèle en A $\iff |Z| = 1$.
- ABC rectangle isocèle en A $\iff Z = i$ ou $Z = -i$.
- ABC équilatéral $\iff Z = e^{\pm i\pi/3}$, soit $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = \pm \frac{\pi}{3}$.

- A, B, C alignés $\iff Z \in \mathbb{R}$.

💡 EXEMPLE 1.8 — Nature d'un triangle

Soient $A(1+i)$, $B(2-i)$, $C(-i)$.

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-i - (1+i)}{(2-i) - (1+i)} = \frac{-1-2i}{1-2i} = \frac{(-1-2i)(1+2i)}{1+4} = \frac{-1-2i-2i+4}{5} = \frac{3-4i}{5}.$$

$|Z| = \frac{\sqrt{9+16}}{5} = 1$, et $\operatorname{Re}(Z) \neq 0$. Donc ABC est isocèle en A mais pas rectangle.

1.9 Lieux géométriques classiques

⚙️ MÉTHODE 1.8 — Lieux de points définis par une condition sur l'affixe

Soit $z = x + iy$ l'affixe de M .

1. **Lieu défini par** $|z - z_A| = r$ ($r > 0$) : c'est le cercle de centre A et de rayon r .
2. **Lieu défini par** $|z - z_A| = |z - z_B|$: c'est la médiatrice du segment $[AB]$.
3. **Lieu défini par** $\arg(z - z_A) = \theta_0$ $[2\pi]$: c'est la *demi-droite* d'origine A (privée de A), faisant l'angle θ_0 avec l'axe des réels.
4. **Lieu défini par** $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$: cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B (théorème de l'angle inscrit).
5. **Lieu défini par une équation cartésienne** : poser $z = x + iy$, séparer partie réelle et partie imaginaire, reconnaître droite, cercle ou parabole.

⚠️ PIÈGE CLASSIQUE

Quand on traduit " $M' \in$ cercle de centre O et de rayon 1", cela donne $|z'| = 1$. **Bien penser à exprimer z' en fonction de z d'abord**, puis $z = x + iy$, et ne pas oublier les conditions d'existence (souvent $z \neq z_A$).

1.10 Nombres complexes et transformations du plan

THÉORÈME 1.6 — Écriture complexe des transformations usuelles

Soit $M(z) \mapsto M'(z')$. Alors :

- **Translation** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b : $z' = z + b$.
- **Homothétie** de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$: $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$, soit $z' = kz + (1-k)z_\Omega$.
- **Rotation** de centre $\Omega(z_\Omega)$ et d'angle θ : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$.
- **Similitude directe** de centre Ω , de rapport $k > 0$ et d'angle θ : $z' - z_\Omega = k e^{i\theta}(z - z_\Omega)$.

Toute similitude directe non triviale s'écrit $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

⚙️ MÉTHODE 1.9 — Caractériser une similitude directe $z' = az + b$ ($a \neq 1$)

1. **Rapport** : $k = |a|$.
2. **Angle** : $\theta = \arg(a) [2\pi]$.
3. **Centre** Ω : c'est le point fixe, solution de $z = az + b$, donc $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$.

Cas particuliers :

- Si $a = 1$: translation de vecteur d'affixe b .
- Si $a \in \mathbb{R}^*$: homothétie de rapport a (et de centre z_Ω si $a \neq 1$).
- Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$: rotation d'angle $\arg(a)$.

💡 EXEMPLE 1.9 — Caractérisation d'une similitude

Soit $z' = (1+i)z + 2$. On a $a = 1+i$, $b = 2$.

- $k = |1+i| = \sqrt{2}$.
- $\theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.
- $z_\Omega = \frac{2}{1-(1+i)} = \frac{2}{-i} = 2i$.

Donc f est la similitude directe de centre $\Omega(2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

🔍 ASTUCE DE RÉDACTION

Pour une rotation pure d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a $a = i$; pour $-\frac{\pi}{2}$, $a = -i$; pour π , $a = -1$ (symétrie centrale). Reconnaître ces cas fait gagner du temps.

1.11 Suites de complexes (suites géométriques)

Très fréquent au Bac : on définit $M_{n+1} = f(M_n)$ où f est une similitude.

⚙️ MÉTHODE 1.10 — Étude de la suite $z_{n+1} = az_n + b$

1. **Trouver le point fixe** $\ell = \frac{b}{1-a}$ (si $a \neq 1$).
2. **Poser** $u_n = z_n - \ell$. Vérifier que $u_{n+1} = au_n$.
3. **Conclure** : $u_n = a^n u_0$, donc $z_n = \ell + a^n(z_0 - \ell)$.
4. **Limites** : si $|a| < 1$, alors $z_n \rightarrow \ell$.

1.12 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Formes d'un complexe. $z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \theta = a/r$, $\sin \theta = b/r$.

Conjugué. $\bar{z} = a - ib$; $z\bar{z} = |z|^2$; $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Module et argument. $|zz'| = |z||z'|$; $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$; $\arg(z^n) = n \arg z$.

Moivre. $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Euler. $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Racines n -ièmes de $Re^{i\varphi}$. $z_k = \sqrt[n]{R} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Équation $az^2 + bz + c = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$; si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$: $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Géométrie. $AB = |z_B - z_A|$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

Triangle ABC en A . $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$: rectangle en $A \iff Z$ imag. pur ; isocèle en $A \iff |Z| = 1$; équilatéral $\iff Z = e^{\pm i\pi/3}$.

Transformations. $z' = z + b$ (translation), $z' = kz + (1-k)z_\Omega$ (homothétie), $z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$ (rotation), $z' = az + b$ ($a \neq 1$) : similitude directe de rapport $|a|$, angle $\arg a$, centre $\frac{b}{1-a}$.

Lieux. $|z - z_A| = r$: cercle ; $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice ; $\arg(z - z_A) = \theta_0$: demi-droite ; $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$: cercle de diamètre $[AB]$.

1.13 Exercices issus des sujets de Bac

EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Voici une sélection d'exercices issus des sujets du Bac TSE/STI, classés par type, à travailler dans tes archives.

Équations du second et troisième degré + similitudes

- **Bac 2025 — Exercice 1** : équation cubique avec racine imaginaire pure, barycentre, similitude directe transformant A en B et B en C .
- **Bac 2024 — Exercice 2** : similitude directe S de centre O , suite (z_n) définie par $M_n = S(M_{n-1})$, convergence.
- **Bac 2023 — Exercice 1, Partie I** : rapport z_A/z_B , calcul de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$, rotation.
- **Bac 2021 — Exercice 1** : équation cubique $z^3 - (7-9i)z^2 + (-14+39i)z + 50 = 0$, racine imaginaire pure, barycentre.
- **Bac 2018 — Exercice 1** : équation cubique avec racine $-i$, similitude $r(z) = iz - 2i + 2$, cocyclicité, application z' liée à z .
- **Bac 2016 — Exercice 1** : translation, barycentre, similitude directe S transformant A en E et B en F , aire de l'image.

Application géométrique et lieux

- **Bac 2022 — Exercice 2** : application $f(M) = \frac{z-2}{z-1-3i}$, points invariants, lieux dans le plan complexe.
- **Bac 2019 — Exercice 1** : cercle de centre O de rayon 1, application $f(M) = MA \times MB$, recherche de minimum et maximum.

Suites de complexes

- **Bac 2017 — Exercice 1** : suite $z_n = \frac{1}{2}i^n(1+i\sqrt{3})$, distance OM_n , somme $L_n = \sum M_k M_{k+1}$, alignement.

Consigne d'entraînement. Pour chaque exercice, te chronométrer (**45 minutes** pour un Exercice 1 du Bac) et te corriger ensuite avec les fichiers de correction de tes archives.

CHAPITRE 2

Arithmétique

Introduction

L'arithmétique est, au même titre que les complexes, un **pilier de l'épreuve** : elle apparaît presque toujours dans l'Exercice 2, sous forme d'équations diophantiennes, de systèmes de numération, de divisibilité, ou de problèmes concrets (engrenages, pièces de monnaie, troupeaux...). C'est un chapitre où la rigueur paye : chaque assertion doit être justifiée par un théorème nommé du cours.

2.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

DÉFINITION 2.1 — Divise

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a *divise* b , et on note $a \mid b$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$. On dit aussi que b est un *multiple* de a .

PROPRIÉTÉ 2.1 — Règles de divisibilité

Pour $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

- Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (\alpha b + \beta c)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.
- Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$ (transitivité).
- Si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $a = \pm b$.
- Si $a \mid b$ avec $b \neq 0$, alors $|a| \leq |b|$.

2.2 Division euclidienne

THÉORÈME 2.1 — Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un *unique* couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b.$$

q est le *quotient*, r est le *reste*.

⚠ PIÈGE CLASSIQUE

Le reste vérifie $0 \leq r < b$ (avec b positif). Pour un a négatif, le quotient est négatif et le reste reste positif. Exemple : $-17 = 5 \times (-4) + 3$, donc quotient = -4 , reste = 3 (et non -2 !).

2.3 Systèmes de numération

THÉORÈME 2.2 — Écriture en base b

Soit $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique suite finie $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ d'entiers avec $0 \leq a_i < b$ et $a_n \neq 0$, telle que :

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0.$$

On note $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{(b)}$.

🔧 MÉTHODE 2.1 — Écrire un entier dans une base b

Algorithme par divisions successives :

1. Diviser x par b : on obtient un quotient q_0 et un reste a_0 .
2. Diviser q_0 par b : reste a_1 , quotient q_1 .
3. Répéter jusqu'à obtenir un quotient $< b$.
4. Les chiffres dans la base b se lisent "de bas en haut" : $x = \overline{a_n \dots a_1 a_0}^{(b)}$.

Pour les bases $b > 10$, on utilise les lettres $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, etc.

💡 EXEMPLE 2.1 — Écrire 45 en base 3

$$\begin{array}{rcll} 45 & = & 3 \times 15 + 0 & a_0 = 0 \\ 15 & = & 3 \times 5 + 0 & a_1 = 0 \\ 5 & = & 3 \times 1 + 2 & a_2 = 2 \\ 1 & = & 3 \times 0 + 1 & a_3 = 1 \end{array}$$

Donc $45 = \overline{1200}^{(3)}$.

🔧 MÉTHODE 2.2 — Convertir d'une base b vers la base 10

Si $x = \overline{a_n \dots a_0}^{(b)}$, on évalue $x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0$ par calcul direct.

2.4 Nombres premiers et décomposition

DÉFINITION 2.2 — Nombre premier

Un entier $p \geq 2$ est dit *premier* si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p .

THÉORÈME 2.3 — Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier $n \geq 2$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

avec $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ premiers et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

PROPRIÉTÉ 2.2 — Nombre de diviseurs

Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, alors le nombre de diviseurs positifs de n est

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

❖ EXEMPLE 2.2 — Comptage de diviseurs

$72 = 2^3 \times 3^2$, donc $d(72) = (3 + 1)(2 + 1) = 12$ diviseurs positifs.

⚙️ MÉTHODE 2.3 — Tester si un entier n est premier

1. Calculer $\sqrt{n}$.
2. Tester la divisibilité de n par tous les nombres premiers $p \leq \sqrt{n}$.
3. Si aucun ne divise n , alors n est premier.

Justification : tout diviseur composé d de n vérifie $d = ab$ avec $a, b \geq 2$, donc au moins l'un des deux est $\leq \sqrt{n}$.

2.5 PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide

DÉFINITION 2.3 — PGCD et PPCM

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

- Le *PGCD* de a et b , noté $\text{pgcd}(a, b)$ ou $a \wedge b$, est le plus grand des diviseurs communs de a et b .
- Le *PPCM*, noté $\text{ppcm}(a, b)$ ou $a \vee b$, est le plus petit des multiples communs strictement positifs.

On dit que a et b sont *premiers entre eux* si $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

THÉORÈME 2.4 — Relation fondamentale

Pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = a \times b.$$

THÉORÈME 2.5 — Algorithme d'Euclide

Pour $a > b > 0$, posons $r_0 = a$, $r_1 = b$, et r_{n+1} le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n . La suite des restes est strictement décroissante et finit par valoir 0. Alors :

$$\text{pgcd}(a, b) = r_k = \text{dernier reste non nul}.$$

❖ EXEMPLE 2.3 — Calcul de $\text{pgcd}(252, 198)$

$$252 = 1 \times 198 + 54$$

$$198 = 3 \times 54 + 36$$

$$54 = 1 \times 36 + 18$$

$$36 = 2 \times 18 + 0$$

Donc $\text{pgcd}(252, 198) = 18$.

PROPRIÉTÉ 2.3 — Calcul à partir de la décomposition

Si $a = \prod p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod p_i^{\beta_i}$ (avec exposants ≥ 0 , éventuellement nuls), alors :

$$\text{pgcd}(a, b) = \prod p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}, \quad \text{ppcm}(a, b) = \prod p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}.$$

🔧 MÉTHODE 2.4 — Trouver les couples (α, β) tels que $\text{pgcd} + \text{ppcm} = N$

1. Poser $d = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$, écrire $\alpha = da$, $\beta = db$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
2. Alors $\text{ppcm}(\alpha, \beta) = dab$, donc $\text{pgcd} + \text{ppcm} = d(1 + ab) = N$.
3. d divise N : tester tous les diviseurs de N , et pour chacun résoudre $ab = N/d - 1$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

2.6 Théorème de Bézout et lemme de Gauss

THÉORÈME 2.6 — Identité de Bézout

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, non tous nuls, et $d = \text{pgcd}(a, b)$. Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$au + bv = d.$$

En particulier, a et b sont premiers entre eux $\iff$ il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

THÉORÈME 2.7 — Lemme de Gauss

Si $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors $a \mid c$.

THÉORÈME 2.8 — Conséquence pratique

Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, $a \mid n$ et $b \mid n$, alors $ab \mid n$.

🔧 MÉTHODE 2.5 — Trouver une solution particulière de $au + bv = 1$ (Bézout)

Algorithme d'Euclide remonté :

1. Effectuer l'algorithme d'Euclide jusqu'à obtenir un reste 1.
2. Remonter les égalités en exprimant chaque reste comme combinaison linéaire de a et b .
3. Conclure $au_0 + bv_0 = 1$ ($\Rightarrow$ aussi solution de $au + bv = c$ via multiplication par c).

2.7 Équations diophantiennes $ax + by = c$

THÉORÈME 2.9 — Existence et structure des solutions

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$, a, b non tous nuls, et $d = \text{pgcd}(a, b)$.

- L'équation $ax + by = c$ a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si $d \mid c$.

- Si (x_0, y_0) est une solution particulière, toutes les solutions sont :

$$x = x_0 + \frac{b}{d}k, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

🔧 MÉTHODE 2.6 — Résoudre $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$

1. Calculer $d = \text{pgcd}(a, b)$. Vérifier que $d \mid c$ (sinon, pas de solution).
2. Trouver une solution particulière (x_0, y_0) : par tâtonnement pour les petits coefficients, sinon par l'algorithme d'Euclide remonté pour résoudre d'abord $au + bv = d$, puis multiplier par c/d .

3. Soustraire à l'équation générale l'équation particulière :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \iff a(x - x_0) = -b(y - y_0).$$

4. Diviser par d : $\frac{a}{d}(x - x_0) = -\frac{b}{d}(y - y_0)$, et comme $\text{pgcd}(a/d, b/d) = 1$, le lemme de Gauss donne :

$$x - x_0 = \frac{b}{d}k, \quad y - y_0 = -\frac{a}{d}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. Conclure par l'ensemble des solutions.

🔍 EXEMPLE 2.4 — Résolution de $11x - 26y = 1$

Étape 1. $\text{pgcd}(11, 26) = 1$, donc il y a des solutions.

Étape 2. Une solution particulière : $(-7, -3)$ car $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = -77 + 78 = 1$. ✓

Étape 3. Soustrayant : $11(x + 7) - 26(y + 3) = 0$, soit $11(x + 7) = 26(y + 3)$.

Étape 4. Comme $\text{pgcd}(11, 26) = 1$, $11 \mid (y + 3)$, donc $y + 3 = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$, et $11(x + 7) = 26 \times 11k$, donc $x + 7 = 26k$.

Étape 5. Solutions : $(x, y) = (-7 + 26k, -3 + 11k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.8 Congruences

DÉFINITION 2.4 — Congruence modulo n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $a \equiv b \pmod{n}$ si $n \mid (a - b)$, c'est-à-dire si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n .

PROPRIÉTÉ 2.4 — Compatibilité des congruences

Si $a \equiv a' \pmod{n}$ et $b \equiv b' \pmod{n}$, alors :

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n}, \quad a - b \equiv a' - b' \pmod{n}, \quad ab \equiv a'b' \pmod{n}.$$

Par récurrence : $a^k \equiv a'^k \pmod{n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Attention : on ne peut pas diviser une congruence par un facteur, sauf si ce facteur est premier avec n .

⚙️ MÉTHODE 2.7 — Calculer $a^n \bmod m$ rapidement

1. Calculer $a \bmod m$, puis $a^2 \bmod m$, $a^3 \bmod m$, ...
2. Repérer la *période* : il existe T tel que $a^T \equiv 1 \pmod{m}$ (ou un autre cycle court).
3. Faire la division euclidienne $n = qT + r$. Alors $a^n \equiv a^r \pmod{m}$.

💡 EXEMPLE 2.5 — Reste de 17^{97} modulo 10

$17 \equiv 7 \pmod{10}$, donc $17^{97} \equiv 7^{97} \pmod{10}$.

Calcul des puissances de 7 modulo 10 : $7^1 = 7$, $7^2 = 49 \equiv 9$, $7^3 \equiv 63 \equiv 3$, $7^4 \equiv 21 \equiv 1 \pmod{10}$. Période $T = 4$.

$97 = 4 \times 24 + 1$, donc $7^{97} \equiv 7^1 \equiv 7 \pmod{10}$.

Donc le **chiffre des unités** de 17^{97} est 7.

⚙️ MÉTHODE 2.8 — Démontrer une propriété de divisibilité par récurrence

Pour démontrer $\forall n \in \mathbb{N}, p \mid u_n$:

1. **Initialisation** : vérifier $p \mid u_0$ (ou u_{n_0}).
2. **Hérédité** : supposer $p \mid u_n$, écrire $u_n = kp$, et montrer que u_{n+1} s'écrit comme une combinaison entière de u_n et d'un multiple de p .
3. **Conclusion**.

Alternative : travailler en congruences modulo p : montrer $u_{n+1} \equiv 0 \pmod{p}$ en utilisant l'hypothèse $u_n \equiv 0 \pmod{p}$.

💡 EXEMPLE 2.6 — Divisibilité par 11

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 11 \mid 3^{n+3} - 4^{4n+2}$.

Initialisation. $n = 0$: $3^3 - 4^2 = 27 - 16 = 11$. ✓

Hérédité. Supposons $3^{n+3} - 4^{4n+2} = 11k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned} 3^{n+4} - 4^{4n+6} &= 3 \cdot 3^{n+3} - 256 \cdot 4^{4n+2} \\ &= 3 \cdot 3^{n+3} - (253 + 3) \cdot 4^{4n+2} \\ &= 3 \left(3^{n+3} - 4^{4n+2} \right) - 11 \times 23 \times 4^{4n+2} \\ &= 3 \times 11k - 11 \times 23 \times 4^{4n+2} \\ &= 11 \left(3k - 23 \times 4^{4n+2} \right). \end{aligned}$$

Donc $11 \mid 3^{n+4} - 4^{4n+6}$. ✓

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.9 Systèmes de congruences (théorème chinois implicite)

⚙️ MÉTHODE 2.9 — Résoudre $\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$

1. **Première équation** : $x = a + mt$, $t \in \mathbb{Z}$.
2. **Substituer dans la seconde** : $a + mt \equiv b \pmod{n}$, soit $mt \equiv b - a \pmod{n}$.
3. **Résoudre cette équation diophantienne** en t (équivalente à $mt + ns = b - a$).

4. Trouver $t = t_0 + (n/d)k$ où $d = \text{pgcd}(m, n)$.
5. Conclure : $x = a + m(t_0 + (n/d)k) = a + mt_0 + \text{ppcm}(m, n)k$ (si $d = 1$).

La solution est unique modulo $\text{ppcm}(m, n)$ si $d \mid (b - a)$; sinon, pas de solution.

🔍 ASTUCE DE RÉDACTION

Au Bac, on présente souvent les systèmes sous la forme :

$$\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{23} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

Pour vérifier rapidement une solution candidate x_0 , calcule $x_0 \pmod{23}$ et $x_0 \pmod{7}$.

2.10 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Division euclidienne. $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Bases. $x = \overline{a_n \dots a_0}^{(b)} \iff x = \sum a_i b^i$ avec $0 \leq a_i < b$. Méthode : divisions successives, lire les restes *de bas en haut*.

Diviseurs de $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. $d(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

Test de primalité. n premier $\iff$ aucun premier $\leq \sqrt{n}$ ne divise n .

PGCD/PPCM. $\text{pgcd} \times \text{ppcm} = ab$; Euclide : restes successifs ; via décomposition : min et max des exposants.

Bézout. $\text{pgcd}(a, b) = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = 1$.

Gauss. $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$.

Équation diophantienne $ax + by = c$. Solutions $\iff d \mid c$. Forme générale : $x = x_0 + \frac{b}{d}k$, $y = y_0 - \frac{a}{d}k$.

Congruences. $a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a - b)$. Compatibles avec $+$, $-$, $\times$, $^$.

Calcul de $a^n \pmod{m}$. Trouver la *période* T telle que $a^T \equiv 1$, puis $a^n \equiv a^{n \bmod T}$.

Système de congruences. Résoudre la 1^{re} (paramétrer x), substituer dans la 2^e, résoudre l'équation diophantienne associée.

2.11 Exercices issus des sujets de Bac

🎓 EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Équations diophantiennes et systèmes de congruences

- **Bac 2025 — Exercice 2-II :** équation $23\alpha + 7\beta = 1$, équation $23u - 7v = 6$, système $\{x \equiv 10 \pmod{23}; x \equiv 4 \pmod{7}\}$, plus petite solution divisible par 16.
- **Bac 2022 — Exercice 1 :** divisibilité de $36n^2 + 33n^{n+1} + 1$ par 13, chiffre des unités de 17^{97} , système $a + b = 1734$ avec $a \wedge b = 17$, équation $17x - 13y = 4$, reste de la division par 221.
- **Bac 2018 — Exercice 2-I :** équation $8x + 5y = 1$, équation $8x + 5y = 100$, problème concret (auberge du VIII^e siècle).
- **Bac 2016 — Exercice 2-II :** équation $11x - 26y = 1$, couple particulier $(-7, -3)$, solution dans $0 \leq p \leq 25$.

Systèmes de numération

- **Bac 2025 — Exercice 2-II** : lien équation diophantienne et systèmes de numération.
- **Bac 2021 — Exercice 2-A** : nombres N et N' écrits $\overline{100x}^{(x+1)}$ et $\overline{x001}^{(x+1)}$, conversion entre bases, divisibilité par $x + 1$.

PGCD, PPCM et engrenages

- **Bac 2019 — Exercice 2-I** : roues d'engrenage (12, 18, n dents), nombre de tours pour retour à la position initiale, PPCM.
- **Bac 2021 — Exercice 2-B** : couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $\text{pgcd}(\alpha, \beta) + \text{ppcm}(\alpha, \beta) = \alpha\beta - 9$.
- **Bac 2015 — Exercice 2-I** : nombre de diviseurs de $N = 2^\alpha 3^\beta$ et de N^2 , relation $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
- **Bac 2016 — Exercice 2-I** : champ rectangulaire $525 \text{ m} \times 285 \text{ m}$ à entourer d'arbres équidistants, calcul du PGCD.

Divisibilité et récurrence

- **Bac 2023 — Exercice 1-II** : problème concret : marchand d'ovins vendant moutons à 80 000 CFA et chèvres à 50 000 CFA pour 1 000 000 CFA.

Consigne d'entraînement. Les exercices d'arithmétique sont souvent “courts mais piégeux”. Compte 30–40 min par exercice. **Garde une trace écrite** de chaque calcul de PGCD, de chaque résolution d'équation diophantienne : c'est la justification qui rapporte les points.

CHAPITRE 3

Fonctions numériques

Introduction

Ce chapitre rassemble les outils généraux d'étude de fonctions : ensemble de définition, limites, continuité, dérivabilité, sens de variation, asymptotes, et plan d'étude complet. **C'est le chapitre le plus important du Bac** : le Problème (9–10 points) est presque toujours une étude de fonction, souvent enrichie de logarithme, d'exponentielle, d'intégrale ou de suite. Les chapitres 5, 6, et 4 sont à lire en complément.

3.1 Ensemble de définition

🔧 MÉTHODE 3.1 — Déterminer l'ensemble de définition D_f

On part de $D_f = \mathbb{R}$ et on enlève les valeurs interdites :

- **Dénominateur** $\frac{u(x)}{v(x)}$: enlever $\{x : v(x) = 0\}$.
- **Racine carrée** $\sqrt{u(x)}$: exiger $u(x) \geq 0$.
- **Logarithme** $\ln(u(x))$: exiger $u(x) > 0$.
- **Tangente** $\tan(x)$: exclure $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Pour les fonctions composées, croiser les conditions.

💡 EXEMPLE 3.1 — Ensemble de définition

$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x^2}}.$$

- $\ln(x-1)$ exige $x-1 > 0 \iff x > 1$.
- $\sqrt{4-x^2}$ exige $4-x^2 \geq 0 \iff -2 \leq x \leq 2$.
- Dénominateur non nul : $4-x^2 \neq 0 \iff x \neq \pm 2$.

Intersection : $D_f =]1; 2[$.

3.2 Limites

3.2.1 Limites usuelles

PROPRIÉTÉ 3.1 — Limites de référence

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \ (n \geq 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+. \end{aligned}$$

Croissances comparées (à retenir absolument !) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \ (n > 0), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-.$$

3.2.2 Opérations et formes indéterminées

PROPRIÉTÉ 3.2 — Opérations sur les limites

Les limites se comportent “normalement” avec $+$, $-$, $\times$, $/$, $\circ$, sauf dans les *formes indéterminées* :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

❄ MÉTHODE 3.2 — Lever une forme indéterminée

1. **Quotient** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en $\pm\infty$: factoriser par le terme dominant au numérateur et au dénominateur.
2. **Quotient** $\frac{0}{0}$ en x_0 (polynôme) : factoriser $(x - x_0)$ haut et bas.
3. **Racine carrée** $\sqrt{f} - \sqrt{g}$: multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{f} + \sqrt{g}$.
4. **Présence de $\ln$ ou e^x** : utiliser les croissances comparées.
5. **Présence de $\sin x/x$** : utiliser $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
6. **En dernier recours** : reconnaître un *nombre dérivé* : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

🔍 EXEMPLE 3.2 — Forme indéterminée $\infty - \infty$

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

On multiplie par la conjuguée :

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

On factorise par x (positif quand $x \rightarrow +\infty$) :

$$\frac{x}{x\sqrt{1 + 1/x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

3.3 Continuité

DÉFINITION 3.1 — Continuité en un point

f est continue en $x_0 \in D_f$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
 f est *continue sur un intervalle* I si elle l'est en tout point de I .

THÉORÈME 3.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f continue sur $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Version “bijection” (corollaire du TVI) : si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un *unique* $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

⚙️ MÉTHODE 3.3 — Démontrer qu’une équation $f(x) = 0$ a une unique solution

1. Vérifier que f est *continue* sur l’intervalle considéré.
2. Vérifier que f est *strictement monotone* (par étude du signe de f').
3. Vérifier qu’il y a *changement de signe* : $f(a) \cdot f(b) < 0$, ou montrer que 0 est compris entre les limites aux bornes.
4. Conclure par le corollaire du TVI : “Il existe un unique ℓ tel que $f(\ell) = 0$.”
5. Si nécessaire, encadrer ℓ par tâtonnement à la calculatrice.

3.4 Dérivabilité

DÉFINITION 3.2 — Dérivée

f est *dérivable* en x_0 si la limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On l’appelle le *nombre dérivé* en x_0 .

L’équation de la *tangente* à la courbe en x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$: tangente verticale en x_0 .

Si la limite à gauche et la limite à droite existent et sont *différentes* : f n’est pas dérivable en x_0 , mais il existe des *demi-tangentes* (typique des fonctions avec valeur absolue).

3.4.1 Dérivées usuelles à connaître

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

3.4.2 Règles de dérivation

PROPRIÉTÉ 3.3 — Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v', \quad (\lambda u)' = \lambda u', \quad (uv)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad (u^n)' = nu^{n-1}u',$$

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \quad (\text{dérivée d'une composée}).$$

PROPRIÉTÉ 3.4 — Dérivées composées usuelles

$$\begin{aligned} (\ln u)' &= \frac{u'}{u}, & (e^u)' &= u'e^u, & (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \\ (\cos u)' &= -u' \sin u, & (\sin u)' &= u' \cos u, & (u^\alpha)' &= \alpha u^{\alpha-1} u'. \end{aligned}$$

3.5 Sens de variation

THÉORÈME 3.2 — Signe de la dérivée et variations

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f' > 0$ sur I (sauf éventuellement en quelques points isolés où $f' = 0$), alors f est *strictement croissante* sur I .
- Si $f' < 0$: f *strictement décroissante*.
- Si $f' = 0$ sur tout I : f *constante* sur I .

🔧 MÉTHODE 3.4 — Étudier le sens de variation et dresser le tableau de variation

1. Déterminer D_f .
2. Calculer les limites aux bornes de D_f (et les asymptotes éventuelles).
3. Calculer $f'(x)$, simplifier au maximum (factoriser).
4. Étudier le signe de $f'(x)$ (souvent via un autre tableau de signes auxiliaire).
5. Dresser le tableau : ligne x , ligne $f'(x)$ (signe), ligne $f(x)$ (variations, valeurs aux bornes, extrema).
6. Repérer les *extrema locaux* (changement de signe de f') et leur nature (maximum ou minimum).

3.6 Asymptotes

DÉFINITION 3.3 — Différents types d'asymptotes

- **Asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ou en $-\infty$).
- **Asymptote verticale** d'équation $x = a$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.
- **Asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

🔧 MÉTHODE 3.5 — Rechercher une asymptote oblique

Méthode 1 (recherche en aveugle).

1. Calculer $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (s'il existe et est fini, $\neq 0$).
2. Calculer $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ (s'il existe et est fini).
3. Conclure que la droite $y = ax + b$ est asymptote.

Méthode 2 (énoncé suggère $y = ax + b$).

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)]$.
2. Si la limite est 0, l'asymptote est confirmée.
3. **Position relative** : étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$: si positif, la courbe est au-dessus de l'asymptote ; si négatif, en dessous.

3.7 Symétries de la courbe

PROPRIÉTÉ 3.5 — Axe et centre de symétrie

Soit (C_f) la courbe de f .

- La droite $x = a$ est **axe de symétrie** de (C_f) si et seulement si $\forall x \in D_f, f(2a - x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est **centre de symétrie** de (C_f) si et seulement si $\forall x \in D_f, f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Cas particuliers :

- f *paire* ($f(-x) = f(x)$) : axe $x = 0$.
- f *impaire* ($f(-x) = -f(x)$) : centre $O(0, 0)$.

3.8 Plan d'étude complète d'une fonction

🔧 MÉTHODE 3.6 — Étude complète d'une fonction f

1. **Domaine** D_f .
2. **Limites aux bornes** de D_f ; **asymptotes**.
3. **Dérivée** f' , **signe de** f' , **tableau de variation**.
4. **Extrema** (valeurs et nature).
5. **Points particuliers** : intersection avec les axes ($f(x) = 0, f(0)$), tangentes remarquables.
6. **Symétries éventuelles**.
7. **Tableau de variation** récapitulatif.
8. **Tracé** de (C_f) avec asymptotes, tangentes remarquables, et points particuliers.

🔍 EXEMPLE 3.3 — Étude de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

Domaine. $D_f = \mathbb{R}^*$.

Limites. En $\pm\infty$: $f(x) = x - \frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$, et $f(x) - x = -\frac{1}{x} \rightarrow 0$. Donc *asymptote oblique* $y = x$ en $\pm\infty$.

En 0^+ : $f \rightarrow -\infty$; en 0^- : $f \rightarrow +\infty$. Asymptote verticale $x = 0$.

Dérivée. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ pour tout $x \neq 0$. f est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Symétrie. $f(-x) = \frac{x^2 - 1}{-x} = -f(x)$: f est *impaire*, O est centre de symétrie.

Points particuliers. $f(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$. Les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ sont sur la courbe.

3.9 Fonctions et valeurs absolues

🔧 MÉTHODE 3.7 — Étudier $g(x) = |f(x)|$

1. Étudier le signe de $f(x)$ pour “ouvrir la valeur absolue” :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

2. Étudier g comme *réunion* de morceaux.
3. Aux points où $f(x) = 0$, g a souvent un *point anguleux* (demi-tangentes opposées). Calculer les demi-dérivées séparément à gauche et à droite.
4. Pour le tracé : la courbe de g est obtenue à partir de celle de f en *remplaçant les portions sous l'axe des abscisses par leurs symétriques par rapport à cet axe*.

💡 EXEMPLE 3.4 — Cas du Bac 2025

$f(x) = xe^{1-x}$ et $g(x) = |x|e^{1-x}$.

- Sur $] -\infty; 0]$: $|x| = -x$, donc $g(x) = -xe^{1-x} = -f(x)$. La courbe de g sur cet intervalle est la symétrique de celle de f par rapport à (Ox) .
- Sur $[0; +\infty[$: $g(x) = xe^{1-x} = f(x)$.

3.10 Bijections et fonction réciproque

THÉORÈME 3.3 — Théorème de la bijection

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f réalise une *bijection* de I sur $J = f(I)$. Sa réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens. De plus, si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

🔧 MÉTHODE 3.8 — Construction de la courbe de f^{-1}

La courbe de f^{-1} se déduit de celle de f par *symétrie par rapport à la première bissectrice* $y = x$.

3.11 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Ensemble de définition. Dénominateur $\neq 0$; racine ≥ 0 ; $\ln > 0$.

Croissances comparées. $\frac{\ln x}{x^n} \rightarrow 0$, $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$, $x \ln x \rightarrow 0^-$ en 0^+ .

Formes indéterminées. $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $0/0$, ∞/∞ , 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

Lever une FI. Factoriser ; conjugué ; croissances comparées ; nombre dérivé.

Continuité. f continue en $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f = f(x_0)$.

TVI corollaire. Continue + strict. monotone + signe change $\Rightarrow$ unique racine.

Dérivées. $(uv)' = u'v + uv'$; $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$; $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$.

Composées. $(\ln u)' = u'/u$; $(e^u)' = u'e^u$; $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$.

Tangente en x_0 . $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Variations. $f' > 0 \Rightarrow f$ strict. croissante ; $f' < 0 \Rightarrow$ strict. décroissante.

Asymptotes. Horizontale : $y = \ell$ si $\lim_{\infty} f = \ell$. Verticale : $x = a$ si $\lim_a f = \pm\infty$. Oblique : $y = ax + b$ si $a = \lim_{\infty} f/x$, $b = \lim_{\infty} (f - ax)$.

Symétrie. Axe $x = a$: $f(2a - x) = f(x)$. Centre $\Omega(a, b)$: $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Bijection réciproque. f continue + strict. monotone $\Rightarrow$ bijection $I \rightarrow f(I)$; courbes symétriques par rapport à $y = x$; $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Plan d'étude. (1) D_f (2) Limites + asymptotes (3) f' + signe (4) Tableau de variation (5) Points particuliers + tangentes (6) Symétries (7) Tracé.

3.12 Exercices issus des sujets de Bac

EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Les problèmes du Bac sont presque tous des études de fonctions. Voici quelques sujets très représentatifs (à coupler avec les chapitres logarithme, exponentielle et intégration).

Étude de fonctions avec exponentielle

- **Bac 2025 — Problème :** $f(x) = xe^{1-x}$, puis $g(x) = |x|e^{1-x}$, et famille $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$; points fixes, position relative.
- **Bac 2017 — Problème :** $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x+1} - x$ sur $[0; +\infty[$.
- **Bac 2016 — Problème :** modèle médicamenteux avec exponentielle.

Étude de fonctions avec logarithme

- **Bac 2024 — Problème :** étude d'une fonction $g(x) = x/(x+1) - \ln(x+1)$, suivie de la fonction f associée.
- **Bac 2023 — Problème :** $f(x) = x + 2 - \frac{1}{2} \ln x$, existence d'une unique racine ℓ , signe de f .
- **Bac 2021 — Problème :** $g(x) = x - 1 - x \ln x$, signe de g , étude de f associée.
- **Bac 2018 — Problème :** équation différentielle $y' - 2y = -2/(1 + e^{-2x})$, puis étude de fonction.

Étude avec trigonométrie

- **Bac 2022 — Problème :** $f(x) = \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x}$ sur $[0; \pi]$, bijection, construction de $(\mathcal{C})$.

Bijection, fonction réciproque

- **Bac 2022, Partie I — Problème :** f bijection de $[0; \pi]$ sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$.

Consigne d'entraînement. Bloque **1 h30 à 2 h** sur chaque problème. Trace systématiquement la courbe, même rapidement : cela aide à détecter les erreurs.

CHAPITRE 4

Primitives et calcul intégral

Introduction

Ce chapitre est doublement important : (1) le calcul intégral apparaît souvent en fin de problème (calcul d'aire, valeur moyenne, suite définie par une intégrale) ; (2) les *primitives* sont la clé pour résoudre les équations différentielles (chap. 9). **La table des primitives usuelles doit être sue parfaitement.**

4.1 Primitives

DÉFINITION 4.1 — Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

THÉORÈME 4.1 — Existence et unicité d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I . Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante : si F et G sont deux primitives, alors $G = F + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.

4.1.1 Primitives usuelles

$f(x)$	Une primitive $F(x)$	Conditions
k	kx	
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \pi/2 + k\pi$

PROPRIÉTÉ 4.1 — Primitives de fonctions composées

Pour u dérivable sur I avec $u(x) > 0$ là où c'est nécessaire :

$$u' \cdot u^n \ (n \neq -1) \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{u'}{u} \longrightarrow \ln |u|$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \longrightarrow 2\sqrt{u}$$

$$u'e^u \longrightarrow e^u$$

$$u' \cos u \longrightarrow \sin u$$

$$u' \sin u \longrightarrow -\cos u$$

🔧 MÉTHODE 4.1 — Trouver une primitive “à vue”

1. Repérer un motif standard : $u'u^n$, u'/u , $u'e^u$, $u'/\sqrt{u}$, $u' \cos u$, ...
2. Identifier u et u' . Bien souvent, u apparaît à l'intérieur d'une racine, d'un logarithme, d'une exponentielle, et u' figure (à un facteur multiplicatif près) au numérateur ou devant.
3. Ajuster par une *constante multiplicative* si u' n'apparaît pas exactement.

🔍 EXEMPLE 4.1 — Primitive de $\frac{2x}{x^2+1}$

$u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$. La fonction est de la forme u'/u , donc une primitive est $\ln |u| = \ln(x^2 + 1)$.

🔍 EXEMPLE 4.2 — Primitive de xe^{x^2}

Posons $u = x^2$, $u' = 2x$. Alors $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'e^u$, donc une primitive est $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

4.2 Intégrale définie

DÉFINITION 4.2 — Intégrale d'une fonction continue

Soit f continue sur $[a, b]$, et F une primitive de f sur $[a, b]$. On définit l'intégrale de f entre a et b par :

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

PROPRIÉTÉ 4.2 — Propriétés de l'intégrale

Pour f, g continues sur un intervalle contenant a, b, c , et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- **Linéarité** : $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.
- **Relation de Chasles** : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.
- **Inversion des bornes** : $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

- **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
- **Croissance** : si $f \leq g$ sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

THÉORÈME 4.2 — Inégalité de la moyenne

Si $m \leq f \leq M$ sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

DÉFINITION 4.3 — Valeur moyenne

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est :

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

4.3 Intégration par parties (IPP)

THÉORÈME 4.3 — Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) \, dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) \, dx.$$

🔧 MÉTHODE 4.2 — Choisir u et v' dans une IPP

On cherche à simplifier l'intégrale. Posons :

- u = la fonction qu'on *dérive* : on veut que u' soit plus simple que u (donc on choisit u = polynôme, ou $u = \ln$).
- v' = la fonction qu'on *intègre* : on veut savoir l'intégrer (donc $v' = e^x, \cos x, \sin x, x^n$).

Règle mnémotechnique LIPET (priorité de choix pour u , dans l'ordre) :

Logarithme, Inverse trigo, Polynôme, Exponentielle, Trigonométrie.

Cas typiques :

- $\int x^n e^x \, dx$: $u = x^n, v' = e^x$.
- $\int x^n \ln x \, dx$: $u = \ln x, v' = x^n$.
- $\int x \sin x \, dx, \int x \cos x \, dx$: $u = x, v' = \sin x$ (ou $\cos x$).
- $\int \ln x \, dx$: $u = \ln x, v' = 1$ (astuce classique).

💡 EXEMPLE 4.3 — IPP : $\int_0^1 x e^x \, dx$

Posons $u = x, v' = e^x$, donc $u' = 1, v = e^x$.

$$\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$$

🔗 EXEMPLE 4.4 — IPP : $\int_1^e \ln x \, dx$

Posons $u = \ln x$, $v' = 1$, donc $u' = 1/x$, $v = x$.

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx = (e - 0) - (e - 1) = 1.$$

4.4 Applications : aires et volumes

THÉORÈME 4.4 — Aire sous la courbe

Soit f continue et positive sur $[a, b]$. L'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses, et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \, dx \quad (\text{en unités d'aire u.a.}).$$

Si l'unité du repère est 1cm sur chaque axe, alors $1 \text{ u.a.} = 1 \text{ cm}^2$. Si l'unité est différente sur chaque axe, $1 \text{ u.a.} = \text{produit des unités}$. Par exemple, unité graphique 2 cm en x et 3 cm en y donne $1 \text{ u.a.} = 6 \text{ cm}^2$.

🔧 MÉTHODE 4.3 — Calculer une aire entre deux courbes

1. Trouver les abscisses a et b d'intersection : résoudre $f(x) = g(x)$.
2. Déterminer laquelle des deux fonctions est au-dessus de l'autre sur $[a, b]$ (étude du signe de $f - g$).
3. Aire = $\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx = \int_a^b (\text{fonction du dessus} - \text{fonction du dessous}) \, dx$.

🔗 EXEMPLE 4.5 — Aire entre $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur $[0, 1]$

Sur $[0, 1]$, $x \geq x^2$, donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$

4.5 Suites définies par une intégrale

Très fréquent au Bac : on définit $I_n = \int_a^b f_n(x) \, dx$ et on étudie la suite (I_n) .

🔧 MÉTHODE 4.4 — Étudier une suite $I_n = \int_a^b f_n$

1. **Calculer** I_0 (et I_1 si pertinent) explicitement.
2. **Relation de récurrence** : faire une IPP sur I_n pour exprimer I_n en fonction de I_{n-1} (ou I_{n+1} en fonction de I_n).
3. **Monotonie** : étudier $I_{n+1} - I_n = \int_a^b (f_{n+1} - f_n) \, dx$, signe par positivité de l'intégrale.
4. **Encadrement et limite** : encadrer f_n par des fonctions plus simples, puis intégrer, utiliser le théorème des gendarmes.

4.6 Parité et intégrale

PROPRIÉTÉ 4.3 — Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur $[-a, a]$

Si f est paire : $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$.

Si f est impaire : $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$.

🔍 ASTUCE DE RÉDACTION

Avant de te lancer dans un calcul d'intégrale entre $-a$ et a , regarde toujours la *parité* de la fonction. Si elle est impaire, le résultat est 0 : tu gagnes plusieurs minutes.

4.7 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Primitive. F primitive de $f \iff F' = f$. Deux primitives diffèrent d'une constante.

Primitives usuelles. $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $\frac{1}{x} \rightarrow \ln|x|$; $e^x \rightarrow e^x$; $\sin \rightarrow -\cos$; $\cos \rightarrow \sin$.

Formes composées. $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $u'/u \rightarrow \ln|u|$; $u'/\sqrt{u} \rightarrow 2\sqrt{u}$; $u'e^u \rightarrow e^u$; $u' \cos u \rightarrow \sin u$; $u' \sin u \rightarrow -\cos u$.

Intégrale. $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Propriétés. Linéarité ; Chasles ; inversion des bornes ; positivité ; croissance.

Valeur moyenne. $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

IPP. $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$. Choix de u : règle **LIPET**.

Aires. Aire sous C_f ($f \geq 0$) : $\int_a^b f$ u.a. Aire entre courbes : $\int_a^b |f - g|$.

Parité. f paire $\Rightarrow \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$; f impaire $\Rightarrow \int_{-a}^a f = 0$.

Méthode IPP cas typiques. $\int x^n e^x : u = x^n$. $\int x^n \ln x : u = \ln x$. $\int \ln x : u = \ln x, v' = 1$.

4.8 Exercices issus des sujets de Bac

🎓 EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Le calcul intégral apparaît surtout en *partie C* des problèmes, en complément d'une étude de fonction.

Calcul direct et IPP

- **Bac 2025, Partie B — Problème** : famille $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$, étude de variations, et question intégrale en partie finale.
- **Bac 2024, Partie C — Problème** : calcul d'intégrale liée à $\ln$.
- **Bac 2018 — Problème** : équation différentielle $y' - 2y = -2/(1 + e^{-2x})$, puis primitive.

Aires et applications

- **Bac 2017, Partie B — Problème** : calcul d'aire sous la courbe de $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x+1} - x$.
- **Bac 2016 — Problème** : modèle médicamenteux : quantité résiduelle calculée par intégrale.

Suites définies par une intégrale

- **Bac 2021, Partie C — Problème** : suite $I_n = \int \dots$ liée à f , IPP, encadrement.
- **Bac 2023, Partie C — Problème** : suite définie par intégrale, monotonie, limite.

Consigne d'entraînement. Refais TOUTES les IPP qui apparaissent dans les problèmes des 10 dernières années. Si tu maîtrises l'IPP et les primitives usuelles, tu n'es jamais bloqué.

CHAPITRE 5

Fonction logarithme népérien

Introduction

La fonction logarithme népérien $\ln$ est l'**ingrédient le plus fréquent du problème du Bac** : dans presque la moitié des sujets récents, le problème étudie une fonction comportant $\ln$. Maîtriser *toutes* les propriétés algébriques, les limites de référence et les techniques d'étude est indispensable.

5.1 Définition et propriétés algébriques

DÉFINITION 5.1 — Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est l'unique primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Autrement dit :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \ln 1 = 0.$$

Le nombre $e \approx 2,71828$ est défini par $\ln e = 1$.

THÉORÈME 5.1 — Propriétés algébriques fondamentales

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Q}$:

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$$

$$\ln(a^n) = n \ln a, \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a.$$

⚠ PIÈGE CLASSIQUE

Erreurs à éviter absolument :

- $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$ (sauf cas particulier !).
- $\ln(a - b)$: aucune simplification, à ne jamais transformer.
- $(\ln a)^2 \neq \ln(a^2)$: $\ln(a^2) = 2 \ln a$, mais $(\ln a)^2$ reste $(\ln a)^2$.

5.2 Équations et inéquations avec $\ln$

❄ MÉTHODE 5.1 — Résoudre $\ln u = \ln v$ ou $\ln u \geq \ln v$

1. **Conditions d'existence** : exiger $u > 0$ et $v > 0$.
2. Comme $\ln$ est strictement croissante :

$$\ln u = \ln v \iff u = v, \quad \ln u \geq \ln v \iff u \geq v.$$

3. Intersecter avec les conditions d'existence.

💡 EXEMPLE 5.1 — Résoudre $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 3$

Conditions : $x-1 > 0$ et $x+1 > 0$, soit $x > 1$.

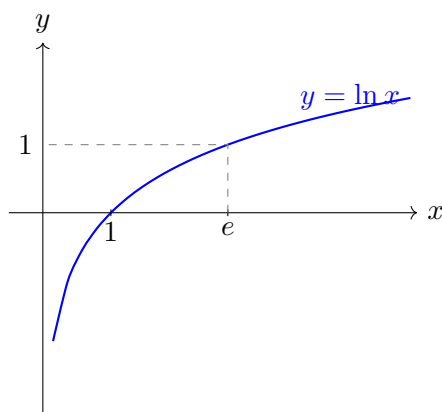
L'équation devient $\ln[(x-1)(x+1)] = \ln 3$, soit $x^2 - 1 = 3$, soit $x^2 = 4$, donc $x = 2$ ou $x = -2$. Seul $x = 2$ vérifie $x > 1$.

Solution : $S = \{2\}$.

5.3 Étude de la fonction $\ln$

PROPRIÉTÉ 5.1 — Variations et limites de $\ln$

- Domaine : $D_{\ln} =]0; +\infty[$.
- $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$: $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$: asymptote verticale $x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.
- $\ln x > 0 \iff x > 1$; $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.



THÉORÈME 5.2 — Limites de référence (croissances comparées)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n > 0).$$

Interprétation : à l'infini, x "gagne" contre $\ln x$; en 0^+ , x "gagne" contre $\ln x$.

Autre limite utile (nombre dérivé) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

5.4 Dérivée et primitive

PROPRIÉTÉ 5.2 — Dérivée et primitive avec $\ln$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
- **Composée** : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ là où $u > 0$.
- **Primitive** : une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$.
- **Primitive de $\ln$** : une primitive de $\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \ln x - x$ (à connaître).

🔗 EXEMPLE 5.2 — Primitive de $\frac{x}{x^2 + 1}$

$u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, donc $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u}$. Une primitive est $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ (le $|\cdot|$ n'est pas nécessaire car $x^2 + 1 > 0$).

5.5 Logarithme de base a

DÉFINITION 5.2 — Logarithme de base a

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, le *logarithme de base a* est :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Cas particuliers :

- $\log_e = \ln$ (logarithme népérien).
- $\log_{10} = \log$ (logarithme décimal, utile en physique).

PROPRIÉTÉ 5.3 — Propriétés du $\log$ de base a

Mêmes règles algébriques que $\ln$. De plus : $\log_a(a) = 1$, $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a^x) = x$.

5.6 Méthodes typiques d'étude d'une fonction avec $\ln$

🔧 MÉTHODE 5.2 — Étudier f contenant $\ln u(x)$

1. **Domaine** : résoudre $u(x) > 0$.
2. **Limites aux bornes** : utiliser les croissances comparées (très important si l'expression contient à la fois $\ln$ et un polynôme).
3. **Dérivée** : appliquer $(\ln u)' = u'/u$, simplifier ; factoriser pour étudier le signe.
4. **Tableau de variation, extrema, points particuliers**.
5. Si possible, vérifier les valeurs aux points particuliers (où la dérivée s'annule).

🔍 EXEMPLE 5.3 — Étude de $f(x) = x \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Domaine. $D_f =]0; +\infty[$.

Limites. En 0^+ : $f(x) = x \ln x \rightarrow 0^-$ (croissance comparée). En $+\infty$: $f \rightarrow +\infty$.

Prolongement par continuité. On peut prolonger f par $f(0) = 0$. Dans ce cas, f est continue en 0 mais *non dérivable* en 0 (la tangente y est verticale).

Dérivée. $f'(x) = \ln x + 1$. Signe : $f'(x) > 0 \iff x > 1/e$, $f'(x) = 0 \iff x = 1/e$.

Tableau de variation.

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f	0^-	$-1/e$	$+\infty$

Minimum : $f(1/e) = (1/e) \times (-1) = -1/e$.

5.7 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Définition. $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\ln' = 1/x$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

Algèbre. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Variations. Strict. croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Limites. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ ($n > 0$).

Nombre dérivé. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Signe. $\ln x > 0 \iff x > 1$; $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.

Bijection. $\ln$ est bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Réciproque : $\exp$.

Dérivées composées. $(\ln u)' = u'/u$. Primitive de u'/u : $\ln |u|$.

Primitive de $\ln$. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$.

Log de base a . $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, mêmes règles algébriques.

Pièges. $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$; $\ln(a^2) = 2 \ln a$ mais $(\ln a)^2 \neq \ln(a^2)$.

5.8 Exercices issus des sujets de Bac

EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Le logarithme est massivement présent dans les problèmes. Sélection à travailler avec priorité maximale.

Études complètes avec $\ln$

- **Bac 2024 — Problème** : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$ sur $] -1; +\infty[$, étude de g puis fonction f associée.
- **Bac 2023 — Problème** : $f(x) = x + 2 - \frac{1}{2} \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, existence d'une unique racine $\ell \in]1; 2[$, signe de f , suite définie par f .
- **Bac 2021 — Problème** : $g(x) = x - 1 - x \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, signe de g , puis $f(x) = x^2 - 1 + \ln(x+1)$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ pour $x > 0$.
- **Bac 2019, Partie B — Problème** : étude de f contenant $\ln$.

Équations et inéquations avec $\ln$

- **Bac 2025 — Problème** : interactions e^{1-x} et $\ln$ dans les questions finales.

Consigne d'entraînement. Pour les études de fonctions avec $\ln$, le *piège le plus fréquent* est l'oubli des conditions d'existence dans la dérivée. Vérifie toujours que ta dérivée n'introduit pas de nouvelles valeurs interdites.

CHAPITRE 6

Fonction exponentielle népérienne

Introduction

La fonction exponentielle est la *réciproque* du logarithme népérien. Elle est omniprésente dans les problèmes du Bac, soit seule (croissance, décroissance, modèles physico-biologiques), soit en combinaison avec $\ln$. Elle apparaît également à la solution d'équations différentielles (chap. 9).

6.1 Définition et propriétés algébriques

DÉFINITION 6.1 — Fonction exponentielle

La fonction exponentielle népérienne, notée $\exp$ ou $x \mapsto e^x$, est la fonction réciproque de $\ln$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

Elle vérifie $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

THÉORÈME 6.1 — Propriétés algébriques fondamentales

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad (e^a)^n = e^{na}.$$

Lien réciproque : $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$.

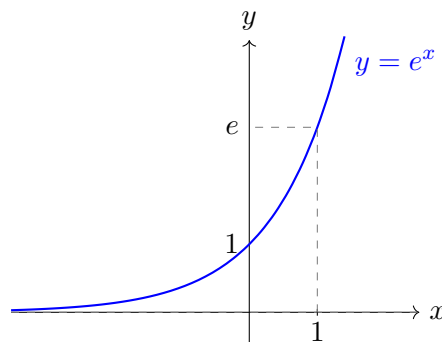
⚠ PIÈGE CLASSIQUE

$e^{a+b} \neq e^a + e^b$. C'est $e^a \cdot e^b$. De même $e^{ab} \neq e^a \cdot e^b$: c'est $(e^a)^b$.

6.2 Variations et limites

PROPRIÉTÉ 6.1 — Étude de $\exp$

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$; valeurs : $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.
- $\exp'(x) = e^x > 0$: $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$: asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (très utile pour étudier le signe d'une dérivée).



THÉORÈME 6.2 — Croissances comparées (à connaître par cœur)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Interprétation : e^x “gagne” contre tout polynôme à l’infini ; en $-\infty$, e^x “gagne” (vers 0) contre tout polynôme.

⚙️ MÉTHODE 6.1 — Lever une forme indéterminée avec e^x

1. Repérer le terme dominant (e^x domine tout polynôme).
2. Factoriser par e^x (en $+\infty$) ou utiliser la croissance comparée $x^n e^x \rightarrow 0$ (en $-\infty$).
3. Si on rencontre $\frac{e^x - 1}{x}$ ou similaire en 0 : reconnaître le nombre dérivé en 0.

🔍 EXEMPLE 6.1 — Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^x)$

On factorise par e^x (qui domine) :

$$x^2 - e^x = e^x \left(\frac{x^2}{e^x} - 1 \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, donc $\frac{x^2}{e^x} - 1 \rightarrow -1$, et $e^x \rightarrow +\infty$, donc le produit $\rightarrow -\infty$.

6.3 Équations et inéquations avec exp

⚙️ MÉTHODE 6.2 — Résoudre $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ ou $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$

exp est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. Donc :

$$e^u = e^v \iff u = v, \quad e^u \geq e^v \iff u \geq v.$$

Pas de condition d’existence supplémentaire (e^u est toujours défini).

⚙️ MÉTHODE 6.3 — Résoudre $e^x = a$, $a > 0$

$e^x = a \iff x = \ln a$. Si $a \leq 0$: pas de solution.

❖ EXEMPLE 6.2 — Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Pose $X = e^x$ (avec $X > 0$). L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$.

Discriminant $= 9 - 8 = 1$, $X = 1$ ou $X = 2$.

Donc $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$, ou $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$.

Solution : $S = \{0; \ln 2\}$.

6.4 Dérivée et primitive

PROPRIÉTÉ 6.2 — Dérivée et primitive de l'exponentielle

- $(e^x)' = e^x$.
- **Composée :** $(e^u)' = u'e^u$.
- **Primitive :** $\int e^x dx = e^x + C$; $\int u'e^u dx = e^u + C$.

❖ EXEMPLE 6.3 — Primitive de xe^{x^2}

$u = x^2$, $u' = 2x$. Donc $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'e^u$. Primitive : $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

6.5 Exponentielle complexe (lien)

PROPRIÉTÉ 6.3 — Formule d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. C'est la base de la forme exponentielle des complexes (voir chap. 1).

6.6 Exemples d'études classiques

❖ EXEMPLE 6.4 — Étude de $f(x) = xe^{1-x}$ (Bac 2025)

Domaine. $D_f = \mathbb{R}$.

Limites. En $+\infty$: $f(x) = xe^{1-x} = e \cdot \frac{x}{e^x}$; or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$: asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$. En $-\infty$: $f(x) = xe^{1-x}$ avec $x \rightarrow -\infty$ et $e^{1-x} \rightarrow +\infty$: forme $-\infty \times \infty$ qui donne $-\infty$.

Dérivée. $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$.

Comme $e^{1-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1-x$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

Maximum. $f(1) = 1 \times e^0 = 1$.

Conclusion. f est croissante sur $]-\infty, 1]$, décroissante sur $[1; +\infty[$, maximum 1 atteint en 1, et $f(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

❖ EXEMPLE 6.5 — Étude de $f(x) = e^x + e^{-x}$ (cosinus hyperbolique)

f est paire : $f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$. Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet (Oy) comme axe de symétrie.

$f'(x) = e^x - e^{-x}$. $f'(x) = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff e^{2x} = 1 \iff x = 0$. Pour $x > 0$, $e^x > 1 > e^{-x}$, donc $f'(x) > 0$. Pour $x < 0$: $f'(x) < 0$ par symétrie.

Donc f admet un minimum en 0 : $f(0) = 2$.

Limites : $f \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$.

6.7 Fiche flash

■ FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Définition. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, réciproque de $\ln$. $e^0 = 1$, $e^1 = e$. $e^x > 0$ toujours.

Algèbre. $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{a-b} = e^a / e^b$; $e^{-a} = 1/e^a$; $(e^a)^n = e^{na}$.

Réciprocité. $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$.

Variations. Strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Nombre dérivé. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Équations. $e^u = e^v \iff u = v$; $e^x = a$: si $a > 0$ alors $x = \ln a$; sinon pas de solution.

Dérivée. $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u' e^u$.

Primitive. $\int e^x = e^x + C$; $\int u' e^u = e^u + C$.

Astuce résolution. Pour $e^{2x} + be^x + c = 0$, poser $X = e^x > 0$ et résoudre le polynôme.

Pièges. $e^{a+b} \neq e^a + e^b$; $e^x \neq e \cdot x$.

6.8 Exercices issus des sujets de Bac

🎓 EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Études complètes avec e^x

- **Bac 2025 — Problème :** $f(x) = xe^{1-x}$, $g(x) = |x|e^{1-x}$, famille $f_n(x) = xe^{n(1-x)}$ avec points fixes et position relative.
- **Bac 2017 — Problème :** $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x+1} - x$ sur $[0; +\infty[$, étude complète et calcul d'aire.
- **Bac 2016 — Problème :** modèle pharmacologique : $f(t) = 2,5e^{-\alpha t}$, quantité injectée par voie intraveineuse.

Couplage avec $\ln$ et équations différentielles

- **Bac 2018 — Problème :** équation $y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$; substitution $f(x) = e^{2x}g(x)$, étude.

Consigne d'entraînement. L'exponentielle est plus "simple" que $\ln$ (pas de condition d'existence). Le piège typique est l'oubli des croissances comparées en $\pm\infty$.

CHAPITRE 7

Fonction puissance

Introduction

La fonction puissance généralise x^n à un exposant réel quelconque : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit x^α pour $x > 0$ via le logarithme. C'est un chapitre court mais il intervient naturellement dans les études de fonctions et les croissances comparées.

7.1 Définition et propriétés algébriques

DÉFINITION 7.1 — Fonction puissance d'exposant réel

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on définit :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Cette définition généralise les cas connus :

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$: $x^n = e^{n \ln x} = (e^{\ln x})^n$: cohérent avec la puissance entière.
- Si $\alpha = 1/2$: $x^{1/2} = e^{(1/2) \ln x} = \sqrt{x}$.
- Si $\alpha = -1$: $x^{-1} = e^{-\ln x} = 1/x$.

Définition limitée à $x > 0$. Cependant, pour $\alpha \in \mathbb{N}$ ou $\alpha = p/q$ avec q impair, on peut étendre la définition à $x \leq 0$ par convention.

THÉORÈME 7.1 — Propriétés algébriques

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y > 0$:

$$\begin{aligned} x^\alpha \cdot x^\beta &= x^{\alpha+\beta}, & \frac{x^\alpha}{x^\beta} &= x^{\alpha-\beta}, & (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha\beta}, \\ (xy)^\alpha &= x^\alpha y^\alpha, & \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, & x^{-\alpha} &= \frac{1}{x^\alpha}, & x^0 &= 1. \end{aligned}$$

7.2 Étude de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$

PROPRIÉTÉ 7.1 — Variations

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si $\alpha > 0$: f est strictement croissante, $f(0^+) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$.
- Si $\alpha = 0$: $f \equiv 1$ (constante).
- Si $\alpha < 0$: f est strictement décroissante, $f(0^+) = +\infty$, $f(+\infty) = 0^+$.

$f(1) = 1$ dans tous les cas.

PROPRIÉTÉ 7.2 — Dérivée

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Composée : $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ là où $u > 0$.

PROPRIÉTÉ 7.3 — Primitive

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, une primitive de x^α sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

Cas $\alpha = -1$: primitive = $\ln x$.

7.3 Limites et croissances comparées étendues

THÉORÈME 7.2 — Croissances comparées générales

Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0.$$

❄ MÉTHODE 7.1 — Étudier $f(x) = x^\alpha (\ln x)^\beta$ en 0^+

1. Comme $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $x^\alpha \rightarrow 0$: forme $0 \times \infty$.
2. Appliquer la croissance comparée : $x^\alpha (\ln x)^\beta \rightarrow 0$.
3. Si β est impair et négatif, garder le signe : $(\ln x)^\beta \rightarrow -\infty$ donc produit $\rightarrow 0^-$.

7.4 Fonction racine n -ième

DÉFINITION 7.2 — Racine n -ième

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, la racine n -ième est $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

PROPRIÉTÉ 7.4 — Dérivée de $\sqrt[n]{x}$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{1}{n x^{1-1/n}} \text{ pour } x > 0.$$

En particulier, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

7.5 Fiche flash

■ FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Définition. Pour $x > 0$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Algèbre. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

Variations. Sur $\mathbb{R}_+^*$: croissante si $\alpha > 0$, décroissante si $\alpha < 0$. $f(1) = 1$.

Dérivée. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

Primitive. $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (si $\alpha \neq -1$), sinon $\ln x$.

Croissances comparées. $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \rightarrow 0$ en $+\infty$; $\frac{x^\alpha}{e^x} \rightarrow 0$ en $+\infty$; $x^\alpha (\ln x)^\beta \rightarrow 0$ en 0^+ .

Racine. $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

7.6 Exercices issus des sujets de Bac

🎓 EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

La fonction puissance pure est rarement testée seule, mais elle apparaît systématiquement dans les études de fonctions du Bac via les croissances comparées.

- Toutes les études de fonctions avec $\ln$ ou e^x (chap. 5 et 6) mobilisent les croissances comparées impliquant x^n .
- Cherche dans tes archives les problèmes où apparaissent $x\sqrt{x}$, $x^2\sqrt{x}$, $\sqrt{x^2+1}$, etc. : dérivation et étude.

Consigne d'entraînement. Apprends par cœur la définition $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et la dérivée $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Le reste découle.

CHAPITRE 8

Suites numériques

Introduction

Les suites numériques apparaissent fréquemment au Bac, soit en partie finale du problème (suite définie par récurrence ou par intégrale), soit dans l'exercice 1 (suites complexes, voir chap. 1). Les outils centraux sont : la *récurrence*, l'étude de la *monotonie*, et la recherche de *limites*.

8.1 Généralités

DÉFINITION 8.1 — Suite numérique

Une suite numérique est une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Modes de définition :

- **Explicite** : $u_n = f(n)$ pour une certaine fonction f . Exemple : $u_n = n^2$.
- **Récurrente** : u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemple : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

DÉFINITION 8.2 — Monotonie

(u_n) est :

- *croissante* si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ;
- *décroissante* si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n ;
- *strictement croissante / décroissante* avec inégalités strictes ;
- *stationnaire* si $u_{n+1} = u_n$.

🔧 MÉTHODE 8.1 — Étudier la monotonie d'une suite

Trois techniques au choix :

1. **Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$** (le plus universel).
2. **Comparaison du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1**, si $u_n > 0$.
3. **Récurrence** (pour les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$).
4. **Cas suite explicite $u_n = f(n)$** : étudier les variations de f .

8.2 Suites arithmétiques et géométriques

DÉFINITION 8.3 — Suite arithmétique

(u_n) est *arithmétique* de raison r si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Alors : $u_n = u_0 + nr = u_p + (n - p)r$.

Somme : $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ (“nombre de termes” $\times$ “moyenne des extrêmes / 2”).

DÉFINITION 8.4 — Suite géométrique

(u_n) est *géométrique* de raison q ($q \neq 0$) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n$.

Alors : $u_n = u_0 \cdot q^n = u_p \cdot q^{n-p}$.

Somme (pour $q \neq 1$) : $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

🔧 MÉTHODE 8.2 — Démontrer qu’une suite est arithmétique ou géométrique

Arithmétique : montrer que $u_{n+1} - u_n$ est une *constante* r indépendante de n .

Géométrique : montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une *constante* q indépendante de n (en s’assurant que $u_n \neq 0$).

💡 EXEMPLE 8.1 — Suite géométrique cachée

Soit u_n définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Cherchons ℓ tel que $u_{n+1} - \ell = 3(u_n - \ell)$, soit $\ell = 3\ell - 4 \Rightarrow \ell = 2$.

Posons $v_n = u_n - 2$. Alors $v_{n+1} = 3v_n$: (v_n) est géométrique de raison 3, de premier terme $v_0 = 3$. D’où $v_n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$, donc :

$$u_n = 2 + 3^{n+1}.$$

8.3 Raisonnement par récurrence

THÉORÈME 8.1 — Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si :

1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie (*initialisation*),
2. $\forall n \geq 0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*),

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

🔧 MÉTHODE 8.3 — Rédiger une démonstration par récurrence

1. Énoncer clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$.
2. **Initialisation.** “Pour $n = 0$ (ou n_0) : on a $\dots$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.”
3. **Hérédité.** “Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l’est aussi.” Faire le calcul.

4. **Conclusion.** “D’après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.”

¶ EXEMPLE 8.2 — Une récurrence classique

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation. $n = 1$: somme = 1 et $1 \times 2/2 = 1$. ✓

Hérédité. Supposons $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8.4 Convergence et limite

DÉFINITION 8.5 — Convergence vers une limite finie

(u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$. On note $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \rightarrow \ell$.

THÉORÈME 8.2 — Limites usuelles de suites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \ (\alpha > 0), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1. \end{cases}$$

THÉORÈME 8.3 — Théorèmes de comparaison

- **Théorème des gendarmes** : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d’un certain rang et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.
- **Comparaison** : si $u_n \leq v_n$ à partir d’un certain rang et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
- **Limite et inégalité** : si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$ avec $u_n \leq v_n$ à partir d’un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$ (**inégalités non strictes uniquement**).

THÉORÈME 8.4 — Théorème de convergence monotone

- Toute suite *croissante et majorée* converge vers une limite $\ell \leq M$ (un majorant).
- Toute suite *décroissante et minorée* converge.
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

8.5 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

🔧 MÉTHODE 8.4 — Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

1. **Stabilité d'un intervalle** : montrer par récurrence qu'il existe I intervalle tel que $\forall n, u_n \in I$. Pour cela, vérifier que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$.
2. **Monotonie** : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Alternative : si f est croissante sur I , (u_n) est monotone, et le sens dépend du signe de $u_1 - u_0$.
3. **Convergence** : si (u_n) est monotone et bornée, elle converge vers un $\ell \in I$.
4. **Identifier ℓ** : la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ (point fixe de f). Résoudre cette équation.

⚠️ PIÈGE CLASSIQUE

Pour appliquer “ ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ ”, il faut **prouver d'abord que la suite converge** (sinon le raisonnement ne tient pas). On ne dit jamais directement “la limite vérifie $\ell = f(\ell)$ ”.

🔍 EXEMPLE 8.3 — Étude de $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $u_0 = 0$

Stabilité de $[0; 2]$. $u_0 = 0 \in [0; 2]$. Si $u_n \in [0; 2]$, alors $u_n + 2 \in [2; 4]$, donc $\sqrt{u_n + 2} \in [\sqrt{2}; 2] \subset [0; 2]$.

Croissance. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$. On vérifie sur $[0; 2]$: $\sqrt{x + 2} \geq x \iff x + 2 \geq x^2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0 \iff (x - 2)(x + 1) \leq 0$, vraie sur $[0; 2]$. Donc (u_n) croissante.

Convergence. (u_n) croissante majorée par 2, donc converge vers $\ell \in [0; 2]$.

Limite. $\ell = \sqrt{\ell + 2} \Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Rightarrow \ell = 2$ ou $\ell = -1$. Comme $\ell \in [0; 2]$: $\boxed{\ell = 2}$.

8.6 Suites complexes (rappel)

Une suite à valeurs complexes $z_{n+1} = az_n + b$ se traite comme une suite affine réelle. Voir chap. 1 §10. Si $|a| < 1$, (z_n) converge vers le point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$.

8.7 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Monotonie. Étudier signe de $u_{n+1} - u_n$; ou rapport u_{n+1}/u_n vs 1 ; ou par récurrence.

Suite arithmétique. $u_{n+1} - u_n = r$; $u_n = u_0 + nr$; $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.

Suite géométrique. $u_{n+1} = qu_n$; $u_n = u_0 q^n$; $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (si $q \neq 1$).

Récurrence. 1) Initialisation ; 2) Hérédité ; 3) Conclusion. Ne pas oublier la conclusion.

Limites usuelles. $1/n^\alpha \rightarrow 0$; $q^n \rightarrow 0$ si $|q| < 1$, $\rightarrow +\infty$ si $q > 1$.

Théorèmes.

- Gendarmes : $v \leq u \leq w$ et $v, w \rightarrow \ell \Rightarrow u \rightarrow \ell$.
- Convergence monotone : croissante + majorée $\Rightarrow$ converge.
- Inégalité conservée à la limite (non stricte).

Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. 1) Stabilité d'un intervalle I ; 2) monotonie ; 3) convergence ; 4) ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$. Point fixe $\ell = b/(1-a)$, poser $v_n = u_n - \ell$: (v_n) géométrique de raison a .

8.8 Exercices issus des sujets de Bac

EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Suites de complexes

- **Bac 2017 — Exercice 1** : $z_n = \frac{1}{2}(i)^n(1 + i\sqrt{3})$; étude de OM_n , $L_n = \sum M_k M_{k+1}$, limite, alignement.
- **Bac 2024 — Exercice 2** : $M_n = S(M_{n-1})$ avec S similitude, suite (a_n) arithmétique, convergence.
- **Bac 2025 — Exercice 1** : suite géométrique d'affixes $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$, détermination de la raison, similitude.

Suites définies par récurrence dans un problème

- **Bac 2023, Partie C — Problème** : suite définie via f , monotonie, encadrement, convergence vers ℓ .
- **Bac 2021, Partie C — Problème** : suite u_n liée à la fonction étudiée.
- **Bac 2019 — Problème** : suite numérique en partie finale.

Récurrence pure (divisibilité, sommes, inégalités)

- **Bac 2022 — Exercice 1** : divisibilité par 13 démontrée par récurrence.
- **Bac 2019 — Exercice 1** : questions de divisibilité de $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ par 11 (méthode du chap. 2).

Consigne d'entraînement. La rédaction d'une récurrence est **normée** : suis scrupuleusement le canevas Initialisation–Hérédité–Conclusion. Le correcteur attend les trois étapes nommées explicitement.

CHAPITRE 9

Équations différentielles

Introduction

Une équation différentielle (notée *ED*) est une équation où l'inconnue est une *fonction*, et où interviennent ses dérivées. Au Bac TSE, on étudie surtout :

- les ED linéaires du premier ordre $y' + ay = b$;
- les ED linéaires du second ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$;
- les ED avec second membre simple (cas particuliers).

Cette unité est courte mais très souvent présente, généralement **en partie finale du problème** ou en complément d'une étude de fonction.

9.1 Définitions générales

DÉFINITION 9.1 — Solution d'une ED

Soit E une équation différentielle. Une *solution* de E sur un intervalle I est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, suffisamment dérivable, et vérifiant l'équation pour tout $x \in I$.

“Résoudre l'équation différentielle E ” = trouver *toutes* les solutions de E sur l'intervalle considéré (en général $\mathbb{R}$).

“Trouver la solution telle que $y(x_0) = y_0$ ” = condition initiale, qui fixe la constante d'intégration.

9.2 ED du premier ordre $y' + ay = 0$

THÉORÈME 9.1 — Solution générale

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions :

$$y(x) = C e^{-ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

❓ EXEMPLE 9.1 — Résoudre $y' - 2y = 0$

Ici $a = -2$, donc les solutions sont $y(x) = C e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Avec la condition initiale $y(0) = 3$: $C = 3$, donc $y(x) = 3e^{2x}$.

9.3 ED du premier ordre avec second membre

9.3.1 Cas général : $y' + ay = f(x)$

THÉORÈME 9.2 — Structure des solutions

La solution générale de $y' + ay = f(x)$ s'écrit :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où :

- y_h est la solution générale de l'équation *homogène* associée $y' + ay = 0$: $y_h(x) = Ce^{-ax}$, $C \in \mathbb{R}$.
- y_p est une solution *particulière* de l'équation complète.

🔧 MÉTHODE 9.1 — Trouver une solution particulière

Selon la forme du second membre $f(x)$:

- f constante b : $y_p = b/a$ (si $a \neq 0$).
- f polynôme de degré n : chercher y_p polynôme de même degré.
- $f(x) = Ae^{\alpha x}$ avec $\alpha \neq -a$: chercher $y_p(x) = \lambda e^{\alpha x}$.
- $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$: chercher $y_p(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$.

Dans chaque cas, identifier les coefficients en substituant dans l'équation.

9.3.2 Technique de substitution (très utilisée au Bac)

Au Bac malien, on rencontre fréquemment l'énoncé *guidé* suivant : "Soit g une fonction dérivable et f la fonction définie par $f(x) = e^{\alpha x}g(x)$. Montre que f est solution de (E) si et seulement si g vérifie une équation plus simple."

🔧 MÉTHODE 9.2 — Méthode de la substitution $f(x) = e^{\alpha x}g(x)$

1. Calculer $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}g(x) + e^{\alpha x}g'(x)$.
2. Substituer f et f' dans l'équation (E) .
3. Simplifier (factoriser par $e^{\alpha x}$ qui $\neq 0$, donc on peut diviser par lui).
4. L'équation obtenue en g' et g est généralement plus simple à résoudre.
5. Trouver g , puis $f(x) = e^{\alpha x}g(x)$.

💡 EXEMPLE 9.2 — Bac 2018 : $y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$

On pose $f(x) = e^{2x}g(x)$. Alors $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$, et :

$$f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) - 2e^{2x}g(x) = e^{2x}g'(x).$$

L'équation devient $e^{2x}g'(x) = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$, soit

$$g'(x) = -\frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

On reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1 + e^{-2x}$ et $u' = -2e^{-2x}$. Donc :

$$g(x) = \ln(1 + e^{-2x}) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

D'où $f(x) = e^{2x} [\ln(1 + e^{-2x}) + K]$, $K \in \mathbb{R}$.

9.4 ED du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$

THÉORÈME 9.3 — Résolution par l'équation caractéristique

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ se résout via l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

- Si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes r_1, r_2 . Solution générale :

$$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$: racine double $r_0 = -b/(2a)$. Solution générale :

$$y(x) = (Ax + B)e^{r_0x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$: racines complexes conjuguées $r = \alpha \pm i\beta$. Solution générale :

$$y(x) = e^{\alpha x} [A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)], \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

🔗 EXEMPLE 9.3 — Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$

Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$, racines $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

Solution générale : $y(x) = Ae^x + Be^{2x}$.

🔗 EXEMPLE 9.4 — Résoudre $y'' + 4y = 0$

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$, donc $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

Solution : $y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$.

🔗 EXEMPLE 9.5 — Résoudre $y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r_0 = 1$ double.

Solution : $y(x) = (Ax + B)e^x$.

9.5 Conditions initiales

🔧 MÉTHODE 9.3 — Trouver la solution vérifiant des conditions initiales

1. Écrire la solution générale (avec une ou deux constantes selon l'ordre).
2. Utiliser les conditions initiales (typiquement $y(x_0) = y_0$, et pour l'ordre 2 : $y'(x_0) = v_0$).
3. Résoudre le système linéaire pour identifier les constantes.

🔗 EXEMPLE 9.6 — Système avec conditions initiales

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution générale : $y(x) = Ae^x + Be^{2x}$. $y'(x) = Ae^x + 2Be^{2x}$.

Conditions : $y(0) = A + B = 1$, $y'(0) = A + 2B = 0$. Résolution : $A = 2$, $B = -1$.

Donc $y(x) = 2e^x - e^{2x}$.

9.6 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

ED ordre 1 homogène. $y' + ay = 0 \Rightarrow y(x) = Ce^{-ax}$.

ED ordre 1 avec second membre. Solution générale = sol. homogène + sol. particulière.

Recherche de sol. particulière :

- $f = b$ constant : $y_p = b/a$.
- $f =$ polynôme : y_p même degré.
- $f = Ae^{\alpha x}$ avec $\alpha \neq -a$: $y_p = \lambda e^{\alpha x}$.

Substitution $f = e^{\alpha x}g$. Calculer f' , substituer, simplifier en g' et g .

ED ordre 2. $ar^2 + br + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$.
- $\Delta = 0$: $y = (Ax + B)e^{r_0x}$.
- $\Delta < 0$: $y = e^{\alpha x}[A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)]$ avec $r = \alpha \pm i\beta$.

Conditions initiales. 1 condition pour ordre 1 ($y(x_0) = y_0$), 2 conditions pour ordre 2 ($y(x_0), y'(x_0)$).

9.7 Exercices issus des sujets de Bac

🎓 EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

- **Bac 2018 — Exercice 2-II :** $y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$; substitution $f(x) = e^{2x}g(x)$, résolution complète.
- **Bac Problèmes contenant équation différentielle en partie A — Problème :** nombreux problèmes commencent par “Soit f solution de l'équation différentielle ...”, puis demandent d'en déduire l'expression de f , puis l'étudier.

Consigne d'entraînement. La rédaction d'une résolution d'ED suit toujours le schéma : (1) écrire la solution générale homogène, (2) chercher une solution particulière, (3) sommer, (4) utiliser les conditions initiales si demandé. **Toujours identifier l'équation caractéristique nommément.**

CHAPITRE 10

Dénombrement et probabilités

Introduction

Le chapitre des probabilités apparaît régulièrement dans l'Exercice 2 du Bac, souvent sous forme d'un problème concret avec **arbre pondéré et calcul d'espérance**. Maîtriser les notations, les formules de probabilités conditionnelles, et savoir tracer un arbre proprement est crucial.

10.1 Analyse combinatoire

DÉFINITION 10.1 — Cardinal et factorielle

Pour un ensemble fini E , $\text{Card}(E)$ est le nombre de ses éléments. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1, \quad 0! = 1.$$

THÉORÈME 10.1 — Trois grandes formules de dénombrement

Soit E un ensemble de cardinal n , et $p \leq n$.

- **p -listes (ou arrangements avec répétition)** : choix ordonné de p éléments parmi n avec répétition autorisée. Nombre : n^p .
- **Arrangements (sans répétition)** : choix ordonné de p éléments parmi n , sans répétition. Nombre :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \cdots (n-p+1).$$

- **Combinaisons (sans ordre)** : choix non ordonné de p éléments parmi n . Nombre :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Cas particulier : permutations de n éléments distincts = $A_n^n = n!$.

PROPRIÉTÉ 10.1 — Identités sur les coefficients binomiaux

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \text{ (Pascal)}.$$

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

🔧 MÉTHODE 10.1 — Choisir le bon dénombrement

Pose-toi trois questions :

1. Y a-t-il *ordre* dans le choix ? Oui $\Rightarrow$ arrangements ; Non $\Rightarrow$ combinaisons.
2. Y a-t-il *répétition* possible ? Oui $\Rightarrow$ p -listes ; Non $\Rightarrow$ arrangements/comбинаisons.
3. Sélectionne-t-on *tout l'ensemble* ou un sous-ensemble strict ? Tout $\Rightarrow$ permutations.

💡 EXEMPLE 10.1 — Tirages dans une urne

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire 3 :

- **Tirage successif avec remise** (avec répétition, avec ordre) : $10^3 = 1000$.
- **Tirage successif sans remise** : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$.
- **Tirage simultané** (sans ordre, sans répétition) : $\binom{10}{3} = 120$.

10.2 Probabilités : définitions

DÉFINITION 10.2 — Vocabulaire

Soit Ω un *univers* (ensemble de résultats possibles d'une expérience aléatoire, supposé fini).

- Un *événement* est une partie $A \subset \Omega$.
- *Événement contraire* : $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- *Événements incompatibles* : $A \cap B = \emptyset$.
- *Événements complémentaires* : $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.

DÉFINITION 10.3 — Probabilité

Une *probabilité* sur Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

En particulier $P(\emptyset) = 0$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

THÉORÈME 10.2 — Probabilité d'une union

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

DÉFINITION 10.4 — Équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, alors pour tout $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}.$$

10.3 Probabilités conditionnelles

DÉFINITION 10.5 — Probabilité conditionnelle

Soient A, B deux événements avec $P(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant B est :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

THÉORÈME 10.3 — Formule des probabilités composées

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B).$$

THÉORÈME 10.4 — Formule des probabilités totales

Soit $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ un système complet d'événements (partition de Ω , chacun de probabilité non nulle). Alors pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \times P_{B_i}(A).$$

DÉFINITION 10.6 — Indépendance

Deux événements A et B sont *indépendants* si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

De manière équivalente (si $P(B) \neq 0$) : $P_B(A) = P(A)$.

⚠ PIÈGE CLASSIQUE

Indépendance et incompatibilité sont des notions différentes. Deux événements de probabilité non nulle qui sont incompatibles (i.e. $A \cap B = \emptyset$) ne sont *jamais* indépendants (sauf cas pathologique).

10.4 Arbres pondérés

⚙ MÉTHODE 10.2 — Construire et utiliser un arbre pondéré

1. **Niveau 1** : événements liés à la première étape (ex. $B_1, B_2, \dots$), pondérés par $P(B_i)$.
2. **Niveau 2** : à chaque branche B_i , ajouter les événements A ou $\bar{A}$ pondérés par les probabilités conditionnelles $P_{B_i}(A)$.
3. **Règle 1 (multiplicative)** : la probabilité d'un chemin = produit des poids le long du chemin (ex. $P(B_i \cap A) = P(B_i) \times P_{B_i}(A)$).
4. **Règle 2 (additive)** : pour un événement défini par plusieurs chemins, on somme les probabilités des chemins (formule des probabilités totales).
5. **Règle 3** : la somme des poids des branches issues d'un même nœud vaut 1.

🔗 EXEMPLE 10.2 — Bac 2024 : indépendance dans une classe

Une classe a 26 garçons et 14 filles, donc 40 élèves. 13 garçons et n filles sont inscrits dans un centre d'apprentissage de langues (événement L).

- $P(G) = 26/40 = 13/20$; $P(F) = 14/40 = 7/20$.
- $P_G(L) = 13/26 = 1/2$; $P_F(L) = n/14$.

Par la formule des probabilités totales :

$$P(L) = P(G) P_G(L) + P(F) P_F(L) = \frac{26}{40} \times \frac{1}{2} + \frac{14}{40} \times \frac{n}{14} = \frac{13}{40} + \frac{n}{40} = \frac{13+n}{40}.$$

G et L indépendants $\iff P(G \cap L) = P(G) P(L)$, soit $\frac{13}{40} = \frac{26}{40} \times \frac{13+n}{40}$, ce qui donne $n = 7$.

10.5 Variables aléatoires

DÉFINITION 10.7 — Variable aléatoire (VA) discrète

Une variable aléatoire (à valeurs réelles) sur Ω est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. La *loi de probabilité* de X est la donnée des $P(X = x_i)$ pour chaque valeur x_i prise par X .

DÉFINITION 10.8 — Espérance, variance, écart-type

Soit X une VA prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec probabilités $p_1, \dots, p_n$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (\text{espérance}).$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_i p_i x_i^2 - \mathbb{E}(X)^2.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (\text{écart-type}).$$

🔧 MÉTHODE 10.3 — Calculer l'espérance de gain dans un jeu

1. Identifier la VA G (gain algébrique).
2. Déterminer toutes les valeurs prises par G et leurs probabilités (tableau).
3. Calculer $\mathbb{E}(G) = \sum p_i g_i$.
4. Interpréter : si $\mathbb{E}(G) > 0$, le jeu est favorable au joueur ; si $\mathbb{E}(G) < 0$, défavorable ; si $\mathbb{E}(G) = 0$, équitable.

PROPRIÉTÉ 10.2 — Linéarité de l'espérance

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et X, Y VA :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

PROPRIÉTÉ 10.3 — Variance

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X), \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

10.6 Loi binomiale

DÉFINITION 10.9 — Épreuve de Bernoulli et loi binomiale

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire avec deux issues : succès (de probabilité p) et échec (de probabilité $1 - p$).

On répète n fois cette épreuve, de manière *indépendante*. Soit X la VA comptant le nombre de succès. X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p , notée $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

THÉORÈME 10.5 — Loi binomiale : formules

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

🔗 EXEMPLE 10.3 — Application de la loi binomiale

On lance 5 fois une pièce non équilibrée donnant Pile avec probabilité $p = 0,4$. Probabilité d'obtenir exactement 3 piles :

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} (0,4)^3 (0,6)^2 = 10 \times 0,064 \times 0,36 = 0,2304.$$

Espérance : $\mathbb{E}(X) = 5 \times 0,4 = 2$; écart-type : $\sqrt{5 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{1,2} \approx 1,095$.

10.7 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Dénombrement. p -listes : n^p ; arrangements : $A_n^p = n!/(n - p)!$; combinaisons : $\binom{n}{p} = n!/[p!(n - p)!]$.

Binôme de Newton. $(a + b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Pascal. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Probabilité. $P(A) \in [0; 1]$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Équiprobabilité. $P(A) = \text{Card}(A) / \text{Card}(\Omega)$.

Conditionnelle. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(A \cap B) = P(B) P_B(A)$.

Indépendance. $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Probabilités totales. $P(A) = \sum P(B_i) P_{B_i}(A)$ pour un système complet $\{B_i\}$.

Arbre pondéré. Multiplier le long d'un chemin, sommer les chemins, somme des branches issues d'un nœud = 1.

Espérance. $\mathbb{E}(X) = \sum p_i x_i$; linéaire : $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Variance. $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$; $\sigma = \sqrt{\text{Var}}$; $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.
Binomiale. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$; $\mathbb{E} = np$; $\text{Var} = np(1 - p)$.

10.8 Exercices issus des sujets de Bac

EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Arbres pondérés et indépendance

- **Bac 2025 — Exercice 2-I** : Diaki et Zeini, tirs au but ; arbre pondéré, probabilité d'ex aequo, espérance de gain de Zeini après deux phases.
- **Bac 2024 — Exercice 1-I** : classe de 26 garçons et 14 filles, événements G, F, L (apprentissage de langues), probabilités, indépendance, recherche de n qui rend G et L indépendants.

Espérance, variance, loi de probabilité

- **Bac 2015 — Exercice 1-I** : cible avec 4 zones concentriques + extérieur ; probabilités proportionnelles aux aires ; espérance nulle ; loi de probabilité de X .

Consigne d'entraînement. Pour les exercices avec arbre pondéré, dessine **toujours l'arbre** sur ta copie : c'est 0,5–1 point automatique, et cela évite les erreurs. Vérifie que la somme des probabilités des feuilles vaut 1.

CHAPITRE 11

Géométrie plane et transformations du plan

Introduction

Ce chapitre regroupe quatre grandes notions du programme officiel : *barycentres*, *applications affines*, *isométries*, *similitudes*. C'est un chapitre massif (plus long que les autres), car presque **toutes les questions de géométrie du Bac** reposent sur ces outils. L'Exercice 2 ou la Partie II d'un exercice est quasi systématiquement sur ce thème.

11.1 Barycentres

11.1.1 Définition et premiers résultats

DÉFINITION 11.1 — Barycentre

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points du plan affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$.

Le *barycentre* de ce système de points pondérés est l'unique point G vérifiant :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

On le note $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$.

Si tous les α_i sont égaux et non nuls, G est l'*isobarycentre* (centre de gravité dans le cas de trois points).

THÉORÈME 11.1 — Formule du barycentre depuis un point quelconque

Pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}, \quad \text{où } S = \sum \alpha_i.$$

PROPRIÉTÉ 11.1 — Propriétés clés

- **Homogénéité** : G est inchangé si on multiplie tous les coefficients par un même réel $k \neq 0$.
- **Associativité (Réduction)** : on peut remplacer un sous-système $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)\}$ (avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq 0$) par son barycentre G' affecté du coefficient $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

🔧 MÉTHODE 11.1 — Construire le barycentre de trois points A, B, C avec coefficients α, β, γ

1. Vérifier $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
2. Construire $G' = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$, sur la droite (AB) . Astuce : $\overrightarrow{AG'} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$.
3. Construire $G = \text{bar}\{(G', \alpha + \beta), (C, \gamma)\}$, sur la droite $(G'C)$. Astuce : $\overrightarrow{G'G} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{G'C}$.

11.1.2 Lignes de niveau classiques

THÉORÈME 11.2 — Ligne de niveau $\left| \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \right| = k$

Si $S = \sum \alpha_i \neq 0$, alors $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = S \overrightarrow{MG}$, donc l'expression $\left| \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \right| = k$ équivaut à $MG = \frac{k}{|S|}$: c'est un *cercle de centre G* .

Si $S = 0$: $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur *constant* (indépendant de M), donc :

- soit l'équation est toujours vraie (si la constante satisfait l'équation),
- soit elle n'a aucune solution.

THÉORÈME 11.3 — Ligne de niveau $\sum \alpha_i MA_i^2 = k$

Posons $S = \sum \alpha_i$ et $G = \text{bar}\{(A_i, \alpha_i)\}$.

Si $S \neq 0$: $\sum \alpha_i MA_i^2 = S \cdot MG^2 + \sum \alpha_i GA_i^2$. Donc :

$$\sum \alpha_i MA_i^2 = k \iff MG^2 = \frac{k - \sum \alpha_i GA_i^2}{S}.$$

- Si le second membre est > 0 : cercle de centre G .
- Si $= 0$: réduit au point G .
- Si < 0 : ensemble vide.

Si $S = 0$: $\sum \alpha_i MA_i^2 = k$ est une équation linéaire en M , qui définit une *droite* (médiatrice généralisée) ou est dégénérée.

11.1.3 Lignes de niveau et coordonnées dans un repère

🔧 MÉTHODE 11.2 — Détermination d'une ligne de niveau via les coordonnées

1. Placer un repère bien choisi (souvent : A origine, ou G origine).
2. Écrire les coordonnées des points fixes A_i et celles de $M(x; y)$.
3. Calculer $MA_i^2 = (x - x_{A_i})^2 + (y - y_{A_i})^2$ et substituer dans l'équation.
4. Simplifier, reconnaître l'équation cartésienne : droite ($ax + by + c = 0$), cercle ($x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$), ou ensemble vide.

11.2 Applications affines du plan

DÉFINITION 11.2 — Application affine

Une *application affine* du plan dans lui-même est une application $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui s'écrit, dans un repère bien choisi, sous la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + g \end{cases}, \quad a, b, c, d, e, g \in \mathbb{R}.$$

Elle est associée à une application linéaire $\vec{f} : \vec{u} \mapsto \vec{f}(\vec{u})$.

THÉORÈME 11.4 — Propriétés des applications affines

- Une application affine conserve l'alignement (image d'une droite : droite ou point).
- Elle conserve les barycentres : si $G = \text{bar}\{(A_i, \alpha_i)\}$, alors $f(G) = \text{bar}\{(f(A_i), \alpha_i)\}$.
- Elle conserve les rapports de mesures algébriques sur une droite : si A, B, C sont alignés, $\frac{\overline{f(A)f(C)}}{\overline{f(A)f(B)}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

🔧 MÉTHODE 11.3 — Caractériser une application affine via les points fixes

Soit f affine. L'ensemble des points fixes $\{M : f(M) = M\}$ peut être :

- **Vide** (ex. translation non triviale) ;
- **Un seul point** (ex. rotation non triviale, homothétie de rapport $\neq 1$) ;
- **Une droite** (ex. symétrie axiale, projection sur une droite) ;
- **Le plan tout entier** : $f = \text{Id}$.

Étudier les points fixes aide à classer f .

11.3 Isométries du plan

DÉFINITION 11.3 — Isométrie

Une *isométrie* du plan est une application affine f qui *conserve les distances* : $\forall M, N, f(M)f(N) = MN$.

THÉORÈME 11.5 — Classification des isométries du plan

Toute isométrie du plan est de l'une des formes suivantes :

- **Identité** (Id).
- **Translation** de vecteur $\vec{u} : M \mapsto M + \vec{u}$.
- **Rotation** de centre Ω , d'angle θ .
- **Symétrie axiale** d'axe D .
- **Symétrie glissée** : composée d'une symétrie axiale d'axe D et d'une translation parallèle à D .

🔧 MÉTHODE 11.4 — Reconnaître une isométrie depuis son écriture analytique

Soit $f : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + g \end{cases}$.

1. **Vérifier que f est une isométrie** : la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ doit vérifier $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ et $ab + cd = 0$.
2. **Calculer le déterminant $\Delta = ad - bc$** :
 - Si $\Delta = +1$: isométrie directe (translation ou rotation).
 - Si $\Delta = -1$: isométrie indirecte (symétrie axiale ou glissée).
3. **Étudier l'ensemble des points fixes** : résoudre $f(M) = M$.
 - Vide, $\Delta = +1$: translation.
 - Un point, $\Delta = +1$: rotation (centre = pt fixe ; angle calculé via l'image d'un point particulier).
 - Droite, $\Delta = -1$: symétrie axiale (axe = droite des points fixes).
 - Vide, $\Delta = -1$: symétrie glissée.

💡 EXEMPLE 11.1 — Bac 2017 Ex.2-II

$f : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$.

Matrice : $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Vérification : $(-3/5)^2 + (4/5)^2 = 9/25 + 16/25 = 1$; $(4/5)^2 + (3/5)^2 = 1$; $(-3/5)(4/5) + (4/5)(3/5) = -12/25 + 12/25 = 0$. Donc f est une isométrie.

Déterminant : $\frac{1}{25}[(-3)(3) - (4)(4)] = \frac{1}{25}(-9 - 16) = -1$. Donc f est indirecte.

Points fixes : $f(M) = M \iff \begin{cases} -3x + 4y + 4 = 5x \\ 4x + 3y - 2 = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} -8x + 4y = -4 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$, soit

$2x - y = 1$.

Donc l'ensemble des points fixes est la droite $D : y = 2x - 1$, et f est la **symétrie axiale d'axe D** .

11.4 Similitudes du plan

DÉFINITION 11.4 — Similitude

Une *similitude* du plan est une application affine f qui multiplie toutes les distances par un même *rapport* $k > 0$: $\forall M, N, f(M)f(N) = k \cdot MN$.

Si $\Delta > 0$ (orientation conservée) : *similitude directe*.

Si $\Delta < 0$ (orientation inversée) : *similitude indirecte*.

THÉORÈME 11.6 — Forme complexe d'une similitude directe

Une similitude directe s'écrit en complexe :

$$z' = az + b, \quad a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}.$$

- **Rapport** : $k = |a|$.

- **Angle** : $\theta = \arg a$.
- **Centre** (si $a \neq 1$) : $\omega = \frac{b}{1-a}$.

Cas particuliers : $a = 1$: translation. $a \in \mathbb{R}^*$: homothétie. $|a| = 1$: rotation.

THÉORÈME 11.7 — Similitude définie par deux couples de points

Soient A, B deux points distincts d'images A', B' . Il existe une *unique* similitude directe envoyant A sur A' et B sur B' , donnée par :

$$z' - z_{A'} = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}(z - z_A).$$

- **Rapport** $k = \frac{A'B'}{AB}$.
- **Angle** $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

🔧 MÉTHODE 11.5 — Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe $z \mapsto az + b$

1. Calculer $k = |a|$ et $\theta = \arg a$.
2. Si $a = 1$: translation de vecteur d'affixe b .
3. Sinon : centre $\omega = \frac{b}{1-a}$.

💡 EXEMPLE 11.2 — Bac 2024 : similitude $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/2}z$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/2} = i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc :

- Rapport : $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Angle : $\theta = \pi/2$.
- Centre : $b = 0$, donc $\omega = 0$: la similitude a pour centre O .

f est la similitude directe de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\pi/2$.

THÉORÈME 11.8 — Effet d'une similitude sur les aires et les longueurs

Pour une similitude directe de rapport k :

- Les longueurs sont multipliées par k .
- Les angles sont conservés (dirigés, en module).
- Les aires sont multipliées par k^2 .

11.5 Fiche flash

FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Barycentre. $\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ (si $\sum \alpha_i \neq 0$). Depuis tout M : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{S} \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Propriétés. Homogénéité ; associativité ; conservation par appl. affine.

Ligne de niveau $\left| \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \right| = k$. Si $S \neq 0$: cercle de centre G . Si $S = 0$: vecteur constant ($\Rightarrow$ vide ou plan).

Ligne de niveau $\sum \alpha_i MA_i^2 = k$. Si $S \neq 0$: cercle de centre G (ou point ou $\emptyset$). Si $S = 0$: droite.

Application affine. Conserve alignement, barycentres, rapports de mesures.

Isométries. Conservent les distances. Classification : Id, translation, rotation, symétrie axiale, symétrie glissée.

Critère $\Delta = ad - bc$. $\Delta = +1$: isom. directe (translation ou rotation). $\Delta = -1$: indirecte (sym. axiale ou glissée). Points fixes : vide / un / droite / plan.

Similitude directe. $z' = az + b$. Rapport $|a|$, angle $\arg a$, centre $\frac{b}{1-a}$ (si $a \neq 1$).

Cas particuliers. $a = 1$: translation. $a \in \mathbb{R}^*$: homothétie. $|a| = 1$, $a \neq 1$: rotation.

Similitude par 2 couples. Unique sim. directe $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$: $z' - z_{A'} = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}(z - z_A)$.

Aire. Une similitude de rapport k multiplie les aires par k^2 .

11.6 Exercices issus des sujets de Bac

EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Barycentres

- **Bac 2025 — Exercice 1** : G barycentre de $\{(A, 2), (B, -2), (C, 1)\}$; affixe de G ; suite géométrique d'affixes ; similitude.
- **Bac 2024 — Exercice 1-II** : triangle isocèle ABC ($AB = AC$) ; $G = \text{bar}\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$; construction, ligne de niveau, coordonnées.
- **Bac 2023 — Exercice 2** : triangle rectangle en A ($AB = 2a$, $AC = a$) ; barycentre de $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$; point H ; lignes de niveau $\sum \alpha_i MA_i^2 = ka^2$.
- **Bac 2021 — Exercice 1** : barycentre G dans le plan complexe ; lieu défini par $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4$; nature de $ABCG$.
- **Bac 2019 — Exercice 2-II** : barycentre G de $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$ et G' de $\{(A, 1), (B, 5), (C, -2)\}$; expressions vectorielles ; alignements.
- **Bac 2017 — Exercice 2-I** : barycentre G_m de $\{(A, 1), (B, m), (C, 2m)\}$, vecteur $V_m = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$, droites et alignements.
- **Bac 2022, Problème, Partie II — Exercice** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, barycentre $G = \text{bar}\{(A, 2), (B, 3), (C, -3)\}$, application h : .

Similitudes et isométries

- **Bac 2025 — Exercice 1** : similitude directe transformant A en B et B en C via suite géométrique.
- **Bac 2024 — Exercice 2** : similitude directe S de centre O , suite $M_n = S(M_{n-1})$.
- **Bac 2017 — Exercice 2-II** : isométrie f donnée par expression analytique ; nature de f : symétrie axiale.
- **Bac 2016 — Exercice 1** : similitude directe S transformant A en E et B en F , écriture complexe, centre/angle/rapport, image de C et D , aire de l'image.

- **Bac 2018 — Exercice 1, Partie B** : application $r : z' = iz - 2i + 2$, similitude directe ; cocyclicité.

Consigne d'entraînement. Trace toujours une figure soignée pour les exercices de géométrie.

Choisis bien l'unité graphique : 1 cm pour une figure compacte, 2 cm si beaucoup de points proches.

CHAPITRE 12

Coniques

Introduction

Les coniques sont les courbes obtenues comme intersection d'un cône de révolution avec un plan. Trois types : *ellipse*, *parabole*, *hyperbole*. Au Bac TSE, ce chapitre est court et fait l'objet de questions ponctuelles plutôt que d'un exercice entier ; il faut surtout connaître les définitions, les équations réduites et les éléments caractéristiques.

12.1 Définition unifiée (foyer-directrice)

DÉFINITION 12.1 — Conique par foyer-directrice

Soit F un point (*foyer*), D une droite ne passant pas par F (*directrice*), et $e > 0$ un réel (*excentricité*). La conique de foyer F , directrice D et excentricité e est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\frac{MF}{d(M, D)} = e.$$

- Si $e < 1$: *ellipse*.
- Si $e = 1$: *parabole*.
- Si $e > 1$: *hyperbole*.

12.2 L'ellipse

DÉFINITION 12.2 — Ellipse : définition par foyers

L'ellipse est le lieu des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ (constante), où F et F' sont deux points fixes (*foyers*) et $a > 0$ avec $FF' = 2c < 2a$.

THÉORÈME 12.1 — Équation réduite

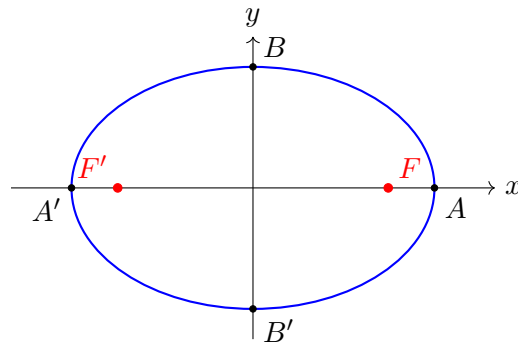
Dans un repère orthonormé centré au centre de symétrie de l'ellipse, avec l'axe focal (Ox) , l'équation réduite est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

avec $a > b > 0$ et $b^2 = a^2 - c^2$.

- a : demi-grand axe ; b : demi-petit axe ; c : distance centre-foyer.
- Foyers : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$.
- Excentricité : $e = c/a \in [0; 1[$. ($e = 0$: cercle.)

- Sommets : $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$.
- Directrices : $x = \pm a/e = \pm a^2/c$.



12.3 L'hyperbole

DÉFINITION 12.3 — Hyperbole : définition par foyers

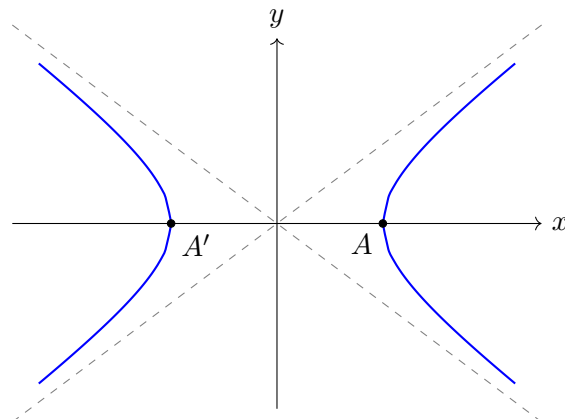
L'hyperbole est le lieu des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ (constante), avec $0 < 2a < 2c = FF'$.

THÉORÈME 12.2 — Équation réduite de l'hyperbole

Dans un repère orthonormé centré au centre, axe focal (Ox) :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

- Foyers : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$.
- Excentricité : $e = c/a > 1$.
- Sommets : $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$.
- **Asymptotes** : $y = \pm \frac{b}{a}x$.
- Directrices : $x = \pm a/e = \pm a^2/c$.



12.4 La parabole

DÉFINITION 12.4 — Parabole : définition par foyer-directrice

La parabole est le lieu des points M équidistants d'un point F (foyer) et d'une droite D (directrice) : $MF = d(M, D)$.

THÉORÈME 12.3 — Équation réduite

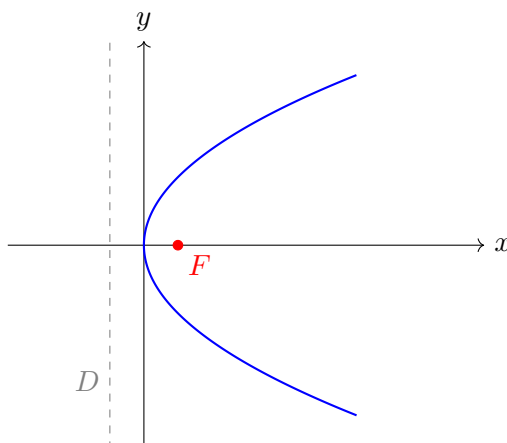
Dans un repère orthonormé centré au sommet, avec l'axe focal (Ox) :

$$y^2 = 2px, \quad p > 0,$$

où p est le *paramètre* (distance foyer-directrice).

- Foyer : $F(p/2; 0)$.
- Directrice : $x = -p/2$.
- Sommet : origine O .
- Excentricité : $e = 1$.

Forme alternative (axe vertical) : $y = ax^2 + bx + c$ (parabole bien connue du collège).



12.5 Reconnaître une conique depuis son équation

🔧 MÉTHODE 12.1 — Identifier une conique

1. Mettre l'équation sous forme réduite par *translation* (changement d'origine) et éventuellement *rotation*.
2. Identifier le type :
 - $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$: ellipse centrée en (x_0, y_0) .
 - $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$: hyperbole.
 - $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ ou similaire : parabole.
3. Identifier a, b, c, e et tracer.

🔍 EXEMPLE 12.1 — Identification rapide

$4x^2 + 9y^2 = 36$: on divise par 36 : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Ellipse de $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, $e = \sqrt{5}/3$.

12.6 Fiche flash

📌 FICHE FLASH DE FIN DE CHAPITRE

Définition unifiée. $MF/d(M, D) = e$; $e < 1$ ellipse ; $e = 1$ parabole ; $e > 1$ hyperbole.

Ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$). $c^2 = a^2 - b^2$, $e = c/a$. Sommets : $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. Foyers : $(\pm c, 0)$. Directrices : $x = \pm a^2/c$. Définition bifocale : $MF + MF' = 2a$.

Hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. $c^2 = a^2 + b^2$, $e = c/a > 1$. Sommets : $(\pm a, 0)$. Foyers : $(\pm c, 0)$. Asymptotes : $y = \pm(b/a)x$. Définition bifocale : $|MF - MF'| = 2a$.

Parabole : $y^2 = 2px$. Foyer : $(p/2, 0)$, directrice : $x = -p/2$, sommet O , $e = 1$.

Identification. Mettre sous forme canonique par translation/rotation, comparer aux équations réduites.

12.7 Exercices issus des sujets de Bac

🎓 EXERCICES TYPES ISSUS DU BAC

Les coniques font surface ponctuellement :

- En conclusion de problèmes étudiant une fonction du type $y^2 = 2px$ ou $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, on doit reconnaître la courbe.
- En géométrie analytique : transformation d'un cercle par une similitude (cercle $\rightarrow$ cercle ; ellipse possible via dilatation non isotropique).

Consigne d'entraînement. Apprends parfaitement les 3 équations réduites, identifie rapidement le type. C'est souvent une question à 1 ou 2 points en fin d'exercice.

CHAPITRE A

Formulaire général

Ce formulaire est un récapitulatif transverse à apprendre par cœur. Utilise-le pour réviser efficacement et retrouver rapidement une formule de référence.

A.1 Identités algébriques

Identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Sommes classiques :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

$$\text{Binôme de Newton : } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

A.2 Trigonométrie

Valeurs remarquables :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin \theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan \theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—

Identités fondamentales :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Angles associés :

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x,$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x, \quad \sin(\pi/2 - x) = \cos x.$$

Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a, \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Linéarisation :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

A.3 Limites et croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n > 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

A.4 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
k	0	$\ln x$	$1/x$
x^n	nx^{n-1}	$\ln u$	u'/u
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	e^u	$u'e^u$
$1/x$	$-1/x^2$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$u+v$	$u' + v'$	uv	$u'v + uv'$
u/v	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$f \circ g$	$g' \cdot f' \circ g$

A.5 Primitives usuelles

f	Primitive	f	Primitive
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
e^x	e^x	$u'e^u$	e^u
$\cos x$	$\sin x$	$u' \cos u$	$\sin u$
$\sin x$	$-\cos x$	$u' \sin u$	$-\cos u$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$u'/\sqrt{u}$	$2\sqrt{u}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$1/(1+x^2)$	$\arctan x$

A.6 Nombres complexes

Forme algébrique : $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z\bar{z} = |z|^2$.

Forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$, $|zz'| = |z||z'|$, $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$.

Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Euler : $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

Équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $\Delta < 0$) : $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

A.7 Probabilités

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.

Probabilités totales : $P(A) = \sum_i P(B_i)P_{B_i}(A)$.

Indépendance : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Espérance : $\mathbb{E}(X) = \sum_i p_i x_i$; $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $\mathbb{E} = np$, $\text{Var} = np(1-p)$.

A.8 Arithmétique

Division euclidienne : $a = bq + r$, $0 \leq r < b$.

Bézout : $\text{pgcd}(a, b) = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = 1$.

Gauss : $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$.

$\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$.

Congruences : $a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a - b)$. Compatibles avec $+$, $-$, $\times$, et puissances.

A.9 Géométrie : barycentre et similitudes

Barycentre : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{S} \sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Similitude directe $z' = az + b$ ($a \neq 1$) : rapport $|a|$, angle $\arg a$, centre $\frac{b}{1-a}$.

Aire d'une figure $\times k^2$ par similitude de rapport k .

A.10 Équations différentielles

$y' + ay = 0 \Rightarrow y = Ce^{-ax}$.

$ay'' + by' + cy = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$.
- $\Delta = 0$: $y = (Ax + B)e^{r_0 x}$.
- $\Delta < 0$: $y = e^{\alpha x} [A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)]$ ($r = \alpha \pm i\beta$).