

**FONCTIONS
LOGARITHME NEPERIEN ET
EXPONENTIELLE**

◆ *Définition et première propriétés :*

Logarithme népérien	Exponentielle
• $\ln$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1 • $D_{\ln} =]0 ; +\infty[$ • $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ • $\forall x \in]0 ; 1[, \ln x < 0$ et $\forall x \in]1 ; +\infty[, \ln x > 0$ • $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$	• $\exp$ ou $x \mapsto e^x$ est la bijection réciproque de $\ln$ • $D_{\exp} = \mathbb{R}$ • $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ • $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ • $\forall x \in]0 ; +\infty[, e^{\ln x} = x$

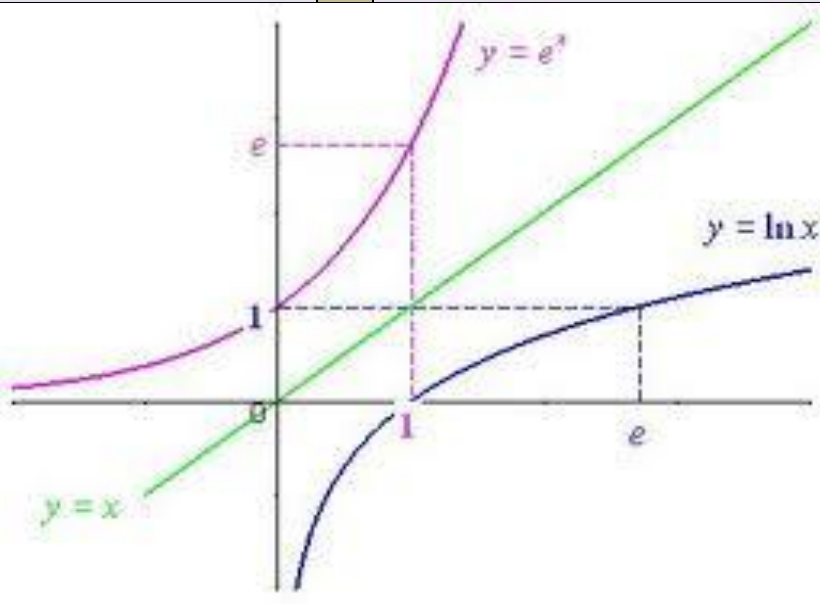
◆ *Propriétés algébriques :*

Logarithme népérien	Exponentielle
$\forall a \in]0 ; +\infty[$ et $\forall b \in]0 ; +\infty[$ on a : • $\ln ab = \ln a + \ln b$ • $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ • $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ • $\forall r \in \mathbb{R}, \ln a^r = r \ln a$ • $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ • $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$	$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a : • $e^{a+b} = e^a e^b$ • $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ • $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ • $\forall r \in \mathbb{R}, (e^a)^r = e^{ar}$ • $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ • $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

◆ *Limites utiles :*

Logarithme népérien	Exponentielle
• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow -\infty} x ^r e^x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

◆ *Dérivées et représentations graphiques :*

Logarithme népérien	Exponentielle
• $\forall x \in]0 ; +\infty[, \ln' x = \frac{1}{x}$ • $[\ln u(x)]' = [\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$	• $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$ • $[e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}$
	

Problème de Synthèse (2h)

On considère la fonction numérique f de la variable x , définie par : $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$

On désigne $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 + \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ g(x) = x^2 + 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations
2. Calculer $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $g(-1)$
3. Etudier le signe de $g(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$

PARTIE B

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f .

- En déduire une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f .
2. Montrer que la droite $(\Delta): y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f et étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Δ)
 3. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation sur D_f
 4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .
Justifier l'encadrement $0,6 < \alpha < 0,7$.
 5. Tracer (Δ) et $(\mathcal{C})$
 6. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m , du nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = m$ où m est un paramètre réel.

PARTIE C

1. On désigne par φ la restriction de f à l'intervalle $]0 ; +\infty[$
 - a. Montrer que φ définit une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur un intervalle I à préciser
 - b. Dresser le tableau de variation de la réciproque φ^{-1} de φ puis tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = e$.
Prouver que $\mathcal{A} = 2(1 - \alpha^4)$

On donne : $\ln(0,6) = -0,51$ et $\ln(0,7) = -0,35$