

CHAPITRE 10

APPLICATIONS AFFINES ET GÉOMÉTRIES PLANES

A) Applications linéaires

10.1. Définition

On nomme applications linéaires de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ toute application φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui vérifie les deux relations suivantes :

i) Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathcal{V}$

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$$

ii) Pour tout $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathbb{R}$

$$\varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u})$$

10.2. Propriétés

Si φ est une application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ alors on a :

i) Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathcal{V}$ et $a, b \in \mathbb{R}$

$$\varphi(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\varphi(\vec{u}) + b\varphi(\vec{v})$$

ii) Pour tout $\vec{u} \in \mathcal{V}$, $\varphi(-\vec{u}) = -\varphi(\vec{u})$

iii) $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

Exemple pratique

Prouver que l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = 2x + 3y$ est une application linéaire.

Méthode

f est une application linéaire si pour x, y, x' et $y' \in \mathbb{R}$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = af(x, y) + bf(x', y')$$

On a $a(x, y) = (ax, ay)$ et $b(x', y') = (bx', by')$

Alors $f(a(x, y) + b(x', y')) = f((ax, ay) + (bx', by')) \Rightarrow$

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = f((ax, bx') + (ay, by')) \Rightarrow$$

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = 2(ax + bx') + 3(ay + by') \Rightarrow$$

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = 2ax + 2bx' + 3ay + 3by' \Rightarrow$$

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = 2ax + 3ay + 2bx' + 3by' \Rightarrow$$

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = a(2x + 3y) + b(2x' + 3y') \Rightarrow$$

$$f(a(x, y) + b(x', y')) = af(x, y) + bf(x', y')$$

On conclut que f est bien une application linéaire.

B) Application affine

10.3. Activité

Soient O, A et B trois points quelconques non alignés du plan et G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -1)$

a) Définir et construire le point G

On désigne par A', B' et G' les images respectives de A, B et G par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$

b) Construire A', B' et G'

c) Que représente le point G' pour les points A' et B' ?

Méthode

a) Définissons le point G tel que G soit barycentre du système de points pondérés $\{(A, 2), (B, -1)\}$

$$\text{On a : } \vec{AG} = \frac{-1}{2-1} \vec{AB} \Rightarrow$$

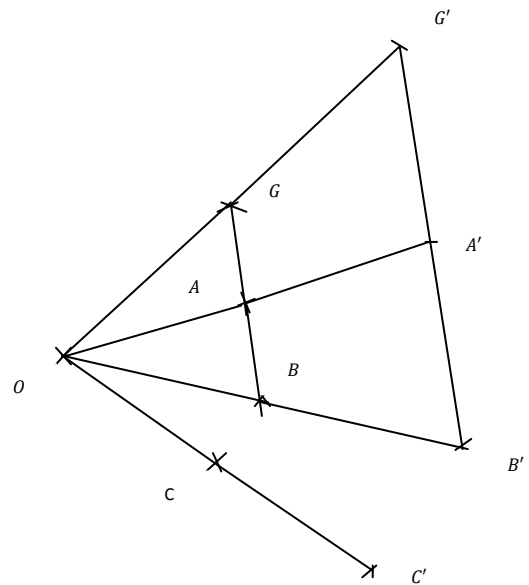
$$\vec{AG} = -\vec{AB}$$

Pour la construction de G voir la figure.

b) Construisons les images A', B' et G' des points A, B et G par l'homothétie de centre O et de rapport 2

$$\text{On a : } \vec{OA'} = 2\vec{OA}, \vec{OB'} = 2\vec{OB} \text{ et } \vec{OG'} = 2\vec{OG}$$

Construction



b) Construction des points A', B' et G' (voir figure)

c) On remarque que le point G' est également barycentre des points A' et B' .

Conclusion

On dit que l'homothétie ponctuelle conserve le barycentre de tout système de points pondérés.

10.4. Définition

On appelle application affine du plan affine $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, toute application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui conserve le barycentre de tout système de points pondérés de $\mathcal{A}$.

10.5. Interprétation de la définition

Étant donnée une application f de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, f est une application affine s'il existe une application linéaire φ telle que pour tous A, B, A' et $B' \in \mathcal{A}$ tels que

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$$

On dit que φ est une application linéaire associée à f .

Exemple pratique

Montrer que l'homothétie ponctuelle de centre A de rapport $k = 2$ est une application affine.

Méthode

Soit f cette application de $\mathcal{A}$ dans (espace affine)

Soit M un point d'image M' par f c'est-à-dire $f(M) = M'$ alors $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$.

Le centre A de f étant fixe, soit le système de points pondérés

$\{(B_1, \alpha_1), (B_2, \alpha_2), \dots, (B_n, \alpha_n)\}$ admettant le point G comme barycentre, alors on a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GB_i} = \vec{0}$

C'est-à-dire $\sum_{i=1}^n (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB_i}) = \vec{0}$

On a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB_i}) = \vec{0}$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{AB_i} = \vec{0}$

Alors G' est barycentre également du système

$\{(A'_1, \alpha_1), (A'_2, \alpha_2), \dots, (A'_n, \alpha_n)\}$

f est alors une application affine.

10.6. Propriétés de l'application affine

a) Image d'une droite par une application affine

- L'image d'une droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ par l'application affine f est telle que : en désignant par φ l'application linéaire associée à f , on définit le point A' et le vecteur $\vec{u}'$ tel que

$$f(A) = A' \text{ et } \varphi(\vec{u}) = \vec{u}'$$

- Si $\vec{u}' \neq \vec{0}$ alors l'image de (D) par f est A' et de vecteur directeur $\vec{u}'$.
- Si $\vec{u}' = \vec{0}$ alors l'image de (D) est le point A'

b) Image d'un plan par une application affine

-L'image d'un plan (ABC) par une application affine f est le plan $(A'B'C')$ si A', B' et C' ne sont pas alignés.

-La droite passant par les points A', B' et C' si A', B' et C' sont alignés (non tous confondus).

c) Image du barycentre par une application affine

L'image du barycentre d'un système de point pondérés $\{(A_i, \alpha_i)\}$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ par une application affine est le barycentre constitué par les images des points A_i affectés des mêmes coefficients.

d) Application affine bijective

Une application affine est bijective si son application linéaire associée est bijective.

e) Composée de deux application affines

La composée de deux applications affines est une application affine.

10.7. Détermination d'une application affine

a) Théorème

Étant données φ une application linéaire de $\mathcal{V}$ et A et A' deux points de $\mathcal{A}$. Il existe une application affine f dont φ est l'application linéaire associée telle que $f(A) = A'$.

C'est-à-dire, pour tout $M \in \mathcal{A} \exists M' \in \mathcal{A}$ tel que

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$$

Exemple pratique

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(1,2)$ et $B(-1,5)$ et l'application linéaire

$$\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$\vec{u}(x, y) \mapsto \vec{u}'(x', y') \text{ telle que } \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Déterminer l'application affine f telle que $f(A) = B$ et que φ soit l'application linéaire associée à f .

Méthode

Déterminons l'application f

Soit M et $M' \in \mathcal{A}$ tels que $f(M) = M'$ et $f(A) = B$ on a : $\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{BM'}$

Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BM'} \begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis que } \varphi(\overrightarrow{AM}) = \begin{pmatrix} -x+1+y-2 \\ x-1+y-2 \end{pmatrix} \text{ soit } \varphi(\overrightarrow{AM}) = \begin{pmatrix} -x+y-1 \\ x+y-3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{BM'} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x+y-1 \\ x+y-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } f: \begin{cases} x' = -x + y - 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$

b) Expression analytique d'une application affine

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application affine de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui à tout point $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$. L'expression analytique de f est donnée par :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

avec a, b, c, a', b' et c' des nombre réels.

L'application linéaire associée à f a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = a'x + b'y \end{cases}$$

10.8. Pratique des applications affines

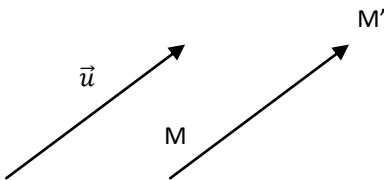
Toutes les applications suivantes sont affines.

1) Translation

a) Définition

Étant donné un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$. On nomme translation ou translation affine de vecteur $\vec{u}$ et on note $t_{\vec{u}}$, toute application définie par $t_{\vec{u}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$$M \mapsto M' \text{ telle que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$



Remarque

Si $t_{\vec{u}}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ et si pour tous points A, A', M et M' tels que : $\begin{cases} t_{\vec{u}}(M) = M' \\ t_{\vec{u}}(A) = A' \end{cases}$ alors $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$

b) Propriétés de la translation

i) Tout translation est une application affine et son application linéaire associée est l'application identique de $\mathcal{A}$

ii) Toute translation affine est bijective de bijection réciproque est $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

iii) L'ensemble des translations affines muni de la loi de composition des applications est groupes commutatifs.

c) Ensemble des points invariants par une translation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$ transformant le point M et M' tels que $t_{\vec{u}}(M) = M'$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

-Si $M = M'$ c'est-à-dire $\vec{u} = \vec{0}$ alors il n'y a pas de point invariant.

-Si $M \neq M'$ alors $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors tout point de A est invariant.

d) Expression analytique de la translation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ transformant $M(x, y)$ en $M'(x', y')$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } t_{\vec{u}}(M) = M' &\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple pratique

Dans le plan $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le vecteur $\vec{u}(2, -1)$

- Donner l'expression analytique de $t_{\vec{u}}$
- Quelles sont les coordonnées du point I image de $H(1, 1)$ par $t_{\vec{u}}$?
- Quelle est l'expression analytique de $t_{\vec{u}}^{-1}$?

Méthode

- Donnons l'expression analytique de $t_{\vec{u}}$

Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y') \in \mathcal{A}$ tels que $t_{\vec{u}}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

- Trouvons les coordonnées de I tel que $t_{\vec{u}}(H) = I$

On a $x_H = 1$ et $y_H = 1$ alors

$$\begin{cases} x_I = x_H + 2 \\ y_I = y_H - 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_I = 1 + 2 \\ y_I = 1 - 1 \end{cases} \text{ d'ou } \begin{cases} x_I = 3 \\ y_I = 0 \end{cases}$$

Alors $I(3, 0)$.

- Trouvons l'expression de $t_{\vec{u}}^{-1}$

On sait que $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$ on a :

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases} \text{ alors on pose } \begin{cases} X' = X - 2 \\ Y' = Y + 1 \end{cases}$$

On peut également écrire $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$

D'où l'expression de $t_{\vec{u}}^{-1}$

2) Homothétie

a) Définition

Étant donné un point $A(x_A, y_A)$ et k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre A et de rapport k et on note $h(A, k)$, toute application h de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ telle que pour tout $M \in \mathcal{A}$ et $M' \in \mathcal{A}$, $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.

Remarque

Si h est une homothétie de telle que $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

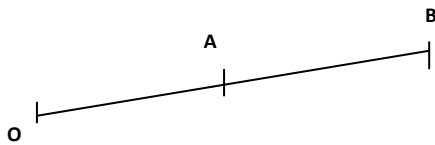
Exemple pratique

Soit O un point quelconque du plan. Construire le point B image de A par $h(O, 2)$.

Méthode

Construisons le point B tel que

$$h(A) = B \Rightarrow \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$$



b) Propriétés de l'homothétie

-Si h est homothétie centre A et de rapport $k \neq 0$ et soient M, N, M' et N' quatre points du plan tels que $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ alors les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles et $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ et $M'N' = |k|MN$.

-Soit $h(A, k)$ et M et M' tels que $h(M) = M'$ alors A, M et M' sont alignés.

-L'homothétie conserve le parallélisme, l'orthogonalité, le barycentre des points pondérés et la mesure d'angle.

-L'homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport.

-L'homothétie multiplie les aires par le carré de son rapport

-Toute homothétie h de centre A et de rapport $k \neq 0$ est bijection réciproque et h^{-1} une homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{k}$.

-L'ensemble des homothéties de même centre muni de la composition des applications est un groupe commutatif.

c) Expression analytique d'une homothétie

Soient h l'homothétie de centre $A(x_A, y_A)$ et de rapport $k \neq 0$ et $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ tels que $h(M) = M'$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = k(x - x_A) + x_A \\ y' = k(y - y_A) + y_A \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x' = kx + x_A(1 - k) \\ y' = ky + y_A(1 - k) \end{cases}$$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_A \\ y' = ky + (1 - k)y_A \end{cases}$$

d) Ensemble des point invariants d'une homothétie

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transformant le point M en M' , c'est à dire $h(M) = M'$

M est invariant par h (ne varie pas) si $h(M) = M$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Rightarrow (1 - k)\overrightarrow{AM} = \vec{0}$

On distingue quelques cas

1^{er} cas : si $1 - k = 0$

$$1 - k = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ on a : } \vec{0} = \vec{0}$$

Alors tout point du plan est invariant par h .

2^{ème} cas si $1 - k \neq 0$

$$\text{On a : } (1 - k)\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\vec{0}}{1 - k} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

C'est à dire $M = A$

Alors l'ensemble des points invariants est le centre A de l'homothétie.

Exemple pratique

a) Déterminer l'expression analytique de l'homothétie h de centre $H(-1, 2)$ et de rapport 3.

b) On considère l'expression analytique d'une application f définie par :

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$$

1) Trouver l'ensemble des points invariant par f

2) Caractériser f .

Méthode

a) Déterminons l'expression analytique de $h(H, 3)$.

Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ tels que $h(M) = M' \Rightarrow$

$$\overrightarrow{HM'} = 3\overrightarrow{HM} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' + 1 \\ y' - 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x + 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$$

b) Soit l'application f telle que $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$

1) Trouvons l'ensemble des points invariant par f

Soit $M(x, y)$ un point du plan. M est invariant par f i.e.

$$f(M) = M. \text{ On pose } \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des points invariants est le point $I(0, -3)$

2) Caractérisons f .

f ressemble à une homothétie puisque pour une homothétie de centre $A(x_A, y_A)$ et de rapport k on a :

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_A \\ y' = ky + (1-k)y_A \end{cases}$$

Si on pose $\alpha = (1-k)x_A$ et $\beta = (1-k)y_A$ alors

$$\begin{cases} x' = kx + \alpha \\ y' = ky + \beta \end{cases}$$

On a bien $k = 2$ et $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow$

Le centre de l'homothétie étant invariant, on a :

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_I \\ y' = ky + (1-k)y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ (1-k)x_I = 0 \\ (1-k)y_I = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 0 \\ y_I = -3 \end{cases}$$

D'où f est une homothétie de centre $I(0, -3)$ et de rapport $k = 2$.

3) Projection

a) Définition

Étant donnés deux sous ensemble A_1 et A_2 de l'espace affine $\mathcal{A}$ associé à l'espace vectoriel $\mathcal{V}$.

A_1 et A_2 ayant respectivement pour direction v_1 et $v_2 \in \mathcal{V}$.

On nomme projection affine sur v_1 suivant v_2 (ou parallèlement à v_2), toute application p de $\mathcal{V}$ définie par $p \circ p = p$.

b) Éléments caractéristiques d'une projection

Une projection p est essentiellement caractérisée par :

-L'ensemble des points invariants d'une projection p est le sous-ensemble sur lequel se fait la projection.

-L'ensemble des antécédents du vecteur nul ($\vec{0}$) par l'application linéaire associée à p est le sous-ensemble suivant lequel se fait la projection.

Exemple pratique

1) On considère l'application f de l'espace affine $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui à tout point $M(x; y; z)$ associe le point $M'(x'; y'; z')$ tels

$$\text{que } \begin{cases} x' = -x - 2y + 2z - 6 \\ y' = -x + z - 3 \\ z' = -2x - 2y + 3z - 6 \end{cases}$$

a) Prouver que f est une projection.

b) Donner les éléments caractéristiques de f .

Méthode

L'expression analytique de f est

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 2z - 6 \\ y' = -x + z - 3 \\ z' = -2x - 2y + 3z - 6 \end{cases}$$

a) Prouvons que f est une projection

Soient $M(x, y, z), M'(x', y', z')$ et $M''(x'', y'', z'')$ trois points de $\mathcal{A}$

Si f est une projection alors $f \circ f = f$

$$f(M) = M' \text{ et } f(M') = M''$$

$$f \circ f(M) = f(M') = M''$$

$$f(M) = M' \text{ alors } \begin{cases} x' = -x - 2y + 2z - 6 \\ y' = -x + z - 3 \\ z' = -2x - 2y + 3z - 6 \end{cases}$$

$$f(M') = M'' \text{ on a : } \begin{cases} x'' = -x' - 2y' + 2z' - 6 \\ y'' = -x' + z' - 3 \\ z'' = -2x' - 2y' + 3z' - 6 \end{cases}$$

$f \circ f(M) = M''$ alors on remplace x' et y' par leur expression

On a ainsi :

$$\begin{cases} x'' = -(-x - 2y + 2z - 6) - 2(-x + z - 3) + 2(-2x - 2y + 3z - 6) - 6 \\ y'' = -(-x - 2y + 2z - 6) + (-2x - 2y + 3z - 6) - 3 \\ z'' = -2(-x - 2y + 2z - 6) - 2(-x + z - 3) + 3(-2x - 2y + 3z - 6) - 6 \end{cases}$$

Après développement, on obtient

$$\begin{cases} x'' = -x - 2y + 2z - 6 \\ y'' = -x + z - 3 \\ z'' = -2x - 2y + 3z - 6 \end{cases}$$

C'est-à-dire que $f \circ f = f$.

D'où f est une projection affine.

2) Donnons les éléments caractéristiques de f .

On cherche l'ensemble des points tels que $f(M) = M$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{cases} x = -x - 2y + 2z - 6 \\ y = -x + z - 3 \\ z = -2x - 2y + 3z - 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2z - 6 = 0 \\ -x - y + z - 3 = 0 \\ -2x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x - y + z - 3 = 0 \\ -x - y + z - 3 = 0 \\ -x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des points invariants par f est le plan d'équation $-x - y + z - 3 = 0$

L'ensemble des vecteurs qui ont pour image le vecteur nul sont tels que : Soit $\vec{u}(x; y; z)$, on a $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{cases} -x - 2y + 2z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -2x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = 2y$$

Alors le sous – espace vectoriel suivant lequel on projette a pour direction la droite d'équation $x = z = 2y$

4) Symétrie

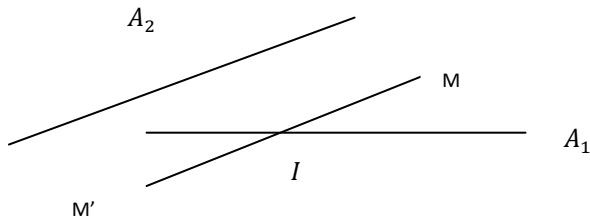
a) Définition

Étant donnés deux – sous ensembles A_1 et A_2 d'un espace affine $\mathcal{A}$ de directions respectives v_1 et v_2 appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ associé à $\mathcal{A}$. On appelle symétrie par rapport à v_1 suivant v_2 , l'application s telle que

$$s: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$M \mapsto M' \text{ telle que } s \circ s = Id_{\mathcal{A}} (\text{application identique})$$

On retient que si s est une symétrie telle que pour tout $M \in \mathcal{A}$ tels que $s(M) = M' \in \mathcal{A}$ alors le milieu I du segment $[MM']$ appartient à A_1



b) Éléments caractéristiques d'une symétrie

Soit f une symétrie affine alors :

-Le sous-ensemble par rapport auquel se fait la symétrie est l'ensemble des points invariants par f .

-Le sous-ensemble suivant lequel se fait la symétrie est l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposés par l'application linéaire associée à f .

Remarque

-Si A_1 est un point alors s est une symétrie centrale.

-Si A_1 est une droite, alors s est une symétrie axiale.

-Si A_1 et A_2 sont orthogonaux, alors s est une symétrie orthogonale.

Exemple pratique

On considère l'application affine f définie par :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4z - 6 \\ y' = 2x - y - 2y - 4 \\ z' = 2x - 3z - 6 \end{cases}$$

a) Prouver que f est une symétrie affine.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f .

Méthode

a) Soit f la symétrie concernée

Si f est une symétrie alors $f \circ f = Id_{\mathcal{A}}$ où $\mathcal{A}$ est l'espace affine. On se donne trois points

$M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ et $M''(x'', y'', z'')$ tels que $f(M) = M'$ et $f(M') = M''$. Alors

$$\begin{cases} x'' = 3x' - 4z' - 6 \\ y'' = 2x' - y' - 2z' - 4 \\ z'' = 2x' - 3z' - 6 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} x' = 3x - 4z - 6 \\ y' = 2x - y - 2z - 4 \\ z' = 2x - 3z - 6 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} x'' = 3(3x - 4z - 6) - 4(2x - 3z - 6) - 6 \\ y'' = 2(3x - 4z - 6) - 2(2x - y - 2z - 4) - 2z - 4 \\ z'' = 2(2x - 4z - 6) - 3(2x - 3z - 6) - 6 \end{cases}$$

Après développement on obtient $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \\ z'' = z \end{cases}$

$$f \circ f = Id_{\mathcal{A}}$$

b) Déterminons les éléments caractéristiques

On cherche l'ensemble des points invariants tels que

$$f(M) = M \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = 3x - 4z - 6 \\ y = 2x - y - 2z - 4 \\ z = 2x - 3z - 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + 4z + 6 = 0 \\ -2x + 2y + 2z + 4 = 0 \\ -2x + 4z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4z + 6 = 0 \\ -2x + 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 2z + 3 = 0 \\ -x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Soit par addition on obtient $y = z + 1$

Alors l'ensemble des points invariants est la droite d'équation $y = z + 1$

Trouvons l'ensemble des vecteurs transformés ie $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$

$$\text{Pour cela posons : } \begin{cases} -x = 3x - 4z \\ -y = 2x - y - 2z \\ -z = 2x - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x - z = 0 \Rightarrow x = z$$

D'où on a $x - z = 0 \Rightarrow x = z$

Exemple pratique 2

Dans le plan $\mathcal{P}$, trouver l'expression analytique de la symétrie par rapport à la droite $(D): x + 3y + 1 = 0$ suivant la droite $(\Delta): x - 2y = 0$.

Méthode

Trouvons l'expression analytique de cette symétrie. Soient $\vec{u}_1$ un vecteur directeur de (Δ) et deux points

$M(x, y)$ et $M'(x', y') \in \mathcal{P}$ et I le milieu du segment $[MM']$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}) = 0$

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_1^{(2)}$$

$$\det(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x'-x & 2 \\ y'-y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x' - x - 2y' + 2y = 0 \quad (1)$$

$$I \left(\frac{x'+x}{2}, \frac{y'+y}{2} \right) \text{ et le point } I \in (D) \text{ c'est-à-dire}$$

$$(D) : x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x'+x}{2} + 3 \left(\frac{y'+y}{2} \right) + 1 = 0 \Rightarrow x' + x + 3y' + 3y + 2 = 0 \quad (2)$$

Alors on forme le système en (1) et (2)

$$\begin{cases} x' - x - 2y' + 2y = 0 \\ x' + x + 3y' + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Par la méthode mixte on cherche à tirer x' et y'

$$\text{Par fini on obtient } \begin{cases} x' = -\frac{1}{5}(x - 12y - 4) \\ y' = \frac{1}{5}(-2x - y - 2) \end{cases}$$

5) Rotation

a) Définition

Étant donné A un point du plan $\mathcal{P}$ et θ un angle orienté. On nomme rotation de centre A d'angle orienté θ , l'application

$$r: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$M \mapsto M'$ telle que

-Si $M = A$ alors $M' = A$

$$\text{-Si } M \neq A \text{ alors } \begin{cases} \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} \\ (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}) = \theta \end{cases}$$

On note $r(A, \theta)$ la rotation de centre A et d'angle θ .

b) Propriétés de la rotation

1) La rotation de centre A et d'angle nul est l'application identique du plan.

2) La rotation de centre A et d'angle π est la symétrie de centre A (demi-tour).

3) La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le quart de tour direct de centre A.

4) La rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ est le quart de tour indirect de centre A

5) Pour tous points M et N d'image M' et N' dans le plan par la rotation $r(A, \theta)$, alors on a : $\begin{cases} M'N' = MN \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta \end{cases}$

6) Toute rotation conserve les distances, l'alignement de points, le parallélisme de droites, l'orthogonalité des vecteurs, et les angles orientés.

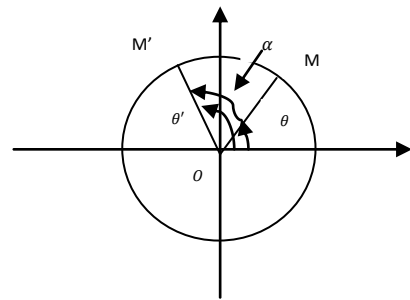
7) La rotation $r(A, -\theta)$ est une bijection réciproque de $r(A, \theta)$.

c) Expression analytique

On distingue 2 cas pour l'expression analytique de la rotation

1^{er} cas : rotation de centre O et d'angle θ

On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et $r(O, \theta)$ la rotation de centre O et d'angle θ . Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ tels que $r(M) = M'$.



On désigne par (ρ, θ) les coordonnées polaires de $M(x, y)$

$$\text{avec } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta \text{ tel que : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

$$\text{Alors } x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$$

Soit $M'(x', y')$ l'image de M par r . On désigne par (ρ', θ') les coordonnées polaires de M' dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors on a :

$$x' = \rho' \cos \theta' \text{ et } y' = \rho' \sin \theta'$$

$$\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \text{ et } \alpha = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$$

$$\text{On a } \theta' = \theta + \alpha \text{ alors}$$

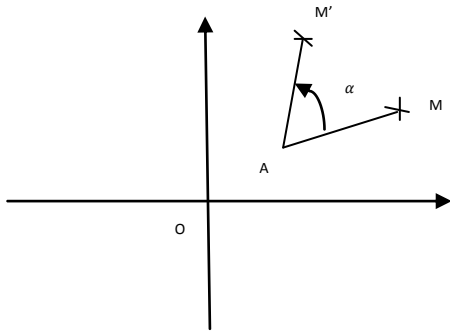
$$\begin{cases} x' = \rho' \cos \theta' \\ y' = \rho' \sin \theta' \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x' = \rho' \cos (\theta + \alpha) \\ y' = \rho' \sin (\theta + \alpha) \end{cases}$$

$$OM = OM' \Rightarrow \rho = \rho' \text{ alors } \begin{cases} x' = \rho \cos (\theta + \alpha) \\ y' = \rho \sin (\theta + \alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = \rho (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ y' = \rho (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = \rho \cos \theta \cos \alpha - \rho \sin \theta \sin \alpha \\ y' = \rho \sin \theta \cos \alpha + \rho \cos \theta \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha + x \sin \alpha \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

2^{ème} cas : rotation de centre distinct de l'origine du repère


Soit le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ et $A\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ un point du plan. La rotation $r(A, \theta)$ est tel que : soit $M(x, y)$ dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'image $M'(x', y')$ par r tel que $r(M) = M'$

Soit $M(X, Y)$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$ alors $M'(X', Y')$ dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$ aura pour coordonnées $\begin{cases} X' = x' - a \\ Y' = y' - b \end{cases}$

Si $\alpha = (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM})$

On a dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$, $\begin{cases} X' = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ Y' = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x' - a = (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \\ y' - b = (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha - a \sin \alpha + b \sin \alpha + a \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha - a \sin \alpha - b \sin \alpha + b \end{cases}$$

Remarque

Si on pose

$c_1 = -a \cos \alpha + b \sin \alpha + a$ et $c_2 = a \sin \alpha - b \cos \alpha + b$, alors (c_1, c_2) est le couple de coordonnées trouvées en cherchant l'ensemble des points invariants.

Exemple pratique

Soit la rotation r de centre $A(-1, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$

1) Déterminer l'expression analytique de r .

2) Trouver les coordonnées du point C image du point $B(-2, 3)$ par cette rotation.

Méthode

1) Déterminons l'expression analytique de la rotation r de centre $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Pour tous $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ tels que $r(M) = M'$ alors

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha - a \cos \alpha + b \sin \alpha + a \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha - a \sin \alpha - b \cos \alpha + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{6} - y \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{6} - 1 \\ y' = x \sin \frac{\pi}{6} + y \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{6} + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{3} + \frac{5}{2} \end{cases}$$

2) Trouvons les coordonnées du point C tel que $r(B) = C$ avec $B(-2, 3)$

Soit $C\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ avec $x = -2$ et $y = 3$ on a :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2) - \frac{1}{2}(3) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{1}{2}(-2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(3) - \sqrt{3} + \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{3} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = -1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } C\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

Remarque

On considère la droite (D) dans l'espace affine $\mathcal{A}$ et θ un angle orienté défini dans un plan $(\mathcal{P})$ orthogonal à (D) . Pour tout point $M \in \mathcal{A}$, on désigne par (P_M) le plan passant par M et perpendiculaire à (D) et par O_M le point d'intersection de (P_M) et de (D) . On appelle rotation d'axe (D) et d'angle orienté θ l'application $r: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$M \mapsto M'$ telle que

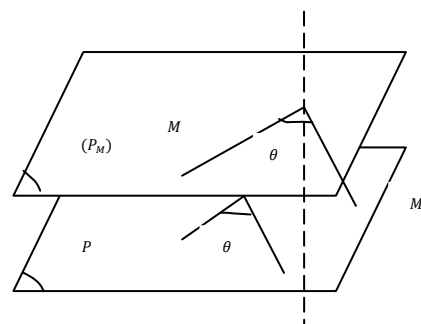
-Si $M \in (D)$, $M' = M$

-Si $M \notin (D)$ alors M' est caractérisé par :

a) $M' \in (P_M)$

b) $O_M M = O_M M'$

c) $(\overrightarrow{O_M M}, \overrightarrow{O_M M'}) = \theta$



6) Affinité

a) Définition

Étant donnés P_1 et P_2 deux sous ensembles du plan $\mathcal{P}$ de direction respectives $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$. On nomme affinité de base P_1 , de direction $\vec{P}_2$ et de rapport $k \neq 0$, toute application f_k de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que pour tout point A projeté de M sur P_1 , on ait

$$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$$

b) Éléments caractéristiques

1) L'ensemble des points invariants d'une affinité est tels que :

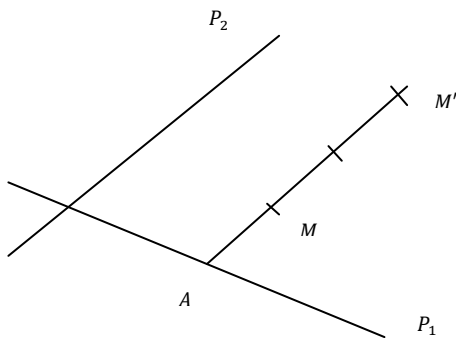
-La base P_1 si $k \neq 1$

-Le plan $\mathcal{P}$ si $k = 1$

2) La direction de l'affinité est celle du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Par exemple : si P_1 et P_2 représente des droites alors

l'affinité de base P_1 et de direction le vecteur directeur de P_2 et de rapport 2 se construit ainsi :



10.9. Groupe des homothéties – translations

a) Composée de deux translations

La composée de deux translation $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation $t_{\vec{u}+\vec{v}}$ (translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$)

Preuve

Étant donnés $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translation de vecteurs respectives $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et soient M, M' et M'' trois points du plan tels que $t_{\vec{u}}(M) = M'$ et $t_{\vec{v}}(M') = M''$ alors on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} \end{cases} \text{ et or } t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}(M) = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(M) = t_{\vec{v}}(M') \text{ alors}$$

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}(M) = M''$$

Or

$$\overrightarrow{M'M''} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MM''} = \vec{v} \Rightarrow -\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MM''} = \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \vec{v} \text{ or } \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\text{D'ou' } t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

Remarque

On retient que deux translations quelconques sont permutantes.

b) Composée de deux homothéties et preuves

1) De même centre

Étant donnés h_1 et h_2 deux homothéties de même centre A et de rapport respectifs k_1 et k_2 et M, M' et $M'' \in \mathcal{A}$ tels

que $h_1(M) = M'$ et $h_2(M') = M''$ alors

$$\overrightarrow{AM'} = k_1\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AM''} = k_2\overrightarrow{AM'}$$

$$h_2 \circ h_1(M) = h_2(h_1(M)) = h_2(M') = M'' \text{ or } \overrightarrow{AM''} = k_2\overrightarrow{AM'}$$

$$\overrightarrow{AM''} = k_2(k_1\overrightarrow{AM})$$

$$\overrightarrow{AM''} = k_1k_2\overrightarrow{AM}$$

D'où on conclut que la composée de deux homothéties h_1 et h_2 de même centre A et de rapport respectifs k_1 et k_2 est l'homothétie de même centre A et de rapport $k_1 \cdot k_2$ c'est à dire $h_2 \circ h_1 = h(A, k_1k_2)$

2) De centre distincts

Étant données h_1 et h_2 deux homothéties telles que $h_1(A_1, k_1)$ et $h_2(A_2, k_2)$. Pour la composée $h_2 \circ h_1$, on distingue deux cas :

1^{er} cas : si $k_1k_2 = 1$

Alors dans ce cas $h_2 \circ h_1$ est une translation dont le vecteur de translation est collinaire à $\overrightarrow{A_1A_2}$

2^{ème} Cas si $k_1k_2 \neq 0$

Alors $h_2 \circ h_1$ serait une homothétie de rapport k_1k_2 et de centre A à déterminer tel que :

Pour tout point $M \notin (A_1A_2)$ tel que :

$$h_1(M) = M' \text{ et } h_2(M') = M''$$

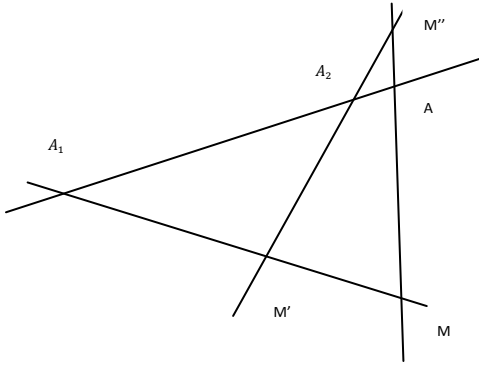
$$h_2 \circ h_1(M) = h_2(M') = M'' \text{ alors on peut écrire}$$

$$\overrightarrow{A_1M'} = k_1\overrightarrow{A_1M} \text{ et } \overrightarrow{A_2M''} = k_2\overrightarrow{A_2M'}$$

Alors $h_2 \circ h_1(A_1) = h_2(A_1) = A$ alors $\overrightarrow{A_2A} = k_2\overrightarrow{A_2A_1}$ par suite $A \in (A_1A_2)$ alors on dira que A, M et M' sont alignés

c'est-à-dire $\begin{cases} A \in (MM') \\ A \in (A_1A_2) \end{cases}$ alors $A \in (MM') \cap (A_1A_2)$

Interprétation graphique



c) Composée d'une homothétie et d'une translation

Étant données h une homothétie de centre A et de rapport k et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. On distingue 3 cas pour la composée de h et de $t_{\vec{u}}$.

1^{er} cas : si $k = 1$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

Si $k = 1$ alors $h = Id_{\mathcal{A}}$ dont $h \circ t_{\vec{u}} = Id_{\mathcal{A}} \circ t_{\vec{u}}$

$$h \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}$$

2^{ème} cas : si $k \neq 0$ et $\vec{u} = \vec{0}$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}} = Id_{\mathcal{A}}$ alors $h \circ t_{\vec{u}} = h \circ Id_{\mathcal{A}} = h$

3^{ème} cas : si $k \neq 1$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

Soient M, M' et M'' et N, N' et N'' des points du plan tels que $t_{\vec{u}}(M) = M'$ et $h(M') = M''$ et $t_{\vec{u}}(N) = N'$ et $h(N') = N''$ alors $h \circ t_{\vec{u}}(M) = M''$ et $h \circ t_{\vec{u}}(N) = N''$

$$\text{On a : } t_{\vec{u}}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$t_{\vec{u}}(N) = N' \Rightarrow \overrightarrow{NN'} = \vec{u} \text{ alors } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \text{ or}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{MN'} \text{ c'est-à-dire que} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MN'} \text{ on a : également } h(M') = M'' \Rightarrow \overrightarrow{AM''} = k\overrightarrow{AM'} \\ h(N') &= N'' \Rightarrow \overrightarrow{AN''} = k\overrightarrow{AN'} \\ \overrightarrow{AM''} + \overrightarrow{AN''} &= k\overrightarrow{AM'} + k\overrightarrow{AN'} = k(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AN'}) \\ \text{Alors } \overrightarrow{AM''} + \overrightarrow{AN''} + \overrightarrow{M''N''} &= k(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AN'} + \overrightarrow{M'N'}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2k\overrightarrow{AM''} + \overrightarrow{M''N''} = 2k\overrightarrow{AM'} + k\overrightarrow{M'N'} \Rightarrow \overrightarrow{M''N''} = k\overrightarrow{M'N'}$$

$$\overrightarrow{M''N''} = k\overrightarrow{MN}$$

D'où $h \circ t_{\vec{u}}$ est une homothétie de rapport k et de centre Ω tel que : Soient A_1, A_2 et A_3 trois points du plan tels que :

$$t_{\vec{u}}(A_1) = A_2 \text{ et } h(A_2) = A_3$$

Alors $\overrightarrow{AA_3} = k\overrightarrow{AA_2}$ alors le centre Ω est le point d'intersection des droites (AA_2) et (A_1A) .

Exemple pratique

On considère un point quelconque A du plan et soient $h(\Omega_1, -3)$ et $h(\Omega_2, 2)$ deux homothéties.

1) Construire l'image C de A par $h(\Omega_2, 2) \circ h(\Omega_1, -3)$

2) Trouver le centre Ω de $h(\Omega_2, 2) \circ h(\Omega_1, -3)$. On rappelle que $h(\Omega_2, -3)$ et $h(\Omega_1, 2)$ ne permutent pas).

Méthode

1) Construisons l'image C de A par la composée d'homothétie

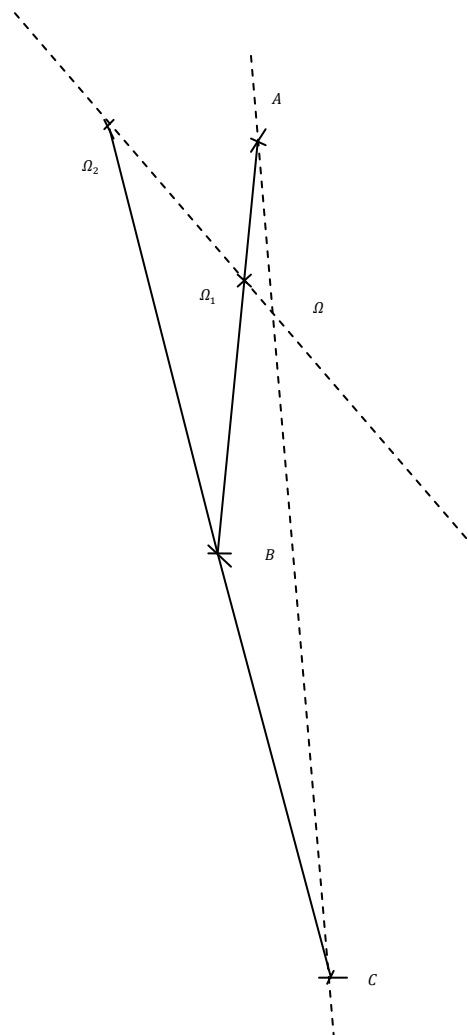
Soient $h_1 = h(\Omega_1, 2)$ et $h_2 = h(\Omega_2, -3)$

Pour tout point A on a $h_2 \circ h_1(A) = C$

Soit le point B tel que $h_1(A) = B \Rightarrow \overrightarrow{\Omega_1 B} = -3\overrightarrow{\Omega_1 A}$,

$$h_2(B) = C \Rightarrow \overrightarrow{\Omega_2 C} = 2\overrightarrow{\Omega_2 B}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_1 B} = -3\overrightarrow{\Omega_1 A} \\ \overrightarrow{\Omega_2 C} = 2\overrightarrow{\Omega_2 B} \end{cases}$$



2) Le centre Ω de la composée $h(\Omega_2, 2) \circ h(\Omega_1, -3)$

est l'intersection des droites (AC) et $(\Omega_1\Omega_2)$ (voir figure).