

Fiche de séquence

Classe : 12^{ème} STI

Durée : 10heures

Domaine : science mathématique technologique

Discipline : mathématique

Compétence : Résoudre des situations-problèmes liés aux applications affines

Composantes : Voir documents officiels

Manifestation : Voir documents officiels

Contenu : Application affine

Ressources éducatives :

- **Ressources humaines :** Professeur et élèves
- **Ressources matériels :** matériels didactiques : livres, cahiers, tableau, craie et les matériels de géométrie

Stratégie d'animation : Pédagogie active

Déroulement des activités :

Situation-problème : Comprendre les applications affines afin de résoudre des problèmes concrets de la géométrie

Pré-évaluation : Questions diverses sur les translations et symétrie (centrale ou axiale)

Si E désigne l'espace à trois dimensions et P le plan

1-Application affine : Dans ce chapitre E désigne l'espace, P l'ensemble des points du plan et V

l'ensemble des vecteurs du plan

*On appelle *application affine* de E vers E (ou de P dans P) une application f de E vers E (ou de P dans P) qui transforme le barycentre de tout système de point pondérés en le barycentre des images de ce système ie si G est le barycentre de $(A_i; a_i)_{1 \leq i \leq n}$ alors $f(G)$ est le barycentre de $(f(A_i); a_i)_{1 \leq i \leq n}$. On dit qu'une application φ du plan vectoriel V dans lui-même est linéaire si

- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
- $\forall \vec{u} \in V, \forall a \in \mathbb{R}, \varphi(a\vec{u}) = a\varphi(\vec{u})$

Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de V telle que $\varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$ alors le tableau noté $M_\varphi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est appelé *matrice de φ* relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace E avec $\varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$; $\varphi(\vec{j}) = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$ et

$\varphi(\vec{k}) = a''\vec{i} + b''\vec{j} + c''\vec{k}$ alors la matrice de φ est : $M_\varphi = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$

Pour tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le vecteur $\varphi(\vec{u})$ a pour coordonnées dans la base

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases}$$

Remarque : φ est bijective $\Leftrightarrow \det M_\varphi \neq 0$

* Si f est application affine. L'application linéaire φ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B) associe le vecteur $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ est appelée *application linéaire* associée à f. f est bijective si et seulement si φ l'est.

Une application affine bijective est appelée **transformation affine**.

Définitions : On appelle point invariant par une application affine f tout point M tel que $f(M) = M$. Une partie X de E est dite :

- invariante point par point par f si $\forall M \in X, f(M) = M$
- Globalement invariante par f si $\forall M \in X, f(M) \in X$

Propriétés : a) Une application affine conserve :

- L'alignement : si A, B, C sont alignés alors leurs images A', B', C' sont aussi alignés
- Le parallélisme : si les droites (d) et (d') sont parallèles alors leurs images sont aussi parallèles
- L'équipollence de bipoints : (A, B) $\mathcal{E}$ (D, C) alors (A', B') $\mathcal{E}$ (D', C')

b) Une application affine est entièrement déterminée par la donnée d'un repère et de l'image de celui-ci

c) La composée de deux applications affines est une application affine, la composée de deux transformations affines est aussi une transformation affine. Les transformations affines forment un groupe.

Théorème : Une application affine de E dans E (ou de P dans P) est bijective si et seulement si l'image d'un repère est un repère.

2-Détermination analytique d'une application affine : Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de E, f une

application affine de E vers E et φ l'application linéaire associée à f de matrice $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ relativement

à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'application affine f sera parfaitement déterminée si l'on connaît l'image d'un point de E par f et la matrice de φ . Soit par exemple $f(O) = O'(x_0; y_0; z_0)$ alors pour tout point M(x, y, z) de E tel que $f(M) = M'(x', y', z')$ on a :

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \\ z' - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + x_0 \\ y' = bx + b'y + b''z + y_0 \\ z' = cx + c'y + c''z + z_0 \end{cases}$$

3-Homothétie-Translation-Projection :

3.1-Homothétie : On appelle homothétie de centre Ω et de rapport le nombre réel non nul k la transformation qui, à tout point M de E, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

- Si $k = 1$ alors l'homothétie est l'application identique de E
- Si $k = -1$ alors l'homothétie est la symétrie centrale de centre Ω

Propriétés :

- Si h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k alors pour tous points M et N de E tels que $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
- Si $h(M) = M'$ alors Ω, M, M' sont alignés
- La composée de deux homothéties de centre Ω et de rapports k_1 et k_2 est une homothétie de centre Ω et de rapport $k_1 \times k_2$
- Une homothétie est entièrement déterminée par la donnée de son centre Ω et d'un point A distinct de Ω et de son image

Image de figures : Par une homothétie

- L'image d'une droite est une droite parallèle
- L'image d'un plan est un plan parallèle

- L'image d'un cercle d'un plan P est un cercle situé sur un plan parallèle à P
- L'image d'une sphère est une sphère

3.2- Translation : Une translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui à chaque point M de E associe M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Propriété :

- Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ alors $\forall M, N \in E$ tel que $t(M) = M'$ et $t(N) = N'$ on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
- Si $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sont des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$ où est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

Image de figures : Par une translation

- L'image d'une droite est une droite parallèle
- L'image d'un plan est un plan parallèle
- L'image d'un cercle d'un plan P est un cercle de même rayon
- L'image d'une sphère est une sphère de même rayon

3.3-Projection :

Une droite (D) et un plan P étant donnés

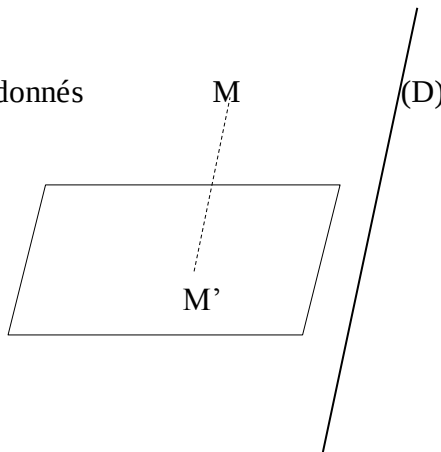
On appelle projection sur P

parallèle à (D) l'application p

de E vers E qui, à un point M

de E, associe $M' \in P$ tel que (MM')

est parallèle à (D)



M' est alors appelé projeté sur P suivant (D) $p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\vec{u} \\ M' \in P \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D)

Caractérisation : Une application affine p est une *projection* si et seulement si $p \circ p = p$

Remarque :

- Une projection n'est pas une bijection
- L'application linéaire φ associée à une projection est appelée **projection vectorielle**, elle est caractérisée par pour tout vecteur $\vec{u}$, $\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u})$

4-Isométrie : Une *isométrie* du plan P est une transformation f qui conserve les distances ie $\forall M, N \in P$ tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N' \Rightarrow M'N' = MN$

Exemples : Les translations, les rotations, les symétries orthogonales (ou symétrie axiales) sont des isométries

4.1-Composition d'isométrie :

Théorème : La composée de deux isométrie est une isométrie. La transformation réciproque d'une isométrie est une isométrie.

4.2-Invariants d'une isométrie : *Une isométrie conserve le produit scalaire c'est-à-dire si f est une

isométrie du plan telle que $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$

*Une isométrie plane conserve le barycentre de n points massifs

*Une isométrie plane conserve le parallélisme, l'équipollence, l'orthogonalité, le contact, les aires et les angles géométriques

4.3-Images de figures : Par une isométrie du plan : l'image d'une droite est une droite ; l'image d'un segment est un segment de même longueur ; l'image d'un cercle de centre I et de rayon r est un cercle de centre I' et de même rayon r.

Une application linéaire associée à une isométrie du plan est appelée isométrie vectorielle. C'est une bijection de V dans lui-même.

Propriétés :

- Toute isométrie vectorielle φ de V conserve la norme de tout vecteur de V
- Toute isométrie vectorielle φ de V conserve le produit scalaire de tout couple de vecteur de V
- Une application linéaire est isométrie si et seulement si elle conserve la norme de tout vecteur de V ou le produit scalaire de tout couple de vecteurs de V.

Théorème : *Une application affine est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

*Une application linéaire affine f de P est une isométrie si et seulement si par f l'image d'un repère orthonormé de P est un repère orthonormé de P.

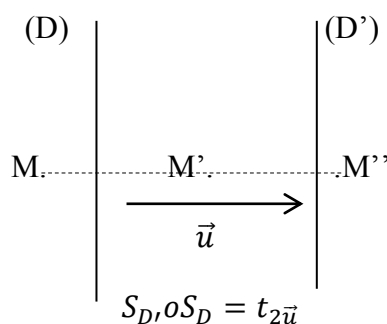
5-Classification des isométries : Soit f une isométrie du plan P

- Si f admet P comme ensemble des points invariants alors f est application identique de P
- Si f admet une droite (D) comme ensemble des points invariants alors f est une réflexion d'axe (D)
- Si f admet un seul point invariant A alors f est une rotation de centre A et d'angle orienté $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ où M est un point quelconque de P tel que $f(M) = M'$
- Si f n'admet pas de point invariant alors f est une symétrie glissée

Théorème : Les isométries du plan sont : les translations, les rotations, les symétries orthogonales, les symétries glissées ou leurs composées.

Définitions : Une isométrie qui conserve les mesures des angles orientés est appelée **déplacement** si non c'est un **antidéplacement**.

Théorème1 : La composée de deux réflexions d'axes (D) et (D') parallèles est la translation de vecteur $2\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur normal à (D) et $t_{\vec{u}}(D) = D'$



Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux réflexions d'axes parallèles (D) et (D') $t = S_{D'} \circ S_D$ où (D) et (D') étant arbitrairement choisies de vecteur normal $\vec{u}$

Théorème2 : La composée de deux symétries $S_{D'} \circ S_D$ d'axes (D) et (D') sécantes en O est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D')

Toute rotation de centre O et d'angle θ est la composée de deux réflexions d'axes dont les axes (D) et (D') sont sécantes en O, $r = S_{D',O} S_{D,O}$ (D) et (D') peuvent être arbitrairement choisies sécantes en O.

5-Similitudes :

5.1-Définitions : Soit P le plan affine euclidien. S une application de P dans P. On dit S est une *similitude* s'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que quelques soient les points distincts A et B d'image respectives A' et B', $A'B' = kAB$. Le nombre réel k s'appelle rapport de la similitude S.

Théorème1 : Étant donnée une similitude de rapport $k > 0$; il existe une homothétie de rapport k h_k et une isométrie i telles que $S = h_k \circ i$.

Si i est un déplacement alors la similitude S est dite *directe*. Si i est antidéplacement alors S est une similitude *indirecte*.

Exemple et contre-exemple : Les homothéties, les translations, les rotations et leurs composées sont des similitudes. Les réflexions ou symétries orthogonales conservent les distances ne conservent pas les mesures des angles : ce ne sont pas des similitudes directes.

5.2-Caractérisation des similitudes : *Une similitude S est directe si et seulement si elle admet pour écriture complexe $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Dans ce cas le centre de S est le point tel que $z' = z$; le rapport $k = |a|$ et l'angle de s est $\theta = \arg(a)$

*Si S transforme un couple (A, B) $A \neq B$ en (A', B') alors $\begin{cases} \text{son rapport } k = \frac{A'B'}{AB} \\ \text{son angle } \theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \end{cases}$

*Une similitude indirecte a pour expression complexe $z' = a\bar{z} + b$

Image de figures : Toute similitude directe de rapport k

- Conserve l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles orientés, les barycentres et le contact.
- Multiplie les longueurs par k et les aires par k^2
- Transforme les droites en droites, les demi-droites en demi-droites, les segments en segments, les cercles en cercles

EXERCICES : applications affines (terminale s)

Exercice1 : Le plan affine est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit le point A(3 ; 0) et B(1 ; -1). Montrer qu'il existe une application affine f telle que $f(O) = f(B) = B$ et $f(A) = A$. Calculer les coordonnées (x' ; y') de M' en fonction des coordonnées (x ; y) de M sachant que $f(M) = M'$

Exercice2 : Soit f l'application définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} \end{cases}$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Déterminer son écriture complexe.
- Trouver alors la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice3 : Le plan affine euclidien P est muni d'un repère orthonormé et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. A tout M(x, y) d'affixe z l'application f associe le point M'(x', y') d'affixe z' tel

que : $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

Exprimez z' en fonction de z puis donner les éléments caractéristiques de f. (d'après bac2005)

Exercice4 : Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = 3iz - 1 - 7i$

1. a) Justifier que S est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques.
b) Déterminer l'expression analytique de S.
2. Déterminer une équation de l'image par S de la droite (BC) d'affixes respectives 2 ; $3 - i$.
3. Déterminer une équation du cercle ($\mathcal{C}'$) image du cercle d'équation: $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

Exercice5 : Soit A, B et C les points d'affixes respectives i ; $1 + i$ et $2 + 2i$

1. Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2 ; -2 et 1 .
2. Démontrer que la similitude directe s, qui transforme A en B et B en C a pour centre G.
3. Déterminer l'angle et le rapport de s.

Exercice6 : Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application affine f de P

dans P qui à tout point M(x ; y) associe le point M(x' ; y') telles que
$$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases} \text{ et } \mathbb{C}$$

l'ensemble des nombres complexes.

1. a) f est-elle bijective ? Justifier votre réponse
b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
c) Quelle est l'image par f de la droite d'équation $y = 2x + 1$
2. On désigne par M(x ; y) le point d'affixe z et par M' le point d'affixe z' où z et z' sont des nombres complexes.
a) Sachant que $f(M) = M'$, exprimer z' en fonction de z.
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f (d'après bac2011)

Exercice7 : Soit E l'espace à 3 dimension et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E. A(4 ; 2 ; 2) et B(0 ; 2 ; 0) deux points de E ; s la symétrie orthogonale par rapport à un plan P telle que $s(A) = B$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan P
2. Définir analytiquement s
3. Soit Q le plan dont un repère cartésien est $(A, \overrightarrow{AB}, \vec{j})$. Montrer que Q est globalement invariant par s.

Exercice8 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note s la similitude directe de détermination complexe $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s
2. Soit (A_n) la suite de points définis par : $\begin{cases} A_0 \text{ a pour affixe } 1 \\ \forall n \geq 0, A_{n+1} = s(A_n) \end{cases}$

a) Déterminer les affixes de z_1 et z_2 de A_1 et A_2

b) En calculant $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$ déterminez la nature du triangle OA_nA_{n+1} et déduisez-en une construction de

A_{n+1} à partir de A_n . Représentez $A_0, A_1, A_2, \dots, A_8$

c) Comparez $\|\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\|$ et $\|\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\|$ pour i entier.

d) On note $L_n = \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\|$ calculez L_n en fonction de n puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$

Exercice9 : Déterminer la forme analytique de la réflexion d'axe (D): $x + 2y = 0$