

Barycentre

Classe : 10^e Commune

Durée : 1heure

I. Barycentre de deux points

Activité

Soit A et B deux points du plan. Soit G un point tel que $3\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0}$ (1)

La relation de CHASLES permet d'écrire : $\vec{GB} = \vec{GA} + \vec{AB}$

1) En utilisant cette relation, transformes (1) pour exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$.

2) Transformes de même l'égalité : $\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0}$ (2)

Que remarques-tu ?

Synthèse Partielle

$$\begin{aligned} 1) \quad 3\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0} &\implies 3\vec{GA} - 2\vec{GA} - 2\vec{AB} = \vec{0} \implies \vec{GA} - 2\vec{AB} = \vec{0} \implies \vec{GA} = 2\vec{AB} \\ &\implies \vec{AG} = -2\vec{AB} \end{aligned}$$

$$2) \quad \vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0} \implies \vec{GA} - \vec{GA} - \vec{AB} = \vec{0} \implies -\vec{AB} = \vec{0} \implies \vec{AB} = \vec{0}$$

Nous remarquons que l'égalité (1) dépend toujours du point G après la transformation alors que l'égalité (2) est devenue indépendante de G .

Tout point du plan vérifierait l'égalité (2) si $A=B$ alors qu'il existe un unique point G qui vérifie (1).

Synthèse générale

Définition 1

On appelle point pondéré tout couple $(A; \alpha)$ formé d'un point A du plan et d'un réel α . Le réel α est appelé le coefficient de pondération du point A .

(A, α) se lit « A affecté du coefficient α » ou plus simplement « A affecté de α »

Définition 2

Soit $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ deux points pondérés avec $\alpha + \beta \neq 0$. On appelle barycentre de (A, α) et (B, β) , l'unique point G du plan tel que $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$.

$$[G \text{ barycentre de } (A; \alpha); (B; \beta)] \iff \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0} \iff \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$$

Propriété 1

1) Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta)$ alors les points G , A et B sont alignés.

2) Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta)$ alors G est le barycentre de $(A; k\alpha); (B; k\beta)$ pour tout $k \neq 0$

NB

Le barycentre G de $(A; \alpha); (B; \alpha)$ est appelé l'isobarycentre des points A et B

Construction du barycentre de deux points

Activité

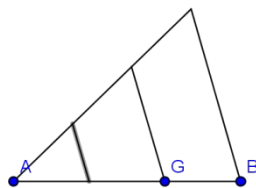
Soit A et B deux points du plan.

Peux-tu construire le point G barycentre de $((A; 1); (B; 2))$?

Synthèse Partielle

$$G \text{ est le barycentre de } ((A; 1); (B; 2)) \implies \vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0} \implies \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$$

(0.18, 8.02)

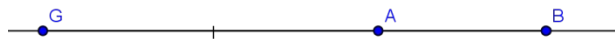


(9.2, 3.02)

Construisons le barycentre G des points pondérés $(A, 3), (B, -2)$:

$\vec{AG} = -2\vec{AB}$. Donc G est le point de la droite (AB) d'abscisse -2 dans le repère $(A; B)$

(7.34, 7.68)

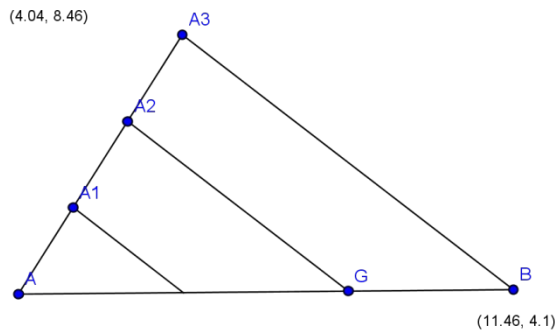


(15.48, 5.9)

Construisons le barycentre G des points pondérés $(A, 1), (B, 2)$. $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

Il s'agit de diviser le segment $[AB]$ en trois parties égales. Pour cela on peut procéder comme suite :

- Placer les points alignés A_1, A_2 et A_3 tels que : $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ et les droites (AA_3) et (AB) ne soit pas parallèles
- Tracer le segment $[A_3B]$
- Projeter les points A_1, A_2 sur $[AB]$ parallèlement à $[A_3B]$



II.- Barycentre de trois points

Activité

Soit A, B et C trois points du plan. Déterminez et construisez le point G tel que :

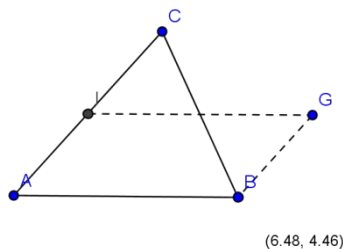
$$-\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

Consigne : introduire le point A dans les vecteurs $\vec{GB}$ et $\vec{GC}$

Synthèse Partielle

$$-\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \implies \vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

(0.18, 8.02)



Synthèse générale

Définition 3

Soit $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$ trois points pondérés. On appelle barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$, l'unique point G du plan tel que : $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$

$$[G \text{ est le barycentre de } (A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)] \iff \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$$

$$\iff \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$$

$$\iff \vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{BC}$$

Propriété 2

1)- Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$ alors G est dans le plan ABC

2)- Si G est le barycentre de $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$ et si H est le barycentre de

$(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ alors G est le barycentre de $(H; \alpha+\beta)$ et $(C; \gamma)$

Remarque

Construire le barycentre des points pondérés $(A; \alpha); (B; \alpha); (C; \alpha)$ revient à construire la somme $\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \overrightarrow{AC}$

NB

Le barycentre G des points pondérés $(A; \alpha); (B; \alpha); (C; \alpha)$ est l'isobarycentre des points A ; B ; C

III. Coordonnées barycentriques

Activité

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé, on donne les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; B\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminez les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; 1); (B; 2)$.

Synthèse Partielle

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \implies \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} x_G - 2 \\ y_G + 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \implies \begin{cases} x_G - 2 = -\frac{4}{3} \\ y_G + 1 = \frac{8}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x_G = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{5}{3} \end{cases} \implies G \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Synthèse Générale

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et soit $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$

- Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha); (B; \beta)$ sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

- Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)$ sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Evaluation

Soit $A(3;4)$ et $B(-1;4)$ dans un repère orthonormé. Déterminer et construire l'isobarycentre des points A et B