

Chapitre 2

GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

L'étude générale d'une fonction numérique de la variable réelle a été abordée en Terminale. Nous nous contenterons ici de brefs rappels et d'éléments nouveaux concernant les limites, les branches infinies et les fonctions réciproques.

Nous vous invitons cependant à revoir soigneusement dans votre cours de Terminale ce qui concerne les axes de symétrie du graphe d'une fonction, le calcul de limites, la continuité, la dérivabilité, le calcul de dérivées et l'étude des variations d'une fonction.

2.1 Notion d'asymptote

2.1.1 Définitions

Soient $I \subset \mathbb{R}$, une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- $\mathcal{C}_f$ admet une *branche infinie* si l'une au moins des coordonnées de l'un de ses points peut devenir, en valeur absolue, arbitrairement grande.
- Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $M(x, f(x))$; si la droite (OM) a une position limite (Od) quand M s'éloigne à l'infini sur $\mathcal{C}_f$, la direction (Od) est dite *direction asymptotique* de $\mathcal{C}_f$.
- Deux courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont dites asymptotes en l'infini si :
 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ (ici ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$).
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Exemple : Considérons les fonctions définies par:

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto x^2(1 + e^{-x}) \\ g : x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

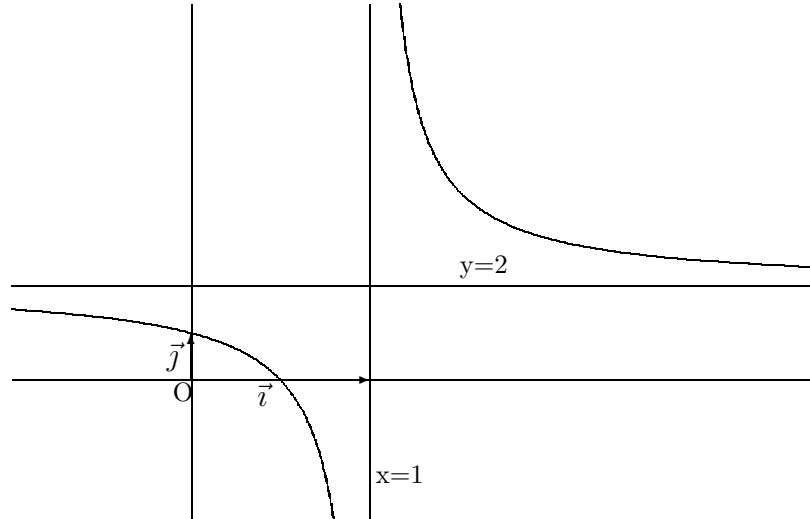
$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont asymptotes en $+\infty$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

Si f est une fonction donnée, on s'intéresse plus particulièrement aux droites asymptotes à sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$, et aux éventuelles directions asymptotiques de celle-ci.

2.1.2 Recherche pratique

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.

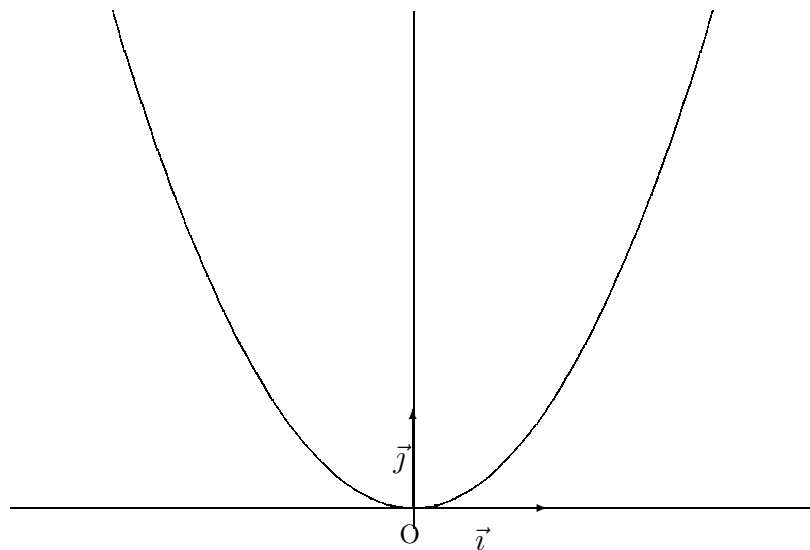
Exemple : $x \mapsto 2 + \frac{1}{x-1}$ admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale, et la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale.



Dans le cas où $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, on recherche une éventuelle direction asymptotique en étudiant le coefficient directeur $\frac{f(x)}{x}$ de la droite (OM) , avec $M(x, f(x))$ un point de $\mathcal{C}_f$:

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors la droite $(Oy) = d$ est direction asymptotique. Mais la droite passant par M de direction d s'éloigne à l'infini avec $M \in \mathcal{C}_f$. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *branche parabolique* de direction asymptotique (Oy) .

Exemple : $x \mapsto x^2$

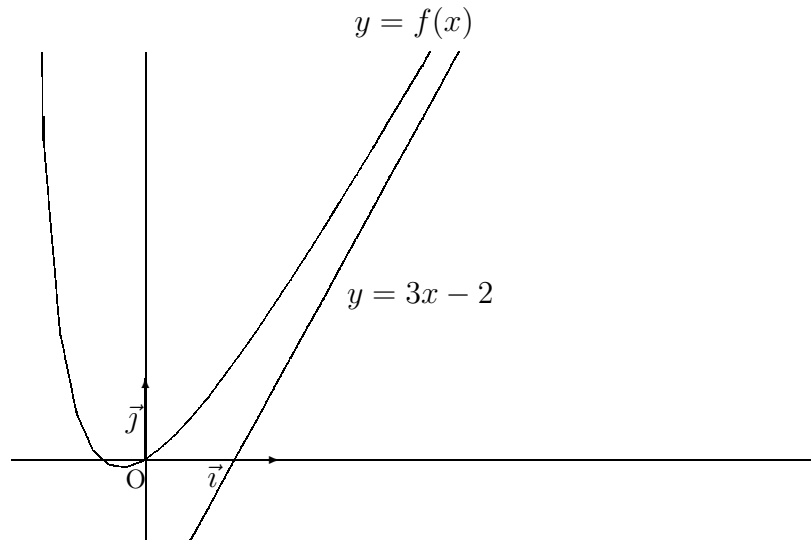


- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ alors la droite d d'équation $y = ax$ est direction asymptotique.
- si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$ la droite passant par M de direction d a pour limite la droite d'équation $y = ax + b$ qui est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto f(x) = \frac{3x^2 + x}{x + 1}$. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3.$$

On calcule alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -2$, et la droite d'équation $y = 3x - 2$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.



- si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique dans la direction asymptotique d .

Exemple : La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x - \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

Remarque : Cette liste n'est pas exhaustive : il existe encore d'autres types de branches infinies.

Exercice : Trouver une fonction f telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et qui n'entre pas dans le cadre précédent.

2.2 Dérivation

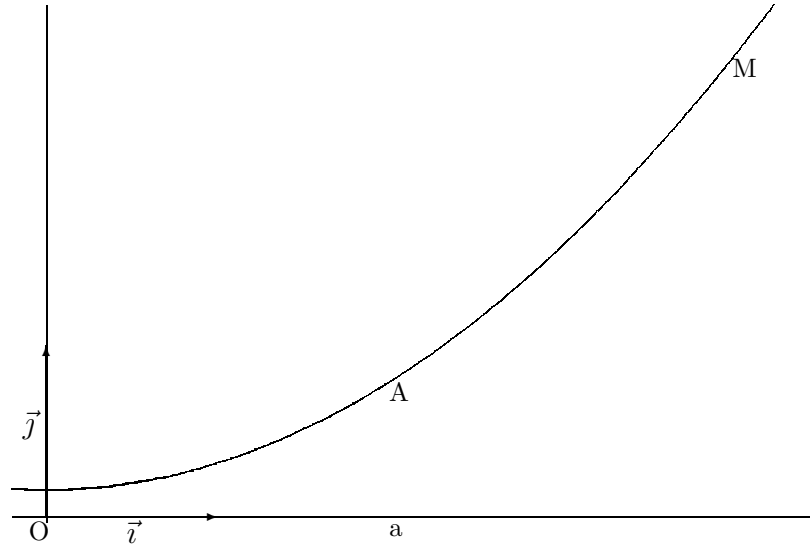
2.2.1 Fonctions dérivables

Définition

Une fonction réelle f est dite *dérivable* au point a si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite réelle quand x tend vers a . Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f au point a et notée $f'(a)$.

Interprétation graphique

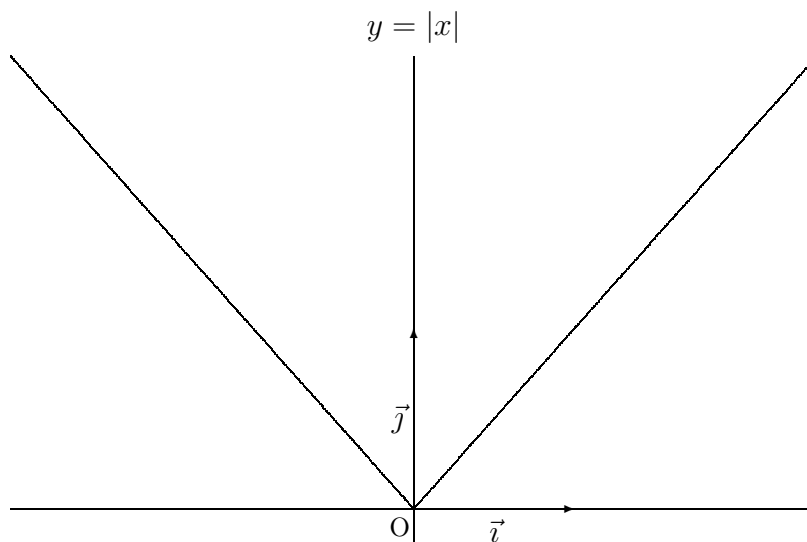
Soient f dérivable en a et $A(a, f(a))$. Le taux d'accroissement de f en a , $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, est la pente de la droite (AM) avec $M(x, f(x))$. Quand M tend vers A sur $\mathcal{C}_f$, la droite tend vers une position limite : c'est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A . La tangente a pour pente $f'(a)$ et passe par A , et a donc pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Remarques :

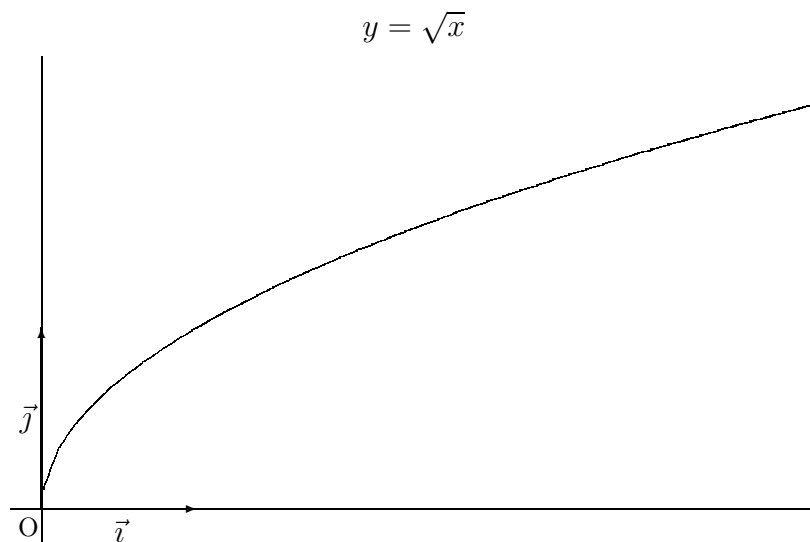
- Si f est définie sur $[a, a + \alpha[$ et si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$ alors f est dite dérivable à droite en a (demi-tangente). Si les nombres dérivés à droite et à gauche sont distincts, f n'est pas dérivable en ce point et on a un *point anguleux*.

Exemple : $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.



- Si le taux d'accroissement tend vers $+\infty$, la (demi-)tangente est parallèle à l'axe (Oy) .

Exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une demi-tangente verticale en O .



Théorème 1 Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Remarque : Attention, la réciproque est fausse !!! (voir $x \mapsto |x|$).

Démonstration : Posons $\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Alors $f(x) - f(a) = (x - a)\tau(x)$ et donc :
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$.

Fonction dérivée

f est dite dérivable sur l'intervalle ouvert I si f est dérivable en tout point de I . On note $f' : x \mapsto f'(x)$. f' est aussi parfois noté $\frac{df}{dx}$ (notation différentielle de Leibniz).

Remarques :

- On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ si f est dérivable en tout point de $]a, b[$ et f est dérivable à droite en a et à gauche en b .
- Soit f dérivable sur I . Si f' est continue sur I , on dit que f est *continûment dérivable* sur I ou encore que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- Soit f dérivable sur I . Si f' est dérivable sur I , on définit la dérivée seconde de f , notée f'' , comme étant la dérivée de f' sur I .
- On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est indéfiniment dérivable.

Nous vous invitons ici à revoir les formules de dérivation des produits, quotients et composées de fonctions ainsi que les dérivées usuelles, et à vous entraîner au calcul de dérivées.

2.2.2 Extremum

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I . On dit que :

- f admet un *minimum relatif* en x_0 s'il existe un intervalle ouvert et non vide J contenant x_0 tel que : $J \subseteq I$ et $\forall x \in J, f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un *maximum relatif* en x_0 s'il existe un intervalle ouvert et non vide J contenant x_0 tel que : $J \subseteq I$ et $\forall x \in J, f(x) \leq f(x_0)$.

- f admet en x_0 un *extremum relatif* si f admet en x_0 soit un maximum, soit un minimum.

Exemple : La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4|$ admet un maximum relatif en 0 et un minimum relatif en 2 et -2.

Théorème 2 Soit f définie sur $]a, b[$. Si f admet en x_0 de $]a, b[$ un maximum ou un minimum et si f est dérivable en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Ce théorème signifie donc que les extrema d'une fonction dérivable font partie des points d'annulation de la dérivée. La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$ et ce bien que $f'(0) = 0$.

2.2.3 Limites de la dérivée

Théorème 3 Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si f' est continue sur $]a, b[$ et si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.

Remarque : La fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable en 0, mais f' n'admet pas de limite en 0. Il est donc souvent plus simple d'étudier directement le taux d'accroissement de f que d'appliquer ce théorème.

2.2.4 Règle de l'Hospital

Le théorème suivant permet de lever, dans certains cas, l'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$.

Théorème 4 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I contenant a et telles que $f(a) = g(a) = 0$. On suppose de plus que f et g sont dérivables sur $I \setminus \{a\}$ et que ni g ni g' ne s'annulent sur $I \setminus \{a\}$ alors si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, avec l fini ou infini, on a aussi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Exemple : Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cos x} - e^{\sin x}}{\cos x - \sin x}.$$

On a ici

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{\cos x} \sin x + e^{\sin x} \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarques :

- On peut également appliquer cette règle pour calculer une limite en l'infini.
- Attention, il est parfois nécessaire d'appliquer cette règle plusieurs fois consécutives ; c'est le cas dans l'exercice suivant :

Exercice : Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin^3 x} = \frac{-1}{6}$.

- Le théorème précédent a cependant ses limites : il peut arriver en effet que $\frac{f'}{g'}$ n'admette pas de limite, et ce, bien que $\frac{f}{g}$ en ait une.

Exercice : Le vérifier en 0 pour : $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, et $g(x) = \sin x$.

2.3 Fonctions réciproques

2.3.1 Existence et premières propriétés

Théorème 5 Si f est une application continue et strictement monotone sur l'intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I dans $f(I)$. Il existe alors une fonction notée f^{-1} définie de $f(I)$ dans I et appelée fonction réciproque de f telle que, pour tout $x \in I$ et tout $y \in f(I)$

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Premières propriétés des fonctions réciproques

- La courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé est la symétrique de celle de f , par la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée première bissectrice).

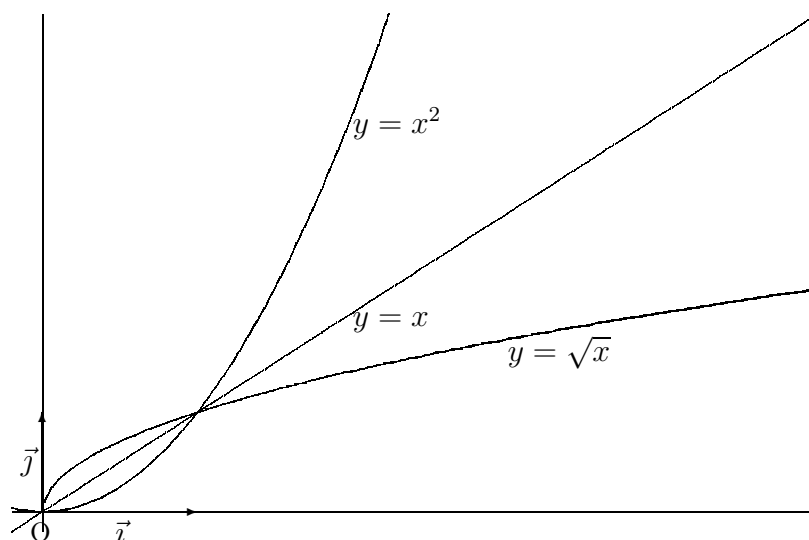
En effet, au point $M(x, y = f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ correspond de manière unique le point : $M'(y, x = f^{-1}(y))$ de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

- Si f est impaire, f^{-1} est impaire. Cela résulte du point précédent puisqu'une fonction est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple : Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f : x \mapsto x^2$.

Alors f est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. f admet donc une réciproque, définie sur $[0, +\infty[$: c'est $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$.

Le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par symétrie par rapport à la première bissectrice:



Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir sur $[0, +\infty[$ la réciproque de $x \mapsto x^n$; c'est l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, dont on obtient ainsi le graphe.

Remarque : Si f est involutive sur I , c'est à dire si $f \circ f = Id_I$, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la première bissectrice (exemple : $x \mapsto \frac{1}{x}$).

2.3.2 Continuité et variations

Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$. De plus, f et f^{-1} ont même sens de variation.

2.3.3 Dérivabilité

Théorème 6 Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I et si f est dérivable au point x_0 de I avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Démonstration : Soit $\Delta = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ alors $\Delta = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ où $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$.

Or f^{-1} est continue en y_0 (car f dérivable en x_0 y est continue) et donc x tend vers x_0 quand y tend vers y_0 . D'où : $\lim_{y \rightarrow y_0} \Delta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Remarque : On retiendra la formule: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, ou, plus simplement, en utilisant la notation de Leibniz : $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Interprétation graphique

La tangente au graphe de f^{-1} en $M'(y_0, x_0)$ est la symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ de la tangente au graphe de f en $M(x_0, y_0)$. Les pentes de ces deux droites sont donc inverses l'une de l'autre (ce qui correspond exactement au résultat établi dans le théorème ci-dessus) ; on peut même retenir que la symétrie transforme une tangente horizontale en tangente verticale, afin de visualiser le problème de dérivabilité de f^{-1} aux points où f' s'annule.

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus. $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $[0, +\infty[$; mais sa dérivée s'annule en $x = 0$; donc $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, sa dérivée étant donnée par : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, et le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale en 0.

2.4 Concavité

2.4.1 Définitions

- Un ensemble de points du plan E est dit *convexe* si $\forall M, N \in E, [MN] \subseteq E$.
- Une fonction numérique f est dite *convexe* sur l'intervalle I si dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble $\{(x, y) | x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$ est convexe (cela revient à dire que sur I , tous les points M, N de $\mathcal{C}_f$ sont tels que la corde $[MN]$ est au dessus de l'arc MN). f est dite *concave* si $-f$ est convexe.

Propriété : Une fonction numérique f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si :

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Démonstration : Soient $M(y, f(y)), N(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$. Un point P est sur la corde MN si et seulement si $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MN}$ avec $0 \leq t \leq 1$. L'abscisse de P est donc :

$x_P = t(x - y) + y = tx + (1 - t)y$ et son ordonnée $y_P = tf(x) + (1 - t)f(y)$. D'où le résultat en vertu de l'interprétation géométrique.

Exemple : $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Graphiquement, il semble que la courbe représentative de f se situe sous sa corde et on vérifie, à l'aide de la définition, que f est bien convexe : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}(tx + (1 - t)y)^2 - tx^2 - (1 - t)y^2 &= t^2x^2 + (1 - t)^2y^2 + 2t(1 - t)xy - tx^2 - (1 - t)y^2 \\ &= t(t - 1)(x^2 + y^2 - 2xy)\end{aligned}$$

On a donc bien ici : $f(tx + (1 - t)y) - tf(x) - (1 - t)f(y) = t(t - 1)(x - y)^2 \leq 0$ (car $t \in [0, 1]$).

Remarques : $x \mapsto ax + b$ est à la fois convexe et concave.

On a pu remarquer dans l'exemple traité ci-dessus que la définition fournit un critère difficile à employer ; on utilise donc plutôt dans la pratique les résultats du paragraphe suivant, donnant, sous certaines hypothèses, des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit convexe.

2.4.2 Concavité et dérivabilité

Théorème 7 Si f est dérivable sur $[a, b]$ et si f' est croissante sur $[a, b]$ alors f est convexe sur $[a, b]$.

Conséquence pratique :

Si f est deux fois dérivable sur $[a, b]$ et si $f'' \geq 0$ (respectivement $f'' \leq 0$) sur $[a, b]$ alors f est convexe (respectivement concave) sur $[a, b]$.

Si f'' s'annule en changeant de signe, il y a changement de concavité. Le point correspondant est appelé *point d'inflexion*.

Propriété :

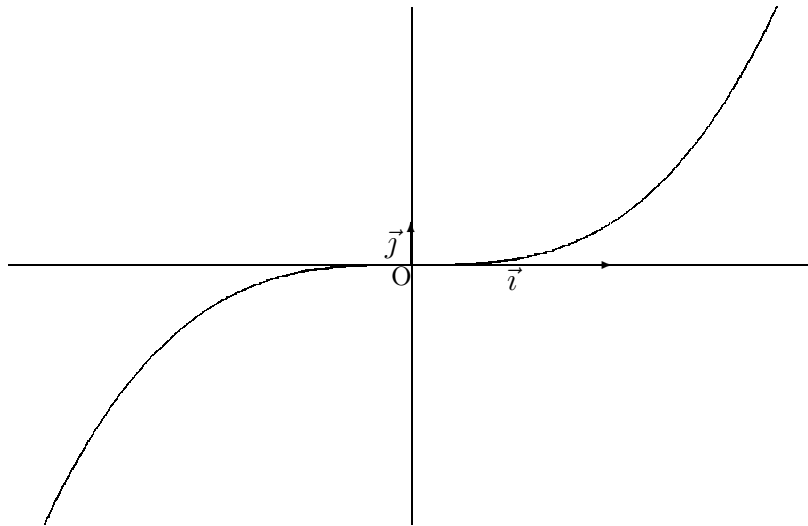
Si f est dérivable et convexe sur $[a, b]$ alors la courbe représentative de f est sur $[a, b]$ au dessus de chacune de ses tangentes.

Conséquence : En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

Pour tracer le graphe d'une fonction f , il est parfois très utile de connaître sa concavité, et en particulier de placer ses points d'inflexion. On calcule donc la dérivée seconde de f , et on étudie le signe de celle-ci, en déterminant les points où elle s'annule. Attention, si la dérivée seconde s'annule sans changer de signe, il n'y a pas de point d'inflexion.

Exemples :

- Soit $f : x \mapsto x^4$, on a : $f''(x) = 12x^2$, donc f'' s'annule en 0, mais $\mathcal{C}_f$ n'a aucun point d'inflexion (f est convexe sur $\mathbb{R}$).
Une fois déterminés les points d'inflexion, il faut faire clairement apparaître ceux-ci sur le graphe, en plaçant en particulier la tangente correspondante.
- Soit $f : x \mapsto x^3$, on a : $f''(x) = 6x$, donc f'' s'annule en changeant de signe en 0; le graphe de f possède donc un point d'inflexion en $0(0, 0)$. De plus, la tangente en ce point est horizontale, le graphe de f est sous sa tangente à gauche de 0, et au-dessus à droite.



2.5 Plan d'étude d'une fonction

1. Rechercher le domaine de définition et de continuité.
2. Déterminer l'intervalle d'étude par utilisation des propriétés d'invariance et de symétrie de la courbe (période, parité, ...).
3. Etudier la dérivabilité, le signe de la dérivée ; calculer les limites nécessaires et rassembler ces résultats dans un tableau de variations.
Remarque : Dans certain cas où le signe de f' est difficile à étudier, on peut étudier les variations de celle-ci, ou s'aider d'une fonction auxiliaire.
4. Etudier des branches infinies éventuelles: directions asymptotiques, asymptotes éventuelles et position de la courbe par rapport à celles-ci..
5. Etudier les points remarquables de la courbe, notamment les extrémas ; dans tous les cas, on fera apparaître sur le graphe les points à tangente horizontale.
6. Représentation graphique.

Exemple: Etudier et représenter la fonction définie par: $f(x) = x \exp(-x)$.

f est définie sur $\mathbb{R}$, on ne peut pas réduire ce domaine pour l'étude.

f est continue et dérivable sur son domaine de définition, et on a : $f'(x) = \exp(-x)(1 - x)$

Le signe de cette dérivée est immédiat : la fonction exponentielle étant toujours positive, f' est du signe de $1 - x$. f est donc croissante sur $]-\infty, 1]$, et décroissante sur $[1, +\infty[$; elle admet un maximum en 1, égal à e^{-1} .

On a de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Le graphe de f a donc une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $-\infty$. En $+\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; donc le graphe de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

Calculons la dérivée seconde de f :

on a $f''(x) = \exp(-x)(x - 2)$, le graphe de f admet donc un point d'inflexion pour $x = 2$. De plus $f(2) = 2e^{-2}$, et $f'(2) = -e^{-2}$, donc la tangente au point d'inflexion a pour équation : $y = -e^{-2}x + 4e^{-2}$.

