Fonction numérique d'une variable réelle

LIMITES – CONTINUITE

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

• Complète l'étude de la limite d'une fonction engagée en classe de première par :

- L'introduction de la limite d'une fonction composée ;
- La limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.

• Introduire la continuité d'une fonction sur un intervalle et utiliser quelques théorèmes usuels liés à la continuité de cette fonction.

Commentaires

La plupart des propriétés ont été abordées en classe de première. Ces propriétés, tout comme les techniques de calcul pour lever une indétermination, ne doivent pas faire l'objet d'un traitement théorique. Elles seront mises assez rapidement en œuvre dans des exercices dont le niveau de technicité et l'abondance doivent rester très raisonnable car elles seront réinvesties tout au long de l'année dans les études de fonctions. La propriété sur la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert sera utilisée dans les suites et les fonctions définies par intégrales.

Les asymptotes à une courbe (horizontale, verticale et oblique) ont été abordées en Première. L'étude générale des branches infinies est hors programme. Les branches paraboliques selon les axes de coordonnées sont les seules directions asymptotes à connaître. Dans le cas d'une asymptote oblique, une équation est fournie à l'élève.

On introduira la continuité d'une fonction sur un intervalle. Cette définition permet l'usage de deux théorèmes importants concernant l'existence d'une bijection réciproque et la propriété des "valeurs intermédiaires ". Notons que la forme générale de cette dernière propriété est hors programme. On se limitera au cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

Les propriétés concernant les opérations sur les fonctions continues sur un intervalle sont admises. On n'exigera pas de l'élève la justification de la continuité sur un intervalle lors d'une évaluation.

On habituera les élèves à Donne une valeur approchée d'une solution d'une équation.

Volume horaire/semaine : 5 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Limites - Limite d'une fonction composée. - Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert • Branches paraboliques de direction (OI) et (OJ) dans un repère (O, I, J). • Continuité sur un intervalle : - Opérations, composée (propriétés admises). - Image d'un intervalle. • Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : **Théorie 1 :** *si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur f(I). sa bijection réciproque* Ω^{-1} est continue et de même sens de variation que la fonction *f*	• Détermine la limite d'une fonction : - en utilisant les limites de référence ou une expression conjuguée ; - en ayant recours à la définition d'un nombre dérivé. • Détermine la limite d'une fonction composée. • interprète graphiquement : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\Omega(x)}{x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\Omega(x)}{x} = +\infty$ (resp. $-\infty$) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\Omega(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{\Omega(x)}{x} = +\infty$ (resp. $-\infty$) • Démontre qu'une courbe admet une branche parabolique de direction (OI)(resp. (OJ)) • Détermine l'image d'un intervalle par une fonction continue : - en utilisant le tableau de variations ; - en utilisant une méthode algébrique. • Démontre qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f est donnée par une formule explicite, Détermine f^{-1} (x).
Théorème 2 : si *f* est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout m de *f*(I), l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution dans I. Corollaire : soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Si *f*(a) et *f*(b) sont des signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. • Fonctions du type :	• Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation : $\Omega(x) = \alpha$ sur un intervalle I.

سx m ⁿИx̄, (n⁻ IR z) -x m xr (r ⁻ Q, x ⁿ IR+*). Définitions ; notons x p ض q Propriétés des puissances d'exposants rationnels	

Remarques et suggestions

Dans la détermination des limites, on veillera à ce que l'élève sache identifier une forme indéterminée sans forcement en faire état par écrit.
Pour Détermine la limite d'une fonction composée on peut utiliser un changement de variable.
On n'abusera pas des fonctions définies par raccordement.
Sur des exemples, introduire les branches paraboliques de direction (OI) et (OJ).
Pour Détermine l'image d'un intervalle par une fonction continue, on privilégiera l'utilisation du tableau de variations, l'utilisation d'une méthode algébrique n'étant proposée qu'à travers des exercices guidés.
On peut avec profit Vérifie les pré requis de la classe de Première et les théorèmes concernant la continuité à travers des études de fonctions.
On habituera les élèves à Donne une valeur approchée d'une solution.

DERIVATION

OBJECTIFS :
Ce chapitre vise à :
• consolider les notions abordées en classe de première telles que la détermination du sens de variation d'une fonction et la recherche de tangentes à une courbe en des points donnés ;
• consolider la notion de dérivé et l'étendre à la composée de deux fonctions dérivables ;
• Complète les théorèmes concernant la dérivabilité par les notions de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite ;
• utiliser des propriétés des fonctions dérivables pour Démontre des inégalités ou établir des encadrements.

Commentaires

La définition d'une fonction dérivable en un point ou sur un intervalle reste la même que celle introduite en Première. On la complète par la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle fermé et par la dérivabilité à droite et à gauche. On définira la notion de demi-tangente à une courbe. Le vocabulaire « point d'inflexion » est hors programme. Cependant on pourra étudier la position d'une tangente par rapport à une courbe.
La différentiabilité ou toute autre forme s'y rattachant est hors programme, de même que l'approximation affine d'une fonction.
La dérivée d'une fonction composée et la dérivée d'une fonction réciproque sont des compléments apportés en Terminale. Ces fonctions doivent garder une place raisonnable et être considérées comme des outils pour l'étude de fonctions nouvelles : des fonctions avec radicaux, des fonctions racines $n^{ième}$, les fonctions logarithmes et exponentielles.
Dans le cas où une fonction est définie par raccordement, on se ramène alors à une étude portant sur chacun des intervalles. Il est bien entendu que ces cas doivent être considérés comme exceptionnels et leur étude doit être largement guidée.

Les fonctions qu'on peut étudier dans ce chapitre sont en nombre infini. Il sera bon de bien sélectionner celles qui seront étudiées pour obtenir un éventail aussi complet que possible de situations différentes.

Volume horaire : 12 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Dérivées successives ; nouvelle notations. $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2 f}{dx^2}$ • Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle continue sur cet intervalle. • Dérivée d'une fonction composée (admise) ; application à la dérivation des fonctions de la forme : u^n $(n \in \mathbb{Z})$, $\sqrt{u}$ • Existence de la dérivée d'une fonction réciproque (admise), formule de la dérivée de la fonction réciproque. • Dérivée des fonctions puissances d'exposants rationnels. • Inégalité des accroissements finis (2 formes) • nombre dérivé à droite (à gauche) d'une fonction en un point. • Demi-tangente	• Démontre qu'une fonction composée est dérivable en un point et savoir Calcule le nombre dérivé en ce point. • Préciser l'ensemble des éléments où la fonction réciproque d'une fonction donnée est dérivable. • Détermine le nombre dérivé de la fonction réciproque en un point x_0 •Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour : - Démontre une inégalité ; - établir un encadrement. • Etudie la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement. • Interprète graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0.

Remarques et suggestions

On ne demandera pas de justifier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle <u>lors d'une évaluation.</u>
La dérivée d'une fonction de la forme u^n $(n \in \mathbb{Z})$ doit être traité comme application de la dérivée d'une fonction composée.
Les dérivées de la forme u^{α} ($\alpha \in$ IR*) seront abordées dans les chapitres sur les fonctions puissances.
Le programme signale que l'existence de la dérivée d'une fonction réciproque doit être admise.
On se limitera à l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction réciproque uniquement en un point x_0 et cela pour des exemples ne présentant pas de difficulté particulière

I- Généralité sur les fonctions

1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction ⅂Ω : ö ᴼ ő, toute relation qui à chaque élément de ═ on associe **au plus un**
ὼ ᴼ ⅂Ω(ὼ)
élément de ‖.

NB :

- ● est appelé la variable ;
- ▌(●)est appelé image de ὼ par la fonction ⅂Ω;
- ═ est appelé ensemble de départ.
- ‖ est appelé ensemble d'arrivé.

2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique ▌ :

Soit ⅂Ω une fonction de ö vers ő
On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique ⅂Ω, **l'ensemble des éléments de ═ qui ont une image dans** ‖. On le note **D▌.**

Ainsi :

- **Si ▌(●) = ◊(●) (fonction polynôme), alors D▌ =** я =]سЊ ; +Ѣ[
- **Si ▌(●) = لحي$\overline{◊(●)}$ (fonction irrationnelle), alors D▌ =** {●/● ᴺ я ; ◊(●) شي ج}
- **Si ▌(●) = $\frac{◊(●)}{○(●)}$ (fonction rationnelle), alors D▌ =** {●/● ᴺ я ; ○(●) غى ج}

3) Opération sur les fonctions :

Soit ⅂Ω et ⅂Ω deux fonctions définies respectivement sur leur ensemble de définition D⅂Ω et D⅂Ω.

a- **Somme** :

ⱡ ὼ ᴺ D⅂Ω et ⱡ ὼ ᴺ D⅂Ω; (⅂Ω + ⅂Ω)(ὼ) = ⅂Ω(ὼ) + ⅂Ω(ὼ)

b- **Produit :**

ⱡ ὼ ᴺ D⅂Ω$_r$ D⅂Ω ; (⅂Ω × ⅂Ω)(ὼ) = ⅂Ω(ὼ) × ⅂Ω(ὼ)

c- **Quotient :**

ⱡ ὼ ᴺD⅂Ω$_r$ D⅂Ω et ⅂Ω(ὼ) غى 0 έὲώ Ď $\frac{⅂Ω}{⅂Ω}$ (ὼ) = $\frac{⅂Ω(ὼ)}{⅂Ω(ὼ)}$

II- Limites

1) Propriétés sur les limites :

a) Propriété 1

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$
$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

b) Propriété 2

$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$; $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)^2} = 0$; $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)^3} = 0$; $\lim_{x \to a} \frac{g}{f^{\varepsilon}} = 0$ (g et f)
$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$; $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)^2} = 0$; $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)^3} = 0$; $\lim_{x \to a} \frac{g}{f^{\varepsilon}} = 0$ (g et f)
$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

2) Opération sur les limites

a) Somme :

g	f	f	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	f'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$g + g$	$f + f'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Produit :

g	f	f	0	∞
g	f'	∞	∞	∞
$g \cdot g$	$f \cdot f'$	∞ règle des signes	Forme indéterminée	∞ règle des signes

c) Quotient:

ℓ	à	à	0	à	Ь	Ь
ℓ	à' غى 0	à' = 0	0	Ь	à	Ь
$\frac{ℓ}{ℓ}$	$\frac{à}{à≠}$	+/سЬ à gauche / à droite	Forme indéterminée	0	Ь règle des signes	Forme indéterminée

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

سЬ + Ь ; 0× Ь ; $\frac{0}{0}$; $\frac{Ь}{Ь}$.

3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

La limite d'une fonction polynôme en + Ь ou en سЬ est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Exemple : $\lim_{ò \to سЬ} 1سر2ò^2 + 3ò = \lim_{ò \to سЬ} سر 2ò^2 = سر2 (سЬ)^2 = سر Ь.$

b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

$$\underset{\dot{\omega}\ \circ\ 0}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\text{ὸΩὼ}}{\dot{\omega}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \underset{\dot{\omega}\ \circ\ 0}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\text{ὸΩὥὼ}}{\text{ὥὼ}} = 1$$

$$\underset{\dot{\omega}\ \circ\ 0}{\text{ὰΩά}}\ \frac{1\text{سر}\cos\dot{\omega}}{\dot{\omega}^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \underset{\dot{\omega}\ \circ\ 0}{\text{ὰΩά}}\ \frac{1\text{سر}\cos(a\dot{\omega})}{(\text{ὥὼ})^2} = \frac{1}{2}$$

6) Limite à gauche – Limite à droite de $\bullet_o$

a) Limite à gauche de $\bullet_o$

On appelle limite à gauche d'un réel $\dot{\omega}_o$ d'une fonction Ὢ, la limite lors qu'elle existe quand ὼ tend vers $\dot{\omega}_o$ par valeurs inferieures on note : ▪▒□ ▌(●).
● ○ ●ج سر

b) Limite à droite de $\bullet_o$

On appelle limite à droite d'un réel $\dot{\omega}_o$ en une ὪέὲὦὸΩέὲ Ὢ, la limite lors qu'elle existe quand ὼ tend vers $\dot{\omega}_o$ par valeurs supérieures on note : ▪▒□ ▌(●).
● ○ ●ج +

NB :
Une fonction admet une limite en un point $\dot{\omega}_o$ si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\underset{\dot{\omega}\ \circ\ \dot{\omega}_0^-}{\text{ὰΩά}}\ \text{Ὢ}(\dot{\omega}) = \underset{\dot{\omega}\ \circ\ \dot{\omega}_0^+}{\text{ὰΩά}}\ \text{Ὢ}(\dot{\omega})$$

7) Théorème des gendarmes

Soit Ὢ une fonction définie sur un intervalle I tel qu'on ait l'encadrement suivant :
ὃ(ὼ) ش Ὢ(ὼ) ش ὄ(ὼ)

ίΩ ὰΩά ὃ(ὼ) = ὰ
ὼ ○ Ҥ
ὰΩά ὄ(ὼ) = ὰ
ὼ ○ Ҥ

ὥὰέὶί ὰΩά Ὢ(ὼ) = ὰ
ὼ ○ Ҥ

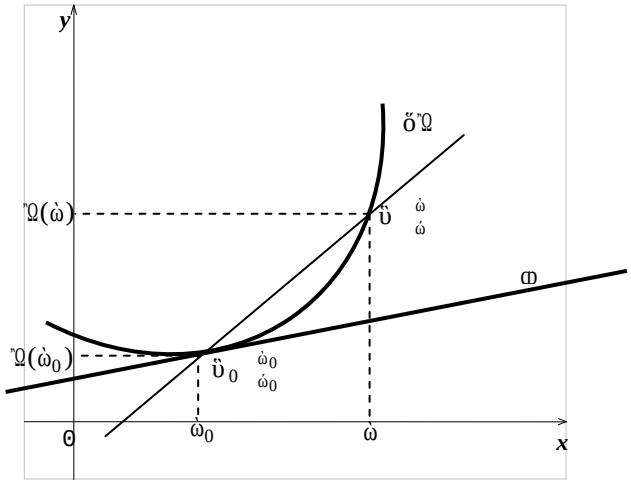
4) <u>Interprétation graphique d'un nombre dérivé</u>

Soit 𝒻 une fonction numérique d'une variable réelle et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit $M_0 \begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \end{matrix}$ un point fixé de (C). $M \begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix}$ un point courant de (C); construisons la droite $(M_0 M)$.

Lorsque x tend vers x_0, la droite $(M_0 M)$ vient occuper une position limite $(M_0 T)$ appelée tangente à la courbe (C) au point $M_0 \begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \end{matrix}$.

$f'(x_0)$ est appelé **pente** ou **coefficient directeur** de la tangente à la courbe représentative de 𝒻 au point $M_0 \begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \end{matrix}$



5) <u>Equation de la tangente au point d'abscisse</u> x_0 :

L'équation de la tangente à la courbe en un point d'abscisse x_0 est donné par :

(T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

<u>NB :</u>

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi – tangentes en M_o de coefficients directeur respectifs : les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 en faisant un angle en ce point.

- La courbe (C_f) passe par le point $\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}$ si et seulement $f(x_0) = y_0$.
- La courbe (C_f) admet au point $\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire l'axe (Ox) si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
- La courbe (C_f) admet au point $\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}$ une tangente parallèle à la droite **(D)** d'équation : $y = ax + b$ si et seulement si $f'(x_0) = a$.
- La courbe (C_f) admet au point $\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}$ une tangente de coefficient directeur m si et seulement si $f'(x_0) = m$.

Idrissa

8) <u>Extremum relatif</u>:

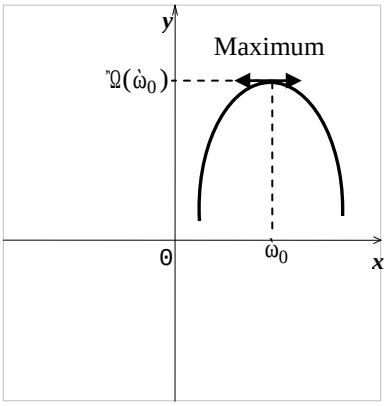
<u>Théorème 1</u>

Soit $\mathcal{U}$ une fonction définie sur un intervalle $]\tilde{\omega}\,;\tilde{\omega}[$ ouvert contenant $\dot{\omega}_0$. Si $\mathcal{U}\,\mathcal{E}(\dot{\omega})$ s'annule en $\dot{\omega}_0$ et en changeant de signe, alors $\mathcal{U}$ admet un extremum au point d'abscisse $\dot{\omega}_0$.

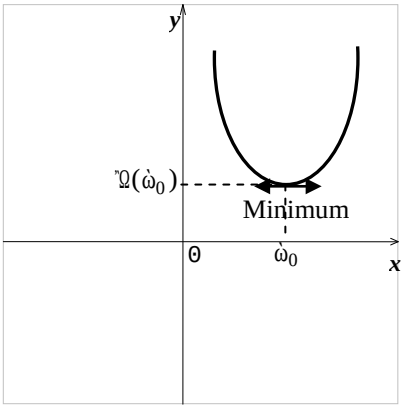
<u>Théorème 2</u>

Si $\mathcal{U}$ admet un extremum relatif d'abscisse $\dot{\omega}_0$, alors $\mathcal{U}\mathcal{E}(\dot{\omega}_0) = 0$ ou encore on dira que $\mathcal{U}$ n'est pas dérivable au point d'abscisse $\dot{\omega}_0$.

Si $\mathcal{U}'(\dot{\omega})$ passe du signe négatif au signe positif on dit que $\mathcal{U}$ présente un minimum



Ici : $\mathcal{U}'(\dot{\omega})$ passe du signe positif au signe négatif.
On dit que $\mathcal{U}$ présente un maximum



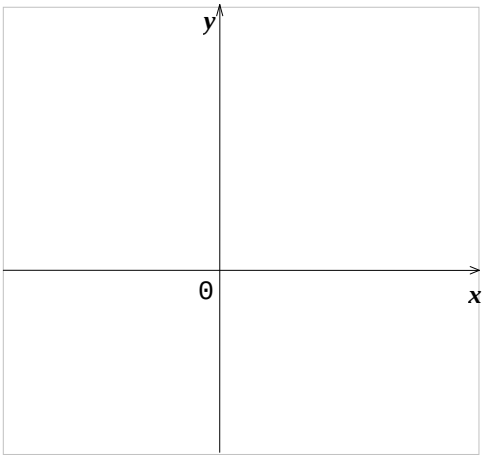
Ici : $\mathcal{U}'(\dot{\omega})$ passe du signe négatif au signe positif.
On dit que $\mathcal{U}$ présente un minimum

9) Extension du nombre dérivé

a- Point d'inflexion:

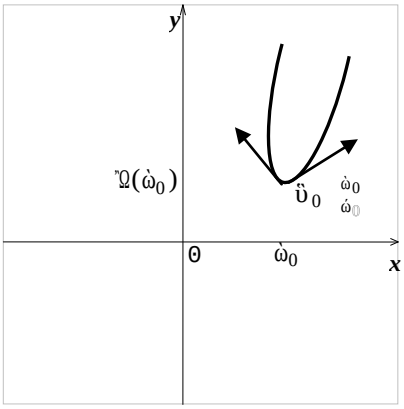
Théorème

Soit ̈Ω une fonction définie sur un intervalle]ω̈ ; ω̃[ouvert contenant ὼ$_0$. Si ̈Ωæ æ(ὼ) s'annule en ὼ$_0$ changeant de signe, alors ̈Ω admet un point d'inflexion au point d'abscisse ὼ$_0$.



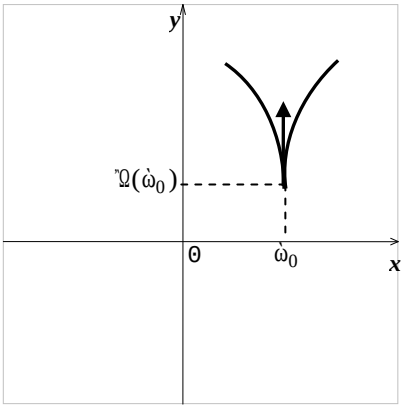
b- Points anguleux:

Soit ̈Ω une fonction admettant au point d'abscisse ὼ$_0$ un nombre dérivé à gauche ὰ(ὰ ᴺ я) et un nombre dérivé à droite ὰ²(ὰæ ᴺ я). On dit que la courbe (ő) de ̈Ω admet au point d'abscisse ὼ$_0$ un point anguleux si et seulement ̈Ω n'est pas dérivable en ὼ$_0$ et si ὰ غى ὰæ.



c- Points de rebroussement:

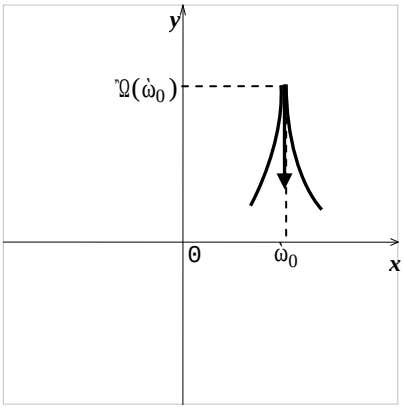
Soit 𝒇 une fonction admettant au point d'abscisse x_0 un nombre dérivé.



Point de remboursement de 1ière espèce

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ et $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

Alors la courbe $(\mathcal{C})$ de 𝒇 admet au point d'abscisse x_0 une demi- tangente verticale dirigée vers le haut



Point de remboursement de 2ième espèce

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$

Alors la courbe $(\mathcal{C})$ de 𝒇 admet au point d'abscisse x_0 une demi- tangente verticale dirigée vers le bas

d- Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Soit 𝒇 une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathcal{D} =]a ; b[$.

Première forme :

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$ et k et M sont tels que si $x \in [a ; b]$ et $k \leq f'(x) \leq M$ alors on a : $k(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Deuxième forme :

Si 𝒇 est un réel tel que : $\forall x \in \mathcal{D} = [a ; b]$, si $|f'(x)| \leq \mathcal{M}$ alors $|f(b) - f(a)| \leq \mathcal{M}|b - a|$

V- Etude de fonctions :

1) Parité d'une fonction

a- Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si $\forall x \in D_f$ et $-x \in D_f$, on a :
$f(-x) = f(x)$

b- Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si $\forall x \in D_f$ et $-x \in D_f$, on a :
$f(-x) = -f(x)$

NB :

- La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire car $\cos(-x) = \cos x$
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est paire car $\sin(-x) = -\sin x$

2) Périodicité d'une fonction

Une fonction f est dite périodique et de période T si et seulement si $\forall x \in D_f$, on a :
$f(x + T) = f(x)$

NB :

- La fonction $x \mapsto \cos(ax + b)$ est périodique et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- La fonction $x \mapsto \sin(ax + b)$ est périodique et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- La fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ est périodique et de période $T = \frac{\pi}{|a|}$
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont toutes deux périodiques et de période $T = 2\pi$

- Préciser le sens de variation de la fonction f.
- Consignation des résultats précédents dans un tableau de variation.
- Rechercher ci-possible des points d'intersections éventuels avec les axes du repère.

Exercices

Limites

Limites en un point

1 Calcule les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x + 2}$; b- $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$; c- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}$; d- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$; f- $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 3x + 4}$

2 Calcule les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$; b- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}$; c- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; e- $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$; f- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}$;

Limites à l'infinie

3 Calcule les limites suivantes à l'infinie :

a- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-8}{x + 1 - x^2}$; b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x} - 1}{x + 2}$; c- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - x}$; d- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + x - 5}}$; f- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}$; g- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x - |x|}{2x - 2}$

h- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)$; i- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1}$ ([illegible])

Limites et asymptotes

4 Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on Donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a- $f(x) = \frac{x^2 + 5}{-x + 2}$; b- $f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}$; c- $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{-x}$; d- $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$

5 Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.
On note (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
a- Etudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe (C_f) admet – elle une asymptote horizontale ?

b- Démontre que la droite (φ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

Continuités

Continuité en un point x_0

6 Etudie la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} \\ f(2) = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 2$; **b)** $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $x_0 = 1$

Continuité et condition de faisabilité

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = m \end{cases}$

Détermine la valeur de m pour que f soit continue en $x_o = 2$

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 + mx$ si $x \in]-\infty ; -1[$

$f(x) = 2x - 1$ si $x \in]-1 ; 1[$

$f(x) = n(x^2 - 1)$ si $x \in]1 ; +\infty[$

a) Détermine le réel m pour que f soit continue au point $x_o = -1$

b) Pouvez – vous Détermine la valeur de n pour que f soit continue au point $x_o = 1$?

Prolongement par continuité

9 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et Détermine (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_o.

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x f(x)}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

10 Soient f et g deux fonctions définies respectivements par :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

a- Détermine les ensembles de définitions D_f et D_g respectivement des fonctions f et g.

b- Vérifie que la fonction g est le prolongement par conitinuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

11 On considère la fonction ̈Ω de la variable réelle ὼ définie par ̈Ω(ὼ) = $\frac{\text{Ѝ}\overline{2\text{ὼ}}\ \text{سر}2}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 2}$

1) Détermine son ensemble de définition D̈Ω.
2) Montre que ̈Ω admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par ̈Ω.
3) Montre que ̈Ω est dérivable en 2 puis Donne l'équation de la tangente à la courbe(C) de ̈Ω au point d'abscisse 2.

Dérivabilité

Dérivabilité en un point ●ج

12 Etudie la dérivabilité des fonctions suivantes aux points ὼ_0 donnés :

a) ̈Ω(ὼ) = $\frac{(\text{ὼ}\ \text{سر}\ 2)^2}{\text{ὼ}^2 + \text{ὼ}\ \text{سر}\ 6}$ et $\text{ὼ}_0 = 2$; **b)** ̈Ω(ὼ) = $\frac{|\text{ὼ}\text{سر}1| + 2}{\text{ὼ} + 3}$ $\text{ὼ}_0 = 1$

ج̈Ω(2) = 0 ̈Ω(1) = $\frac{1}{2}$

Dérivabilité et condition de faisabilité

13 Détermine les réels ὥ et ὦ pour que ̈Ω soit continue et dérivable aux points $\text{ὼ}_0 = 1$

̈Ω(ὼ) = $2\text{ὼ}^2 + \text{ὥ}\text{ὼ}\ \text{سر}\ 3$ ίΩ ὼ شى 1

ج̈Ω(ὼ) = $\frac{2\text{ὼ} + \text{ὦ}}{\text{ὼ}}$ ίΩ ὼ > 1

14 Soit ̈Ω la fonction de я vers я définie par :

̈Ω(ὼ) = $\frac{\text{ὼ}(\text{ὼ} + 1)}{(\text{ὼ} + 2)^2}$ ίΩ ὼ شي سر1

ج̈Ω(ὼ) = $2\text{ὼ} + \text{ὥ}$ ίΩ ὼ < سر1

1) Pour quelle valeur de ὥ la fonction ̈Ω est – elle continue au point سر1 ?
2) Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction ̈Ω au point – 1.

Application de la dérivée

15 Détermine une équation de la tangente en ̈υ$_o$(ὼo ; ̈Ω(ὼo)) à la courbe (C) de ̈Ω dans les cas suivants :

ὥ) ̈Ω(ὼ) = $\text{ὼ}^3 + 2\text{ὼ}^2\ \text{سر}\ 5\text{ὼ} + 3$ ̈Ωὸ $\text{ὼ}_o = \text{سر}2$; ὦ)̈Ω(ὼ) = $\frac{\text{ὼ}^2 + 2\text{ὼ} + 2}{\text{ὼ} + 1}$ et $\text{ὼ}_o = 1$

c) ̈Ω(ὼ) = $\frac{\text{ὸὥὲ̈Ωὼ}}{\text{ὼ}}$ et $\text{ὼ}_o = 0$

16 Détermine la fonction dérivée ̈Ω' de la fonction ̈Ω dans chacun des cas suivants :

ὥ) ̈Ω(ὼ) = $\text{ὼ}^3 - 2\text{ὼ}^2 + 5\text{ὼ} + 3$; ὦ) ̈Ω(ὼ) = $\frac{\text{ὼ}^2 + 2\text{ὼ} + 2}{\text{ὼ} + 1}$; c) ̈Ω(ὼ) = $(\text{سرὼ}^2 + 2\text{ὼ})^3$

d) ̈Ω(ὼ) = $\text{Ѝ}\overline{2\text{ὼ}^3\ \text{سر}\ 4\text{ὼ}^2 + 1}$; e) ̈Ω(ὼ) = $(1\ \text{سر}\ 3\text{ὼ}^2)(\text{سرὼ}^2 + 1)$; f)̈Ω(ὼ) = $\text{Cos}^3\text{ὼ}$

g) ̈Ω(ὼ) = $(\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1)\ \text{Ѝ}\overline{\text{ὼ}^3\ \text{سر}\ \text{ὼ}^2}$; h) ̈Ω(ὼ) = $\text{Sin}(3\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1)^4$; i) ̈Ω(ὼ) = ̈YΩὲ^4(3ὼ سر 1)

17 Soit la fonction numérique ℚ définie par : ℚ(ὼ) = |ὼ² سر 2ὼ سر 3|

1) Ecris de ℚ(ὼ) sans le symbole de la valeur absolue.
2) aسر Etudie la continuité et la dérivabilité de ℚ aux points ὼ$_o$ = سر1 et ὼ$_o$ = 3.
   bسر Que dira – t – on quant à la dérivabilité de ℚ aux points ὼ$_o$ = سر1 et ὼ$_o$ = 3 ?
3) Donne une équation de la tangente à gauche et à droite aux points ὼ$_o$ = سر1 et ὼ$_o$ = 3.
4) Dresse le tableau de variation de la fonction ℚ.

Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

18 Analyse puis interprète chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

a- les domaines de définition.
b- les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
c- Donne l'allure de la courbe (Cℚ) dans chaque cas.

1) ▌est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

ὼ	سرĐ	+ Đ
ℚ ’(ὼ)	+	
ℚ(ὼ)	سرĐ ↗	+ Đ

De plus :
- La courbe (Cℚ) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La courbe (Cℚ) admet l' axe (ώ'ŭώ) comme branche parabolique.

2) ▌est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

ὼ	سرĐ	سر 1	2	+ Đ
ℚ ’(ὼ)	سر	0 +	0	سر
ℚ(ὼ)	+ Đ ↘	0 ↗	1 ↘	سر Đ

De plus : La courbe (Cℚ) admet l' axe (ώ'ŭώ) comme branche parabolique.

3) ▌est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

ὼ	سرĐ	سر 2	1	2	+ Đ
ℚ ’(ὼ)	+	+	0	سر	سر
ℚ(ὼ)	سر1 ↗ + Đ	سر Đ ↗ 1	↘ سر Đ	+ Đ ↘	سر 1

4) ▬est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

ὼ	سرĐ	سر 2	1	2	+ Đ
ή ’(ὼ)	سر	0 +	+	سر 0	+
ή(ὼ)	2 ↘	0 ↗	+Đ + Đ	↘ 1	↗ 2

Dresse le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour ▌:

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$

f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $O_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ et $O_2(-1; -\frac{5}{2})$ sont ses extremums

les droites $x = -2$ et $x = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

2) Pour ▌ :

f est définie sur $]-\infty; 0[\cup \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$

f est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.

la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$

les points de coordonnées $(0 ; -3)$ et $\left(\frac{5}{2}; 1\right)$ sont sur la courbe de f.

3) Pour ▌:

f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0 ; 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

le point de coordonnées $(0{,}3 ; 0{,}4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (C_f)

et f est croissante sur $[0 ; 0{,}3] \cup [2 ; +\infty[$

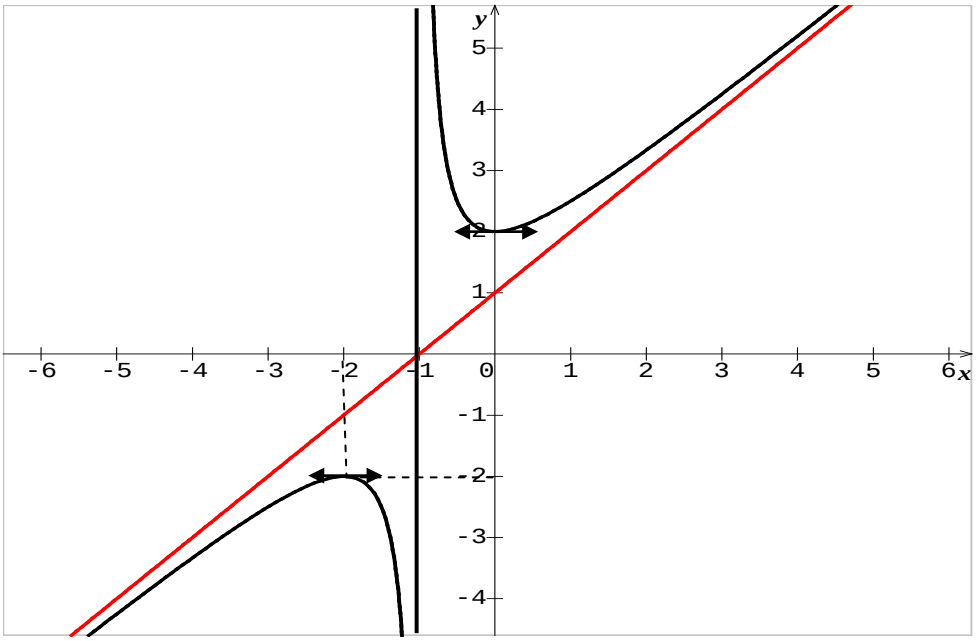
les droites d'équations $x = -1$ et $y = -2x + 1$ sont asymptotes de (C_f) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

les points de coordonnées $(0 ; 0)$;$(1 ; 0)$; et $(2 ; -2)$appartiennent à (C_f)

Analyse et interprétation d'un graphique.

Analyse

3) La fonction donnée est f telle que : $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + f}$



Fonctions d'initialisations.

21 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Détermine l'ensemble de définition D_f.
2) Calcule les limites aux bornes de D_f.
3) Détermine les réels a ; b ; c tel que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$
4) a- Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C_f .
   b- Détermine la position de la courbe C_f et de la droite (D).
5) Montre que le point $I\left(-1 ; 0\right)$ est centre de symétrie pour la courbe C_f.
6) Détermine une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse – 2
7) Calcule la dérivée f' de la fonction f puis Dresse le tableau de variation de f.
8) Construire la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère.

22 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + bx + f}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Détermine les réels a ; b ; b f tel que :
   a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $y = 2$ et $y = -1$.

b- La courbe C$_f$ passe par le point A$\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5.

2) Etudie la fonction f puis représente sa courbe C$_f$ dans le repère.

23 Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx+c}{x^2+dx+e}$

Soit C$_f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Détermine les réels a ; b ; c ; d ; e tel que :

a- La courbe C$_f$ admet comme asymptote les droites $x=2$ et $x=-1$.

b- La courbe C$_f$ passe par les points A$\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ et B$\left(0;\frac{1}{3}\right)$ et admet au point B$\left(0;\frac{1}{3}\right)$ une tangente de coefficient directeur -3.

24 Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{2(x^2-1)}$

Soit C$_f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Etudie les variations de f.
2) Préciser les asymptotes à la courbe C$_f$.
3) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, Détermine la position de C$_f$ par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.
4) Construire C$_f$.

25 Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{2x}$

Soit C$_f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Etudie et construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
2) Montre que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)
3) Discute graphiquement suivant les valeurs de α l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2+2(1-\alpha)x+4=0$
4) Montre que la restriction f de f à l'intervalle I = [2 ; + ∞ [est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
5) Construire la courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f dans le même repère que (Cf).

Fonctions biologiques.

26 Une population de bactéries (exprimer en millier) a un rythme de croissance modélisé par la fonction $f(t)=\dfrac{60t+40}{t+10}$ où $t\in[0\ ;\ +\infty[$ est le temps écoulé en jours.

1) Quelle est la population de cette culture au bout de 3 jours ? ; 5 jours ? ; 21 jours ?
2) Détermine les réels a b c tels que $f(t)=a+\dfrac{c}{t+10}$ pour $t\in[0\ ;\ +\infty[$.
3) a- Calcule la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$.
   b- Justifier que la population de bactéries est croissante.
4) a- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(t)=52$.

c- En déduis à partir de quel jour la population de bactéries sera égal à 52.000 individus.

5) a- Quelle est la limite de Ὠ en + Ð ?

b- En déduis une interprétation quant à la population de bactéries.

6) Trace la courbe (ὅΏ) de Ὠ dans un repère orthonormé (O ; Ɓ ; Ɓ̀).

Echelle : 1 ὦά ° 10 ans sur l'axe (έὼ) et 1 ὦά ° 10.000 individus sur l'axe (έώ).

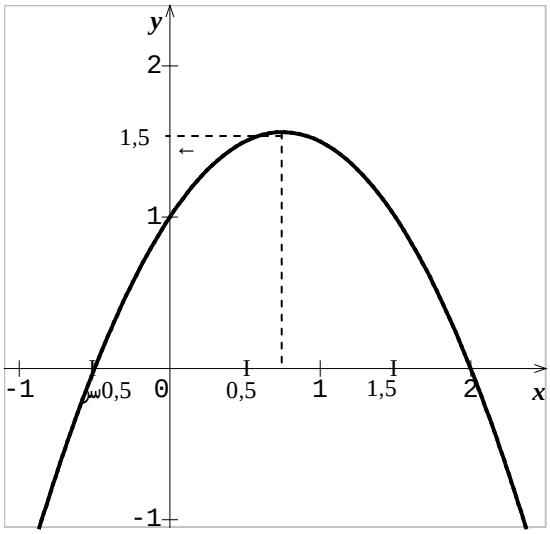
27 Un laboratoire médical désire mesurer le nombre de personne contaminés par jour du à un virus à partir d'une « fonction de contagion » Ὠ, définie sur l'intervalle [1 ; 30] par :
Ὠ(ὸ) = 0,02ὸ^3 سر 1,4ὸ^2 + 22ὸ + 640 où ὸ désigne la durée en jour de propagation.
On appelle Ὠ' la dérivée de la fonction Ὠ comme la fonction « contagion ».
On dit qu'il y a « contagion » lorsque Ὠ'est positive. Sinon on dit qu'il y a « non contagion ».
1) Quelle est le nombre de personne contaminé entre le 1er jour et le 21 jour ?
2) Détermine les intervalles où il ya contagion et non contagion.
3) On désigne par S = $\int_{10}^{15}$ Ὠ(ὸ)Ὠὸ, l'aire en ά^{2}de la zone contaminée par la virus.
Détermine cette aire.

28 Une culture de bactéries a un rythme de croissance (ὨὼὴὶΏάέΏὲ ά ά /Ὶέόὶ)et modélisé par la fonction ὅ(ὼ) = $\frac{3000}{1 + 0,25ὼ}$ où ὼ ᴺ [0 ; +Ð[est le temps écoulé en jours.

On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population ὴ(ὼ)c'est-à-dire que ὴᵽ(ὼ) = ὅ(ὼ) et au temps ὼ = 0, la culture compte 1000 bactéries c'est-a-dire :
ὴ(0) = 1000.
1) a- Détermine ὴ(ὼ)désignant la population des bactéries après ὼ jours.
b- Evaluer le nombre de bactérie ainsi que leur rythme de croissance au bout de 3 jours.
c- Après combien de jours le nombre de bactéries atteindra t-il 1500 individus ?
2) a- Etudie les variations de ὴ sur l'intervalle [0 ; +Ð[.
b- Calcule la limite de ὴ(ὼ)en +Ð.

29 Un malade contracte une fièvre dont la température en degré est modélisée par la fonction ὸ définie sur l'intervalle [0 ; +Ƀ[par ὸ(ὼ) = سرὼ^2 + 1,5ὼ + 1. Où : ὼ est le temps écoulé exprimé en seconde et ὸ(ὼ) est la température de la fièvre exprimé en degré.

1) Quelle est la température du malade à : 0 s ? ; 1s ? et 2s ?
2) La fonction ὸ est représentée par la courbe ci-dessous :



a. Indiquer à qu'elle instant la fièvre atteint sa température maximale.
b. Donne les intervalles respectifs de montée et de descente de la fièvre.

3) On désigne par T une primitive de la fonction ò définie sur l'intervalle [0 ; 2].
   a. Calcule T.
   b. Calcule la température moyenne du malade pendant l'intervalle de temps [0 ; 2].
   (ές è ̀Ω ές è ̀ès è ̀Ωì ώ ός è ̀Ω ὺ ώὰ ὰΩ ός ì ̀Ωές ̃Ω ά ώὰ ὰΩ ώ ì ì ές è ̀ΩΩΩ ώ ός ̀Ωὺ ̀Ω ὺ ̀ès è ̀ά ̀Ω).

: Soit ̀Ω une fonction définie et dérivable sur l'intervalle[ώ ; ώ̃].
La valeur moyenne ά de ̀Ωsur l'intervalle[ώ ; ώ̃], est le nombre ά tel que :

$$\acute{\alpha} = \frac{1}{\tilde{\omega} - \omega} \int_{\omega}^{\tilde{\omega}} \grave{\Omega}(\grave{\omega})\,\mathrm{d}\grave{\omega}$$

Fonctions circulaires.

30 Soit ̀Ω la fonction définie sur $\text{سر} \frac{\text{“}}{2} ; \frac{\text{“}}{2}$ par : $\grave{\Omega}(\grave{\omega}) = \frac{\text{ ̀Ὺὲ}3\grave{\omega}}{\text{ὅέί}^3\grave{\omega}}$

Soit C ̀Ω sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; ̀ᾶ ; ̀ᾶ).

1) Montre que l'ensemble de définition D ̀Ω peut se réduit
2) Etudie la parité et la périodicité de ̀Ω puis en déduis un intervalle d'étude D_E.
3) Montre que ! ὼ ᴺ D ̀Ω, ̀Ωᾷ(ὼ) = $\frac{3\text{ὅέί}2\grave{\omega}}{\text{ὅέί}^4\grave{\omega}}$ puis Dresse le tableau de variation de ̀Ω.
4) En déduis le tracé de (C ̀Ω) sur $\text{سر} \frac{\text{“}}{2} ; \frac{\text{“}}{2}$ par symétrie.

31 Soit la fonction ̀Ω définie sur [سر“ ; “] par $\grave{\Omega}(\grave{\omega}) = \frac{1 + \text{ὅέί}3\grave{\omega}}{\text{ὅέί}^3\grave{\omega}}$

Soit C ̀Ω sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; ̀ᾶ ; ̀ᾶ).

1) Détermine l'ensemble de définition D ̀Ω.
2) Etudie la parité et la périodicité de ̀Ω puis en déduis un intervalle d'étude D_E.
3) Montre que ! ὼ ᴺ D ̀Ω, ̀Ωᾷ(ὼ) = $\frac{3(\text{سر}\,1 - 2\text{ὅέί}\grave{\omega})\,\text{ ̀Ὺὲ}\grave{\omega}}{\text{ὅέί}^4\grave{\omega}}$
4) Etudie le signe de (1 سر 2ώ̃έί ̀ὼ) sur D_E puis en déduis les variations de ̀Ω sur D_E.

5) Détermine les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

6) En déduis le tracé de (Cf) sur [سπ ; π] par symétrie.

32 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sin 2x \cos x$.
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; i ; j).

1) a- Prouver que la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cf et étudier la parité de f.

b- Justifier que l'on peut étudier f sur $D_E = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe Cf sur ℝ.

2) a- Détermine $f'(x)$ et justifier que $f'(x) = 2\cos x(3\cos^2 x - 2)$ pour tout $x \in D_E$

b- Etablis le tableau de variation de f sur D_E

3) Trace (C f) sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ puis sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ par symétrie.

Fonctions paramétriques.

33 Soit f_α la fonction définie sur ℝ par : $f_\alpha(x) = (2\alpha - 1)x^4 - (\alpha + 4)x^2 - \alpha + 5$.
Où x est la variable et α est un paramètre réel.
Soit (C_α) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; i ; j).

1) Montre que toutes les courbes (C_α) passent par deux points fixes dont on Déterminera les coordonnées.

2) Etudie la fonction f_0 puis représente sa courbe (C_0) dans le repère orthonormé.

34 Soit f_α la fonction définie sur ℝ par : $f_\alpha(x) = \frac{x^2 + 3x + 4\alpha}{x^2 + (5\alpha + 1)x + 3}$.
Où x est la variable et α est un paramètre réel.
Soit (C_α) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; i ; j).

1) Montre que toutes les courbes (C_α) passent par trois points fixes dont on Déterminera les coordonnées.

2) Détermine α pour que le point d'intersection I de (C_α) et l'asymptote parallèle à (x'Ox) ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.

3) Etudie les fonctions f_0 et f_1 puis représente leur courbe respectives courbe (C_0) et (C_1).

35 Soit f_α la fonction définie sur ℝ par : $f_\alpha(x) = \frac{x^2 - \alpha x}{x^2 - 1}$.
Où x est la variable et α est un paramètre réel différent de 1.
Soit (C_α) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; i ; j).

1) Donne le tableau de variation de la fonction f_α suivant les valeurs de α.
(On distinguera les cas où $\alpha = -2$; $\alpha = 2$).

2) Comparer $f_\alpha(x)$ et $f_{-\alpha}(-x)$ puis Donne la position relative des courbes (C_α) et $(C_{-\alpha})$.

3) Montre que toutes les courbes ($\mathcal{C}_\alpha$) passent par un même point fixe dont on Déterminera les coordonnées..
4) Représente leur courbe respectives ($\mathcal{C}_{-2}$) et ($\mathcal{C}_2$).

Fonctions auxiliaires.

36

Partie A : On considère le polynôme P définie : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
1) Donne le tableau de variation de P.
2) Démontre que l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]1{,}6\ ;\ 1{,}7[$.
3) Donne le signe de $P(x)$ dans l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction $f :]-1\ ;\ +\infty[\to \mathbb{R}$ et $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x^3}$
Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
1) a) Justifier la dérivabilité de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
b) Calcule $f'(x)$ puis établir que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(1+x^3)^2}$
2) Donne le tableau de variation de f.
3) Détermine les équations des asymptotes à la courbe C_f de f.
4) Place α puis Trace C_f.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle$[2\ ;\ +\infty[$.
Montre que g réalise une bijection de $[2\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6) Trace $C_{g^{-1}}$ où g^{-1} est la bijection réciproque de la fonction g restriction de f à l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$.

37

Partie A : On donne la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x - 4$
1) Etudie les variations de f et Dresse son tableau de variation.
2) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2{,}19 < \alpha < 2{,}20$
3) En déduis le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$
Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.
2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{xf(x)}{(x^2-1)^2}$
3) Etudie le signe de $f'(x)$ et en déduis les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f.
4) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f . Etudie la position de C_f et (D).
5) Trace C_f.

38

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$
a) Etudie les variations de la fonction f.
b) Montre que $f(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on Déterminera.
c) En déduis le signe de f sur $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.
Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.

a) Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b) Montre que $\forall x \in D_f$; $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

c) En déduis le tableau de variation de f.

3) a- Détermine la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$.
b- Quelle conséquence graphique peut – on déduis de ce résultat ?

4) a-Montre la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$
b-Etudie la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').

5) Trace la courbe (C), les droites (D) et (D').

Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue.

39 Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Donne l'ensemble de définition D_f de f .
2) Etudie les variations de f, puis Trace avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx -0,3$

40 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x - \sqrt{x^2+8} < 0$
b) Etudie les limites de f aux bornes de D_f. En déduis que la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.
c) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$
2) a) Calcule $f'(x)$. Puis en déduis de 1) a) le sens et le tableau de variation de f.
b) Trace (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

41 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{|x|+1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Détermine le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans les symboles "valeur absolue"
2) Etudie la dérivabilité de f en -1 et en 0, puis interprète géométriquement les résultats
3) Etudie les variations de f
4) Montre que les droites d'équations $y = -x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe (C) et f
5) Trace (C)

42 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Détermine l'ensemble de définition de f
2) Ecris $f(x)$ sans valeur absolue
3) Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interprète graphiquement vos résultats.

4) Montre que la courbe (C) de ℚ admet une asymptote oblique (æ) au voisinage de −∞ et une asymptote oblique (D) au voisinage de +∞.
5) Dresse son tableau de variation
6) Trace dans un repère orthonormé la courbe (C) de ℚ.

43 Soit la fonction ℚ définie de ℝ vers ℝ par $ℚ(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Soit $C_ℚ$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Détermine l'ensemble de définition $D_ℚ$ de ℚ
2) a) Etudie la dérivabilité de ℚ au point $x_0 = 0$, en déduis l'ensemble de dérivabilité de ℚ.
   b) Calcule $ℚ'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.
   c) Calcule les limites de ℚ(x) aux bornes de $D_ℚ$ et préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de ℚ.
   d) Dresse le tableau de variation de ℚ.
3) Trace la courbe (C) de ℚ.

44 On considère, dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), le cercle (γ) de centre O et de rayon 1.
Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (−1 ; 0) .

1) Pour tout point H du segment[AA'], distinct de A et A', on mène la perpendiculaire (φ) à la droite (AA'). La droite (φ) coupe le cercle (γ) en M et M'.
   On pose $\overline{OH} = x$. Calcule en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
2) Soit ℚ la fonction définie sur]−1 ; 1 [par $ℚ(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.
   a- Etudie les variations de f.
   b- Montre que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

Problèmes

45 La fonction ℚ de ℝ dans ℝ est donnée par une partie de son tableau de variation.
On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de ℚ.

x	−∞	2	4	+∞
$ℚ'(x)$		−	−	
ℚ(x)		1 ↘	+∞ | +∞ ↘	3
			−∞ |	

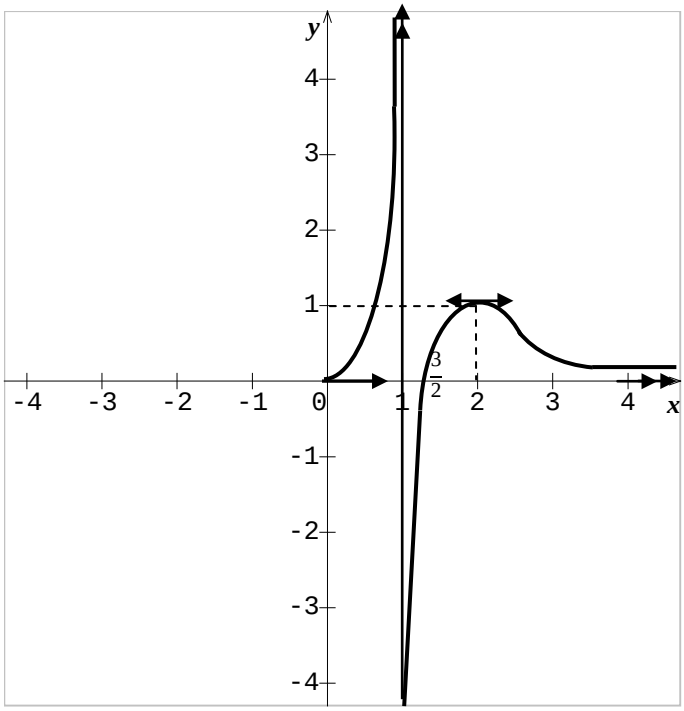
1) Trace la courbe Γ de ℚ
2) Complète le tableau de variation de ℚ
3) On suppose que ℚ(x) est de la forme $ℚ(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$

a- Détermine les réels a ; b ; c ; α ℚx

b- Montre que la restriction ℚ de ℚ à I =] 2 ; 4] réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
c- Donne l'équation de la tangente à la courbe $Γ_1$ de $ℚ^{-1}$ au point d'abscisse 1
d- Trace $Γ_1$

e- Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre α, du nombre et des signes des solutions de $(3-\alpha)x^2-(12-4\alpha)x+8=0$

46 On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction f.



1) Complète la courbe de la fonction f sachant que f est impaire.

2) Donne les équations des asymptotes à (Cg)
3) Quel est le domaine de définition de g sous forme de réunion d'intervalles
Donne les limites de f aux bornes de Dg.
4) Dresse le tableau de variation de f.

47 Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ où a ; b ; c et d sont des réels et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$
1) Trouve les réels a ; b ; c et d sachant que la droite d'équation $x=3$ est asymptote et (C_f) passe par les points $A(2;3)$, $B(4;7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
2) Dans la suite du problème on prendra $a=1$; $b=-1$; $c=-5$ et $d=-3$
a- Etudie la fonction f

b- Etudie la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique
c- Montre que la restriction g de f à l'intervalle $[4;+\infty[$ réalise une bijection de $[4;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Montre que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on Déterminera
4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β
5) a- Montre que $\forall x \in [4\,;5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$
b- En déduis que $f(x) - \frac{15}{2} \leq \frac{3}{4}|x - 5|$
6) Trace (Cf) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ainsi que (Cf^{-1}) la courbe de f^{-1}

48

Partie A : Soit f la fonction numérique définie sur Df =] 1 ; +∞[par : $f(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$

1) Montre que la dérivée de f garde un signe constant sur Df.
2) Etudie les variations de f (limite et sens de variation)
3) En déduis que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle] 1 ; 2[

Partie B: On se propose de Résous l'équation $f(x) = 0$ dans] 1 ; 2[.

1) Montre que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.
2) On appelle f la fonction définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (On a donc $f(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$)
   a) Montre que si x est élément de] 1 ; 2[alors $f(x)$ est aussi élément de] 1 ; 2[.
   b) Justifier la dérivabilité de f sur [0 ; +∞[Calcule la dérivée de f puis Montre que pour tout $x \in [1\ ;\ 2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
   c) En déduis que pour tout x de [1 ; 2], on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
3) Construire la courbe (C) de la fonction f

49

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

1) a- Démontre que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [0 ; +∞[est au dessus de sa tangente en tout point.
b- En déduis que $\forall n \in$ [0 ; +∞[, on a : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$ **(1)**.
2) Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞[; par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et soit α un réel strictement positif.
a- Détermine la dérivée première et seconde de f sur [0 ; +∞[

b- Vérifie que : $\forall x \in$ [0 ; α[on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$
c- En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle [0 ; α] , Démontre que : $1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq \sqrt{1+\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2}$ **(2)**
d- Déduisez des relations **(1)** et **(2)** que : $\forall n \in$ [0 ; +∞[, on a :
$1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} \leq \sqrt{1+\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2}$
e- Etablis alors l'inégalité suivante : $1{,}0475 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1{,}05$
α- En déduisez une valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ tout en précisant la marge d'incertitude.

Solutions

Limites en un point $\bullet_{\varepsilon}$

1 Calculons les limites suivantes aux points $\grave{o}_0$ donnés :

a- $\lim\limits_{\substack{\grave{o}\to 2^+}} \frac{\grave{o}^3 - 8}{\sqrt{\grave{o}+2}} = \frac{2^3-8}{\sqrt{-2+2}} = \frac{8-8}{\sqrt{-2+2}} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{\substack{\grave{o}\to 2^+}} \frac{\grave{o}^3 - 8}{\sqrt{\grave{o}+2}} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 2^+}} \frac{(\grave{o}-2)(\grave{o}^2+2\grave{o}+4)}{\sqrt{(\grave{o}-2)}} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 2^+}} \sqrt{(\grave{o}-2)}(\grave{o}^2+2\grave{o}+4) = \sqrt{12}$$

b- $\lim\limits_{\substack{\grave{o}\to 9}} \frac{\sqrt{\grave{o}}-3}{\grave{o}-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{\substack{\grave{o}\to 9}} \frac{\sqrt{\grave{o}}-3}{\grave{o}-9} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 9}} \frac{\sqrt{\grave{o}}-3}{\grave{o}-9}\times\frac{\sqrt{\grave{o}}+3}{\sqrt{\grave{o}}+3} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 9}} \frac{\left(\sqrt{\grave{o}}-3\right)\left(\sqrt{\grave{o}}+3\right)}{(\grave{o}-9)\left(\sqrt{\grave{o}}+3\right)} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 9}} \frac{\left(\sqrt{\grave{o}}\right)^2-(3)^2}{(\grave{o}-9)\left(\sqrt{\grave{o}}+3\right)}$$

$$= \lim_{\substack{\grave{o}\to 9}} \frac{\grave{o}-9}{(\grave{o}-9)\left(\sqrt{\grave{o}}+3\right)} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 9}} \frac{1}{\sqrt{\grave{o}}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

c- $\lim\limits_{\substack{\grave{o}\to 2^-}} \frac{2\grave{o}+5}{\grave{o}^2-\grave{o}-2} = \frac{2(2)+5}{(2)^2-(2)-2} = \frac{9}{0^-} = -\infty$

d- $\lim\limits_{\substack{\grave{o}\to 0}} \frac{\sqrt{\grave{o}^2+1}-1}{\grave{o}} = \frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{\substack{\grave{o}\to 0}} \frac{\sqrt{\grave{o}^2+1}-1}{\grave{o}}\times\frac{\sqrt{\grave{o}^2+1}+1}{\sqrt{\grave{o}^2+1}+1} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 0}} \frac{\sqrt{\grave{o}^2+1}-1\quad\sqrt{\grave{o}^2+1}+1}{(\grave{o})\ \sqrt{\grave{o}^2+1}+1} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 0}} \frac{\left(\sqrt{\grave{o}^2+1}\right)^2-(1)^2}{(\grave{o})\ \sqrt{\grave{o}^2+1}+1}$$

$$= \lim_{\substack{\grave{o}\to 0}} \frac{\left(\sqrt{\grave{o}^2+1}\right)^2-(1)^2}{(\grave{o})\ \sqrt{\grave{o}^2+1}+1} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 0}} \frac{\grave{o}^2+1-1}{(\grave{o})\ \sqrt{\grave{o}^2+1}+1} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 0}} \frac{\grave{o}^2}{(\grave{o})\ \sqrt{\grave{o}^2+1}+1} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 0}} \frac{\grave{o}}{\sqrt{\grave{o}^2+1}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

e- $\lim\limits_{\substack{\grave{o}\to 3}} \frac{\grave{o}^2-\grave{o}-6}{\sqrt{\grave{o}}-\sqrt{3}} = \frac{9-3-6}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{\substack{\grave{o}\to 3}} \frac{\grave{o}^2-\grave{o}-6}{\sqrt{\grave{o}}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{\grave{o}}+\sqrt{3}}{\sqrt{\grave{o}}+\sqrt{3}} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 3}} \frac{\grave{o}^2-\grave{o}-6\quad\sqrt{\grave{o}}+\sqrt{3}}{\sqrt{\grave{o}}-\sqrt{3}\quad\sqrt{\grave{o}}+\sqrt{3}} = \lim_{\substack{\grave{o}\to 3}} \frac{(\grave{o}+2)(\grave{o}-3)\sqrt{\grave{o}}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{\grave{o}}\right)^2-\sqrt{3}^2} =$$

$$= \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 3}{\text{ἀΩά}} \frac{(\text{ὼ} + 2)(\text{ὼ سر } 3)\ \text{ЙΩ̄} + \text{ᴗ}\overline{3}}{\text{ὼ سر } 3} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 3}{\text{ἀΩά}} (\text{ὼ} + 2)\text{ط}\text{ЙΩ̄} + \text{Й}\overline{3}\text{ᴗ} = 10\text{Й}\overline{3}$$

$$\text{Ὢ-}\ \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ \text{سر}1^{+}}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ὼ}^2\ \text{سر}\ 5}{\text{سر}\ \text{ὼ}^2\ \text{سر}\ 3\text{ὼ}+4} = \frac{1\ \text{سر}\ 5}{\text{سر}\ 1\ \text{سر}\ 3 + 4} = \frac{\text{سر}\ 4}{\text{سر}\ 0} = +\text{Ҥ}$$

2 Calculons les limites suivantes aux points ὼ_0 donnés :

a- $\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}2\text{ὼ}}{3\text{ὼ}} = \frac{\text{ΎΩὲ}\ 0}{0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}2\text{ὼ}}{3\text{ὼ}} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}2\text{ὼ}}{3\text{ὼ}} \times \frac{2}{2} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}\ 2\text{ὼ}}{2\text{ὼ}} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{car } \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}\text{ὥὼ}}{\text{ὥὼ}} = 1)$$

b- $\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ \frac{\text{“}}{2}}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{Cos}2\text{ὼ}}{1\ \text{سر}\ \text{ΎΩὲ}\text{ὼ}} = \frac{\text{Cos}\ \text{ʌ}}{1\ \text{سر}\ \text{ΎΩὲ}\frac{\text{“}}{2}} = \frac{\text{سر}1}{0} = \text{Ҥ}$

c- $\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}5\text{ὼ}}{\text{ΎΩὲ}3\text{ὼ}} = \frac{\text{ΎΩὲ}\ 0}{\text{ΎΩὲ}\ 0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\frac{5\text{ὼ}}{5\text{ὼ}} \times \text{ΎΩὲ}\ 5\text{ὼ}}{\frac{3\text{ὼ}}{3\text{ὼ}} \times \text{ΎΩὲ}\ 3\text{ὼ}} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{5\text{ὼ} \times \frac{\text{íΩὲ}5\text{ὼ}}{5\text{ὼ}}}{3\text{ὼ} \times \frac{\text{íΩὲ}3\text{ὼ}}{3\text{ὼ}}} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\frac{\text{íΩὲ}5\text{ὼ}}{5\text{ὼ}}}{\frac{\text{íΩὲ}3\text{ὼ}}{3\text{ὼ}}} \times \frac{5\text{ὼ}}{3\text{ὼ}} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\frac{\text{íΩὲ}5\text{ὼ}}{5\text{ὼ}}}{\frac{\text{íΩὲ}3\text{ὼ}}{3\text{ὼ}}} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

d- $\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ \text{“}}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}\text{ὼ}}{\text{“ سر ὼ}} = \frac{\text{ΎΩὲ“}}{\text{“ سر “}} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

Effectuons un changement de variable en posant $\text{ὢ} = \text{ὼ سر “} \Rightarrow \text{ὼ} = \text{ὢ} + \text{“}$

Si $\text{ὼ}\ \text{ο}\ \text{“}$ alors $\text{ὢ}\ \text{ο}\ 0$

Donc $\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ \text{“}}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}\text{ὼ}}{\text{“ سر ὼ}}$ $\quad \underset{\text{ὢ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}(\text{ὢ}+\text{“})}{\text{“ سر }(\text{ὢ}+\text{“})} = \underset{\text{ὢ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}(\text{ὢ}+\text{“})}{\text{“} - \text{ὢ سر “}} = \underset{\text{ὢ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{سر ΎΩὲ}(\text{ὢ})}{-\text{ὢ}} = \underset{\text{ὢ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}\text{ὢ}}{\text{ὢ}} = 1$

(car $\text{ΎΩὲ}(\text{“} + |\ ) = \text{سر ΎΩὲ}|$)

e- $\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}4\text{ὼ}}{\text{ὸὥὲΏὼ}} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 0}{\text{ἀΩά}} \frac{\text{ΎΩὲ}4\text{ὼ}}{\text{ὸὥὲΏὼ}} = \frac{\text{ΎΩὲ}\ 0}{\text{ὸὥὲΏ}\ 0} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x}{\sin 4x}}{\frac{x}{\tan x}}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\times\frac{\tan 4x}{4x}}{x\times\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 4x}{4x}}{\frac{\sin x}{x}}\times\frac{4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 5x}{5x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\times 4=\frac{1}{1}\times 4=4$$

$x\to 0$ $x\to 0$ $x\to 0$ $x\to 0$

Limites à l'infinie

3 Calculons les limites suivantes à l'infinie :

a- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 8}{x+1-\cos x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 8}{\sin x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2}=\frac{8}{(\sin\infty)^2}=\frac{8}{+\infty}=0$

$x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$

b- $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}-\sin 1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}-\sin 1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|\sqrt{\frac{1}{x}}-\sin 1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{\frac{1}{x}}-\sin 1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2\sqrt{\frac{1}{x}}-\sin\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

$x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}}-\sin\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{2\sqrt{0}-\sin 0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$

$x\to+\infty$

c- $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2}{5x^2-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}$

$x\to+\infty$ $x\to+\infty$

d- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sin 1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\sin\frac{1}{x^2}\right)}-\sin 1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\sin\frac{1}{x^2}}-\sin 1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\sqrt{1-\sin\frac{1}{x^2}}-\sin 1}{x}$

$x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1-\sin\frac{1}{x^2}}-\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{1-\sin\frac{1}{x^2}}-\sin\frac{1}{x}=-\sin 1$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$

e- $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+x}-\sin 5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}-\sin\frac{5}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}-\sin\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\sin\frac{5}{x^2}}}$

$x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$ $x\to+\infty$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\sin\frac{5}{x^2}}}=\frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\sin\frac{5}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2$

$x\to+\infty$ $x\to+\infty$

f- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(1)^2+\sqrt{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 0.$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

g- $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-|x|}{2x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-(-x)}{2x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+x}{2x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x} = \frac{4}{2} = 2$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

h- $\lim_{x \to +\infty} 1+x+\sqrt{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} 1+x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$= \lim_{x \to +\infty} 1+x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} 1+x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\infty + \infty$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

(Forme indéterminée)

Levons l'indétermination:

$\lim_{x \to +\infty} 1+x+\sqrt{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \left(1+x+\sqrt{x^2+x+1}\right) \times \frac{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x+\sqrt{x^2+x+1} \quad 1+x-\sqrt{x^2+x+1}}{1+x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1+x)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(1+x)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{1+x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x+1-x^2-x-1}{1+x-\sqrt{x^2+x+1}}$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x+1+x-x^2-x+1}{1+x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{1+x-\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x-\sqrt{x^2}}$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x-|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

i- $\lim_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1}$ (on utilise le théorème des gendarmes)

$x \to +\infty$

On sait que : $-1 \le \sin x \le 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$1 \le 2+\sin x \le 3$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $x + 1$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \frac{2+\sin x}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1} \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1} = 0$ Alors d'après le théorème des Gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1} = 0$

Limites et asymptotes

4 Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on Donnea ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a- $f(x) = \frac{x^2 + 5}{-x + 2}$ => $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 5}{-x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5}{-x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

Après division euclidienne de $x^2 + 5$ par $-x + 2$, on obtient :

$f(x) = -x - 2 + \frac{9}{-x + 2}$

Alors la droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote oblique car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{-x + 2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{(2)^2 + 5}{-(2) + 2} = \frac{9}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{(2)^2 + 5}{-(2) + 2} = \frac{9}{0^-} = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale

b- $D_f = \mathbb{R} - \{-6 ; 1\} =]-\infty ; -6[\cup]-6 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

Alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale

$\lim\limits_{x \to -6^-} f(x) = \dfrac{(-6)^2 + 5}{(-6)^2 + 5(-6) - 6} = \dfrac{31}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -6^+} f(x) = \dfrac{(-6)^2 + 5}{(-6)^2 + 5(-6) - 6} = \dfrac{31}{0^-} = -\infty$

Alors la droite d'équation $x = -6$ est asymptote verticale

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{(1)^2 + 5}{(1)^2 + 5(1) - 6} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{(1)^2 + 5}{(1)^2 + 5(1) - 6} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale

5 Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.
On note (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Etudions les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en déduisons si la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right) = -\infty(+\infty)(2) = +\infty$

Alors la courbe (C_f) n'admet pas une asymptote horizontale en $+\infty$, mais on a une possibilité d'asymptote oblique $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim\limits_{x \to -\infty} x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x = \lim\limits_{x \to -\infty} |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x \to -\infty} x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \quad = +\infty \times 0 = \text{(Forme indéterminée)}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

Levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right) \times \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x)^2 - \sqrt{x^2 + x + 1}^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2} - x}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x - 1}{-x - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x - 1}{-x - |x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{-2x} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

Alors la courbe (C) admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = \frac{1}{2}$

2) Démontrons que la droite (φ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

La droite (φ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2x + \frac{1}{2}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x + 2x + \frac{1}{2} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) \times \frac{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x + 1}}$$
$$x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{x^2 + x + 1}^2}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x + 1}}$$
$$x \to -\infty \qquad\qquad x \to -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + \frac{1}{4} - \left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + \frac{1}{4} - x^2 - x - 1}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + \frac{1}{4} - x^2 - x - 1}{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2} + |x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{x + \frac{1}{2} - x}$$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{2x + \frac{1}{2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3}{4}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{3}{4}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{8x} = \frac{-3}{8(-\infty)} = \frac{-3}{-\infty} = 0$$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

Dôo½ la droite (φ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à (C℘) en $-\infty$

Continuités

Continuité en un point x_0

6 Etudions la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a- $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{x^2 - x - 6} & \text{et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$

f est continue en $x_0 = 2$ si et seulement si :

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+3} = \frac{2-2}{2+3} = \frac{0}{5} = 0$$

$x \to 2$ $x \to 2$ $x \to 2$ $x \to 2$

Puis que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$. Alors f est continue en $x_0 = 2$

$x \to 2$

b- $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = 5 \end{cases}$; $x_o = 1$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :

Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Puis étudions le signe de tableau de si $x - 1$ dans un tableau.

ὼ	−∞	1	+ ∞
ὼ − 1	−	0	+
|ὼ − 1|	1 − ὼ		ὼ − 1

$$f(\grave{o}) = \frac{(1-\grave{o})+2}{\grave{o}+3} \quad \text{si } \grave{o} \in]-\infty\ ;\ 1]$$

$$f(\grave{o}) = \frac{(\grave{o}-1)+2}{\grave{o}+3} \quad \text{si } \grave{o} \in]1\ ;\ +\infty[$$

$$f(\grave{o}) = \frac{1-\grave{o}+3}{\grave{o}+3} \quad \text{si } \grave{o} \in]-\infty\ ;\ 1]$$

$$f(\grave{o}) = \frac{\grave{o}+1}{\grave{o}+3} \quad \text{si } \grave{o} \in]1\ ;\ +\infty[$$

Ainsi étudions la continuité de f à gauche et à droite de $\grave{o}_0 = 1$

f est continue en $\grave{o}_0 = 1$ si $f(1)$ $\lim_{\substack{\grave{o}\to 1\\ \grave{o}<1}} f(\grave{o}) = \lim_{\substack{\grave{o}\to 1\\ \grave{o}>1}} f(\grave{o}) = f(1) = \frac{1}{2}$

Continuité à gauche :

$$\lim_{\substack{\grave{o}\to 1\\ \grave{o}<1}} f(\grave{o}) = \lim_{\substack{\grave{o}\to 1\\ \grave{o}<1}} \frac{1-\grave{o}+3}{\grave{o}+3} = \frac{1}{2}$$

Continuité à droite :

$$\lim_{\substack{\grave{o}\to 1\\ \grave{o}>1}} f(\grave{o}) = \lim_{\substack{\grave{o}\to 1\\ \grave{o}>1}} \frac{\grave{o}+1}{\grave{o}+3} = \frac{1}{2}$$

Puis que $\lim_{\substack{\grave{o}\to 1\\ \grave{o}<1}} f(\grave{o}) = \lim_{\substack{\grave{o}\to 1\\ \grave{o}>1}} f(\grave{o}) = f(1) = \frac{1}{2}$

Alors f est continue en $\grave{o}_0 = 1$.

Continuité et condition de faisabilité

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(\grave{o}) = \frac{3-\sqrt{2\grave{o}+5}}{\grave{o}-2} \quad \text{si } \grave{o} \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$$
$$f(2) = \ddot{o}$$

Déterminons la valeur de $\ddot{o}$ pour que f soit continue en $\grave{o}_o = 2$

f est continue en $\grave{o}_0 = 2$ si $\lim_{\substack{\grave{o}\to 2\\ \grave{o}<2}} f(\grave{o}) = f(2) = \ddot{o}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x - 2} = \frac{3 - \sqrt{2\times 2+5}}{2 - 2} = \frac{3-3}{2-2} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée)

$x \to 2 \quad x \to 2$

Levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x - 2} \times \frac{3 + \sqrt{2x+5}}{3 + \sqrt{2x+5}} = \lim_{x \to 2} \frac{(3 - \sqrt{2x+5})(3 + \sqrt{2x+5})}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{(3)^2 - (\sqrt{2x+5})^2}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})}$$

$x \to 2 \quad x \to 2 \quad x \to 2$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(3)^2 - (\sqrt{2x+5})^2}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{9 - 2x - 5}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{4 - 2x}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})}$$

$x \to 2 \quad x \to 2 \quad x \to 2$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}} = \frac{-2}{3 + \sqrt{2\times 2+5}} = \frac{-2}{3+\sqrt{9}} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$x \to 2 \quad x \to 2$

Alors $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{-1}{3}$

Or $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = a \quad a = \frac{-1}{3}$. D'où $a = \frac{-1}{3}$

8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 + ax \quad$ si $x \in]-\infty ; -1[$
$f(x) = 2x - 1 \quad$ si $x \in]-1 ; 1[$
$f(x) = b(x^2 - 1) \quad$ si $x \in]1 ; +\infty[$

1) Détermine le réel a pour que f soit continue au point $x_o = -1$

f est continue en $x_0 = 2$ si $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} f(x) \quad \lim_{x \to -1} x^2 + ax = \lim_{x \to -1} 2x - 1$

$x \to -1^- \quad x \to -1^+ \quad x \to -1^- \quad x \to -1^+$

$(-1)^2 + a(-1) = 2(-1) - 1 \quad 1 - a = -2 - 1 \quad 1 - a = -3 \Rightarrow a = 4$

1) Vérifions si l'on peut Détermine la valeur de b pour que f soit continue au point $x_o = 1$.

f est continue en $x_0 = 1$ si $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) \quad \lim_{x \to 1} 2x - 1 = \lim_{x \to 1} b(x^2 - 1)$

$x \to 1^- \quad x \to 1^+ \quad x \to 1^- \quad x \to 1^+$

$-2 - 1 = b(1 - 1) \quad -3 = 0$ absurde

Alors impossible de Détermine la valeur de b pour que f soit continue au point $x_o = 1$.

Prolongement par continuité

9 Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction ℚ et déterminons (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

a) $\begin{cases} \mathbb{Q}(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- Ensemble de definition:

$D_{\mathbb{Q}} = \{x / x \in x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} \neq 0\} \Rightarrow D_{\mathbb{Q}} =]0 ; +\infty[$

- Prolongement par continuité:

$x_0 = 0 \notin]0 ; +\infty[$. Alors ℚ peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \mathbb{Q}(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$x > 0 \quad x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{x} - 1) = -1 \neq \ell$

$x > 0 \quad x \neq 0 \qquad x > 0 \quad x \neq 0 \qquad x > 0 \quad x \neq 0$

Alors ℚ est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$.

Soit ℚ le Prolongement par continuité de ℚ en $x_0 = 0$ tel que:

$\begin{cases} \mathbb{Q}(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ si } x \in]0 ; +\infty[\\ \mathbb{Q}(0) = -1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ ou $\mathbb{Q}(x) = \sqrt{x} - 1$

b) $\begin{cases} \mathbb{Q}(x) = \dfrac{\sin \mathbb{Q}x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- Ensemble de definition:

$D_{\mathbb{Q}} = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ et } \cos x \neq 0\}$

$\cos x \neq 0 \quad \cos x \neq \cos \dfrac{\pi}{2} \quad \begin{matrix} x \neq \frac{\pi}{2} + 2\mathbb{Q}\pi \\ \text{et} \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\mathbb{Q}\pi \end{matrix} \quad \text{et} \quad x \neq 0 \Rightarrow$

$D_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\mathbb{Q}\pi ; -\dfrac{\pi}{2} + 2\mathbb{Q}\pi ; 0\right\}$ avec $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$

- Prolongement par continuité:

$x_0 = 0 \notin \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\mathbb{Q}\pi ; -\dfrac{\pi}{2} + 2\mathbb{Q}\pi ; 0\right\}$. Alors ℚ peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\text{Car } \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

Alors f est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 0$.

Soit g le Prolongement par continuité de f en $x_0 = 0$ tel que:

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; 0$$
$$g(0) = 1 \text{ si } x = 0$$

10 Soient f et g deux fonctions définies respectivement par :

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

a- Déterminons les ensembles de définitions D_f et D_g respectivement des fonctions f et g.

$D_f = \{x / x \in x + 1 \geq 0 \text{ et } x \neq 0\} \Rightarrow D_f = [-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$D_g = \{x / x \in x + 1 \geq 0 \text{ et } 1 + \sqrt{x+1} \neq 0\} \Rightarrow D_g = [-1 ; +\infty[$

b- Vérifions que la fonction g est le prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = g(x)$$

Alors g est le prolongement par continuité au point $x_0 = 0$ de la fonction f.

11 On considère la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

1) Déterminons son ensemble de définition D_f.

$D_f = \{x / x \in 2x \geq 0 \text{ et } x - 2 \neq 0\} \Rightarrow D_f = [0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2) Montrons que f admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par g.

$x_0 = 2 \in [0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$. Alors f peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 2$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} = \frac{0}{0}$ (Forme indéterminée) et levons l'indétermination:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{(x-2)} \times \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{1}{2}$$

Alors f est peut être prolongée par continuité au point $x_0 = 2$.

Soit f le Prolongement par continuité de f en $x_0 = 2$ tel que:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \quad \text{si } x \in [0;2[\cup]2;+\infty[$$
$$f(2) = \frac{1}{2} \quad \text{si } x = 2$$

2) Montrons que f est dérivable en 2 puis donnons l'équation de la tangente à la courbe(C) de f au point d'abscisse 2.

- **Dérivabilité au point $\bullet_{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}$**

f est dérivable en 2 si et seulement si : $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2\sqrt{2x}-2x-(x-2)}{2(x-2)}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-2-(x-2)}{2(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-4-x+2}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-x-2}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-(x+2)}{2(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}-(x+2)}{2(x-2)^2} \times \frac{2\sqrt{2x}+(x+2)}{2\sqrt{2x}+(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2\sqrt{2x}^2-(x+2)^2}{2(x-2)^2(2\sqrt{2x}+(x+2))}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{8x-x^2+4x+4}{2(x-2)^2(2\sqrt{2x}+(x+2))} = \lim_{x \to 2} \frac{8x-x^2-4x-4}{2(x-2)^2(2\sqrt{2x}+(x+2))} = \lim_{x \to 2} \frac{-x^2+4x-4}{2(x-2)^2(2\sqrt{2x}+(x+2))}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-x^2+4x-4}{2(x-2)^2(2\sqrt{2x}+(x+2))} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)^2}{2(x-2)^2(2\sqrt{2x}+(x+2))} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2(2\sqrt{2x}+(x+2))}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2(2\sqrt{2x}+(x+2))} = \frac{-1}{2(2\sqrt{4}+(4))} = \frac{-1}{16}$$

D'où f est dérivable en 2 et son nombre dérivé est : $f'(2) = \frac{-1}{16}$

- **Equation de la tangente au point $\bullet_{ج} = ڭ$**

L'équation de la tangente au point $ὼ_0 = 2$ est donnée par la formule :

$$ώ = ٰΩ(2)(ὼ\ سر\ 2) + ٰΩ(2) \quad \text{avec} \quad ٰΩ(2) = \frac{1\ سر}{16} \quad \text{et} \quad ٰΩ(2) = \frac{1}{2}$$

$$=> ώ = \frac{1\ سر}{16}(ὼ\ سر\ 2) + \frac{1}{2} = \frac{1\ سر}{16}ὼ + \frac{2\ سر}{16} + \frac{1}{2} = \frac{1\ سر}{16}ὼ + \frac{3}{8} \quad => ώ = \frac{1\ سر}{16}ὼ + \frac{3}{8}$$

Dérivabilité

Dérivabilité en un point $\bullet_{ج}$

Etudions la dérivabilité des fonctions suivantes aux points $ὼ_0$ donnés :

a) $ٰΩ(ὼ) = \frac{(ὼ\ سر\ 2)^2}{ὼ^2 + ὼ\ سر\ 6}$ et $ὼ_0 = 2$

$ٰΩ(2) = 0$

$ٰΩ$ est dérivable en 2 si et seulement si : $ὰٰΩ\ ά\ \frac{ٰΩ(ὼ)\ سر\ ٰΩ(2)}{ὼ\ سر\ 2} = ٰΩ^{ɜ}(2) = ὰ\ ^{N}\ я$

$ὼ\ ^{O}\ 2$

$$ὰٰΩ\ ά\ \frac{ٰΩ(ὼ)\ سر\ ٰΩ(2)}{ὼ\ سر\ 2} = ὰٰΩ\ ά\ \frac{\frac{(ὼ\ سر\ 2)^2}{ὼ^2 + ὼ\ سر\ 6}\ سر\ 0}{ὼ\ سر\ 2} = ὰٰΩ\ ά\ \frac{(ὼ\ سر\ 2)^2}{(ὼ + 3)(ὼ\ سر\ 2)}$$

$$\text{Ώ}(\text{ὼ}) = \frac{\text{سر ὼ} + 3}{\text{ὼ} + 3} \quad \text{íΏ ὼ}^{\text{N}} \;]\text{سر Ð} \; ; \; 1]$$

=> شح Ώὸ

$$\text{Ώ}(\text{ὼ}) = \frac{\text{ὼ} + 1}{\text{ὼ} + 3} \quad \text{íΏ ὼ}^{\text{N}} \;]1 \; ; \; +\text{Ð}[$$

Etude de la dérivabilité de Ώ

Ώ est dérivable en $\text{ὼ}_0 = 1$ si sa dérivabilité à gauche est égale à sa dérivabilité à droite,

c'est-à-dire : $\text{ὰΏά}\,\frac{\text{Ώ(ὼ) سرΏ(1)}}{\text{ὼ سر 1}} = \text{ὰΏά}\,\frac{\text{Ώ(ὼ) سرΏ(1)}}{\text{ὼ سر 1}} = \text{ὰ}^{\text{N}}\ \text{я}$

$\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$

<u>Dérivabilité à gauche :</u>

$$\text{ὰΏά}\,\frac{\text{Ώ(ὼ) سرΏ(1)}}{\text{ὼ سر 1}} = \text{ὰΏά}\,\frac{\frac{\text{سر ὼ} + 3}{\text{ὼ} + 3} \quad \text{سر}\frac{1}{2}}{\text{ὼ سر 1}} = \text{ὰΏά}\,\frac{\frac{2(\text{سرὼ} + 3) - (\text{ὼ} + 3)}{2(\text{ὼ} + 3)}}{\text{ὼ سر 1}} = \text{ὰΏά}\,\frac{\text{سر}2\text{ὼ} + 6 - \text{ὼ سر 3}}{2(\text{ὼ} + 3)(\text{ὼ سر 1})}$$

$\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$

$$= \text{ὰΏά}\,\frac{\text{سر}3\text{ὼ} + 3}{2(\text{ὼ} + 3)(\text{ὼ سر 1})} = \text{ὰΏά}\,\frac{\text{سر}3(\text{ὼ سر 1})}{2(\text{ὼ} + 3)(\text{ὼ سر 1})} = \text{ὰΏά}\,\frac{\text{سر}3}{2(\text{ὼ} + 3)} = \frac{\text{سر}3}{2(1 + 3)} = \frac{\text{سر}3}{8}^{\text{N}}\ \text{я}$$

$\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$

<u>Dérivabilité à droite :</u>

$$\text{ὰΏά}\,\frac{\text{Ώ(ὼ) سرΏ(1)}}{\text{ὼ سر 1}} = \text{ὰΏά}\,\frac{\frac{\text{ὼ} + 1}{\text{ὼ} + 3} \quad \text{سر}\frac{1}{2}}{\text{ὼ سر 1}} = \text{ὰΏά}\,\frac{\frac{2(\text{ὼ} + 1) - (\text{ὼ} + 3)}{2(\text{ὼ} + 3)}}{\text{ὼ سر 1}} = \text{ὰΏά}\,\frac{2\text{ὼ} + 2 - \text{ὼ سر 3}}{2(\text{ὼ} + 3)(\text{ὼ سر 1})}$$

$\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$

$$= \text{ὰΏά}\,\frac{\text{ὼ سر 1}}{2(\text{ὼ} + 3)(\text{ὼ سر 1})} = \text{ὰΏά}\,\frac{1}{2(\text{ὼ} + 3)} = \frac{1}{8}^{\text{N}}\ \text{я}$$

$\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$

$$\text{ὰΏά}\,\frac{\text{Ώ(ὼ) سرΏ}\text{شط}1}{\text{ὼ سر 1}} \text{ فى } \text{ὰΏά}\,\frac{\text{Ώ(ὼ) سرΏ(1)}}{\text{ὼ سر 1}}$$

$\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$

Alors Ώ n'est pas dérivable à gauche et à droite de $\text{ὼ}_0 = 1$, mais elle admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectives $\text{Ώ}^{\text{ž}}(1) = \frac{\text{سر}3}{8}$ et $\text{Ώ}^{\text{ž}}(1) = \frac{1}{8}$

Dérivabilité et condition de faisabilité

13 Déterminons les réels ὥ et ὦ pour que Ώ soit continue et dérivable aux points $\text{ὼ}_0 = 1$

$$\text{Ώ(ὼ)} = 2\text{ὼ}^2 + \text{ὥὼ سر 3 íΏ ὼ شى 1}$$

$$\text{شح}\ \text{Ώ(ὼ)} = \frac{2\text{ὼ} + \text{ὦ}}{\text{ὼ}} \quad \text{íΏ ὼ} > 1$$

- **Continuité** :

Ώ est continue en $\text{ὼ}_0 = 1$ si et seulement si : $\text{ὰΏά}\ \text{Ώ(ὼ)} = \text{ὰΏά}\ \text{Ώ(ὼ)}$

$\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ὼ}^{\text{O}}\ 1^{+}$

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ 2\text{ὼ}^2 + \text{ὥὼ}\ \text{سر}\ 3 = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{2\text{ὼ} + \tilde{\text{ὼ}}}{\text{ὼ}} \qquad \text{ὥ}\ \text{سر}\ 1 = 2 + \tilde{\text{ὼ}} \qquad \text{ὥ}\ \text{سر}\ \tilde{\text{ὼ}} = 3 \quad \textbf{(1)}$$

- **Dérivabilité** :

Ὼ est dérivable en $\text{ὼ}_0 = 1$ si et seulement si : $\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\text{Ὼ}(\text{ὼ})\ \text{سر}\ \text{Ὼ}(1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\text{Ὼ}(\text{ὼ})\ \text{سر}\ \text{Ὼ}(1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1}$

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\text{Ὼ}(\text{ὼ})\ \text{سر}\ \text{Ὼ}(1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\text{Ὼ}(\text{ὼ})\ \text{سر}\ \text{Ὼ}(1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} \qquad \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{2\text{ὼ}^2 + \text{ὥὼ}\ \text{سر}\ 3\ \ \text{سر}(\text{ὥ}\ \text{سر}\ 1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\frac{2\text{ὼ} + \tilde{\text{ὼ}}}{\text{ὼ}}\ \text{سر}(2+\tilde{\text{ὼ}})}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1}$$

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{2\text{ὼ}^2 + \text{ὥὼ}\ \text{سر}\ 3\ \ \text{سر}(\text{ὥ}\ \text{سر}\ 1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\frac{2\text{ὼ} + \tilde{\text{ὼ}}}{\text{ὼ}}\ \text{سر}(2+\tilde{\text{ὼ}})}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} \qquad \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{2\text{ὼ}^2 + \text{ὥὼ}\ \text{سر}\ 3 - \text{ὥ} + 1}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\tilde{\text{ὼ}}\ \text{سر}\ \tilde{\text{ὼ}}\text{ὼ}}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1}$$

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{2\text{ὼ}^2\ \text{سر}\ 2 + \text{ὥὼ} - \text{ὥ}}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\tilde{\text{ὼ}}\ \text{سر}\ \tilde{\text{ὼ}}\text{ὼ}}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} \qquad \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{2\text{ط}\text{ὼ}^2\ \text{سر}\ 1\ \text{شج} + \text{ὥ}(\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\tilde{\text{ὼ}}\ \text{سر}\ \tilde{\text{ὼ}}\text{ὼ}}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1}$$

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{2(\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1)(\text{ὼ} + 1) + \text{ὥ}(\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\tilde{\text{ὼ}}\ \text{سر}\ \tilde{\text{ὼ}}\text{ὼ}}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} \qquad \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{(\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1)[2(\text{ὼ} + 1) + \text{ὥ}\ ]}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\text{سر}\tilde{\text{ὼ}}(\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1)}{\text{ὼ}\ \text{سر}\ 1}$$

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ 2(\text{ὼ} + 1) + \text{ὥ} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ 1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \text{سر}\tilde{\text{ὼ}} \qquad 4 + \text{ὥ} = \text{سر}\tilde{\text{ὼ}} \qquad \text{ὥ} + \tilde{\text{ὼ}} = \text{سر}4 \quad \textbf{(2)}$$

Ainsi, formons le système avec les équations **(1)** et **(2)**

$$\text{ὥ}\ \text{سر}\ \tilde{\text{ὼ}} = 3 \qquad (\text{ج})$$
$$\text{ض}\ \text{ὥ} + \tilde{\text{ὼ}} = \text{سر}4 \qquad (\text{خ})$$

La résolution de ce système donne : $\text{ὥ} = \text{سر}\frac{1}{2}$ et $\tilde{\text{ὼ}} = \text{سر}\frac{7}{2}$

14 Soit Ὼ la fonction de я vers я définie par : $\text{Ὼ}(\text{ὼ}) = \frac{\text{ὼ}(\text{ὼ} + 1)}{(\text{ὼ} + 2)^2}$ ίΩ ὼ شي سر1
$\text{Ὼ}(\text{ὼ}) = 2\text{ὼ} + \text{ὥ}$ ίΩ ὼ < سر1

1) Déterminons la valeur de ὥ pour que la fonction Ὼ soit continue au point سر1

Ὼ est continue en $\text{ὼ}_0 = \text{سر}1$ si et seulement si : $\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ \text{سر}1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \text{Ὼ}(\text{ὼ}) = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ \text{سر}1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ \text{Ὼ}(\text{ὼ})$

$$\underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ \text{سر}1^{\text{سر}}}{\text{ὰΩά}}\ \frac{\text{ὼ}(\text{ὼ} + 1)}{(\text{ὼ} + 2)^2} = \underset{\text{ὼ}\ \text{ο}\ \text{سر}1^{+}}{\text{ὰΩά}}\ 2\text{ὼ} + \text{ὥ} \qquad 0 = \text{سر}2 + \text{ὥ} \qquad \text{ὥ} = 2$$

2) Pour = 2, étudions la dérivabilité de la fonction ̈Ω au point – 1.

̈Ω est dérivable en ὼ$_0$ = – 1 si et seulement si : ὰ̈Ω ά $\frac{\text{̈Ω(ὼ) سر̈Ω(سر1)}}{\text{ὼ + 1}}$ = ὰ̈Ω ά $\frac{\text{̈Ω(ὼ) سر̈Ω(سر1)}}{\text{ὼ + 1}}$
ὼ o سر1^{سر} ὼ o سر1^{+}

ὰ̈Ω ά $\frac{\text{̈Ω(ὼ) سر̈Ω(سر1)}}{\text{ὼ + 1}}$ = ὰ̈Ω ά $\frac{\text{̈Ω(ὼ) سر̈Ω(سر1)}}{\text{ὼ + 1}}$ ὰ̈Ω ά $\frac{\text{ὼ(ὼ + 1) / (ὼ + 2)}^2 \text{ سر(0)}}{\text{ὼ + 1}}$ = ὰ̈Ω ά $\frac{\text{(2ὼ + 2) سر(سر2 + 2)}}{\text{ὼ + 1}}$
ὼ o سر1^{سر} ὼ o سر1^{+} ὼ o سر1^{سر} ὼ o سر1^{+}

ὰ̈Ω ά $\frac{\text{ὼ(ὼ + 1)}}{\text{(ὼ + 1)(ὼ + 2)}^2}$ = ὰ̈Ω ά $\frac{\text{2(ὼ + 1)}}{\text{ὼ + 1}}$ ὰ̈Ω ά $\frac{\text{ὼ}}{\text{(ὼ + 2)}^2}$ = 2 سر1 = 2 (absurde)
ὼ o سر1^{سر} ὼ o سر1^{+} ὼ o سر1^{سر}

Alors ̈Ω n'est pas dérivable en – 1.

Application de la dérivée

15 Déterminons une équation de la tangente en ̈ὺ$_o$(ὼo ; ̈Ω(ὼo)) à la courbe (C) de ̈Ω dans les cas suivants :
L'équation de la tangente à la courbe au (C) de ̈Ω point ὼ$_0$ est donnée par la formule suivante :
ώ = ̈Ωæ(ὼ$_0$)(ὼ سر ὼ$_0$) + ̈Ω(ὼ$_0$)

ὥ) ̈Ω(ὼ) = ὼ^3+ 2ὼ^{2}سر 5ὼ + 3 ̈Ωὸ ὼ$_o$ = سر2 => ώ = ̈Ωæ(سر2)(ὼ + 2) + ̈Ω(سر2) =>

ώ = ̈Ωæ(سر2)(ὼ + 2) + ̈Ω(سر2) => ώ = سر1(ὼ + 2) + 13 => ώ = سرὼ سر 11

b) ̈Ω(ὼ) = $\frac{\text{ὼ}^2 + \text{2ὼ + 2}}{\text{ὼ + 1}}$ et ὼ$_o$ = 1 => ώ = ̈Ωæ(1)(ὼ سر 1) + ̈Ω(1) => ώ = $\frac{3}{4}$ὼ + $\frac{7}{4}$

c) ̈Ω(ὼ) = ὦέί^{2}ὼ et ὼ$_o$ = $\frac{\text{“}}{6}$ => ώ = ̈Ωæ $\frac{\text{“}}{6}$ ὼ سر $\frac{\text{“}}{6}$ + ̈Ω $\frac{\text{“}}{6}$ => ώ = سر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ὼ + $\frac{9 + \text{“}\sqrt{3}}{12}$

16 Déterminons la fonction dérivée ̈Ω' de la fonction ̈Ω dans chacun des cas suivants :
ὥ) ̈Ω(ὼ) = ὼ^3 – 2ὼ^2 + 5ὼ + 3 => ̈Ωæ(ὼ) = 3ὼ^2 – 4ὼ + 5

ὦ) ̈Ω(ὼ) = $\frac{\text{ὼ}^2 + \text{2ὼ + 2}}{\text{ὼ + 1}}$. Posons ó = ὼ^2 + 2ὼ + 2 => óæ = 2ὼ + 2 et ὺ = ὼ + 1 => ὺæ = 1

̈Ωæ(ὼ) = $\frac{\text{ó}^{\text{æ}}\text{ ὺ سر ὺæó}}{\text{ὺ}^2}$ => ̈Ωæ(ὼ) = $\frac{\text{ὼ}^2 + \text{2ὼ}}{\text{(ὼ + 1)}^2}$

c) ̈Ω(ὼ) = (سرὼ^2 + 2ὼ)^3. Posons ó = سرὼ^2 + 2ὼ => óæ = سر2ὼ + 2 et ὲ = 3

̈Ωæ(ὼ) = ὲ(óæ)(ó)$^{\text{ὲ سر1}}$ => ̈Ωæ(ὼ) = 3(سر2ὼ + 2)(سرὼ^2 + 2ὼ)^2

d) ̈Ω(ὼ) = Ѝ $\overline{\text{2ὼ}^3 \text{ سر 4ὼ}^2 + 1}$. Posons ó = 2ὼ^3 سر 4ὼ^2 + 1 => óæ = 6ὼ^2 سر 8ὼ

$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2 - 8x}{2\sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}} = \frac{3x^2 - 4x}{\sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}}$

e) $f(x) = (1 - 3x^2)(x^2 + 1)$.

Posons $u = 1 - 3x^2 \Rightarrow u' = -6x$ et $v = x^2 + 1 \Rightarrow v' = 2x$

$f'(x) = u'v + v'u \Rightarrow f'(x) = (-6x)(x^2 + 1) + (2x)(1 - 3x^2) = -12x^3 - 8x$

f) $f(x) = \cos^3 x$. Posons $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$ et $n = 3$

$f'(x) = n(u')(u)^{n-1} \Rightarrow f'(x) = 3(-\sin x)(\cos x)^2 = -3\sin x \cos^2 x$

g) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x^3 - x^2}$

Posons $u = x - 1 \Rightarrow u' = 1$ et $v = \sqrt{x^3 - x^2} \Rightarrow v' = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}}$

$f'(x) = u'v + v'u \Rightarrow f'(x) = (1)\sqrt{x^3 - x^2} + \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}}(x - 1)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{5x^3 - 7x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}}$

h) $f(x) = \sin(3x - 1)^4$. Posons $u = (3x - 1)^4 \Rightarrow u' = 4(3)(3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3$

$f'(x) = u'\cos u \Rightarrow f'(x) = 12(3x - 1)^3 \cos(3x - 1)^4$

i) $f(x) = \tan^4(3x - 1)$ Posons $u = \tan(3x - 1) \Rightarrow u' = 3(1 + \tan^2(3x - 1))$ et $n = 4$

$f'(x) = n(u')(u)^{n-1} \Rightarrow f'(x) = 4[3(1 + \tan^2(3x - 1))][\tan(3x - 1)]^3$

$\Rightarrow f'(x) = 12(1 + \tan^2(3x - 1)) \times \tan^3(3x - 1)$

17 Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

1) Ecrivons de $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

En posant $x^2 - 2x - 3 = 0$ on obtient comme solution $x_1 = -1$ et $x_1 = 3$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert x^2 - 2x - 3 \rvert$	$x^2 - 2x - 3$		$-x^2 + 2x + 3$		$x^2 - 2x - 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[\\ f(x) = -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \in [-1 ; 3] \end{cases}$$

2) Etudions la continuité et la dérivabilité de f aux points $x_o = -1$ et $x_o = 3$.

- **Etude de la continuité en $x_o = -1$**

f est continue en $x_0 = -1$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x^2 - 2x - 3 = 0$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} -x^2 + 2x + 3 = 0$

Puis que $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$

Alors f est continue en $x_0 = -1$

- **Etude de la dérivabilité en $\mathcal{C}_0 = -1$**

f est dérivable en $x_0 = -1$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 2x - 3 - 0}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{(x-3)(x+1)}{x + 1}$

$= \lim\limits_{x \to -1^-} x - 3 = -1 - 3 = -4$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-x^2 + 2x + 3 - 0}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-(x-3)(x+1)}{x + 1}$

$= \lim\limits_{x \to -1^+} -x + 3 = 4$

Ainsi on dira que f n'est pas dérivable à gauche et à droite de $x_0 = -1$, mais elle admet deux demi-tangentes respectivement à gauche et à droite de $x_0 = -1$ dont les coefficients directeurs sont : $f'_g(-1) = -4$ et $f'_d(-1) = 4$

- **Etude de la continuité en $\mathcal{C}_0 = 3$**

f est continue en $x_0 = 3$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} -x^2 + 2x + 3 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 2x - 3 = 0$

Puis que $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0$

Alors f est continue en $x_0 = 3$

Posons $f'(x) = 0$ $-2x + 2 = 0$ $x = 1$ et le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		4	
	0		0

Ainsi l'intersection de ces deux tableaux donnent celui de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$
	0		0

Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

18 Analysons puis interprète chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

1) a- Domaine de définition.

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$x \in -\infty$ $x \in +\infty$

La courbe (C_f) admet l'axe $(x'ox)$ comme branche parabolique.

2) a- Domaine de définition.

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$x \in -\infty$ $x \in +\infty$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction $(\acute{e}x)$

3) a- Domaine de définition.

$D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\} =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

$x \in -\infty$ $x \in +\infty$

Alors les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ sont respectivement asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim_{x \to -2^{-}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -2^{+}} f(x) = +\infty$.
$x < -2$ $x > -2$
Alors la droite d'équation $x = -2$ est asymptote Verticale

$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = -\infty$.
$x < 2$ $x > 2$
Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote Verticale

4) a- Domaine de définition.
$D_f = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
b- Limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes ou possibilités d'asymptotes.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
$x < -\infty$ $x > +\infty$

Alors la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote Verticale
$x < 0$ $x > 0$

19 Dressons le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$

f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $O_1\left(\frac{3}{2} ; 4\right)$ et $O_2\left(-1 ; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums

les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	-2 ↘		↗ 4		↘ 3
		$-\frac{5}{2}$			

2) Pour f **:**

f est définie sur $]-\infty ; 0[\cup \left]0 ; \frac{5}{2}\right] \cup [+\infty ; +\infty[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$

f est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
les points de coordonnées $(0 ; -3)$ et $\left(\frac{5}{2} ; 1\right)$ sont sur la courbe de g.

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↗	1

3) Pour f :

f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\ ;\ 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

le point de coordonnées $(0,3\ ;\ 0,4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (C_h)

et f est croissante sur $[0\ ;\ 0,3]$ et $[2\ ;\ +\infty[$

Les droites d'équations $y = -1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes de (C_h)

respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

x	$-\infty$	0		$0,3$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$	↗	$0,4$	↘	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Analyse et interprétation d'un graphique.

20 1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$x \to -\infty$ $x \to +\infty$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

b- Déterminons les réels a ; b ; c et d en utilisant le graphique.

On sait que la formule explicite de f est le suivant : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

D'après le graphique, la courbe (a) passe par les points $E_1\ \frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}$ et $E_2(1\ ;\ 0)$

$f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{32}{27}$ et $f(1)=0$

De même, la courbe (a) admet les points $E_1\ \frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}$ et $E_2(1\ ;\ 0)$comme extremum

$f'\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ et $f'(1)= 0$

La réunion de ces deux conditions donne le système suivant :

$$\begin{cases} \text{سر}\,a + 3b\,\text{سر}\,9c + 27d = 32 & \textbf{(1)} \\ a + b + c + d = 0 & \textbf{(3)} \\ a\,\text{سر}\,2b + 3c = 0 & \textbf{(2)} \\ 3a + 2b + c = 0 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{سر}\,\Omega\,\frac{\text{سر}\,1}{3} = \frac{32}{27} \\ \text{سر}\,\Omega(1) = 0 \\ \text{سر}\,\Omega^{Nj}\,\frac{\text{سر}\,1}{3} = 0 \\ \text{ù}\ \Omega^{Nj}(1) = 0 \end{cases}$$

L'équation **(2)** donne : $\text{ώ} + \tilde{\text{ώ}} + \tilde{\text{ώ}} + \text{Ώ} = 0 \Rightarrow \text{ώ} = \text{سر}\,b\,\text{سر}\,c\,\text{سر}\,d$

En remplaçant ╪ par sa valeur dans les équations **(1) ; (3) et (4),** on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\text{ώ}}\,\text{سر}\,2\tilde{\text{ώ}} + 7\text{Ώ} = 8 \\ \text{سر}\,3\tilde{\text{ώ}} + 2\tilde{\text{ώ}}\,\text{سر}\,\text{Ώ} = 0 \\ \text{سر}\,\tilde{\text{ώ}}\,\text{سر}\,2\tilde{\text{ώ}}\,\text{سر}\,3\text{Ώ} = 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, la résolution de ce système donne :

$b = \text{سر}\,1$; $c = \text{سر}\,1$ et $d = 1$. Puis en remplaçant les valeurs de b; c et d dans l'équation **(2),** On obtient $\text{ώ} = 1$.

D'où $\text{Ώ}(\text{ώ}) = \text{ώ}^3\,\text{سر}\,\text{ώ}^2\,\text{سر}\,\text{ώ} + 1$

2) La fonction donnée est Ώ telle que : $\text{Ώ}(\text{ώ}) = \dfrac{\text{ώ}\text{ώ} + \tilde{\text{ώ}}}{\tilde{\text{ώ}}\text{ώ}^2 + \text{Ώ}}$

a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

$D\text{Ώ} = \text{я}\,\text{سر}\{\text{سر}\,1\ ;\ 1\} =]\text{سر}\,Đ\ ;\ \text{سر}\,1[\ \text{‘}\ ]\text{سر}\,1\ ;\ 1[\ \text{‘}\ ]1\ ;\ +Đ[$

$\text{ὰΩά}\ \text{Ώ}(\text{ώ}) = 0$ et $\text{ὰΩά}\ \text{Ώ}(\text{ώ}) = 0$

$\text{ώ}\ \text{O}\ \text{سر}\,Đ$ $\qquad$ $\text{ώ}\ \text{O}\ +Đ$

Alors la droite d'équation $\text{ώ} = 0$ est asymptote horizontale en $\text{سر}\,Đ$ et $+Đ$

$\text{ὰΩά}\ \text{Ώ}(\text{ώ}) = +Đ$ et $\text{ὰΩά}\ \text{Ώ}(\text{ώ}) = \text{سر}\,Đ$.

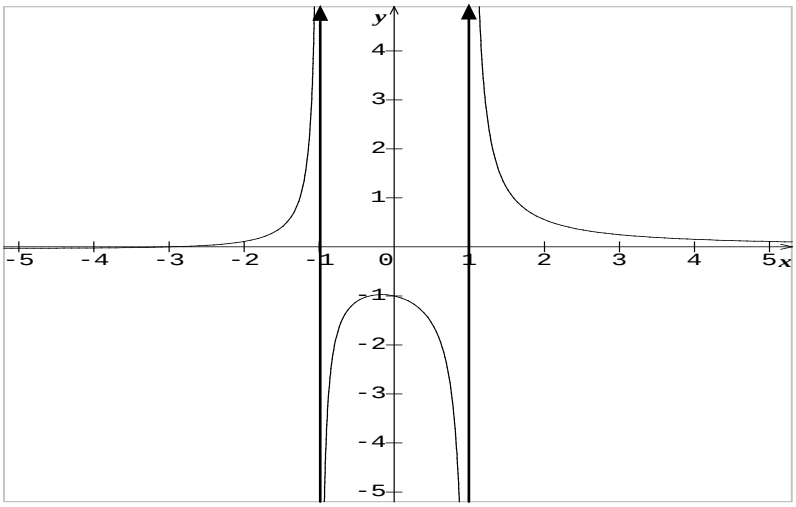
$\text{ώ}\ \text{O}\ \text{سر}\,1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ώ}\ \text{O}\ \text{سر}\,1^{+}$

Alors la droite d'équation $\text{ώ} = \text{سر}\,1$ est asymptote Verticale

$\text{ὰΩά}\ \text{Ώ}(\text{ώ}) = \text{سر}\,Đ$ et $\text{ὰΩά}\ \text{Ώ}(\text{ώ}) = +Đ$.

$\text{ώ}\ \text{O}\ 1^{\text{سر}}$ $\qquad$ $\text{ώ}\ \text{O}\ 1^{+}$

Alors la droite d'équation $\text{ώ} = 1$ est asymptote Verticale



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	-1	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↘ 0

b- Déterminons les réels a ; b ; c et d en utilisant le graphique.

Soit $f(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$

Puis que f admet les droites $x = -1$ et $x = 1$ comme asymptote verticale, alors on a :

$cx^2 + d = (x - 1)(x + 1)$ $cx^2 + d = x^2 - 1$ et par identification on a : $c = 1$ et $d = -1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$

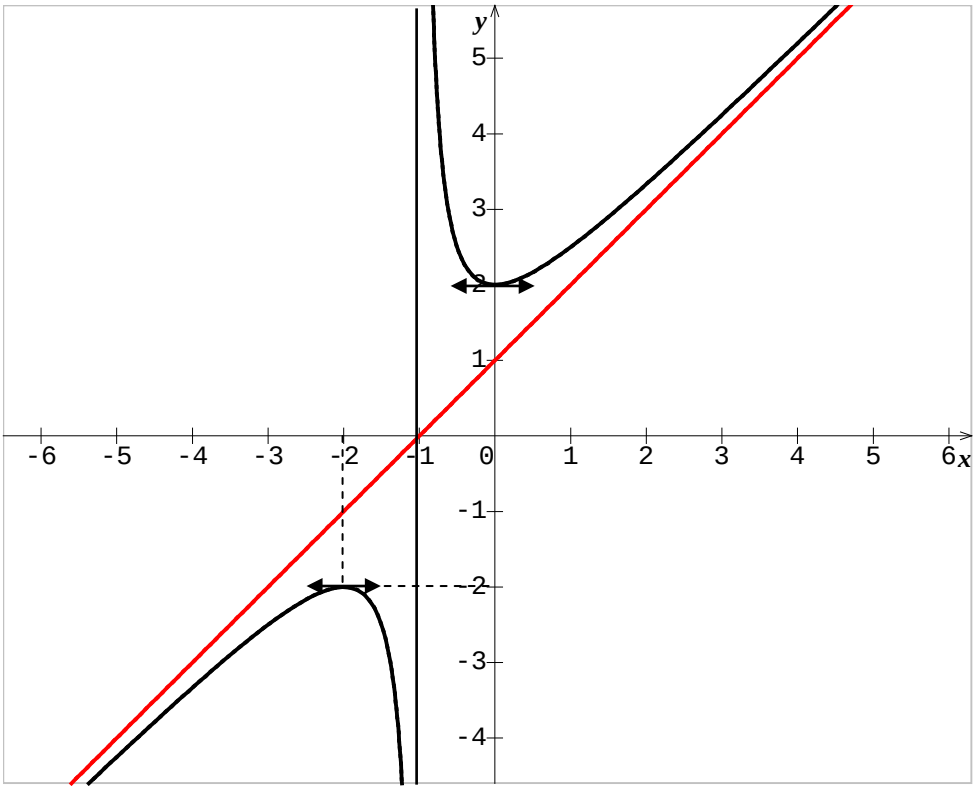
De même la courbe passe par le point $(0 ; -1) \Rightarrow f(0) = -1$ $\frac{b}{-1} = -1 \Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{ax + 1}{x^2 - 1}$

De même la courbe passe par le point $(-3 ; 0) \Rightarrow f(-3) = 0$ $\frac{-3a + 1}{8} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

D'où $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x + 1}{x^2 - 1}$ $f(x) = \frac{x + 3}{3(x^2 - 1)}$

3) La fonction donnée est f telle que : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + f}$



a- Analysons chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

D'Ω = я سر{سر1} =]سرÐ ; سر1[‘]سر1 ; +Ð[

ὰΩά 'Ω(ὼ) = سرÐ et ὰΩά 'Ω(ὼ) = +Ð
ὼ ᴼ سرÐ ὼ ᴼ +Ð

Alors la droite d'équation ώ = ὥὼ + ὦ est asymptote oblique à la courbe (C).
Cherchons ainsi les réels ὥ 'Ωὸ ὦ. La droite passe par deux points (سر1 ; 0)et (0 ; 1).

سرὥ + ὦ = 0 ὥ = 1
ὦ = 1 ὦ = 1 D'où ώ = ὼ + 1 est asymptote oblique à la courbe (C).

ὰΩά 'Ω(ὼ) = سرÐ et ὰΩά 'Ω(ὼ)= +Ð.
ὼ ᴼ سر1ᵐ ὼ ᴼ سر1⁺
Alors la droite d'équation ὼ = سر1 est asymptote Verticale

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$\|\|$ $-$	$\|\|$ $-$	0 $+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2	$-\infty$ / $+\infty$	2	↗ $+\infty$

b- Déterminons les réels a ; b ; c ; d et f en utilisant le graphique.

$f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{fx + d}$

Puis que f admet la droite $x = -1$comme asymptote verticale, alors on a : $fx + d = x + 1$ et par identification on a : $f = 1$ et $d = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$

La courbe (C) passe par les points $(-2 ; -2)$ et $(0 ; 2) \Rightarrow f(-2) = -2$ et $f(0) = 2$

$\dfrac{4a-2b+c}{-1} = -2 \quad 4a - 2b + c = 2$ et $\dfrac{c}{1} = 2 \quad c = 2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x + 1}$

De même $(-2 ; -2)$ est un extremum alors $f'(-2) = 0$ avec $f'(x) = \dfrac{ax^2 + 2ax + b-2}{(x + 1)^2}$

$f'(-2) = 0 \quad \dfrac{4a-4a+b-2}{(-2 + 1)^2} = 0 \quad b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{ax^2 + 2x + 2}{x + 1}$

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

Alors $a = 1$(Coefficient directeur de la droite $y = x + 1$). D'où $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Fonctions d'initialisations.

21 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; i ; j).

1) Déterminons l'ensemble de définition Df.

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

2) Calculons les limites aux bornes de Df.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$x \to -1^- \quad x \to -1^- \quad x \to -1^-$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

3) Déterminons les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$

En effectuant la division Euclidienne $(x^2 + 2x + 2)$ par $(x + 1)$, on obtient :

$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$ et par identification avec $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$, on a :

$a = 1$; $b = 1$ et $c = 1$

4) a- Montrons que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C_f .
La droite (D) d'équation $y = ax + b = x + 1$ est asymptote à la courbe C_f si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \frac{1}{x + 1} - (x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

D'où la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe C_f .

b- Déterminons la position de la courbe C_f et de la droite (D).
Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0$ $\frac{1}{x + 1} = 0$.

Le signe de $f(x) - y$ depend du signe de $x + 1$, car $1 > 0$

Posons $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

$x \in]-\infty ; -1[$, $f(x) - y < 0$. Alors $x \in]-\infty ; -1[$, (C) est en dessous de (D).

$x \in]-1 ; +\infty[$, $f(x) - y > 0$. Alors $x \in]-1 ; +\infty[$, (C) est au dessus de (D).

4) Montrons que le point $I\left(-1 ; 0\right)$ est centre de symétrie pour la courbe C_f.

Le point $I\left(-1 ; 0\right)$ est dit centre de symétrie si $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$

$f(-2-x)+f(x)=0$

$$f(-x-2)=\frac{(-x-2)^2+2(-x-2)+2}{(-x-2)+1}=\frac{4+4x+x^2-4-2x+2}{-x-1}=\frac{x^2+2x}{-x-1}$$

$$\Rightarrow f(-x-2)+f(x)=\frac{x^2+2x+2}{-x-1}+\frac{x^2+2x}{x+1}=\frac{-x^2-2x-2}{x+1}+\frac{x^2+2x+2}{x+1}=0$$

Puisque $f(-x-2)+f(x)=0$ alors $I\left(-1;0\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

5) Déterminons une équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse -2

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$y=f'(-2)(x+2)+f(-2) \Rightarrow y=-x-2$

6) Calculons la dérivée f' de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f.

Posons $u=x^2+2x+2 \Rightarrow u'=2x+2$ et $v=x+1 \Rightarrow v'=1$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{(v)^2}=\frac{(2x+2)(x+1)-(1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Or $x\neq -1, (x+1)^2>0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du

Numérateur x^2+2x.

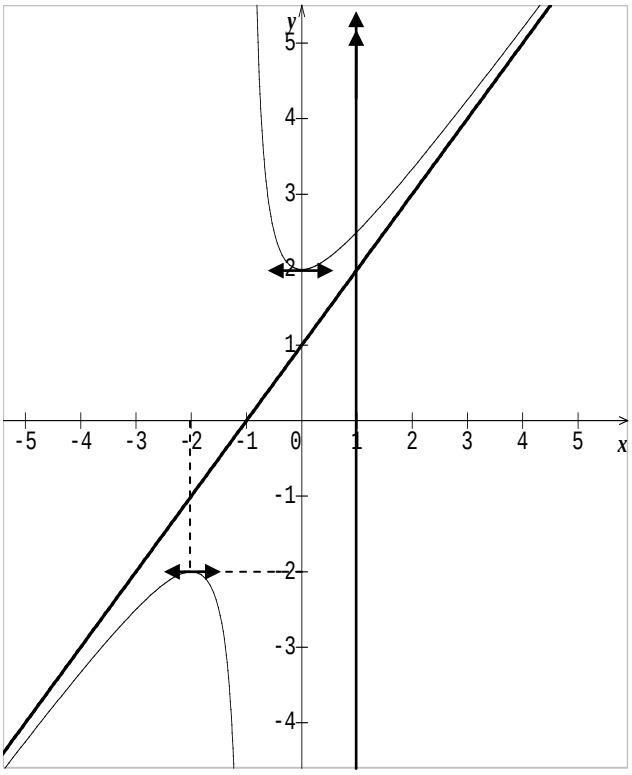
Posons $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=-2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

7) Construisons la courbe C$f$et la droite (D) dans le même repère.

Ainsi on a la représentation suivante :



22 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + bx + c}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Déterminons les réels a ; b ; c tels que :

a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

Alors $x^2 + bx + c = (x - 2)(x + 1)$ $\quad x^2 + bx + c = x^2 - x + 2$

Par identification, on a : $b = -1$ et $c = -2$ => $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2}$

b- La courbe C_f passe par le point $A\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, Alors $f(1) = -2$ $\quad \dfrac{1 + a + b}{-2} = -2$

$1 + a + b = 4$ => $a + b = 3$ **(1)**

C_f admet au point $A\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ une tangente de coefficient directeur -5 => $f'(1) = -5$ avec

$f'(x) = \dfrac{x^2(-a-1) + x(-4-2b) + b+2a}{(x^2 - x - 2)^2}$ alors $f'(1) = -5$ $\quad \dfrac{-3a - b - 5}{4} = -5$

$3a + b = 15$ **(2)**

Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2)** => $\begin{matrix} a + b = 3 \\ 3a + b = 15 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} -a - b = -3 \\ 3a + b = 15 \end{matrix}$$

$2a = 12$ => $a = 6$ $\quad$ et $\quad b = -3$. D'où $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x - 3}{x^2 - x - 2}$

2) Etudions la fonction f puis représente sa courbe C_f dans le repère.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Alors les droites d'équations $y = 1$ est asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote Verticale

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x - 3}{x^2 - x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7x^2 + 2x - 15}{(x^2 - x - 2)^2}$$

Or $\forall x \in D_f, (x^2 - x - 2)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du numérateur $-7x^2 + 2x - 15$. Posons $-7x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = -416 \Rightarrow \Delta < 0$

Alors $\forall x \in D_f, f'(x)$ à même signe que $a = -7$. Donc $f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$		$-$
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + \alpha x + \beta}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminons les réels a ; b ; c ; α ; β tel que :

a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.

Alors $x^2 + \alpha x + \beta = (x - 2)(x + 1)$ $x^2 + \alpha x + \beta = x^2 - x - 2$ par identifications, on a : $\alpha = 1$; $\beta = -1$ $a = -2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 - x - 2}$

b- La courbe C_f passe par les points $A\left(-1 ; \frac{1}{2}\right)$ et $B\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$, alors $f(0) = 3$ $\frac{c}{-2} = 3 \Rightarrow c = -6$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx - 6}{x^2 - x - 2}$

La courbe C_f admet au point $A\left(0 ; \frac{3}{2}\right)$ une tangente de coefficient -3 alors $f'(0) = -3$ avec

$$f'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2(-a - b + 6) + x(-4a + 12) - 2b - 6}{(x^2 - x - 2)^2}.$$

Alors $f'(0) = -3$ $\quad \frac{-2\alpha - 6}{4} = -3 \quad -2\alpha - 6 = -12 \Rightarrow \alpha = 3$

D'où $f(x) = \frac{x^3 + \beta x^2 + 3x - 6}{x^2 - x - 2}$

La courbe C_f admet au point $A(-1;1)$ Alors $f(-1) = -1$ $\quad \frac{-1 + \beta + 3 - 6}{1 - 1 - 2} = -1 \quad \beta - 2 = 2$

$\Rightarrow \beta = 4$

D'où $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 6}{x^2 - x - 2}$

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Etudions les variations de f puis précisons les asymptotes à la courbe C_f.

$D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to \\ x < }} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \\ x > }} f(x) = +\infty$. Alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

$\lim\limits_{\substack{x \to \\ x < }} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \\ x > }} f(x) = -\infty$.

La recherche de l'asymptote oblique nous conduit à $y = \frac{1}{2}x$

$\lim\limits_{\substack{x \to \\ x < }} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \\ x > }} f(x) = -\infty$.

Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote Verticale

$\lim\limits_{\substack{x \to \\ x < }} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \\ x > }} f(x) = -\infty$. Alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote Verticale

$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{[2(x^2 - 1)]^2}$

Or $\forall x \in D_f, [2(x^2 - 1)]^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^4 + 6x^2 + 9$. Alors effectuons un changement de variable en posant $\alpha = x^2$.

Alors $x^4 + 6x^2 + 9$ dévient : $\alpha^2 + 6\alpha + 9 = (\alpha + 3)^2 > 0$

D'où $\forall x \in D_f, f'(x) > 0$

Conclusion : $\forall x \in D_f$, la fonction f est strictement croissante.

2) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, c'est-à-dire $y = \frac{1}{2}x$.

Déterminons la position de C_f par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \quad \frac{-4x}{x^2 - 1} = 0$.

Etudions le signe de $-4x$ et $x^2 - 1$. Posons $-4x = 0$ et $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = -1$ ou $x = 1$

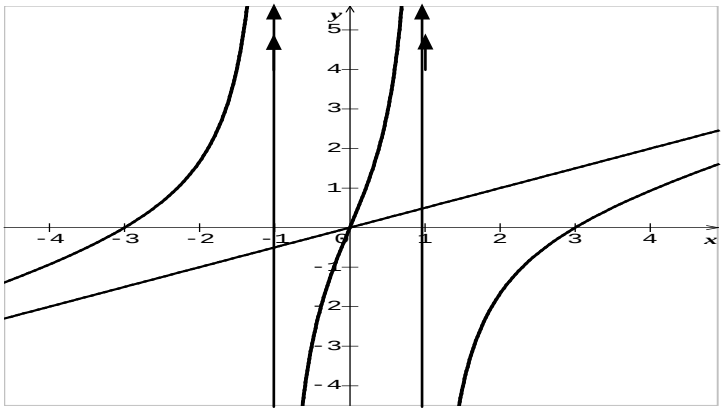
D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)-x-1$	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de $f(x)-x-1$, on a :
$\forall x \in]-\infty ; -1[$, $f(x)-x-1 < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty ; -1[$, (C) est en dessous de (D).

$\forall x \in]0 ; 1[$, $f(x)-x-1 > 0$. Alors $\forall x \in]0 ; 1[$, (C) est au dessus de (D).

4) Construisons C$_f$.



25 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x}$
Soit C$_f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
1) Etudions et construisons la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Déterminons l'ensemble de définition D$_f$.
$D_f = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x < 0}} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x < 0}} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x < 0}} \dfrac{1}{2}x = -\infty$
$x \to -\infty$ $\quad x < 0$ $\quad x \to -\infty$ $\quad x < 0$ $\quad x \to -\infty$ $\quad x < 0$ $\quad x \to -\infty$ $\quad x < 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{2}x = +\infty$
$x \to 0$ $\quad x > 0$ $\quad x \to 0$ $\quad x > 0$ $\quad x \to 0$ $\quad x > 0$ $\quad x \to 0$ $\quad x > 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$
$x \to 0$ $\quad x < 0$ $\quad x \to 0$ $\quad x < 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$
$x \to 0$ $\quad x > 0$ $\quad x \to 0$ $\quad x > 0$

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{2x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x^2-8}{(2x)^2}$

Or $\forall x \in D_f, (2x)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du

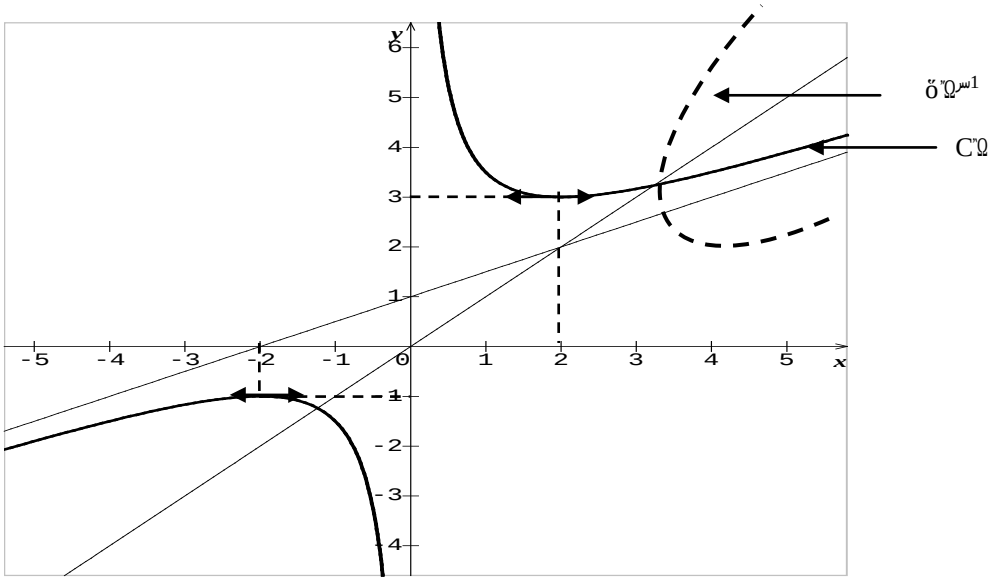
Numérateur $2x^2-8$. Posons $2x^2-8=0 \Rightarrow x=-2$ ou $x=2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	$\|\|$ $+\infty$	↘	3	↗ $+\infty$

Construisons la courbe (C).

- $x=0$ est asymptote verticale.
- $y=\dfrac{1}{2}x+1$ est asymptote oblique.



2) Montrons que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)

Cherchons d'abords le point d'intersection des deux asymptotes. Pour cela formons le système avec les deux asymptotes ($x=0$ asymptote verticale) et ($y=\dfrac{1}{2}x+1$ asymptote oblique)

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ .Ainsi le point (0 ; 1) est centre de symétrie pour la courbe (C) de f si et seulement si : $f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$ $f(-x)+f(x)=2$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 2(-x) + 4}{2(-x)} = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{-2x} = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{2x}$

$\Rightarrow f(-x) + f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 4}{2x} + \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \dfrac{4x}{2x} = 2$

Puisque $f(-x) + f(x) = 2$ alors le point $(0 ; 1)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

3) Discutons graphiquement suivant les valeurs de α l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - \alpha)x + 4 = 0$

Pour cela, exprimons α en fonction de x :

$x^2 + 2(1 - \alpha)x + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x} = f(x)$

En faisant glisser une règle du bas vers le haut tout le long du graphique, on remarque que :

- $\alpha \in]-\infty ; 1[$ coupe deux fois la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - \alpha)x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes négatives.
- $\alpha \in]3 ; +\infty[$, la règle coupe deux fois la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - \alpha)x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes positives.
- $\alpha \in]1 ; 3[$, la règle ne coupe pas la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - \alpha)x + 4 = 0$ n'admet pas de solution.

4) Montrons que la restriction f de f à l'intervalle $I = [\,2 ; +\infty\,[$ est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

En observant le tableau de variation de f, on remarque que $\forall x \in]2 ; +\infty[$, la restriction f de f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $I = [\,2 ; +\infty\,[$ vers l'intervalle $J = [\,3 ; +\infty\,[$. Par conséquent f réalise une bijection de l'intervalle $I = [\,2 ; +\infty\,[$ vers l'intervalle $J = [\,3 ; +\infty\,[$

5) Construisons la courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f dans le même repère que (C). **(voir figure)**

NB : N'oublier jamais que la courbe représentative d'une fonction et celle de sa bijection réciproque son symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Ainsi la construction de la courbe la fonction réciproque f^{-1} de f visualisée sur la figure.

Fonctions biologiques.

26 Une population de bactéries (exprimer en millier) a un rythme de croissance modélisé par la fonction $f(t) = \dfrac{60t + 40}{t + 10}$ où $t \in [\,0 ; +\infty\,[$ est le temps écoulé en jours.

1) Déterminons la population de cette culture au bout de 3 jours ; 5 jours et 21 jours

- La population au bout de 3 jours est : $f(3) = \dfrac{60\times 3 + 40}{3 + 10} = 16{,}92$ أي 17 jours

- La population au bout de 5 jours est : $f(5) = \dfrac{60\times 5 + 40}{5 + 10} = 22{,}66$ أي 23 jours

- La population au bout de 21 jours est : $f(21) = \dfrac{60\times 21 + 40}{21 + 10} = 41{,}93$ أي 42 jours

2) Déterminons les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.

$f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$. La divisions Euclidienne de $(60x + 40)$ par $(x + 10)$ donne pour quotient $q = 60$ et pour reste $r = -560$. Alors $f(x) = q + \frac{r}{x + 10}$

$\Rightarrow f(x) = 60 + \frac{-560}{x + 10}$

et par comparaisons avec $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$, on a : $a = 60$ et $b = -560$

3) a- Calculons la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

$f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10} \Rightarrow f'(x) = \frac{560}{(x + 10)^2}$.

b- Justifions que la population est croissante.
D'après la question : a) , $f'(x) > 0$. Alors $\forall x \in [0 ; +\infty[$, f est strictement croissante.
D'où la population est croissante.

4) a- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.

$f(x) = 52 \quad \frac{60x + 40}{x + 10} = 52 \quad 60x + 40 = 52(x + 10) \quad 8x = 480 \Rightarrow x = 60$ et $S = \{60\}$

b- En déduisons le nombre de jours à partir du quel la population de cette culture sera égale à 52.000 individus.
D'après la question : b), la population de cette culture sera égale à 52.000 individus au bout de 60000 jours.

5) a- Déterminons la limite de f en $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{60x + 40}{x + 10} = \lim_{x \to +\infty} \frac{60x}{x} = 60$

b- En déduisons une interprétation quant à la population de cette culture.
D'après la limite ci-dessus, on dira que la population seuil de cette culture est de 60 individus.

6) Trace la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
Echelle : 1 $\hat{a}$ 10 ans sur l'axe ($x'x$) et 1 $\hat{a}$ 10.000 individus sur l'axe ($y'y$).

28 Une culture de bactéries a un rythme de croissance (ΏὼὴὶΐάέΏὲ ά ά /ὶέόὶ)modélisé par la fonction $\text{ő}(\text{ὼ}) = \frac{3000}{(1 + 0{,}25\text{ὼ})^2}$ où ὼ ᴺ [0 ; +Ð[est le temps écoulé en jours.

On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population ὴ(ὼ)c'est-à-dire que ὴᵽ(ὼ) = ő(ὼ) et au temps ὼ = 0, la culture compte 1000 bactéries c'est-a-dire : ὴ(0) = 1000.

1) a- Déterminons ὴ(ὼ)désignant la population des bactéries après ὼ jours.

$$\text{ὴᵽ}(\text{ὼ}) = \text{ő}(\text{ὼ}) = \frac{3000}{(1 + 0{,}25\text{ὼ})^2} = \frac{0{,}25}{0{,}25} \times \frac{3000}{(1 + 0{,}25\text{ὼ})^2} = \frac{3000}{0{,}25} \times \frac{0{,}25}{(1 + 0{,}25\text{ὼ})^2}$$

$$= 12000 \times \frac{0{,}25}{(1 + 0{,}25\text{ὼ})^2}$$

D'où

$$\text{ὴ}(\text{ὼ}) = \text{ˇ}\ \text{ő}(\text{ὼ})\,\text{Ώὼ} = \text{ˇ}\ 12000 \times \frac{0{,}25}{(1 + 0{,}25\text{ὼ})^2}\,\text{Ώὼ} = 12000\,\text{ˇ}\ \frac{0{,}25}{(1 + 0{,}25\text{ὼ})^2}\,\text{Ώὼ} = \frac{\text{1سر}}{1 + 0{,}25\text{ὼ}} + \text{Ώ}$$

Or ὴ(0) = 1000 1سر + Ώ = 1000 => Ώ = 1001

$$\text{D'où } \text{ὴ}(\text{ὼ}) = \frac{\text{1سر}}{1 + 0{,}25\text{ὼ}} + 1001 = \frac{250{,}25\text{ὼ} + 1000}{1 + 0{,}25\text{ὼ}}$$

b- Evaluons le nombre de bactérie ainsi que leur rythme de croissance au bout de 3 jours.

-Le nombre de bactérie au bout de 3 jours est : $\text{ὴ}(3) = \frac{250{,}25(3) + 1000}{1 + 0{,}25(3)}$ في 1000 individus.

-Leur rythme de croissance au bout de 3 jours est : $\text{ő}(3) = \frac{3000}{(1 + 0{,}25 \times 3)^2}$ في 980 ά ά /ὶὶί

c- Déterminons au bout de combien de jours le nombre de bactéries atteindra t-il 1500 individus

Pour cela résolvons l'équation ὴ(ὼ) = 1500

$$\text{ὴ}(\text{ὼ}) = 1500 \quad \frac{250{,}25\text{ὼ} + 1000}{1 + 0{,}25\text{ὼ}} = 1500 \quad \text{124,75سر}\text{ὼ} = 500 \Rightarrow \text{ὼ في 4سر}$$

Alors le nombre de bactéries atteindra t-il 1500 dans moins de 4 jours.

2) a- Etudions les variations de ὴ sur l'intervalle [0 ; +Ð[.

$$\text{ὴ}(\text{ὼ}) = \frac{250{,}25\text{ὼ} + 1000}{1 + 0{,}25\text{ὼ}} \Rightarrow \text{ὴᵽ}(\text{ὼ}) = \frac{0{,}25}{(1 + 0{,}25\text{ὼ})^2}$$

Alors ˡ ὼ ᴺ [0 ; +Ð[, ὴ est strictement croissante

b- Calculons la limite de ὴ(ὼ)en +Ð.

$$\text{ὰΏά}\ \text{ὴ}(\text{ὼ}) = \text{ὰΏά}\ \frac{250{,}25\text{ὼ} + 1000}{1 + 0{,}25\text{ὼ}} = \text{ὰΏά}\ \frac{250{,}25\text{ὼ}}{0{,}25\text{ὼ}} = \frac{250{,}25}{0{,}25} = 1001$$

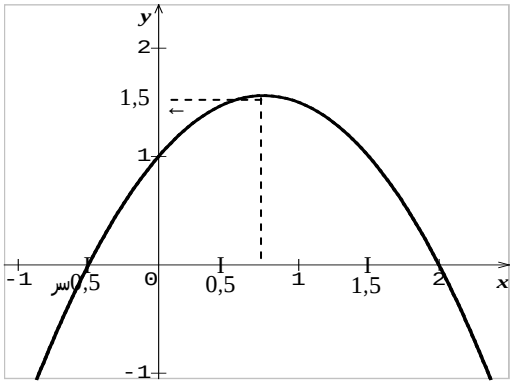
ὼ ᴼ +Ҥ ὼ ᴼ +Ҥ ὼ ᴼ +Ҥ

29 Un malade contracte une fièvre dont la température en degré est modélisée par la fonction ò définie sur l'intervalle [0 ; +Ь[par ò(ώ) = رسώ² + 1,5ώ + 1. Où : ώ est le temps écoulé exprimé en seconde et ò(ώ) est la température de la fièvre exprimé en degré.

1) Déterminons la température du malade à : 0 s ; 1s et 2s

- A 0s, la température du malade est : ò(0) = ر(0)² + 1,5(0) + 1 = 1 degré
- A 1s, la température du malade est : ò(1) = ر(1)² + 1,5(1) + 1 = 1,5 degré
- A 2s, la température du malade est : ò(2) = ر(2)² + 1,5(2) + 1 = 0 degré

2) La fonction ò est représentée par la courbe ci-dessous :



a. Indiquons à qu'elle instant la fièvre atteint sa température maximale.
D'après le graphique ci-dessus, la courbe atteint son maximum à 0,75 s. Par conséquent la fièvre atteint sa température maximale à 0,75 s.

b. Donnons les intervalles respectifs de montée et de descente de la fièvre.
D'après le graphique ci-dessus, la fièvre monte entre 0s et 0,75 s et chute entre 0s et 2 s

3) On désigne par T une primitive de la fonction ò définie sur l'intervalle [0 ; 2].

a. Calculons T.

$$ò(ώ) = رسώ^2 + 1{,}5ώ + 1 \Rightarrow T(ώ) = رس\frac{1}{3}ώ^3 + \frac{1}{2}ώ^2 + ώ$$

b. Calculons la température moyenne du malade pendant l'intervalle de temps [0 ; 2].

$$ά = \frac{1}{2 رس 0~}\int_0^2 (رسώ^2 + 1{,}5ώ + 1)Ωώ = \frac{1}{2} رس\frac{1}{3}ώ^3 + \frac{1}{2}ώ^2 + ώ \Big|_0^2 = 0{,}66 \text{ degré.}$$

Fonctions circulaires.

30 Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x)=\frac{\tan 3x}{\cos^3 x}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminons D_f

$D_f=\{x/x\in\mathbb{R};\cos^3 x\neq 0\}$ $\cos^3 x\neq 0 \quad \cos x\neq 0 \quad \cos x\neq \cos\frac{\pi}{2}$ <=>

$x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ => $D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\}$

2) Etudions la parité et la périodicité de f puis en déduisons un intervalle d'étude D_E.

- **Parité** :

$f(-x)=\frac{\tan(-3x)}{\cos^3(-x)}=\frac{-\tan 3x}{\cos^3 x}=-\frac{\tan 3x}{\cos^3 x}=-f(x)$ (car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$)

Alors f est impaire et admet donc l'origine $O(0;0)$ du repère comme centre de symétrie.

- **Périodicité** :

NB : Les fonctions Cos $(ax+b)$ et Sin $(ax+b)$ sont périodique et de période $T=\frac{2\pi}{|a|}$

Pour $\tan 3x$, on a : $T_1=\frac{2\pi}{3}$ et pour $\cos^3 x$, on a : $T_2=\frac{2\pi}{1}=2\pi$ => $T=T_{1r}\ T_2=2\pi$

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ => $D_E=]-\frac{2\pi}{2};\frac{2\pi}{2}[=]-\pi;\pi[$

De plus la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $[0;\pi[$

D'où $D_E=[0;\pi[$

3) Montrons que $\forall x\in D_f, f'(x)=\frac{3\cos 2x}{\cos^4 x}$ puis dressons le tableau de variation de f.

$f(x)=\frac{\tan 3x}{\cos^3 x}$. ($u=\tan 3x$ => $u'=3(1+\tan^2 3x)$; $v=\cos^3 x$ => $v'=-3\tan x\cos^2 x$)

=> $f'(x)=\frac{(3(1+\tan^2 3x))\cos^3 x-(-3\tan x\cos^2 x)(\tan 3x)}{(\cos^3 x)^2}=\frac{3(1+\tan^2 3x)\times\cos^3 x+3\tan x\cos^2 x\times\tan 3x}{\cos^6 x}$

=> $f'(x)=\frac{3\cos^2 x(1+\tan^2 3x)\cdot\cos x+\tan x\tan 3x)}{\cos^6 x}$ Or $1+\tan^2 3x\cdot\cos x+\tan x\tan 3x\cdot\tan 3x)=\cos 2x$

Car $1+\tan^2 x\cdot\cos x+\tan x\cdot\tan x=\cos(x-x)$ et en simplifiant la fraction par $\cos^2 x$, on a :

$f'(x)=\frac{3\cos 2x}{\cos^4 x}$ (ce qu'il fallait Démontre)

$\forall x\in D_f, \cos^2 x>0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui du numérateur $3\cos 2x$

Alors étudions le signe de $3\cos 2x$. Posons $3\cos 2x=0 \quad \cos 2x=0$

$\cos 2x=\cos\frac{\pi}{2}$ <=> $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ =>

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

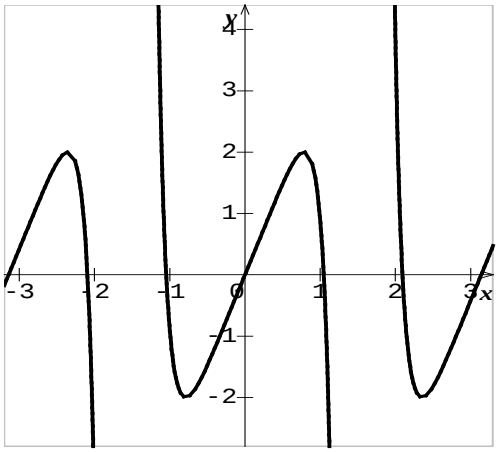
En utilisant le cercle trigonométrique ; $x \in]0 ; \frac{\pi}{4}[$ $f'(x) > 0$ et $x \in]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[$ $f'(x) < 0$

D'autre part $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} f(x) = -\infty$

D'où le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$ est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0

4) Tracé de la courbe C_f par symétrie sur $[-\pi ; \pi]$



31 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \sin 3x}{\cos^3 x}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Déterminons l'ensemble de définition D_f.

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; \cos^3 x \neq 0\}$

$\cos^3 x \neq 0 \iff \cos x \neq 0 \iff \cos x \neq \cos\frac{\pi}{2} \iff x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou

$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Etudions la parité et la périodicité de f puis en déduisons un intervalle d'étude D_E.

- **Parité :**

$f(-x) = \frac{1 + \tan(-3x)}{\tan^3(-x)} = \frac{1 + \tan 3x}{\tan^3 x} = f(x)$ (car $\tan(-x) = -\tan x$)

Alors f est paire et admet donc l'axe y'y comme axe de symétrie.

- **Périodicité :**

NB : Les fonctions Cos $(ax + b)$ et Sin $(ax + b)$ sont périodique et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$

Pour $\tan 3x$, on a : $T_1 = \frac{\pi}{3}$ et pour $\tan^3 x$, on a : $T_2 = \frac{\pi}{1}$ $\Rightarrow T = T_1 \times T_2 = \pi$

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow D_E = -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} =]-\pi ; \pi[$

Et puisque la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $[0 ; \pi[$

D'où $D_E = [0 ; \pi[$

3) Montrons que $\forall x \in D, f'(x) = \frac{3(1-2\cos x)(1+\cos x)}{\cos^4 x}$

$f(x) = \frac{1 + \tan 3x}{\tan^3 x}$

Posons $u(x) = 1 + \tan 3x \Rightarrow u'(x) = 3(1+\tan^2 3x)$

$v(x) = \tan^3 x \Rightarrow v'(x) = 3(1+\tan^2 x)\tan^2 x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(1+\tan^2 3x)\tan^3 x - 3(1+\tan^2 x)\tan^2 x(1+\tan 3x)}{(\tan^3 x)^2}$$

$$= \frac{3(1+\tan^2 3x)\tan x + 3(1+\tan^2 x)\tan^2 x(1+\tan 3x)}{\tan^6 x}$$

$$= \frac{3\tan^2 x(\tan x(1+\tan^2 3x) + (1+\tan^2 x)(1+\tan 3x))}{\tan^6 x} = \frac{3((1+\tan^2 x)\tan x(1+\tan^2 3x) + (1+\tan^2 x)(1+\tan 3x))}{\tan^4 x}$$

$$= \frac{3[(1+\tan^2 x)(\tan x(1+\tan^2 3x) + (1+\tan 3x)]}{\tan^4 x} = \frac{3[(1+\tan^2 x)(\tan x(1+\tan^2 2x) + (1+\tan 3x)]}{\tan^4 x} = \frac{3(\tan x(1+\tan^2 2x) + (1+\tan 3x))}{\tan^4 x}$$

$$= \frac{3(\tan x(2\tan x(1+\tan^2 x) + (1+\tan^2 x)) + (1+\tan 3x))}{\tan^4 x} = \frac{3(\tan x(2\tan x + 1)(1+\tan^2 x) + (1+\tan 3x))}{\tan^4 x} = \frac{3(1-2\cos x)(1+\cos x)}{\cos^4 x}$$

D'où $f'(x) = \frac{3(1-2\cos x)(1+\cos x)}{\cos^4 x}$

4) Etudions le signe de $(1-2\cos x)$ puis en déduis le tableau de variations de f sur D_E.

D'autre par $\forall x \in [0 ; \pi[$ on a : $\sin x > 0$ et $\cos^4 x > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1 - 2\cos x$. Posons : $1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

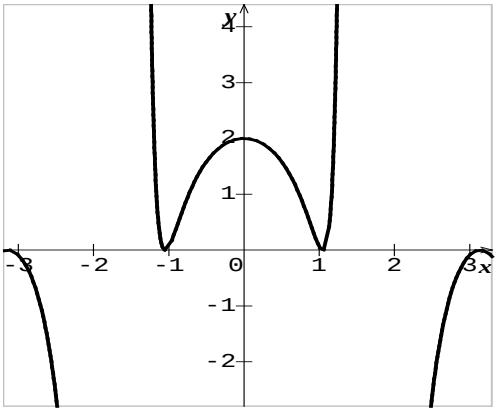
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

ὼ	0		“/3		“/2		“
ʼΩ(ὼ)		سر	0	+	‖	+	
ʼΩ(ὼ)	2	↘	0	↗	+Ħ ‖ سرĦ	↗	0

5) Détermine les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

- $(C)_r$ (έὼ) => ʼΩ(ὼ) = 0 1 + ὦέί3ὼ = 0 ὦέί3ὼ = سر 1 ὦέί3ὼ = Cos “ 3ὼ = “ ou 3ὼ = سر “ => سر “/3 ou “/3. Donc (C) coupe l’axe (έὼ) en سر “/3 ou “/3
- $(C)_r$ (έώ) => ώ = ʼΩ(0) = 2 . Donc (C) coupe l’axe έώ en 2

5) Tracé de la courbe CʼΩ par symétrie sur [سر“ ; “]



32 On considère la fonction numérique ʼΩ définie par : ʼΩ(ὼ) = íʼΩὲ2ὼὦέίὼ.

Soit CʼΩ sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; Ɓ ; ʼɓ).

1) a- Prouvons que la verticale ὼ = “/2 est un axe de symétrie pour la courbe CʼΩ et étudions la parité de ʼΩ.

ὼ = “/2 est un axe de symétrie pour la courbe CʼΩ si et seulement si ʼΩ 2 × “/2 سر ὼ = ʼΩ(ὼ)

ʼΩ(“ سر ὼ) = ʼΩ(ὼ)

ʼΩ(“ سر ὼ) = íʼΩὲ2(“ سر ὼ)ὦέί(“ سر ὼ) = íʼΩὲ(2“ سر 2ὼ)ὦέί(“ سر ὼ) = [سرíʼΩὲ(2ὼ)][سرὦέί(ὼ)]

Car íʼΩὲ(2“ سر|) = سرíʼΩὲ| et ὦέί(“ سر|) = سرὦέί|

=> ʼΩ(“ سر ὼ) = íʼΩὲ2ὼὦέίὼ = ʼΩ(ὼ).

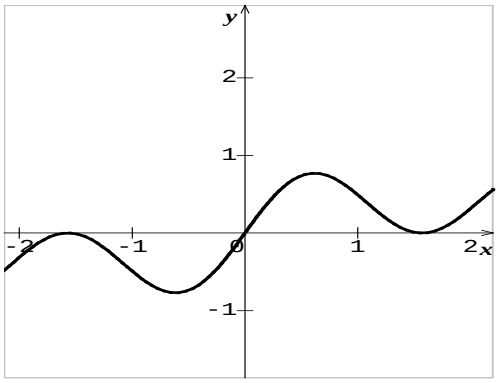
Alors la verticale ὼ = “/2 est un axe de symétrie pour la courbe CʼΩ

Etude de la parité de ʼΩ :

NB : Les fonctions Cos (ὦὼ + ὦ) et Sin (ὦὼ + ὦ) sont périodique et de période T = 2“/|ὦ|

Pour íʼΩὲ2ὼ, on a : T_1 = 2“/2 = “ et pour ὦέίὼ, on a : T_2 = 2“/1 => ʼY = T_{1r} T_2 = “

Calculons ʼΩ(ὼ + ʼY)



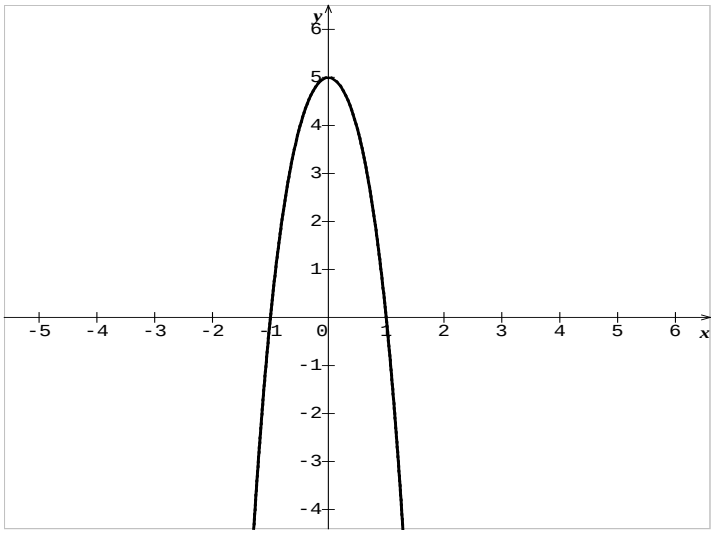
Fonctions paramétriques.

33 Soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\alpha(x) = (2\alpha - 1)x^4 - (\alpha + 4)x^2 - \alpha + 5$.
Où x est la variable et α est un paramètre réel.
Soit (C_α) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
1) Montre que toutes les courbes (C_α) passent par deux points fixes dont on Déterminera les coordonnées.
Toutes les courbes (C_α) passent par deux points fixes si et seulement si $f_0(x) = f_1(x)$
Soient A et B ces deux points.
$f_0(x) = f_1(x)$ $\Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 + 5 = x^4 - 5x^2 + 4$ $\Leftrightarrow 2x^4 + x^2 + 1 = 0$
Cette équation étant bicarrée, effectuons un changement de variable en posant $X = x^2$ =>
$2X^2 + X + 1 = 0$ => $X_1 = 1$ et $X_2 = -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow$ Si $X = 1$ $x^2 = 1$ $x_1 = -1$ ou $x_2 = 1$
Par conséquent : pour $x_1 = -1$, on a : $\alpha_1 = f_0(-1) = 0$. D'où $A(-1 ; 0)$
pour $x_2 = 1$, on a : $\alpha_2 = f_0(1) = 0$. D'où $B(1 ; 0)$
$\Leftrightarrow$ Si $= -\frac{1}{2}$, on a une absurdité car si $x^2 = -1$, l'équation n'a pas de solution.
2) Etudie les fonctions f_0 et f_1 puis représente leur courbe respectives (C_0) et (C_1).
$f_0(x) = -x^4 + 4x^2 + 5$ et $f_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
Etude de la fonction f_0 puis représentation de sa courbe (C_0)
$D_{f_0} = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
$\lim_{x \to -\infty} f_0(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$
$x \to -\infty$ $x \to +\infty$

$f_0(x) = -x^4 + 4x^2 + 5$ => $f'_0(x) = -4x^3 + 8x = -4x(x^2 - 2)$
$\forall x \in D_{f_0} ; (x^2 - 2) > 0$. Alors le signe de $f'_0(x)$ dépend du signe de $-4x$. Posons $-4x = 0$
=> $x = 0$
D'où le tableau de variation de f_0 est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

La courbe représentative de f_0 est le suivant :



$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$x \to -\infty$ $x \to +\infty$

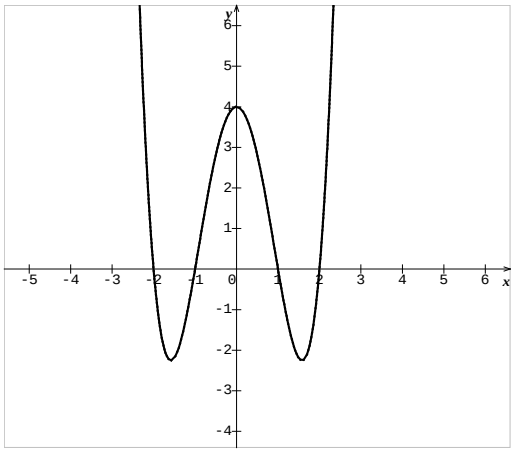
$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$. Posons $f'(x) = 0$

$2x(2x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $2x^2 - 5 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$		$-$	0 $+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{111}{16}$	4	$-\frac{111}{16}$	$+\infty$

La courbe représentative de f est le suivant :



34 Soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\alpha(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4\alpha}{x^2 + (5\alpha + 1)x + 3}$.

Où x est la variable et α est un paramètre réel.

Soit (C_α) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Montrons que toutes les courbes (C_α) passent par trois points fixes dont on Déterminera les coordonnées.

Toutes les courbes (C_α) passent par trois points fixes si et seulement si $f_0(x) = f_1(x)$

Soient A; B et C ces trois points.

$f_0(x) = f_1(x)$ $\quad \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3} = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 6x + 3}$

$(x^2 + 3x)(x^2 + 6x + 3) = (x^2 + x + 3)(x^2 + 3x + 4)$

$5x^3 + 11x^2 - 4x - 12 = 0$ (Équation du troisième degré)

Alors la forme factorisée de $5x^3 + 11x^2 - 4x - 12$ est $(x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{6}{5}\right)$

$5x^3 + 11x^2 - 4x - 12 = 0 \quad (x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{6}{5}\right) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1 ; x_2 = -2 ; x_3 = -\frac{6}{5}$

- Pour $x_1 = 1$, on a : $y_1 = f_0(1) = \dfrac{1 + 3}{1 + 1 + 3} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow A\left(1 ; \frac{4}{5}\right)$
- Pour $x_2 = -2$, on a : $y_2 = f_0(-2) = \dfrac{4 - 6}{4 - 2 + 3} = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow B\left(-2 ; -\frac{2}{5}\right)$
- Pour $x_3 = -\frac{6}{5}$, on a : $y_3 = f_0\left(-\frac{6}{5}\right) = \dfrac{-\frac{54}{25}}{\frac{81}{25}} = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow C\left(1 ; \frac{4}{5}\right)$

D'où toutes les courbes (C_α) passent par les points $A\left(1 ; \frac{4}{5}\right)$; $B\left(-2 ; -\frac{2}{5}\right)$; $C\left(1 ; \frac{4}{5}\right)$

2) Déterminons α pour que le point d'intersection I de (C_α) et l'asymptote parallèle à $(x'x)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.

Cherchons d'abords l'asymptote parallèle à l'axe $(x'x)$, c'est-à-dire l'asymptote horizontale.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x + 4\alpha}{x^2 + (5\alpha + 1)x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1$ est asymptote horizontale.

$x \to +\infty$ $\quad x \to -\infty$ $\quad x \to -\infty$

Cherchons de même les coordonnées du point I

I étant le point d'intersection de la courbe (C_α) avec l'asymptote horizontale $y = 1$, on a :

$f_\alpha(x) = 1 \qquad \frac{x^2 + 3x + 4\alpha}{x^2 + (5\alpha + 1)x + 3} = 1 \qquad x^2 + 3x + 4\alpha = x^2 + (5\alpha + 1)x + 3$

$\alpha = \frac{2x - 3}{5x - 4}$. Or l'abscisse en ce point est $x = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\frac{3}{2} - 3}{5\frac{3}{2} - 4} = \frac{0}{\frac{7}{2}} = 0$

D'où $\alpha = 0$

3) Etudions la fonction f_0 puis représentons sa courbe (C_0)

$f_0(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3}$ et $f_1(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 6x + 3}$

Etude de la fonction f_0 puis représentation de sa courbe (C_0)

$Df_0 = R =]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f_0(x) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$

$x \to -\infty \qquad x \to +\infty$

$f_0(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3} \Rightarrow f_0'(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 9}{(x^2 + x + 3)^2}$

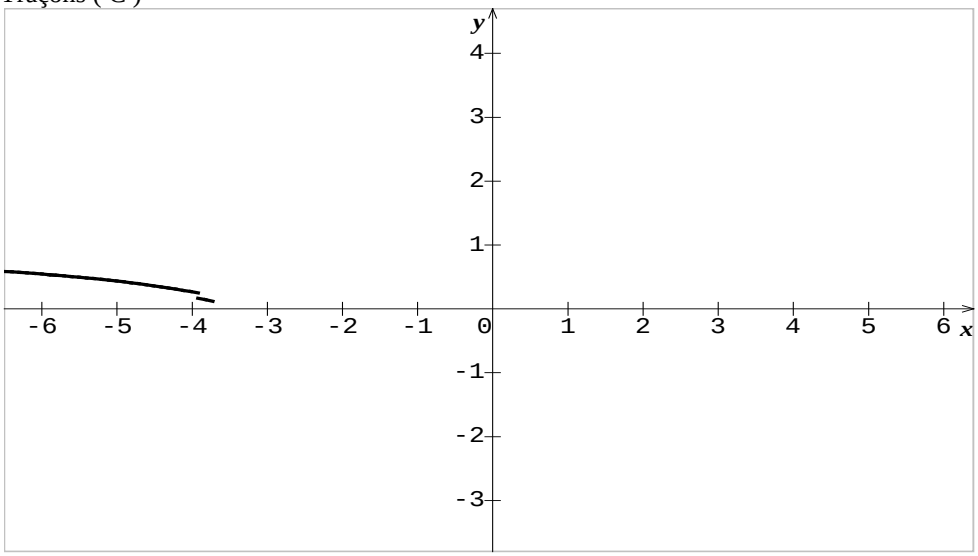
Or $\forall x \in D_{f_0}, (x^2 + x + 3)^2 > 0$ alors le signe de $f_0'(x)$ dépend donc du signe du Numérateur $-2x^2 + 6x - 9$. Posons $-2x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 108$

$\Rightarrow x_1 = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} \approx 4$ et $x_2 = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} \approx -1$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f_0'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f_0(x)$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{28}{3}$	1

Traçons (C)



D'où le tableau de variation de f_2 est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f_2'(x)$	$+$	$+$	$+$	
$f_2(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1
	1	$-\infty$	$-\infty$	

2) Comparons $f_\alpha(x)$ et $f_{-\alpha}(-x)$ puis donnons la position relative des courbes (C_α) et $(C_{-\alpha})$.

$f_\alpha(x) = \frac{x^2 - \alpha x}{x^2 - 1} \Rightarrow f_{-\alpha}(-x) = \frac{(-x)^2 - (-\alpha)(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 - \alpha x}{x^2 - 1} = f_\alpha(x)$

D'où $f_{-\alpha}(-x) = f_\alpha(x)$

4) Montrons que toutes les courbes (C_α) passent par un même point fixe dont on Déterminera les coordonnées.

Toutes les courbes (C_α) passent par un même point fixe si et seulement si f_0

NB : la courbe ($\mathcal{C}_{-2}$) est représentée en gras celle de la courbe ($\mathcal{C}_2$) est représentée en fin.

Fonctions auxiliaires.

36 **Partie A :** On considère le polynôme f définie : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Dressons le tableau de variation de f.

$Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x$. Posons $f'(x) = 0 \quad 6x^2 - 6x = 0$

$6x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]1,6 ; 1,7[$.

- D'après le tableau de variation de f, sur $]1 ; +\infty[$, f est définie, continue et strictement croissante de $]1 ; +\infty[$ vers $]-2 ; +\infty[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$
- De plus $f(1,6) = -0,48$ et $f(1,7) = 0,15 \Rightarrow f(1,6) \times f(1,7) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in]1,6 ; 1,7[$.
  Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1,6 ; 1,7[$.

3) Donnons le signe de $f(x)$ dans l'intervalle $]-1 ; +\infty[$.

D'après le tableau de variation de f, sur $]-1 ; \alpha[$, $f(x) < 0$.

sur $]\alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$.

Partie B : On considère la fonction $g :]-1 ; +\infty[\to \mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1-x}{1+x^3}$

Soit C_g sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) a) Justifions la dérivabilité de g sur $]-1 ; +\infty[$.

- $1 - x$ est définie et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$.
- $1 + x^3$ est définie et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$.

Alors $g(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$.

b) Calculons $g'(x)$ puis établir que $g'(x) = \frac{f(x)}{(1+x^3)^2}$

$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. Posons $u = 1-x \Rightarrow u' = -1$ et $v = 1+x^3 \Rightarrow v' = 3x^2$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)(1+x^3)-(1-x)(3x^2)}{(1+x^3)^2} = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

2) Donnons le tableau de variation de f.
$x \in]-1\ ;\ +\infty[$, $(1+x^3)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$.
Or d'après la partie A) 3), on a :
$x \in]-1\ ;\ \alpha[$, $g(x) < 0$, alors $x \in]-1\ ;\ \alpha[$, $f'(x) < 0$

$x \in]\alpha\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$, alors $x \in]\alpha\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$

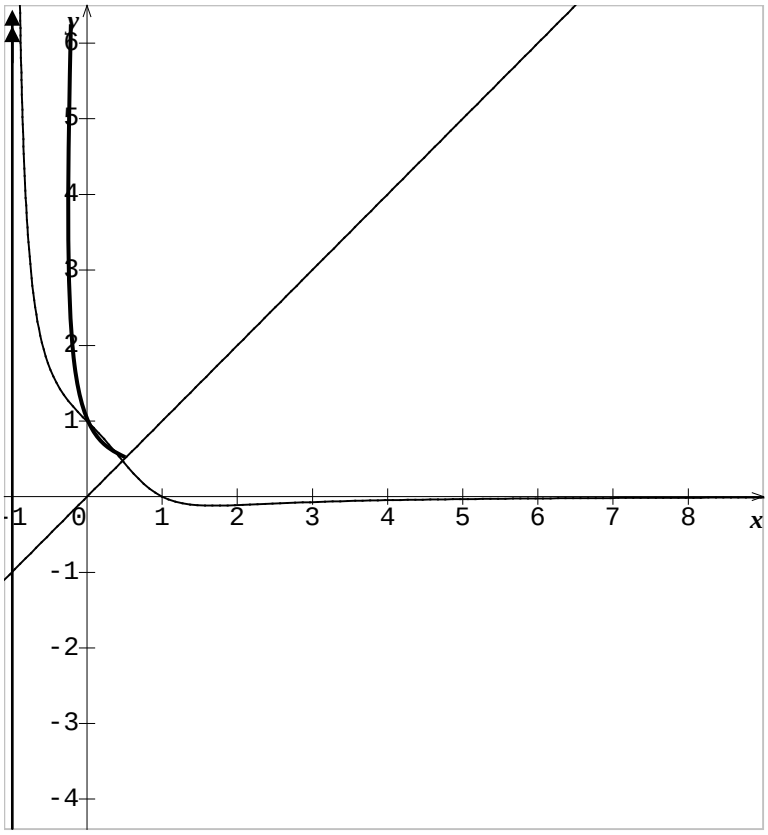
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ 0	$-\frac{1}{9}$

3) Déterminons les équations des asymptotes à la courbe C_f de f.
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale.

4) Plaçons α puis traçons C_f.



5) Soit ℚ la restriction de ℚ à l'intervalle [2 ; + ∞ [.
Montrons que ℚ réalise une bijection de [2 ; + ∞ [sur un intervalle J que l'on précisera.
D'après le tableau de variation de ℚ, ∀ὼ ∈ [2 ; + ∞ [, ℚ est définie, continue et strictement croissante de [2 ; + ∞ [vers $-\frac{1}{9}$; + ∞ . D'où la restriction de ℚ à l'intervalle [2 ; + ∞ [réalise une bijection de [2 ; + ∞ [vers J = $-\frac{1}{9}$; + ∞ .
6) Traçons Cℚ$^{-1}$ où ℚ$^{-1}$ est la bijection réciproque de la fonction ℚ restriction de ℚ à l'intervalle [2 ; + ∞ [.
NB : la courbe représentative d'une fonction et celle de sa bijection réciproque sont symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation ώ = ὼ.
Pour le tracé de Cℚ$^{-1}$, (Voir figure en gras ci-dessus)

37

Partie A : On donne la fonction ℚ définie par ℚ(ὼ) = ὼ^3 – 3ὼ – 4
1) Etudions les variations de ℚ et Dresse son tableau de variation.
Dℚ = ℝ =]−∞ ; +∞[
$\lim_{ὼ \to -\infty}$ ℚ(ὼ) = −∞ et $\lim_{ὼ \to +\infty}$ ℚ(ὼ) = +∞.

ℚ(ὼ) = ὼ^3 – 3ὼ – 4 => ℚ′(ὼ) = 3ὼ^2 − 3 . Posons ℚ′(ὼ) = 0 3ὼ^2 − 3 = 0

$\dot{\omega}^2 = 1 \Rightarrow \dot{\omega} = -1$ ou $\dot{\omega} = 1$

D'où le tableau de variation de Ω est le suivant :

$\dot{\omega}$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$

$]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$, $(x^2-1)^2>0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x\times f(x)$.
Or d'après la partie A) 3), on a :
$]-\infty;-1[$; $]-1;0[$, $f(x)<0$ et $]0;+\infty[$; $]-1;+\infty[$, $f(x)>0$.
D'autre part, $]-\infty;-1[$; $]-1;0[$, $x<0$ et $]0;+\infty[$, $x>0$
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	0	$-\infty$ $+\infty$	$+\infty$ $f(]-1;+\infty[)$

4) Montrons que la droite (D) d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f.
La droite (D) d'équation $y=x+2$ est asymptote oblique à la courbe C_f si et seulement si

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}-x-(x+2)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}-x-x-2$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

D'où la droite (D) d'équation $y=x+2$ est asymptote oblique à la courbe C_f

Etudions la position de C_f et (D).
Pour ce la étudions le signe de $f(x)-x$. Posons $f(x)-x=0$ $\frac{x+2}{x^2-1}=0$
Posons $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ et $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1$ ou $x=1$
$x=-1$. D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	$+$	$-$	$+$	

b) Etudions les limites de ̈Ω aux bornes de D̈Ω puis en déduisons que la courbe (C) de ̈Ω admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.

D̈Ω = я =]سЊ ; +Њ[

ὰΩά ̈Ω(ὼ) = ὰΩά سر ὼ + Ѝ$\overline{ὼ^2 + 8}$ = ὰΩά سر ὼ + ⁓$\overline{ὼ^2 \quad 1 + \frac{8}{ὼ^2}}$

ὼ ᴼ سЊ ὼ ᴼ سЊ ὼ ᴼ سЊ

ὰΩά سر ὼ + |ὼ|⁓$\overline{1 + \frac{8}{ὼ^2}}$ = ὰΩά سر ὼ سر ὼ⁓$\overline{1 + \frac{8}{ὼ^2}}$ = ὰΩά سر ὼ 1 + ⁓$\overline{1 + \frac{8}{ὼ^2}}$

ὼ ᴼ سЊ ὼ ᴼ سЊ ὼ ᴼ سЊ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} - (x+2) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} + x + 2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Puis que $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+2) = 0$

Alors La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$ si et seulement si :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

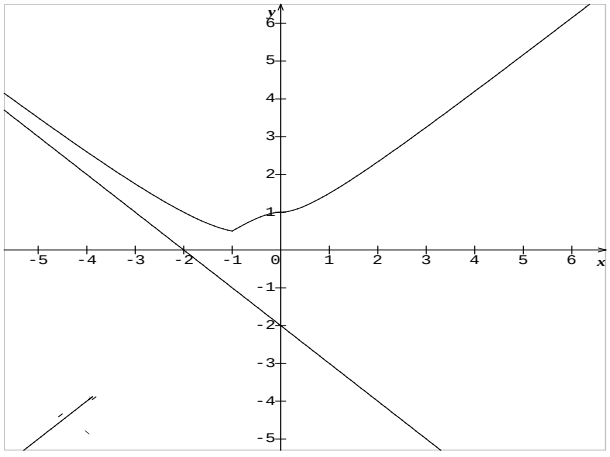
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} - (x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Puis que $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

Alors La droite d'équation $y = x$est asymptote à la courbe (C) de f en $+\infty$

5) Traçons (C)



c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \ldots$

Dérivabilité à gauche :

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}-0}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{4}{0} = +\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 3$ à gauche

Dérivabilité à droite :

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}-0}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{4}{0} = +\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 3$ à droite

Conclusion : f n'est pas dérivable à gauche et à droite de 3.

4) Montrons que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (æ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.

NB : Toutes fonctions de la forme : $f(x) = \ln|ax^2 + bx + c|$ (avec $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac > 0$), admet deux asymptotes :

- L'une en $-\infty$ d'équation : $y = -\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2a}$
- L'une en $+\infty$ d'équation : $y = \sqrt{a}\,x + \frac{b}{2a}$

Alors $f(x) = \ln|x^2 - 2x - 3|$ admet deux asymptotes :

- L'une en $-\infty$ d'équation (Δ) : $y = -\sqrt{1}\,x + \frac{-2}{1} = -(x-2) = -x + 2$
- L'une en $+\infty$ d'équation (Δ') : $y = \sqrt{1}\,x + \frac{-2}{1} = (x-2) = x - 2$

6) Dressons son tableau de variation.

$D_f =]-\infty ; -1[\cup [3 ; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \to -\infty} |x| = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \to +\infty} |x| = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$f(-1) = 0$ et $f(3) = 0$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

$\forall x \in D_f, \sqrt{x^2 - 2x - 3} > 0.$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $x - 1$. Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

D'où le tableau de variation de f sur $]-\infty\ ;\ -1] \cup [3\ ;\ +\infty[$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

$\forall x \in [-1\ ;\ 3],\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

$f(-1) = 0$ et $f(3) = 0$

$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-x + 1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

$\forall x \in D_f, \sqrt{-x^2 + 2x + 3} > 0.$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $-x + 1$. Posons $-x + 1 = 0$ $\Rightarrow x = 1$

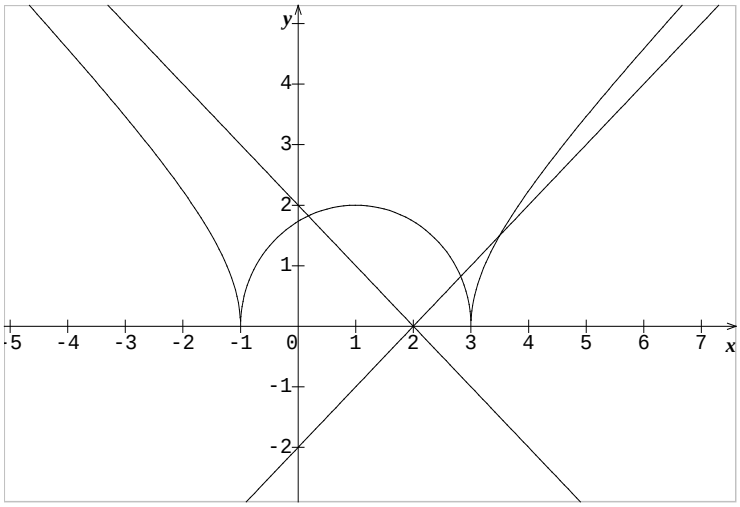
D'où le tableau de variation de f sur $[-1\ ;\ 3]$ est le suivant :

x		-1		1		3	
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$		0	↗	2	↘	0	

La réunion de ces deux tableaux donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

6) Traçons dans un repère orthonormé la courbe (C) de f.



43 Soit la fonction ̈Ω définie de я vers я par ̈Ω(ὼ) = |ὼ|ججـ$\sqrt{\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر 1}}}$

Soit C̈Ω sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; ̈Ɓ ; ̈Ɓ).

1) Déterminons l'ensemble de définition D̈Ω de ̈Ω

D̈Ω = ὼ /ὼ ᴺ я ; $\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر 1}}$ > 0 ̈Ωὸ ὼ سر 1 غى 0

(1) $\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر 1}}$ شي 0 . Résolvons l'inéquation $\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر 1}}$ شي 0 en étudiant le signe de $\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر 1}}$.

Posons ὼ = 0 et ὼ سر 1 = 0 => ὼ = 1.

D'où le tableau de signe de $\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر 1}}$ est le suivant :

ὼ	سرЊ 0		1 +Ħ
ὼ	سر (		+
ὼ سر 1	سر		) +
$\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر1}}$	+		+

Ainsi l'ensemble solution correspondant à l'inéquation $\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر 1}}$ شي 0 est]سرЊ ; 0]ʻ [1 ; +Ħ[

D'autre part **(2) :** ὼ سر 1 غى 0 => ὼ غى 1

Alors la réunion de ces deux ensembles donne : D̈Ω =]سرЊ ; 0]ʻ]1 ; +Ħ[

2) a) Etudions la dérivabilité de ̈Ω au point ὼ_0 = 0, en déduisons l'ensemble de dérivabilité de ̈Ω.

̈Ω est dérivable en ὼ_0 = 0 si et seulement si ἀ̈Ω ά $\frac{\text{̈Ω(ὼ) سر ̈Ω(0)}}{\text{ὼ}}$ = ἀ̈Ω ά $\frac{\frac{\text{ὼ}}{\text{ὼ سر 1}} \text{ سر } 0}{\text{ὼ}}$

ὼ ᴼ 0 ὼ ᴼ 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{x+1}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$$
$$x \to 0 \qquad x \to 0 \qquad x \to 0$$

D'où f est dérivable en $x_0 = 0$ et son nombre dérivé est : $f'(0) = 1$ et l'ensemble de dérivabilité de f est $D_{f'} =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

b) Calculons $f'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.

$f(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

- Pour $x \in]-\infty ; 0]$; $f'(x) = \frac{x(x+1)(-2x+3)}{2(x+1)^2\sqrt{x^2+x}}$.

- Pour $x \in [1 ; +\infty[$; $f'(x) = \frac{x(x+1)(2x-3)}{2(x+1)^2\sqrt{x^2+x}}$.

c) Calculons les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f et précisons les équations des asymptotes à la courbe (C) de f.

- Pour $x \in]-\infty ; 0]$; $f(x) = -x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$
- Pour $x \in [0 ; +\infty[$; $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{1} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

3) Traçons la courbe (C) de ̈Ω.

On considère, dans le plan (ὗ) rapporté à un repère orthonormal (O ; ̈ϑ ; ̈ϑ), le cercle (ũ) de centre O et de rayon 1.
Soit ö le point de coordonnées (1 ; 0) et ö’ le point de coordonnées (سر1 ; 0) .

1) Pour tout point H du segment[öö̈], distinct de ö et ö’, on mène la perpendiculaire (φ) ¨ la droite (öö̈). La droite (φ) coupe le cercle (ũ) en ὓ et ὓ’. On pose ὓὓ = ὼ.

Calculons en fonction de ὼ l’aire du triangle ö ὓ ὓ’.
ὓὓ = ὼ. Comme ̈O appartient au segment [öö̈], et est distincte de ö et ö’, ὼ est élément de l’intervalle]سر1 ; 1[alors ö̈O = 1 سر ὼ.
Le 1.4 Tm <0D50.5185[0 Tw <0723>Tj /3 0 t5896.96 680.4 re01 Tc triangleƒÀ™` –•ˆ7 $5pB#•@

2) Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

a- Etudions les variations de f.

$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = (-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x) \Rightarrow$

$f'(x) = -\sqrt{1-x^2} - \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1+x^2-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x)(1+x)-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{(1-x)[-(1+x)-x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in]-1\ ;1[$, $\sqrt{1-x} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur :

$(x-1)(2x+1)$. Posons $(x-1)(2x+1) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

D'où le tableau de variation de f sur $]-1\ ;1[$ est le suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

b- Montrons que le triangle OIJ d'aire maximale est équilatéral.

Le triangle d'aire maximale est obtenu pour $= -\frac{1}{2}$.

Maintenant vérifions si le triangle OIJ est équilatéral pour cette valeur de x obtenue.

$IJ = 2y_I = 2\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$OI^2 = OJ^2 + OJ^2 = \left(\frac{IJ}{2}\right)^2 + (1-x)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1-x)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$OI^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3 \Rightarrow OI = \sqrt{3}$. Or $OI = OJ = \sqrt{3}$.

Conclusion : $IJ = OI = OJ = \sqrt{3}$. Alors le triangle OIJ d'aire maximale est équilatéral.

Problèmes

45 La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.
On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f.

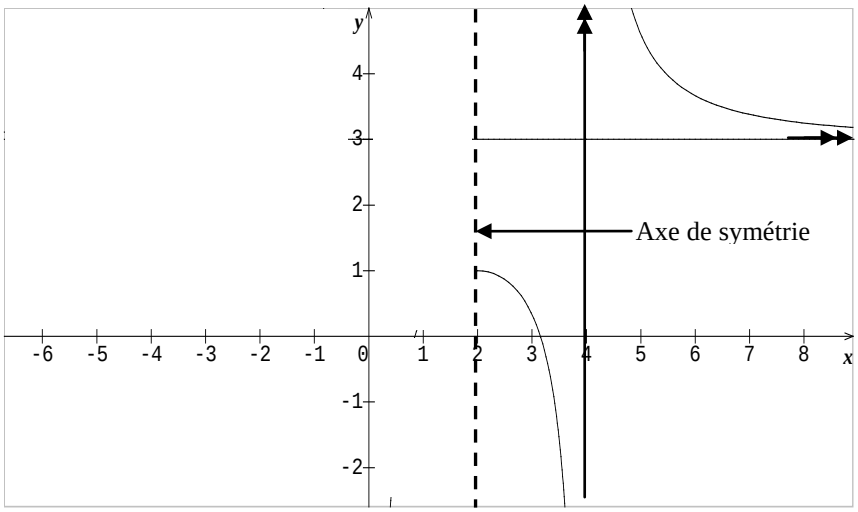
x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$			0	−	‖	−	
$f(x)$		↘	1	↘	‖	↘	
					$+\infty$		3
					‖		
					$-\infty$		

1) Traçons la courbe C de f.

- La droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie.
- La droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale.

- Le point (2 ; 1) est extremum locale de la courbe (C) de ℚ.

De ces renseignements nous obtenons une partie de la courbe qui est le suivant :



2) Complétons le tableau de variation de ℚ .

Par symétrie par rapport à la droite d'équation ὼ = 2 , on a :

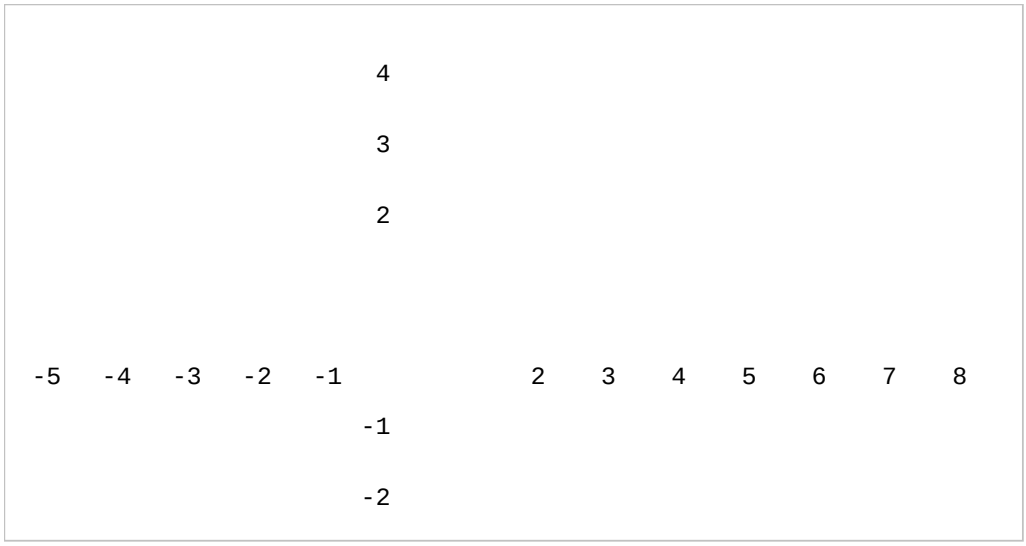
- La droite d'équation ὼ = 0 est aussi asymptote verticale.
- La droite d'équation ώ = 3 est asymptote horizontale.

D'où le tableau de variation de ℚ sur я سر{0 ; 4} est le suivant :

ὼ	سЊ	0		2		4	+Ѣ
ℚ(ὼ)	+	‖	+	0	سر	‖	سر
ℚ(ὼ)	3 ↗ +Ѣ	‖	سЊ ↗	1	↘ سЊ	‖	+Ѣ ↘ 3

1) Traçons la courbe (C) de ℚ.

En utilisant le tableau de variation ci-dessus, la courbe représentative de ℚest donc le suivant :



3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$

a- Déterminons les réels a ; b ; c ; β f

- $D_f = \mathbb{R} - \{0 ; 4\} \Rightarrow x^2 + px + q = (x - 0)(x - 4)$ $x^2 + px + q = x^2 - 4x$

Par identification, on obtient : $p = -4$ et $q = 0$

$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x}$ et $f'(x) = \frac{-x^2(4a + b) - 2bx + 4c}{(x^2 - 4x)^2}$

- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale $\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x} = 3$ $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = 3 \Rightarrow a = 3$

$\Rightarrow f(x) = \frac{3x^2 + bx + c}{x^2 - 4x}$ et $f'(x) = \frac{-x^2(12 + b) - 2bx + 4c}{(x^2 - 4x)^2}$

D'après le tableau de variation, le point $(2 ; 1)$ est extremum alors $f'(2) = 0$ et $f(2) = 1$

$f'(2) = 0$ $12 + b = 0$ $b = -12$ $b = -12$

$f(2) = 1$ $2b + c = -16$ $-24 + c = -16$ $c = 8$

D'où $a = 3$; $b = -12$; $c = 8$; $p = -4$ f $q = 0$ et $f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 8}{x^2 - 4x}$

b- Montrons que la restriction f de f à $I =]2 ; 4]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

D'après le tableau de variation ; $x \in]2 ; 4]$, f est définie, continue et strictement décroissante $]2 ; 4]$ vers $J =]-\infty ; 1]$.

D'où la restriction f de f réalise une bijection de $]2 ; 4]$ sur l'intervalle $J =]-\infty ; 1]$.

c- Donnons l'équation de la tangente à la courbe $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} au point d'abscisse 1.

$y = [f^{-1}(x_0)]'(x - x_0) + f^{-1}(x_0)$. Or $x_0 = 1 \Rightarrow = [f^{-1}(1)]'(x - 1) + f^{-1}(1)$. C

$[f^{-1}(1)]' = \frac{1}{f'\acute{e}f^{-1}(1)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(1)]}$ avec $f^{-1}(x) = \frac{x - 6 + 2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 3}$

$\Rightarrow [f^{-1}(1)]' = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}$ et $f^{-1}(1) = 2$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 1) + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

d- Traçons $C_{f^{-1}}$

NB : La courbe représentative d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Pour le tracé de $C_{f^{-1}}$, (Voir figure).

e- Discutons graphiquement suivant les valeurs du paramètre α, du nombre et des signes des solutions de l'équation $(3 - \alpha)x^2 - (12 - 4\alpha)x + 8 = 0$

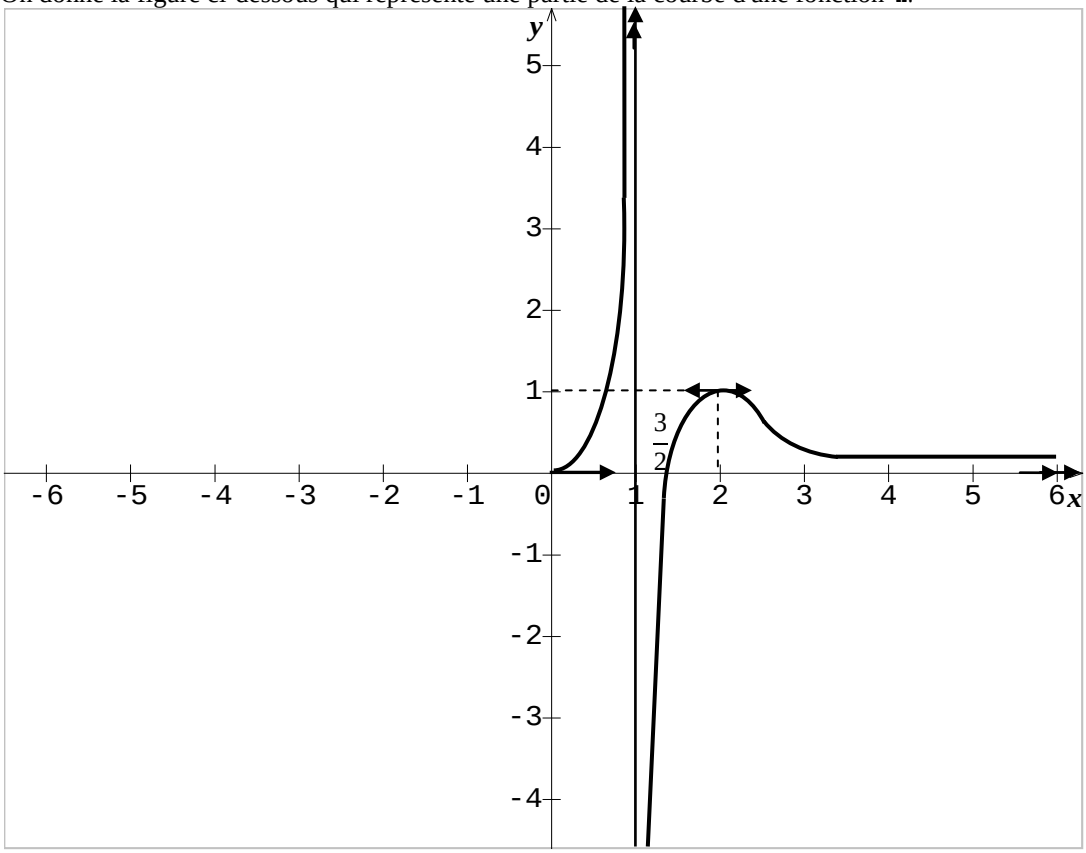
Pour cela, exprimons α en fonction de x :
$(3 - \alpha)x^2 - (12 - 4\alpha)x + 8 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3x^2 - 12x + 8}{x^2 - 4x} = f(x)$

En faisant glisser une règle du bas vers le haut tout le long du graphique, on remarque :

- $\alpha \in]-\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$, la règle coupe deux fois la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - \alpha)x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_1 .

- $\alpha \in]1 ; 3[$, la règle ne coupe pas la courbe et par conséquent l'équation $x^2 + 2(1 - \alpha)x + 4 = 0$ n'admet pas de solution.

46 On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction ℚ.



1) Complétons la courbe de la fonction ℚ sachant que ℚ est impaire.

NB : toute fonction paire admet l'axe (ώ⁄ŭώ) comme axe de symétrie. D'où le complément de la courbe est le suivant :

5) a- Montrons que $\text{ٰ}\grave{\omega}\ \text{ٮ}\ [4\,;5]$, on a : $|\text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega})|\ \text{ٮش}\ \frac{3}{4}$

$\text{ٰ}\Omega(\grave{\omega}) = \frac{\grave{\omega}^2\ \text{سر}\ \grave{\omega}\ \text{سر}\ 5}{\grave{\omega}\ \text{سر}\ 3} \Rightarrow \text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega}) = \frac{\grave{\omega}^2\ \text{سر}\ 6\grave{\omega} + 8}{(\grave{\omega}\ \text{سر}\ 3)^2}$

Or $\grave{\omega}\ \text{ٮ}\ [4\,;5] \Leftrightarrow 4\ \text{ٮش}\ \grave{\omega}\ \text{ٮش}\ 5$

En appliquant la fonction dérivée $\text{ٰ}\Omega\text{ٰ}\text{Nj}$ à l'inégalité, on a :

Or $\text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(4) = 0$ et $\text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(5) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow\ 0\ \text{ٮش}\ \text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega})\ \text{ٮش}\ \frac{3}{4}$

En appliquant la valeur absolue à l'inégalité, on a :

$\Rightarrow |0|\ \text{ٮش}\ \text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega})\ \text{ٮش}\ \frac{3}{4}$

$\Rightarrow\ 0\ \text{ٮش}\ \text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega})\ \text{ٮش}\ \frac{3}{4}$

D'où $\text{ٰ}\grave{\omega}\ \text{ٮ}\ [4\,;5]|$, $\text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega})|\ \text{ٮش}\ \frac{3}{4}$

b- En déduisons que $\text{ٰ}\grave{\omega}\ \text{ٮ}\ [4\,;5]$, on a : $\text{ٰ}\Omega(\grave{\omega})\ \text{سر}\ \frac{15}{2}\ \text{Ò}\ \frac{3}{4}|\grave{\omega}\ \text{سر}\ 5|$

D'après la question a) , on a : $\text{ٰ}\grave{\omega}\ \text{ٮ}\ [4\,;5]|$, $\text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega})|\ \text{ٮش}\ \frac{3}{4}$

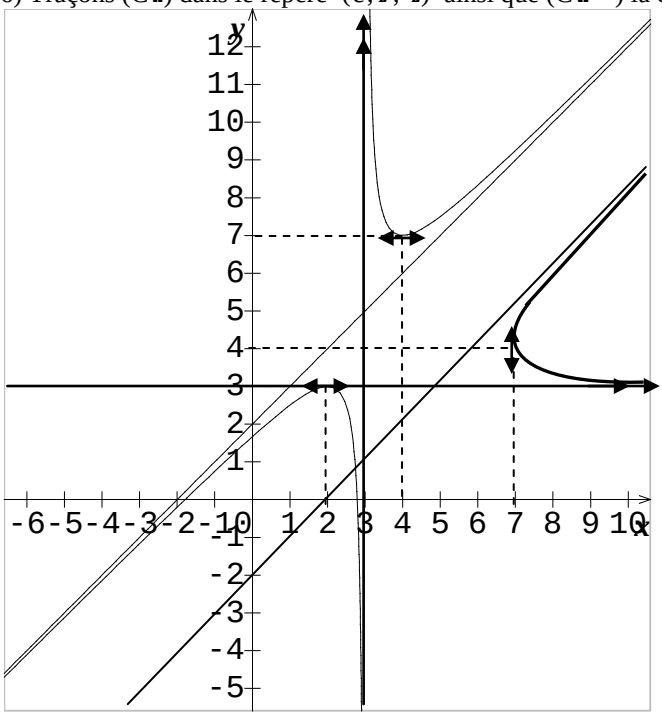
Or si $|\text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega})|\ \text{ٮش}\ \tilde{\Omega}$, on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis $|\text{ٰ}\Omega(\grave{\omega})\ \text{سر}\ \text{ٰ}\Omega(\acute{\omega})\ |\ \text{Ò}\ k\,|\grave{\omega}\ \text{سر}\ \acute{\omega}|$

Ainsi puisque $|\text{ٰ}\Omega\text{ٰ}(\grave{\omega})|\ \text{ٮش}\ \frac{3}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a : $|\text{ٰ}\Omega(\grave{\omega})\ \text{سر}\ \text{ٰ}\Omega(5)\ |\ \text{Ò}\ \frac{3}{4}|\grave{\omega}\ \text{سر}\ 5|$. Avec $\tilde{\Omega} = \frac{3}{4}$ et $\acute{\omega} = 5$

Or $\text{ٰ}\Omega(5) = \frac{15}{2} \Rightarrow \text{ٰ}\Omega(\grave{\omega})\ \text{سر}\ \frac{15}{2}\ \text{Ò}\ \frac{3}{4}|\grave{\omega}\ \text{سر}\ 5|$

D'où $C\ \grave{\omega}\ \text{ٮ}\ [4\,;5]$, on a : $\text{ٰ}\Omega(\grave{\omega})\ \text{سر}\ \frac{15}{2}\ \text{Ò}\ \frac{3}{4}|\grave{\omega}\ \text{سر}\ 5|$

6) Traçons $(C\text{ٰ}\Omega)$ dans le repère $(\acute{\varepsilon}\,;\tilde{\text{ٰ}}\,;\tilde{\text{ٰ}})$ ainsi que $(C\text{ٰ}\Omega^{\text{سر}1})$ la courbe de $\text{ٰ}\Omega^{\text{سر}1}$.



Or] 1 ; 2[Ő] 1,7 ; 2[. D'où si ὼ est élément de] 1 ; 2[alors ̋Ω(ὼ) est aussi élément de] 1 ; 2[

b- Justifions la dérivabilité de ̋Ω sur[0 ; +Ҥ[.

- ὼ est une fonction définie et dérivable sur [0 ; +Ҥ[.
- ̀И$\overline{\text{ὼ}}$ est une fonction définie et dérivable sur [0 ; +Ҥ[.

Par conséquent ̋Ω(ὼ) = 1 + $\frac{1}{\text{̀И}\overline{\text{ὼ}}}$ est une fonction définie et dérivable sur [0 ; +Ҥ[.

Calculons la dérivée de ̋Ω

̋Ω(ὼ) = 1 + $\frac{1}{\text{̀И}\overline{\text{ὼ}}}$ => ̋Ωϰ(ὼ) = سر $\frac{1}{2\text{ὼ̀И}\overline{\text{ὼ}}}$

Montrons que pour tout ὼ ∈[1 ; 2], on a : |̋Ωϰ(ὼ)| شى $\frac{1}{2}$

̋Ωϰ(ὼ) = سر $\frac{1}{2\text{ὼ̀И}\overline{\text{ὼ}}}$. Donnons un encadrement de ̋Ωϰ(ὼ) sur [1 ; 2].

On sait que : 1 شى ὼ شى 2 1 شى ̀И$\overline{\text{ὼ}}$ شى ̀И$\overline{2}$ (ج)

De même : 1 شى ὼ شى 2 2 شى 2ὼ شى 4 (څ)

En effectuant le produit des équations (ج) et (څ), on obtient :

2 شى 2ὼ̀И$\overline{\text{ὼ}}$ شى 4̀И$\overline{2}$. Alors l'inverse de cette nouvelle inégalité donne : $\frac{1}{4\text{̀И}\overline{2}}$ شى 2ὼ̀И$\overline{\text{ὼ}}$ شى $\frac{1}{2}$

En multipliant cette inégalité par le signe(سر), on obtient : سر $\frac{1}{2}$ شى سر $\frac{1}{2\text{ὼ̀И}\overline{\text{ὼ}}}$ شى سر $\frac{1}{4\text{̀И}\overline{2}}$

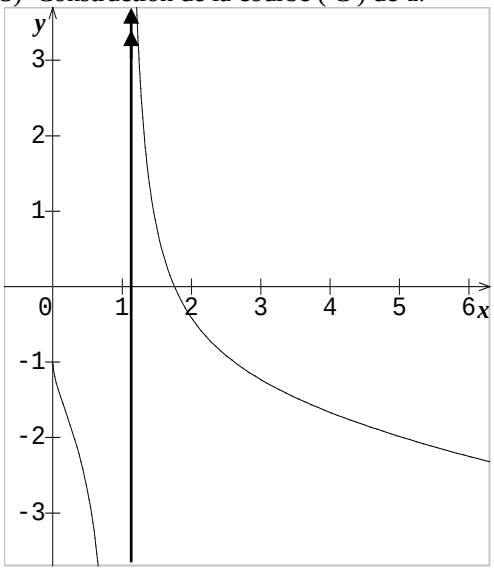
سر $\frac{1}{2}$ شى ̋Ωϰ(ὼ) شى سر $\frac{1}{4\text{̀И}\overline{2}}$ En appliquant la valeur absolue à chaque membre de cette inégalité, on obtient : سر $\frac{1}{4\text{̀И}\overline{2}}$ شى |̋Ωϰ(ὼ)| شى سر $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4\text{̀И}\overline{2}}$ شى |̋Ωϰ(ὼ)| شى $\frac{1}{2}$ => |̋Ωϰ(ὼ)| شى $\frac{1}{2}$

c- En déduisons que pour tout ὼ de [1 ; 2], on a : |̋Ω(ὼ) سر| | شى $\frac{1}{2}$|ὼ سر| |

Puis que |̋Ωϰ(ὼ)| شى $\frac{1}{2}$. Alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

|̋Ω(ὼ) سر ̋Ω(|) | شى $\frac{1}{2}$|ὼ سر| | Or (|) = | . D'où |̋Ω(ὼ) سر| | شى $\frac{1}{2}$|ὼ سر| | .

3) Construction de la courbe (C) de ̋Ω.



49 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

1) a- Démontrons que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est au dessus de sa tangente en tout point.

Soit $x_0 \in [0 ; +\infty[$; l'équation de la tangente en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec

$f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0+1)^2} \Rightarrow y = -\frac{(x - x_0)}{(x_0+1)^2} + \frac{1}{x_0+1} = \frac{2x_0 - x + 1}{(x_0+1)^2}$

Ainsi déterminons le signe de $f(x) - y = 0$

$f(x) - y = \frac{1}{x+1} - \frac{2x_0 - x + 1}{(x_0+1)^2} = \frac{(x_0 - x)^2}{(x+1)(x_0+1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in [0 ; +\infty[$

$\Rightarrow \forall x \in [0 ; +\infty[; f(x) - y \geq 0$

D'où $\forall x \in [0 ; +\infty[$; la courbe (Cf) est au dessus de sa tangente en tout point.

b- En déduisons que $\forall n \in [0 ; +\infty[$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq 1 - n + n^2$ **(1)**

On sait que : $\forall x \in [0 ; +\infty[$; $y = \frac{2x_0 - x + 1}{(x_0+1)^2}$ et $f(x) \geq y$

En posant $x_0 = 0$ et $x = n$, on a : $f(n) \geq y(0) \quad \frac{1}{n+1} \geq \frac{2(0) - n + 1}{(0+1)^2}$

$\frac{1}{n+1} \geq 1 - n + n^2$ **(1)** (Ce qu'il fallait Démontre)

2) Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$; par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et soit α un réel strictement positif.

a- Déterminons la dérivée première et seconde de f sur $[0 ; +\infty[$

$f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ et $f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$

b- Vérifions que : $\forall x \in [0 ; \alpha[$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

On sait que $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f''(x) < 0$. Alors $f'(x)$ est strictement décroissante.

D'où $x \in [0 ; \alpha]$ $\quad 0 \leq x \leq \alpha$. En appliquant $f'(x)$ à cette inégalité, on a :

$f'(\alpha) \leq f'(x) \leq f'(0) \quad \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

c- En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$, démontrons que : $1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq \sqrt{1+\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2}$ **(2)**

On sait que $x \in [0 ; \alpha]$, f est dérivable.

D'autre part d'après la question b), on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur$[0 ; \alpha]$, on a : $\frac{\alpha - 0}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq f(\alpha) - f(0) \leq \frac{\alpha - 0}{2} \quad \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq \sqrt{1+\alpha} - 1 \leq \frac{\alpha}{2}$

En ajoutant 1 à chaque membre de l'inégalité, on a bien :

$1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{1+\alpha}} \leq \sqrt{1+\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2}$ **(2)** (Ce qu'il fallait Démontre)

d- Déduisons des relations **(1)** et **(2)** que : $\forall n \in [0 ; +\infty[$, on a :

$1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} \leq \sqrt{1+\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{2}$

D'après la relation **(1) ,** on a : $\frac{1}{|+1}$ شي 1 سر| 1 شي (| + 1)(1 سر|) 1 شي 1 سر| ^{2}

En posant | = $\frac{ٱ}{2}$, on a : 1 شي 1 سر $\frac{ٱ}{2}$ ^{2}

En ajoutant $\frac{ٱ}{2}$ à chaque membre de cette inégalité, on a : 1 + $\frac{ٱ}{2}$ شي 1 سر $\frac{ٱ}{2}$ ^{2} + $\frac{ٱ}{2}$

1 + $\frac{ٱ}{2}$ شي 1 سر $\frac{ٱ^2}{4}$ + $\frac{ٱ}{2}$. Or d'après la relation **(2)** , on a : 1 + $\frac{ٱ}{2Ù1 + ٱ}$ شى Ù1 + ٱ شى 1 + $\frac{ٱ}{2}$ =>

1 + $\frac{ٱ}{2}$ سر $\frac{ٱ^2}{4}$ شى Ù1 + ٱ شى 1 + $\frac{ٱ}{2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

e- Etablissons alors l'inégalité suivante : 1,0475 شى Ù1,1 شى 1,05

D'après ad) , on a 1 + $\frac{ٱ}{2}$