ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

I- L'Ensemble de définitions de quelques fonctions usuelles :

- Une fonction de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

  $D_f =]-\infty; +\infty[$

- Une fonction de la forme $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ ou $f(x)=h(x)+\frac{p(x)}{g(x)}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } g(x) \neq 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=\sqrt{p(x)}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } p(x) \geq 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=g(x)+\sqrt{p(x)}$ ou $f(x)=g(x)-\sqrt{p(x)}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } p(x) \geq 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=\sqrt{\frac{p(x)}{g(x)}}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{p(x)}{g(x)} \geq 0 \,;\, g(x) \neq 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=\frac{\sqrt{p(x)}}{g(x)}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } p(x) \geq 0 \,;\, g(x) \neq 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=\frac{p(x)}{\sqrt{g(x)}}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } g(x) > 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=\frac{p(x)}{\sqrt{|g(x)|}}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } g(x) \neq 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=\frac{\sqrt{|p(x)|}}{g(x)}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } p(x) \neq 0 \,;\, g(x) \neq 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=\sqrt{|p(x)|}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } p(x) \neq 0\}$

- Une fonction de la forme $f(x)=\sqrt{p(x)}+\frac{h(x)}{g(x)}$

  $D_f = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } p(x) \geq 0; g(x) \neq 0\}$

Exemples : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 3x^2 - 7x + 2$; $f_2(x) = \frac{3x^2-7x+3}{x-1}$; $f_3(x) = \frac{3}{1-x^2}$; $f_4(x) = \frac{3x-1}{7x^2-6x-1}$

$f_5(x) = \sqrt{1-x^2}$; $f_6(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$; $f_7(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; $f_8(x) = \frac{3x-2}{|x|-1}$; $f_9(x) = \frac{x-1}{|x|+1}$

$f_{10}(x) = \frac{4x^2-5}{|x^2+1|-1}$; $f_{11}(x) = \sqrt{|x^2+2x-3|}$

II- Calcul de limites :

1°) Limites obtenues directement par transformation de l'expression :

a) Fonctions polynômes :

Théorème : A l'infini toute fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degrés.

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3 - 5x^2 + 7x + 1 = \lim_{x\to+\infty} 4(+\infty)^3 = +\infty$$

VI- Équation de la tangente au point d'abscisse x_0 :

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0, a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Si le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$ alors la courbe de f admet au point x_0 une tangente horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $f_g{}'(x_0) \neq f_d{}'(x_0)$ alors f n'est pas dérivable en x_0 ; mais la courbe de f admet au point x_0 deux (2) demi-tangentes.

  Le point $A(x_0\,; f(x_0))$ est un point anguleux.

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

Alors la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

VII- Bijection :

1°) Théorème de la bijection :

- Si f est continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I=$[a, b]$, alors elle réalise une bijection sur I=$[a, b]$ vers f(I).
- De plus si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[a, b]$ ($\exists!\alpha \in [a, b]$) tel que $f(\alpha) = 0$.
- La fonction f et sa bijection réciproque f^{-1}ont le même sens de variation.

2°) Le nombre dérivée de la bijection réciproque :

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x_0)]} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

3°) Représentation graphique de la bijection réciproque :

La courbe de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

VIII- Position relative de deux courbes :

Soit f et g deux fonctions numériques, et K un sous-ensemble de $D_f \cap D_g$.

Pour étudier les positions relatives des deux courbes de f et g sur K, on calcule f(x)−g(x) ; puis on étudie son signe :

- $\forall x \in K$, si $f(x) - g(x) < 0$ alors (C_f) est en dessous de (C_g)
- $\forall x \in K$, si $f(x) - g(x) > 0$ alors (C_f) est en dessus de (C_g)
- $\forall x = x_0 \in K$, si $f(x) - g(x) = 0$ alors (C_f) et (C_g) se coupent au point $A(x_0, f(x_0))$

IX- Point d'inflexion et Coordonnées du point d'intersection de la courbe avec les axes (ox) ou (oy) :

1°) Point d'inflexion :

On dit que la fonction f admet un point d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde s'annule c'est-à-dire on pose $f''(x) = 0$.

2°) Coordonnées du point d'intersection de la courbe avec les axes :

a) Coordonnée du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox) :

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$ (parce que y = 0), le coordonné du point d'intersection sera un point $A\binom{x_0}{0}$.

b) Coordonnée du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnés (oy) :

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnés, on calcule $f(0) = y$ (parce que x = 0), le coordonné du point d'intersection sera un point $B\binom{0}{y}$.

c) Coordonnée du point d'intersection de deux courbes :

Soit f et g deux fonctions numériques, (C_f) et (C_g) leur courbe représentative. Pour trouver les coordonnées de leur point d'intersection on résout l'équation $f(x) = g(x)$ (C_f) et (C_g) se coupent au point $A\binom{x_0}{f(x_0)}$.

X- Axe de symétrie et Centre de symétrie :

1°) Axe de symétrie :

Dans un repère orthonormé, la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe de f si et seulement si $f(2a - x) = f(x)$

2°) Centre de symétrie :

Dans un repère orthonormé, le point $A(a, b)$ est un centre de symétrie pour la courbe de f si et seulement si $f(2a - x) + f(x) = 2b$

XI- Parité et Périodicité d'une fonction :

1°) Fonction paire : Une fonction f est paire si et seulement si $f(-x) = f(x)$.

La courbe d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie.

2°) Fonction impaire : Une fonction f est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$.

La courbe d'une fonction impaire admet l'origine O du repère (O, I, J) comme centre de symétrie.

3°) Périodicité : Une fonction f est de période T si et seulement si $f(x + T) = f(x)$.

XII- Inégalité des accroissements finis :

Soit k est un réel tel que $\forall x \in I = [a, b]$, $|f'(x)| \leq k$

$$|f(b) - f(a)| = k|b - a|$$

XIII- Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique nous adopterons le plan suivant :

- Déterminer l'ensemble de définition ;
- Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
- Calculer la fonction dérivée et étudier son signe ; indiquer le sens de variation ;
- Consigner dans un tableau de variations les résultats précédents.
- Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction :
- Points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées
- Points d'inflexion etc…