

# **CALCUL DE LIMITES ET CONTINUITE**

# CALCUL DE LIMITES

## ◆ Formes indéterminées :

| $\infty - \infty$                                                                                                                                                                                                | $0 \times \infty$                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = u(x) + v(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = -\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}$           | $f(x) = u(x)v(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}$  |
| $\frac{\infty}{\infty}$                                                                                                                                                                                          | $\frac{0}{0}$                                                                                                                                                                                    |
| $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}$ | $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}$ |

◆ *Limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle :*

- **Règle 1 :** en  $\pm\infty$ , la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré
- **Règle 2 :** en  $\pm\infty$ , la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur

◆ *Limite de la composée de deux fonctions :*

$$\left. \begin{array}{l} \circ f(x) = v \circ u(x) \\ \circ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = b \\ \circ \lim_{x \rightarrow b} v(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

♦ *Limite des fonctions trigonométriques :*

| NB : En $\pm\infty$ , les fonctions cosinus et sinus n'admettent pas de limite |                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$                                  | $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$             |
| $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$                                  | $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ |

♦ *Théorèmes de comparaison :*

- **Théorème 1 :** au voisinage de  $+\infty$

Si  $f(x) \geq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Si  $f(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- **Théorème 2 :** au voisinage de  $+\infty$ ,

Si  $|f(x) - \ell| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

- **Théorème 3 :** Théorème des gendarmes : au voisinage de  $+\infty$ ,

Si  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \ell$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

## ◆ *Asymptotes et Branches infinies :*

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ , alors,  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ , alors,  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = b$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ , alors,  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ , alors,  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ , alors,  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ , alors,  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite  $(\Delta): y = ax$
- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$  et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$ , alors,  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$

◆ *Les éléments de symétrie d'une fonction :*

- $f$  est paire si et seulement si  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(-x) = f(x)$
- $f$  est impaire si et seulement si  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$
- $(\Delta): x = a$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$  si et seulement si  $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$  et  $f(2a - x) = f(x)$
- $I(a, b)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  si et seulement si  $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$  et  $f(2a - x) + f(x) = 2b$

# CONTINUE

## ♦ *Etude de la continuité en un point :*

$f$  est continue en  $x_0$ ,

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ou si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

## ♦ *Théorème de continuité :*

- Toute fonction dérivable en  $x_0$  est continue en  $x_0$
  - Toute fonction dérivable sur  $I$  est continue sur  $I$
- NB : La réciproque est fausse, une fonction continue n'est pas toujours dérivable

## ♦ *Exemples de fonctions continues :*

- Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur  $\mathbb{R}$
- La fonction racine carrées est continue sur  $[0 ; +\infty[$
- La somme ou le produit de fonctions continues est continue

◆ *Bijection continue :*

- $f$  continue sur  $I$
  - $f$  strictement monotone sur  $I$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J$$

◆ *Solution de l'équation  $f(x) = k$*

- $f$  continue sur  $I$
  - $f$  strictement monotone sur  $I$
  - $k \in J = f(I)$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \\ \circ k \in J = f(I) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = k \text{ admet une unique solution } \alpha \in I$$

◆ *Théorème des valeurs intermédiaires :*

*Résolution de l'équation  $f(x) = 0$  :*

- $f$  est continue sur  $[a, b]$
  - $f$  strictement monotone sur  $[a, b]$
  - $f(a) \times f(b) < 0$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } [a, b] \\ \circ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in ]a, b[$$