

LE RESOUTOUT

Question1 :

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

Ce qu'il faut savoir

- Ecrire les conditions d'existence de $f(x)$
- Résoudre chacune des conditions
- Conclure

Soient P et Q deux fonctions polynômes et soit u une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- $f(x) = P(x) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ n'existe que si $Q(x) \neq 0$
- $f(x) = \sqrt{P(x)}$ n'existe que si $P(x) \geq 0$
- $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$ n'existe que si $P(x) \geq 0$ et $Q(x) \neq 0$
- $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ n'existe que si $Q(x) > 0$
- $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ n'existe que si $Q(x) \neq 0$ et $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$
- $f(x) = \ln u(x)$ n'existe que si $x \in D_u$ et $u(x) > 0$
- $f(x) = \ln|u(x)|$ n'existe que si $x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$
- $f(x) = e^{u(x)}$ n'existe que si $x \in D_u \Leftrightarrow D_f = D_u$

Question 2 :

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en x_0 et interpréter graphiquement les résultats obtenus

Continuité de f en x_0

- Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- Calculer $f(x_0)$ si ce n'est pas donné
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ alors f est continue en x_0

Dérivabilité de f en x_0

- Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ alors f n'est pas dérivable en x_0
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0

Interprétation graphique des résultats obtenus

Ce qu'il faut savoir

→ Si f est dérivable en x_0 alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$ et d'équation $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

→ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$ deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs ℓ_1 et ℓ_2 et d'équations

$$(T_1): y = \ell_1(x - x_0) + f(x_0) \text{ et } (T_2): y = \ell_2(x - x_0) + f(x_0)$$

→ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ et/ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

→ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ et/ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers bas

Question 3 :

Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les asymptotes éventuelles

- Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (si x_0 est une borne de D_f)
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (si $-\infty$ et/ou $+\infty$ est une borne de D_f)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ **Asymptote verticale**

Si on a

$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à (C_f)

→ **Asymptote horizontale**

Si on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à (C_f)

Question 4 :

Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C_f) en $\pm\infty$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f)

Question 5 :

Etudier les positions relatives de la courbe (C_f) et d'une droite (Δ) d'équation $y = ax + b$

- Etudier le signe de $f(x) - y$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $\forall x \in I, f(x) - y > 0$ alors (C_f) est au-dessus de (Δ) sur I

→ Si $\forall x \in I, f(x) - y < 0$ alors (C_f) est en-dessous de (Δ) sur I

Question 6 :

Montrer que deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont asymptotes en $\pm\infty$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont asymptotes en $\pm\infty$

Question 7 :

Etudier les positions relatives de deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

- Etudier le signe de $f(x) - g(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $\forall x \in I, f(x) - g(x) > 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$ sur I

→ Si $\forall x \in I, f(x) - g(x) < 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est en-dessous de $(\mathcal{C}_g)$ sur I

Question 8 : étudier les branches infinies de f

- Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et au cas où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) ;
- Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées

→ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses

→ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$

→ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

Question 9 : Montrer que le point $\Omega(a ; b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

- Calculer $f(2a - x) + f(x)$ (sous réserve que $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $f(2a - x) + f(x) = 2b$ alors $\Omega(a ; b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

Question 10 : Montrer que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

- Calculer $f(2a - x)$ (sous réserve que $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $f(2a - x) = f(x)$ alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

Question 11 : Etudier le sens de variation de f

- Calculer $f'(x)$
- Etudier le signe de $f'(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I
- Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I
- Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

Question 12 : Etudier les variations de f

- Calculer $f'(x)$; étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f
- Dresser le tableau de variations de f

Ce qu'il faut savoir

- Il faut vérifier l'harmonie entre les différents résultats portés dans le tableau de variations

Question 13 :

Montrer que f définie une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à préciser

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissante sur I (ou strictement décroissante sur I)
- Conclure alors que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$

Ce qu'il faut savoir

→ l'intervalle $J = f(I)$ doit être calculé ou doit être lu dans le tableau de variation et que J est de la même nature que I

Question 14 :

Montrer que f admet une bijection réciproque dont on donnera l'ensemble de définition

- Montrer d'abord que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Conclure alors que, f admet une bijection réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ sur I

Question 15 : Donner les variations de la réciproque f^{-1} de f

- Dire que f^{-1} a sur J le même sens de variation que f sur I
- Dresser le tableau de variation de f^{-1} à partir de celui de f

Question 16 :

Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J (ou donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J)

- Résoudre l'équation $f(x) = y$
- On trouve $x = f^{-1}(y)$
- Conclure en remplaçant le y dans $f^{-1}(y)$ par x

Exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto f(x) = 2x - 1$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} = f^{-1}(y)$$

Conclusion : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

Question 17 :

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur un intervalle I (ou Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$) et que $\alpha \in]a ; b[$

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissante sur I (ou strictement décroissante sur I)
- En déduire que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Vérifier que $0 \in J = f(I)$
- Conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$

Pour montrer que $\alpha \in]a ; b[$

- Calculer $f(a)$ et $f(b)$ puis $f(a) \times f(b)$
- Conclure :

Ce qu'il faut savoir

→ Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors $\alpha \in]a ; b[$

Question 18 :

Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α sur un intervalle I (ou $]a ; b[$) et que $\alpha \in]a ; b[$

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissante sur I (ou strictement décroissante sur I)
- En déduire que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Vérifier que $k \in J = f(I)$
- Conclure que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $\alpha \in I$

Pour montrer que $\alpha \in]a ; b[$

- Calculer $f(]a ; b[)$ (intervalle ouvert de bornes $f(a)$ et $f(b)$)
- Conclure :

Ce qu'il faut savoir

→ Si $k \in f(]a ; b[)$ alors $\alpha \in]a ; b[$

Question 19 : Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse x_0

- Ecrire l'équation sous la forme $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Calculer $f'(x_0)$ et $f(x_0)$
- Conclure

Question 20 :

Déterminer le point A d'abscisse a de (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est parallèle à une droite d'équation $y = mx + p$

- Résoudre $f'(a) = m$ (puisque les deux coefficients directeurs sont égaux)
- Calculer $f(a)$
- Conclure que $A(a ; f(a))$

Question 21 :

Déterminer le point A d'abscisse a de (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est perpendiculaire à une droite d'équation $y = mx + p$

- Résoudre $f'(a) = -\frac{1}{m}$ (puisque le produit des coefficients directeurs est -1)
- Calculer $f(a)$
- Conclure $A(a ; f(a))$

Question 22 :

Démontrer qu'au point d'abscisse a la tangente (T) à (C_f) et la tangente (T') à (C_g) sont perpendiculaires

- Calculer $f'(a) \times g'(a)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

Si $f'(a) \times g'(a) = -1$, alors (T) et (T') sont perpendiculaires

Question 23 :

Déterminer le ou les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Déterminer le ou les points où (C_f) et (C_g) se coupent (ou se rencontrent)

- Résoudre $f(x) = g(x)$
- Calculer $f(x_1)$; $f(x_2)$; ... (si x_1 ; x_2 ; ... sont les solutions trouvées)
- Conclure $M_1(x_1 ; f(x_1))$; $M_2(x_2 ; f(x_2))$; ...

Question 24 :

Déterminer le ou les points d'intersection de (C_f) et de la droite $(D): y = mx + p$

Déterminer le ou les points où (C_f) et (D) se coupent (ou se rencontrent)

- Résoudre $f(x) = y$
- Calculer $f(x_1)$; $f(x_2)$; ... (si x_1 ; x_2 ; ... sont les solutions trouvées)
- Conclure
 $M_1(x_1 ; f(x_1))$; $M_2(x_2 ; f(x_2))$; ...

Question 25 :

Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec les axes du repère

Avec l'axe des abscisses

- Résoudre $f(x) = 0$ (puisque l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$)

- Conclure

$M_1(x_1 ; 0) ; M_2(x_2 ; 0) ; \dots$ (si $x_1 ; x_2 ; \dots$ sont les solutions trouvées)

Avec l'axe des ordonnées

- Calculer $f(0)$ (puisque l'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$)

- Conclure

$M_0(0 ; f(0))$

Question 26 : Tracer la courbe (C_f)

- Construire le repère en respectant l'unité graphique
- Tracer les droites particulières (asymptotes ; tangentes ; ...)
- Placer les points particuliers (extrémums relatifs ; intersection avec les axes ; ...)
- Tracer la courbe en conformité avec le tableau de variations

Question 27 : Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ à partir de la courbe (C_f)

- Ecrire que $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
- Tracer $(C_{f^{-1}})$ à partir de (C_f)

Question 28 : Soit $g(x) = -f(x)$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire : (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 29 : Soit $g(x) = |f(x)|$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire :
Si $f(x) \geq 0$ alors $(C_g) = (C_f)$
Si $f(x) \leq 0$ alors (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 30 : Soit $g(x) = f(-x)$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire : (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 31 : Soit $g(x) = f(|x|)$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire :
Si $x \geq 0$ alors $(C_g) = (C_f)$
Si $x \leq 0$ alors (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 32 : Soit $g(x) = f(x - a) + b$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire : (C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 33 :

Calculer l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- Cas où (C_f) est au dessus de l'axe des abscisses sur $[a ; b]$ (c.-à-d $f \geq 0$ sur $[a ; b]$)

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \times ua$$

- Cas où (C_f) est en dessous de l'axe des abscisses sur $[a ; b]$ (c.-à-d $f \leq 0$ sur $[a ; b]$)

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx \times ua$$

- Pour exprimer l'aire en cm^2 , $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

Question 34 :

Calculer l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite $(\Delta): y = mx + p$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- Cas où (C_f) est au-dessus de (Δ) sur $[a ; b]$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ mx + p \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y] dx \times ua$$

- Cas où (C_f) est en-dessous de (Δ) sur $[a ; b]$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq mx + p \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)] dx \times ua$$

Question 35 :

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- Ecrire :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \times uv$$

- Chercher $f^2(x)$ avant de passer au calcul de l'intégrale
- Pour exprimer le volume en cm^3 , $uv = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Question 36 :

Montrer que F est une primitive de f sur un intervalle I

- Calculer $F'(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $F'(x) = f(x)$ alors F est une primitive de f

Question 37 :

Déterminer les réels a et b (ou les réels a , b et c) pour que F soit une primitive de f sur un intervalle I

- Calculer $F'(x)$ en fonction de a et b (ou en fonction de a , b et c)
- Ecrire l'égalité $F'(x) = f(x)$ et faire une identification des coefficients

Question 38 :

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; que représente F pour f ?

Il suffit d'écrire que F est la primitive de f qui s'annule-en a

Question 39 :

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée

Il suffit d'écrire que F étant la primitive de f qui s'annule-en a , alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$

Question 40 :

Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$

(sous réserve que $a < b$ et que $\forall x \in [a ; b], f(x) \geq 0$)

Ecrire simplement que $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire en unité d'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$